

Topologi: Pendekatan Berbasis Inkuiri

Edisi Lengkap Bahasa Indonesia — Dua Puluh Bab, Pendamping
Belajar Mandiri, dan Pelengkap C90

Topologi: Pendekatan Berbasis Inkuiri

Edisi Lengkap Bahasa Indonesia — Dua Puluh Bab, Pendamping
Belajar Mandiri, dan Pelengkap C90

Steven Schlicker
Grand Valley State University

Catatan edisi Bahasa Indonesia

Pembaca lengkap ini memuat seluruh dua puluh bab edisi Bahasa Indonesia *Topology: An Inquiry-Based Approach*. Sumber resmi dibekukan pada commit `0c2d8f614ef87aa00de373f3418146c2f1d13bb9`. Terjemahan, deskripsi aksesibilitas, perbaikan sumber yang dicatat, laboratorium epsilon-delta orisinal, pendamping belajar mandiri, dan pelengkap C90 merupakan perubahan pada edisi ini; tidak ada dukungan resmi dari penulis atau Grand Valley State University yang dinyatakan ataupun tersirat.

Karya sumber diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0 karena metadata sumber tidak seragam tentang versi lisensi. Materi pendamping dan pelengkap orisinal merupakan komponen CC BY 4.0 yang terpisah. Identitas hak itu dipertahankan per komponen dan tidak diratakan menjadi satu lisensi. Kerjakan kegiatan dan latihan pada bab utama sebelum membuka petunjuk atau solusi pendamping.

Provenans produksi berbantuan model untuk edisi ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi tersebut tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Daftar Isi

Catatan edisi Bahasa Indonesia

iv

I Himpunan, Fungsi, Ruang Metrik, Keterbukaan, Ketertutupan, Barisan, Subruang, dan Hasil Kali

1 Himpunan	2
2 Fungsi	13
3 Ruang Metrik	27
4 Penerapan Ruang Metrik	40
5 Batas Bawah Terbesar	43
6 Fungsi Kontinu di Ruang Metrik	50
7 Bola Terbuka dan Lingkungan pada Ruang Metrik	59
8 Himpunan Terbuka dalam Ruang Metrik	67
9 Barisan di Ruang Metrik	76
10 Himpunan Tertutup di Ruang Metrik	85
11 Subruang dan Hasil Kali Ruang Metrik	97

II Ruang Topologi, Kekontinuan, Homeomorfisme, Subruang, Kuosien, Kekompakan, Keterhubungan, Lintasan, dan Hasil Kali

12 Ruang Topologi	105
13 Himpunan Tertutup dalam Ruang Topologi	118
14 Kekontinuan dan Homeomorfisme	131
15 Subruang	141
16 Ruang Kuosien	146
17 Ruang Kompak	159
18 Ruang Terhubung	174
19 Ruang Terhubung Lintasan	189
20 Hasil Kali Ruang Topologi	201

Lampiran

A Pendamping Mandiri Bab 1: Himpunan	215
B Pendamping Mandiri Bab 2: Fungsi	222
C Pendamping Mandiri Bab 3: Ruang Metrik	233
D Pendamping Mandiri Bab 4: Penerapan Ruang Metrik	242
E Pendamping Mandiri Bab 5: Batas Bawah Terbesar	247
F Pendamping Mandiri Bab 6: Fungsi Kontinu pada Ruang Metrik	266
G Pendamping Mandiri Bab 7: Bola Terbuka dan Lingkungan	282

H Pendamping Mandiri Bab 8: Himpunan Terbuka dalam Ruang Metrik	297
I Pendamping Mandiri Bab 9: Barisan dalam Ruang Metrik	319
J Pendamping Mandiri Bab 10: Himpunan Tertutup dalam Ruang Metrik	338
K Pendamping Mandiri Bab 11: Subruang dan Hasil Kali Ruang Metrik	362
L Pendamping Mandiri Bab 12: Ruang Topologi	380
M Panduan Belajar Mandiri Bab 13: Himpunan Tertutup dalam Ruang Topologi	416
N Panduan Belajar Mandiri Bab 14: Kekontinuan dan Homeomorfisme	442
O Panduan Belajar Mandiri Bab 15: Subruang	471
P Panduan Belajar Mandiri Bab 16: Ruang Kuosien	487
Q Panduan Belajar Mandiri Bab 17: Ruang Kompak	513
R Panduan Belajar Mandiri Bab 18: Ruang Topologi Terhubung	544
S Panduan Belajar Mandiri Bab 19: Ruang Terhubung Lintasan	577
T Pendamping Belajar Mandiri Bab 20: Hasil Kali Ruang Topologi	588
U Pelengkap C90: Topologi Himpunan-Titik untuk Belajar Mandiri	602
 Bagian Akhir	
Indeks	637

Bagian I

Himpunan, Fungsi, Ruang Metrik,
Keterbukaan, Ketertutupan, Barisan,
Subruang, dan Hasil Kali

Bab 1

Himpunan

Pertanyaan Pemandu

- Apa itu himpunan?
- Apa yang dimaksud dengan himpunan bagian dari suatu himpunan?
- Apa yang dimaksud dengan gabungan dua himpunan? Bagaimana kita mendefinisikan gabungan suatu keluarga himpunan sembarang?
- Apa yang dimaksud dengan irisan dua himpunan? Bagaimana kita mendefinisikan irisan suatu keluarga himpunan sembarang?
- Apa yang dimaksud dengan komplemen suatu himpunan?
- Apa yang dimaksud dengan hasil kali Kartesius himpunan?

Pendahuluan

Pada tingkat paling mendasar, topologi membahas himpunan dan cara kita dapat mengubah bentuk suatu himpunan menjadi himpunan lain. Jadi, untuk memulai kajian kita tentang topologi, kita mulai dengan himpunan. Sebagian besar materi ini semestinya sudah tidak asing, tetapi beberapa bagian mungkin baru. Hal pertama yang perlu kita tetapkan adalah definisi “himpunan” yang setepat mungkin.

Aktivitas Persiapan 1.1 Andaikan kita mencoba mendefinisikan himpunan sebagai suatu kumpulan anggota. Jadi, menurut definisi tersebut, anggota adalah objek-objek yang terdapat di dalam himpunan. Kita menggunakan simbol $\in$ untuk menyatakan bahwa suatu objek merupakan anggota suatu himpunan. Dengan demikian, $\notin$ berarti bahwa suatu objek bukan anggota himpunan tersebut — jika x merupakan anggota suatu himpunan S , kita menulis $x \in S$, sedangkan jika x bukan anggota himpunan S , kita menulis $x \notin S$. Kita menuliskan himpunan dengan kurung kurawal. Sebagai contoh, himpunan $\{a, b, c\}$ adalah himpunan yang anggotanya berupa simbol a , b , dan c . Dalam notasi himpunan, kita juga dapat mencantumkan syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya. Sebagai contoh, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ adalah himpunan bilangan real positif. Biasanya kita menggunakan huruf kapital untuk menyatakan himpunan. Beberapa contoh himpunan yang sudah dikenal adalah $\mathbb{R}$, himpunan bilangan real; $\mathbb{Q}$, himpunan bilangan rasional; dan $\mathbb{Z}$, himpunan bilangan bulat. Suatu himpunan juga dapat memiliki himpunan sebagai anggotanya. Sebagai contoh, himpunan kuasa suatu himpunan S adalah himpunan semua himpunan bagian dari S . Jadi, himpunan kuasa dari $S = \{1, 2\}$ adalah himpunan $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. (Kita akan mendefinisikan himpunan bagian dan himpunan kosong nanti dalam aktivitas ini).

- (a) Perhatikan “himpunan” S berikut, yang merupakan suatu kumpulan objek:

$$S = \{A \text{ adalah himpunan} \mid A \notin A\}.$$

Dengan kata lain, S adalah kumpulan himpunan yang tidak memuat dirinya sendiri sebagai anggota. Untuk setiap objek x , berlaku salah satu dari $x \in S$ atau $x \notin S$.

- (i) Apakah S merupakan anggota S ? Jelaskan.
 - (ii) Apakah berlaku $S \notin S$? Jelaskan.
 - (iii) Berdasarkan jawaban Anda pada bagian (a) dan (b), jelaskan mengapa gagasan kita saat ini, bahwa himpunan adalah kumpulan anggota, tidak memadai.
- (b) Anggaplah kita telah memiliki definisi himpunan yang dapat digunakan. Pada bagian aktivitas ini, kita mendefinisikan himpunan bagian dari suatu himpunan. Notasi yang akan kita gunakan adalah $A \subset S$ jika A merupakan himpunan bagian dari S yang tidak sama dengan S , dan $A \subseteq S$ jika A merupakan himpunan bagian dari S yang mungkin sama dengan seluruh himpunan S . Kita juga akan mengatakan bahwa A **termuat** dalam S jika A merupakan himpunan bagian dari S , dan menyebut relasi $A \subset S$ (atau $A \subseteq S$) sebagai suatu **inklusi**.
- (i) Bagaimana sebaiknya kita mendefinisikan himpunan bagian dari suatu himpunan? Berikan satu contoh konkret suatu himpunan dan dua contoh himpunan bagian dari himpunan tersebut.
 - (ii) Jika A adalah suatu himpunan, apakah A merupakan himpunan bagian dari A ? Jelaskan.
 - (iii) Apa yang dimaksud dengan himpunan kosong $\emptyset$? Jika A adalah suatu himpunan, apakah $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari A ? Jelaskan.

Gagasan Dasar Topologi

Jika Anda menyukai geometri, Anda mungkin juga akan menyukai topologi. Geometri mempelajari objek beserta atribut tertentu (misalnya bentuk dan ukuran), sedangkan topologi lebih umum daripada geometri. Dalam topologi, yang menjadi perhatian bukanlah atribut (bentuk dan ukuran) suatu objek, melainkan ciri-ciri yang tidak berubah ketika objek tersebut kita ubah bentuknya dengan berbagai cara (asalkan objek itu tidak dirobek atau dilubangi). Ada banyak teorema yang sangat menarik dalam topologi — sebagai contoh, Teorema Bola Berambut menyatakan bahwa jika seluruh permukaan sebuah bola ditumbuhi rambut (bayangkan tribble dari Star Trek — jika acuan itu tidak terlalu lawas), mustahil menyisir rambut-rambut tersebut secara kontinu sehingga semuanya rebah rata. Pasti ada rambut yang mencuat tegak!

Kegiatan 1.2

- (a) Ambillah kawat pembersih pipa, karet gelang, atau seutas tali, lalu bentuklah menjadi persegi. Anda boleh mengubah persegi tersebut dengan menggeser bagian-bagiannya tanpa memutusnya atau mengangkatnya dari permukaan tempatnya berada. Manakah di antara bentuk-bentuk berikut yang dapat diperoleh dengan mengubah persegi tersebut? Jelaskan.
 - (i) sebuah lingkaran
 - (ii) huruf S
 - (iii) sebuah bintang bersudut lima ★
 - (iv) huruf D
- (b) Sekarang ambillah plastisin (jika tidak memilikinya, gunakan saja imajinasi Anda). Gunakan plastisin tersebut (atau imajinasi Anda) untuk menentukan bentuk-bentuk di bawah ini yang dapat diubah menjadi bentuk lainnya tanpa dirobek atau dilubangi.
 - (i) sebuah persegi padat

- (ii) sebuah donat
- (iii) sebuah mangkuk
- (iv) sebuah cangkir kopi bergagang

Gagasan untuk mengubah satu himpunan menjadi himpunan lain seperti yang kita kaji dalam [Kegiatan 1.2](#) secara formal dilakukan dengan fungsi. Seiring kita mendalami pokok bahasan ini, kita akan memerlukan definisi fungsi dan himpunan yang lebih ketat. Kita mulai dengan himpunan dan membahas fungsi dalam [Bab 2](#).

Interval

Kita akan mulai dengan salah satu jenis himpunan paling dasar yang akan kita jumpai — interval. Interval terbuka akan berperan penting karena membentuk suatu basis bagi topologi standar pada $\mathbb{R}$. Kita mungkin sudah mengenal interval dari aljabar dan kalkulus, misalnya himpunan seperti $(0, 1)$ dan $[2, 3)$. Agar benar-benar memahami interval, kita memerlukan definisi yang ketat.

Definisi 1.1 Suatu himpunan bagian I dari $\mathbb{R}$ disebut **interval** jika untuk setiap a, b , dan c dalam $\mathbb{R}$ (dalam notasi interval tak terbatas yang diperkenalkan di bawah, a atau b juga dapat diganti secara formal dengan $\pm\infty$) yang memenuhi $a < c < b$, apabila a dan b berada dalam I , maka c juga berada dalam I .

Dengan definisi ini, himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $0 < x < 1$ merupakan interval yang kita nyatakan dengan $(0, 1)$ (penting untuk memperhatikan konteks — notasi $(0, 1)$ juga kita gunakan untuk menyatakan pasangan terurut). Notasi umum yang kita gunakan untuk interval adalah sebagai berikut:

- $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ (a atau b dapat berupa $\pm\infty$)
- $[a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t < b\}$ (b dapat berupa $\pm\infty$)
- $(a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t \leq b\}$ (a dapat berupa $\pm\infty$)
- $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$.

Dalam notasi ini, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Interval berbentuk (a, b) disebut interval **terbuka**, interval berbentuk $[a, b]$ disebut interval **tertutup**, sedangkan interval berbentuk $[a, b)$ atau $(a, b]$ disebut interval **setengah terbuka** (atau **setengah tertutup**). Alasan penggunaan istilah ini akan menjadi lebih jelas ketika nanti kita memperkenalkan himpunan terbuka dan tertutup.

Perhatikan bahwa tidak ada bagian dalam definisi yang mengharuskan $a < b$ pada notasi interval. Hal ini berarti bahwa $(1, 1)$ merupakan interval. Karena tidak ada bilangan real yang sekaligus lebih besar daripada 1 dan lebih kecil daripada 1, $\emptyset = (1, 1)$ merupakan interval. Kita juga dapat memiliki interval berbentuk $[a, a]$, dengan a sebarang bilangan real. Artinya, $\{a\} = [a, a]$, dan setiap himpunan yang hanya terdiri atas satu titik merupakan interval. Interval $\emptyset$ dan $[a, a]$ untuk sebarang bilangan real a disebut interval **degenerat**.

Ada satu catatan terakhir mengenai interval. Sebagian orang mensyaratkan bahwa a harus lebih kecil daripada b dalam definisi interval, sehingga interval degenerat tidak ada. Hal ini merupakan persoalan konvensi yang tidak akan kita perdebatkan. Dalam hampir seluruh pembahasan kita, kita hanya akan mempertimbangkan interval nondegenerat, sehingga persoalan ini tidak akan menjadi masalah.

Gabungan, Irisan, dan Komplemen Himpunan

Dalam matematika, kumpulan titik yang membentuk seutas tali atau segumpal plastisin seperti dalam [Kegiatan 1.2](#) direpresentasikan sebagai suatu himpunan. Topologi kemudian mempelajari himpunan-himpunan tersebut serta sifat-sifat yang tidak berubah ketika suatu transformasi diterapkan padanya.

Untuk mempelajari topologi, kita memerlukan pemahaman yang kuat tentang himpunan dan berbagai operasi pada himpunan.

Apa yang kita jumpai dalam [Aktivitas Persiapan 1.1](#) disebut **paradoks**. Upaya awal kita untuk mendefinisikan himpunan menghasilkan keadaan yang mustahil, karena baik $S \in S$ maupun $S \notin S$ menimbulkan kontradiksi. Paradoks ini disebut **paradoks Russell**, mengambil nama Bertrand Russell, meskipun tampaknya paradoks tersebut telah diketahui sebelum Russell. Pelajaran yang dapat kita ambil adalah bahwa kita harus berhati-hati ketika membuat definisi. Himpunan mungkin tampak sebagai objek yang sederhana, dan dalam pengalaman kita biasanya memang demikian, tetapi mendefinisikan himpunan secara formal dapat menimbulkan masalah. Oleh karena itu, kita tidak akan memberikan definisi formal, melainkan menganggap himpunan sebagai kumpulan objek yang tidak menimbulkan paradoks. Objek-objek tersebut disebut anggota himpunan. (Dalam teori himpunan aksiomatik, himpunan dipandang sebagai konsep primitif yang tidak didefinisikan — sebagaimana titik tidak didefinisikan dalam geometri Euklides.)

Agar dapat bekerja dengan himpunan secara efektif, kita perlu memahami apa artinya dua himpunan sama.

Kegiatan 1.3

- Apa yang dimaksud dengan dua himpunan yang sama? Jika A dan B adalah himpunan, bagaimana kita membuktikan bahwa $A = B$? (Pertanyaan ini memerlukan pembahasan, berbeda dengan pertanyaan yang hanya meminta perhitungan atau contoh. Aktivitas di sepanjang buku ini akan memuat kedua jenis pertanyaan tersebut.)
- Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 1\}$. Apakah $A = B$? Jika ya, buktikan jawaban Anda. Jika tidak, buktikan setiap inklusi yang berlaku.
- Misalkan $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ membagi } n\}$ dan $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4 \text{ membagi } (n - 2)\}$. Apakah $A = B$? Jika ya, buktikan jawaban Anda. Jika tidak, buktikan setiap inklusi yang berlaku.
- Misalkan $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ganjil}\}$ dan $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4 \text{ membagi } (n - 1) \text{ atau } 4 \text{ membagi } (n - 3)\}$. Apakah $A = B$? Jika ya, buktikan jawaban Anda. Jika tidak, buktikan setiap inklusi yang berlaku.

Setelah memiliki gagasan tentang himpunan, kita dapat membentuk himpunan baru dari himpunan yang sudah ada. Sebagai contoh, kita mendefinisikan gabungan, irisan, selisih himpunan, dan komplemen sebagai berikut.

- Gabungan** himpunan A dan B adalah himpunan $A \cup B$ yang didefinisikan sebagai

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

- Irisan** himpunan A dan B adalah himpunan $A \cap B$ yang didefinisikan sebagai

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

- Misalkan A dan B adalah himpunan. **Selisih himpunan** $A \setminus B$ adalah himpunan

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

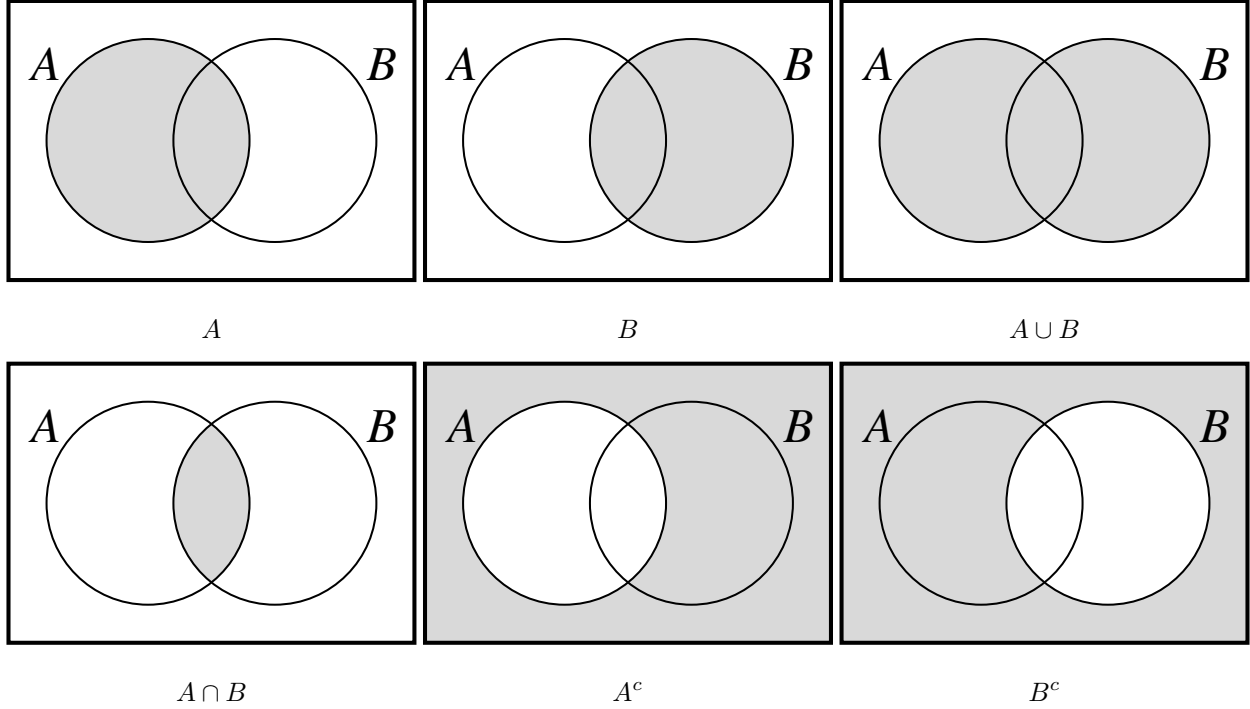
- Misalkan A merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan U . **Komplemen** A di dalam U adalah himpunan

$$U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Komplemen himpunan A di dalam himpunan U juga dinyatakan dengan $C_U(A)$, $C(A)$ (jika himpunan U sudah dipahami dari konteks), A^c , atau bahkan $U - A$.

Kita dapat memvisualisasikan himpunan-himpunan ini dengan diagram Venn. Diagram Venn menggambarkan himpunan menggunakan bangun-bangun geometri. Sebagai contoh, jika U adalah himpunan yang

memuat semua himpunan lain yang sedang diperhatikan (kita menyebut U sebagai himpunan **semesta**), kita dapat merepresentasikan U sebagai wadah besar (misalnya persegi panjang), dengan himpunan bagian A dan B sebagai wadah yang lebih kecil (misalnya lingkaran), lalu mengarsir anggota-anggota suatu himpunan tertentu. Diagram Venn dalam [Gambar 1.2](#) menggambarkan himpunan A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, A^c , dan B^c .



Gambar 1.2 Diagram Venn

Seperti yang telah kita bahas, untuk membuktikan bahwa dua himpunan X dan Y sama, kita membuktikan bahwa masing-masing merupakan himpunan bagian dari yang lain. Contoh berikut memberikan ilustrasi lain dari gagasan tersebut.

Contoh 1.3 Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Kita akan membuktikan bahwa $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Untuk membuktikan kesamaan himpunan ini, kita harus membuktikan bahwa $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ dan $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C)$. Kita mulai dengan $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Untuk membuktikan bahwa $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, kita perlu menunjukkan bahwa setiap anggota $A \cap (B \setminus C)$ juga merupakan anggota $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Untuk itu, kita pilih sembarang anggota dari $A \cap (B \setminus C)$ dan menunjukkan bahwa anggota tersebut berada dalam $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Misalkan $x \in A \cap (B \setminus C)$. Maka $x \in A$ dan $x \in B \setminus C$. Fakta bahwa $x \in B \setminus C$ berarti bahwa $x \in B$, tetapi $x \notin C$. Oleh karena itu, $x \in A$ dan $x \in B$, tetapi $x \notin C$. Ini berarti bahwa $x \in A$ dan $x \in B$, sedangkan $x \in A$ dan $x \notin C$. Jadi, $x \in A$ dan $x \in B$, tetapi $x \notin A \cap C$. Kita menyimpulkan bahwa $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Hal ini membuktikan bahwa $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Untuk inklusi sebaliknya, misalkan $y \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Jadi, $y \in A \cap B$, tetapi $y \notin A \cap C$. Karena $y \in A \cap B$, kita mengetahui bahwa $y \in A$ dan $y \in B$. Fakta bahwa $y \notin A \cap C$, bersama dengan keanggotaan yang telah disebutkan, berarti bahwa $y \notin C$. Jadi, $y \in A$, $y \in B$, dan $y \notin C$. Dengan demikian, $y \in A$ dan $y \in B \setminus C$. Kita menyimpulkan bahwa $y \in A \cap (B \setminus C)$, yang menunjukkan bahwa $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C)$. Kedua inklusi, $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ dan $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C)$, menunjukkan bahwa $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. $\square$

Kita akan menggunakan gagasan dalam [Kegiatan 1.3](#) dan [Contoh 1.3](#) untuk membuktikan kesamaan

himpunan di sepanjang buku ini. Aktivitas berikut memberikan latihan tambahan.

Kegiatan 1.4 Dalam aktivitas ini, kita bekerja dengan gabungan, irisan, dan komplemen himpunan. Misalkan A dan B adalah himpunan.

- (a) Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, dengan $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - (i) Tentukan anggota $A \cup B$ dan $A \cap B$. Apa saja anggota $(A \cup B)^c$ dan $(A \cap B)^c$?
 - (ii) Tentukan anggota $A^c \cup B^c$ dan $A^c \cap B^c$.
- (b) Misalkan A dan B merupakan sembarang himpunan bagian dari suatu himpunan semesta U . Terdapat hubungan antara A , B , komplemen keduanya, gabungan, dan irisan.
 - (i) Gunakan diagram Venn untuk menggambar $(A \cup B)^c$ dan $(A \cap B)^c$.
 - (ii) Gunakan diagram Venn dan hasil pada bagian (a) untuk menemukan serta membuktikan hubungan antara A^c , B^c , dan $(A \cup B)^c$.
 - (iii) Gunakan diagram Venn dan hasil pada bagian (a) untuk menemukan serta membuktikan hubungan antara A^c , B^c , dan $(A \cap B)^c$.

Dalam [Kegiatan 1.4](#) kita bekerja dengan gabungan dan irisan dua himpunan. Tidak ada alasan untuk membatasi definisi ini hanya pada dua himpunan, seperti yang ditunjukkan oleh aktivitas berikut.

Kegiatan 1.5 Untuk mendefinisikan kumpulan himpunan tak hingga, kita sering menggunakan apa yang disebut **himpunan indeks**. Himpunan indeks memungkinkan kita mempertimbangkan kumpulan objek yang berkorespondensi satu-satu dengan himpunan seperti bilangan bulat positif, atau bahkan bilangan real. Ketika menggunakan himpunan indeks, biasanya kita membuat pernyataan seperti “misalkan $\{A_\alpha\}$, untuk $\alpha \in I$, adalah kumpulan himpunan yang diindeks oleh suatu himpunan I ”. Kumpulan $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ disebut **keluarga himpunan berindeks**.

- (a) Himpunan I dapat berhingga. Sebagai contoh, misalkan $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ untuk n dalam himpunan $I = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.
 - (i) Tentukan A_5 . Tentukan A_8 .
 - (ii) Ada berapa himpunan dalam keluarga berindeks $\{A_n\}_{n \in I}$?
- (b) Himpunan indeks juga dapat tak hingga. Sebagai contoh, misalkan $A_\alpha = [0, |\alpha|)$ untuk α dalam himpunan $\mathbb{R}$ (dengan $[a, b)$ menyatakan interval yang terdiri atas bilangan real x sedemikian sehingga $a \leq x < b$). Dalam hal ini, tentukan A_5 . Tentukan A_π . Tentukan $A_{-\frac{2}{3}}$.
- (c) Kita telah mendefinisikan gabungan dan irisan dua himpunan. Gagasan yang sama dapat diperluas untuk mendefinisikan gabungan dan irisan suatu kumpulan himpunan berindeks.
 - (i) Ingat bahwa jika A dan B adalah himpunan, irisan $A \cap B$ adalah himpunan $\{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Bagaimana kita dapat memperluas definisi ini dari dua himpunan menjadi sebarang kumpulan himpunan? Dengan kata lain, bagaimana kita *mendefinisikan*

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha?$$

Dalam contoh pada bagian (b), himpunan apakah $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$ itu?

- (ii) Ingat bahwa jika A dan B adalah himpunan, gabungan $A \cup B$ adalah himpunan $\{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$. Bagaimana kita dapat memperluas definisi ini dari dua himpunan menjadi sebarang kumpulan himpunan? Dengan kata lain, bagaimana kita *mendefinisikan*

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha?$$

Dalam contoh pada bagian (b), himpunan apakah $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$ itu?

Sifat $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ yang kita pelajari dalam [Kegiatan 1.4](#) disebut Hukum De Morgan. Hukum ini berlaku untuk sebarang gabungan atau irisan himpunan, baik berhingga maupun tak hingga. Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 4](#).

Teorema 1.4 Hukum De Morgan. Misalkan $\{A_\alpha\}$ adalah kumpulan himpunan yang diindeks oleh suatu himpunan I di dalam himpunan semesta U . Maka

$$\begin{aligned} 1. \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c &= \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \\ 2. \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c &= \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \end{aligned}$$

Kegiatan 1.6

- (a) Verifikasikan Hukum De Morgan untuk kasus khusus $A_\alpha = \{1, 2, 3, \dots, \alpha\}$ di dalam $U = \mathbb{Z}$, dengan α sebarang anggota himpunan indeks $I = \mathbb{Z}^+$.
- (b) Mengapa komplemen suatu gabungan seharusnya berupa irisan, dan mengapa komplemen suatu irisan seharusnya berupa gabungan?

Petunjuk. Perhatikan definisi gabungan dan irisan.

Hasil Kali Kartesius Himpunan

Operasi terakhir pada himpunan yang akan kita bahas adalah **hasil kali Kartesius** (atau **hasil kali silang**). Operasi ini sebenarnya sudah pernah kita jumpai. Ketika menggambar grafik garis $y = mx + b$ pada bidang, kita memetakan titik-titik $(x, mx + b)$. Titik-titik tersebut merupakan pasangan terurut bilangan real. Gagasan ini dapat kita perluas ke sebarang himpunan.

Definisi 1.5 Misalkan A dan B adalah himpunan. **Hasil kali Kartesius** dari A dan B adalah himpunan

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Dengan kata lain, hasil kali Kartesius A dan B adalah himpunan pasangan terurut (a, b) , dengan a berasal dari A dan b berasal dari B . Perhatikan bahwa urutannya penting.

Kegiatan 1.7

- (a) Tuliskan semua anggota $\{\text{merah, biru}\} \times \{\text{mobil, truk, van}\}$.
- (b) Jika A memiliki m anggota dan B memiliki n anggota, berapa banyak anggota yang dimiliki himpunan $A \times B$? Jelaskan.

Tidak ada alasan untuk membatasi diri pada hasil kali Kartesius dua himpunan saja. Gagasan ini juga sudah pernah kita jumpai. Hasil kali Kartesius $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ adalah bidang real standar yang kita nyatakan dengan $\mathbb{R}^2$, sedangkan hasil kali Kartesius $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ adalah ruang real berdimensi tiga yang dinyatakan dengan $\mathbb{R}^3$. Jika kita memiliki suatu kumpulan berindeks $\{X_i\}$ yang terdiri atas himpunan-himpunan, dengan i

menjelajahi himpunan bilangan bulat positif, maka hasil kali Kartesius himpunan-himpunan X_i dapat kita definisikan sebagai himpunan barisan tak hingga $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, dengan $x_i \in X_i$ untuk setiap $i \in \mathbb{Z}^+$. Kita menyatakan hasil kali Kartesius ini dengan

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}^+} X_i = \prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Huruf pi kapital (Π) digunakan untuk menyatakan hasil kali, sebagai analog dari sigma kapital (Σ) yang digunakan untuk menyatakan jumlah. Kita akan mempelajari barisan secara lebih mendalam nanti.

Sebagai penutup bagian ini, kita merangkum beberapa sifat himpunan. Banyak di antara sifat-sifat ini dapat diperluas ke kumpulan himpunan sembarang. Sebagian besar pembuktiannya langsung. Pembuktian hukum asosiatif dan distributif diserahkan kepada [Latihan 3](#).

Teorema 1.6 Misalkan A , B , dan C merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan semesta U .

Sifat Himpunan Kosong

$$i \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$ii \quad A \cup \emptyset = A$$

$$iii \quad A - \emptyset = A$$

$$iv \quad \emptyset^c = U$$

Sifat Himpunan Semesta

$$i \quad A \cap U = A$$

$$ii \quad A \cup U = U$$

$$iii \quad A - U = \emptyset$$

$$iv \quad U^c = \emptyset$$

Hukum Idempoten

$$i \quad A \cap A = A$$

$$ii \quad A \cup A = A$$

Hukum Komutatif

$$i \quad A \cap B = B \cap A$$

$$ii \quad A \cup B = B \cup A$$

Hukum Asosiatif

$$i \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$ii \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Hukum Distributif

$$i \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$ii \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Sifat Dasar

$$i \quad (A^c)^c = A$$

$$ii \quad A - B = A \cap B^c$$

Himpunan Bagian dan Komplemen

$$A \subseteq B \text{ jika dan hanya jika } B^c \subseteq A^c$$

Ringkasan

Gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Kita dapat memandang himpunan sebagai kumpulan anggota yang terdefinisi dengan baik.
- Himpunan bagian dari suatu himpunan adalah sebarang kumpulan anggota yang berasal dari himpunan tersebut. Dengan kata lain, himpunan bagian S dari suatu himpunan X adalah himpunan dengan sifat bahwa jika $s \in S$, maka $s \in X$.
- Jika X dan Y adalah himpunan, maka gabungan $X \cup Y$ adalah himpunan

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ atau } z \in Y\}.$$

Gabungan dari suatu keluarga himpunan sembarang $\{X_\alpha\}$, dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I , adalah himpunan

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \{z \mid z \in X_\beta \text{ untuk suatu } \beta \in I\}.$$

- Jika X dan Y adalah himpunan, maka irisan $X \cap Y$ adalah himpunan

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ dan } z \in Y\}.$$

Irisan dari suatu keluarga himpunan sembarang $\{X_\alpha\}$, dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I , adalah himpunan

$$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha = \{z \mid z \in X_\beta \text{ untuk setiap } \beta \in I\}.$$

- Jika X adalah himpunan dan A merupakan himpunan bagian dari X , maka komplemen A di dalam X adalah himpunan

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

- Jika $\{X_i\}$ adalah kumpulan himpunan dengan i berada dalam suatu himpunan indeks I , dengan I berhingga atau I merupakan himpunan bilangan bulat positif, maka hasil kali Kartesius $\prod_{i \in I} X_i$ dari himpunan-himpunan X_i adalah himpunan semua tupel terurut berbentuk (x_i) dengan $i \in I$.

Latihan

1. Misalkan A , B , dan C merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan X . Nyatakan setiap himpunan berikut dalam notasi matematika dengan menggunakan simbol $\cup$, $\cap$, dan $\setminus$.
 - (a) Anggota X yang merupakan anggota A dan B , tetapi bukan anggota C .
 - (b) Anggota X yang merupakan anggota C dan setidaknya salah satu dari A atau B .
 - (c) Anggota X yang merupakan anggota A , tetapi tidak sekaligus menjadi anggota B dan C .
 - (d) Anggota X yang bukan merupakan anggota satu pun dari himpunan A , B , dan C .
 - (e) Anggota X yang bukan merupakan anggota setidaknya dua dari himpunan A , B , dan C .
 - (f) Anggota X yang bukan merupakan anggota paling banyak satu dari himpunan A , B , dan C .
2. Misalkan $X \subset Y \subset Z$. Buktikan atau berikan contoh tandingan.
 - (a) $C_Y(X) \subset C_Z(X)$.

(b) $Z \setminus (Y \setminus X) = X \cup (Z \setminus Y).$

3. Misalkan A dan B merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan semesta U , dan anggap pula setiap himpunan lain yang muncul di bawah merupakan himpunan bagian dari himpunan semesta yang sama. Buktikan hukum asosiatif dan distributif. Dengan kata lain, buktikan setiap pernyataan berikut.

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Buktikan Hukum De Morgan. Dengan kata lain, misalkan $\{A_\alpha\}$ adalah kumpulan himpunan yang diindeks oleh suatu himpunan I di dalam himpunan semesta U . Buktikan bahwa

(a) $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

(b) $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

5. Tentukan himpunan yang sama dengan $\emptyset \times A$ untuk sebarang himpunan A . Jelaskan.
6. Jika A adalah suatu himpunan, himpunan kuasa dari A , yang dinyatakan dengan 2^A , adalah kumpulan semua himpunan bagian dari A .

(a) Tuliskan anggota $2^{\{1,2\}}$.

(b) Jika A adalah himpunan yang memiliki tiga anggota, berapa banyak anggota dalam 2^A ?

(c) Jika A adalah himpunan yang memiliki n anggota, buatlah dugaan mengenai banyaknya anggota dalam 2^A . Buktikan dugaan Anda.

7. Jika A adalah suatu himpunan, himpunan kuasa dari A , yang dinyatakan dengan 2^A , adalah kumpulan semua himpunan bagian dari A . (Lihat [Latihan 6](#).) Telaahlah setiap pernyataan berikut. Apakah pernyataan tersebut bermakna atau tidak? Jika tidak, jelaskan alasannya, lalu perbaikilah menjadi pernyataan yang benar (dan tidak sepele).

(a) Jika A adalah suatu himpunan, maka $A \in 2^A$.

(b) Jika A adalah suatu himpunan, maka $A \subset 2^A$.

(c) Jika A adalah suatu himpunan, maka $\{A\} \subset 2^A$.

(d) Jika A adalah suatu himpunan, maka $\emptyset \in 2^A$.

(e) Jika A adalah suatu himpunan, maka $\emptyset \subset 2^A$.

(f) Jika A dan B adalah himpunan dan $A \subseteq B$, maka $2^A \subseteq 2^B$.

8. Misalkan A dan B adalah himpunan, yang masing-masing memiliki sekurang-kurangnya dua anggota berbeda. Buktikan bahwa terdapat suatu himpunan bagian $W \subset A \times B$ yang bukan merupakan hasil kali Kartesius antara suatu himpunan bagian dari A dan suatu himpunan bagian dari B . [Jadi, tidak setiap himpunan bagian dari suatu hasil kali Kartesius merupakan hasil kali Kartesius dari sepasang

himpunan bagian.]

9. Misalkan I adalah himpunan bilangan real yang lebih besar daripada 0. Untuk setiap $x \in I$, misalkan A_x adalah interval terbuka $(0, x)$. Buktikan bahwa $\bigcap_{x \in I} A_x = \emptyset$, $\bigcup_{x \in I} A_x = I$. Untuk setiap $x \in I$, misalkan B_x adalah interval tertutup $[0, x]$. Buktikan bahwa $\bigcap_{x \in I} B_x = \{0\}$, $\bigcup_{x \in I} B_x = I \cup \{0\}$.
10. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan tersebut hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan itu salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya. Sebagai contoh pernyataan yang benar, perhatikan pernyataan berikut.

Misalkan A , B , dan C adalah himpunan sedemikian sehingga $A \cap B = A \cap C$ dan $A \cap B \neq \emptyset$.

Maka $B \cap C \neq \emptyset$. Kita dapat membenarkan pernyataan ini dengan argumen singkat. Karena $A \cap B \neq \emptyset$, terdapat anggota $x \in A \cap B$. Dengan demikian, $x \in B$. Karena $A \cap B = A \cap C$, juga harus berlaku $x \in A \cap C$, yang berarti bahwa $x \in C$. Jadi, $x \in B \cap C$ dan $B \cap C \neq \emptyset$. Sebagai contoh pernyataan yang salah, perhatikan pernyataan berikut.

Misalkan A , B , dan C adalah himpunan sedemikian sehingga $A \cap B = A \cap C$.

Maka $B = C$. Kita dapat menunjukkan bahwa pernyataan ini salah dengan memberikan contoh tandingan. Sebagai contoh, misalkan $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$, dan $C = \{1, 2\}$. Maka $A \cap B = \{1\} = A \cap C$, tetapi $B \neq C$.

- (a) Jika A , B , dan C adalah himpunan serta $A \subseteq B$ dan $A \subseteq C$, maka $A \subseteq (B \cap C)$.
- (b) Jika A , B , dan C adalah himpunan serta $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$, maka $(A \cup B) \subseteq C$.
- (c) Jika A dan B merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan X serta $A \subseteq B$, maka $(X \setminus A) \subseteq (X \setminus B)$.
- (d) Jika A dan B merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan X serta $A \subseteq B$, maka $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$.
- (e) Jika A dan B adalah himpunan, maka $(A \cup B) \setminus B = A$.
- (f) Jika A dan B adalah himpunan, maka $A \setminus (A \setminus B) = B$.
- (g) Jika A , B , dan C adalah himpunan, maka $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- (h) Jika A dan C merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan X , maka $(A \setminus C) = A \cap (X \setminus C)$.
- (i) Himpunan $\{\emptyset\}$ tidak memiliki anggota.
- (j) Terdapat dua objek berbeda yang merupakan anggota himpunan $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Bab 2

Fungsi

Pertanyaan Pemandu

- Apa itu fungsi?
- Apa domain suatu fungsi?
- Apa perbedaan antara daerah hasil dan kodomain suatu fungsi?
- Apa artinya suatu fungsi merupakan injeksi? Apa artinya fungsi tersebut merupakan surjeksi?
- Kapan dan bagaimana komposisi dua fungsi didefinisikan?
- Kapan dan bagaimana invers suatu fungsi didefinisikan?
- Apa yang dimaksud dengan citra dan prapeta suatu himpunan oleh suatu fungsi?
- Sifat-sifat apa yang menghubungkan citra dan prapeta himpunan dengan gabungan himpunan?

Pendahuluan

Banyak sifat topologis didefinisikan menggunakan fungsi kontinu. Kontinuitas akan kita pelajari secara khusus nanti — untuk saat ini, kita meninjau beberapa konsep penting yang berkaitan dengan fungsi. Sebagian besar konsep ini semestinya sudah tidak asing, tetapi beberapa di antaranya mungkin baru.

Pertama-tama kita sajikan definisi-definisi dasarnya. Sebagian besar pembahasan kita sebelumnya mungkin berkaitan dengan fungsi yang memetakan bilangan real ke bilangan real, tetapi di sini kita akan memandang fungsi dari sudut pandang yang lebih umum. Kita mulai dengan definisi formal suatu fungsi.

Definisi 2.1 Suatu **fungsi** f dari himpunan tak kosong A ke himpunan B adalah koleksi pasangan terurut (a, b) sedemikian sehingga

- untuk setiap $a \in A$, terdapat pasangan (a, b) di dalam f , dan
- jika (a, b) dan (a, b') berada di dalam f , maka $b = b'$.

Perhatikan bahwa sifat pertama adalah sifat eksistensi — jika $a \in A$, maka terdapat unsur b di dalam B yang dipasangkan dengan a . Sifat pertama ini juga menyatakan bahwa setiap unsur di dalam A digunakan, atau bahwa setiap unsur di dalam A dipasangkan dengan suatu unsur di dalam B , dan unsur di dalam B tersebut bergantung pada unsur di dalam A yang dipilih. Sifat kedua adalah sifat ketunggalan — hanya ada

satu unsur b di dalam B yang dipasangkan dengan suatu unsur a tertentu di dalam A .

Umumnya kita menggunakan notasi lain untuk suatu fungsi. Jika (a, b) merupakan anggota fungsi f , kita menulis

$$f(a) = b,$$

dan dengan cara ini kita memandang f sebagai pemetaan dari himpunan A ke himpunan B . Kita menyatakan bahwa f adalah pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dengan notasi

$$f : A \rightarrow B.$$

Jika f memetakan unsur $a \in A$ ke unsur $b \in B$, kita juga menggunakan notasi

$$f : a \mapsto b.$$

Ada beberapa istilah dan notasi yang sudah dikenal dan berkaitan dengan fungsi. Misalkan f suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B .

- Himpunan A disebut **domain** dari f , dan kita menulis $\text{dom}(f) = A$.
- Himpunan B disebut **kodomain** dari f , dan kita menulis $\text{codom}(f) = B$.
- Subhimpunan $\{f(a) \mid a \in A\}$ dari B disebut **daerah hasil** dari f , yang kita nyatakan dengan $\text{range}(f)$.
- Jika $a \in A$, maka $f(a)$ adalah **citra** dari a oleh f . Karena setiap a di dalam A dipasangkan dengan tepat satu $b \in B$, citra a oleh f hanya ada satu. Karena itu, kita dapat merujuk tanpa ambiguitas pada “citra unsur tersebut”.
- Jika $b \in B$ dan $b = f(a)$ untuk suatu $a \in A$, maka a disebut suatu **prapeta** dari b . Untuk suatu $b \in B$ tertentu, b mungkin memiliki banyak prapeta yang berbeda, b mungkin tidak memiliki prapeta, atau b mungkin memiliki tepat satu prapeta. Menyusun contoh untuk setiap keadaan tersebut dapat membantu pemahaman. Karena prapeta suatu unsur b belum tentu tunggal, kita menyebutnya “suatu prapeta”.

Mengetahui domain dan kodomain sangat penting ketika bekerja dengan fungsi, dan kedua himpunan ini akan banyak kita perhatikan.

Dalam pembelajaran matematika sebelumnya, kita mungkin telah menjumpai fungsi satu-ke-satu dan fungsi pada. Fungsi satu-ke-satu (atau injeksi) dan fungsi pada (atau surjeksi) merupakan jenis fungsi khusus; definisinya kita sajikan di sini.

Definisi 2.2 Misalkan f suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B .

1. Fungsi f merupakan **injeksi** jika setiap kali (a, b) dan (a', b) berada di dalam f , berlaku $a = a'$. Secara ekuivalen, dengan menggunakan notasi fungsi, f merupakan injeksi jika $f(a) = f(a')$ mengakibatkan $a = a'$.
2. Fungsi f merupakan **surjeksi** jika untuk setiap $b \in B$, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga (a, b) berada di dalam f . Secara ekuivalen, dengan menggunakan notasi fungsi, f merupakan surjeksi jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$.
3. Fungsi f merupakan **bijeksi** jika f sekaligus merupakan injeksi dan surjeksi.

Definisi 2.3 Misalkan f suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dan misalkan C suatu subhimpunan dari A . **Pembatasan** f pada C adalah fungsi $F : C \rightarrow B$ yang memenuhi

$$F(c) = f(c) \text{ untuk setiap } c \in C.$$

Aktivitas Persiapan 2.1 Kita sering mendefinisikan fungsi dengan aturan, tetapi fungsi juga dapat didefinisikan melalui tabel atau grafik. Dalam aktivitas ini, kita akan bekerja dengan fungsi yang didefinisikan melalui aturan. Tujuan aktivitas ini adalah menunjukkan bahwa domain, kodomain, dan aturan yang menentukan keluaran sama-sama penting untuk menentukan apakah suatu fungsi merupakan injeksi dan/atau surjeksi. Sebagai contoh, misalkan $f(x) = x^2 + 1$. (Perhatikan bahwa f adalah fungsinya dan $f(x)$ adalah citra x oleh f .) Perhatikan bahwa

$$f(2) = 5 \text{ dan } f(-2) = 5.$$

Pengamatan ini cukup untuk membuktikan bahwa fungsi f bukan injeksi karena terdapat dua masukan berbeda yang menghasilkan keluaran yang sama.

Karena $f(x) = x^2 + 1$, kita mengetahui bahwa $f(x) \geq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Hal ini menyiratkan bahwa fungsi f bukan surjeksi. Sebagai contoh, -2 berada di dalam kodomain f , sedangkan $f(x) \neq -2$ untuk setiap x di dalam domain f .

- (a) Kita dapat mengubah domain suatu fungsi sehingga fungsi tersebut didefinisikan pada subhimpunan dari domain semula. Fungsi semacam ini disebut pembatasan.

Pembatasan tersebut juga dinyatakan dengan notasi $F = f|_C$. Kita juga menyebut f sebagai suatu **perluasan** dari F . Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 1$, dan misalkan $h = f|_{\mathbb{R}^+}$, dengan $\mathbb{R}^+$ menyatakan himpunan bilangan real positif. Jadi, h memiliki kodomain yang sama dengan f , tetapi domain yang berbeda.

- (i) Buktikan bahwa h merupakan injeksi.
(ii) Apakah h merupakan surjeksi? Berikan alasan untuk kesimpulan Anda.
- (b) Misalkan $T = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$, dan misalkan $F : \mathbb{R} \rightarrow T$ didefinisikan oleh $F(x) = f(x)$. Perhatikan bahwa fungsi F menggunakan rumus yang sama dengan fungsi f dan memiliki domain yang sama dengan f , tetapi kodomainnya berbeda dari kodomain f .

- (i) Jelaskan mengapa F bukan injeksi.
(ii) Apakah F merupakan surjeksi? Berikan alasan untuk kesimpulan Anda.
- (c) Misalkan $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Definisikan $g : \mathbb{R}^* \rightarrow T$ dengan $g(x) = x^2 + 1$.
- (i) Buktikan atau berikan contoh tandingan: fungsi g merupakan injeksi.
(ii) Buktikan atau berikan contoh tandingan: fungsi g merupakan surjeksi.

Dalam aktivitas pendahuluan kita, rumus matematika yang sama digunakan untuk menentukan keluaran fungsi-fungsi tersebut. Namun:

- Salah satu fungsi bukan injeksi maupun surjeksi.
- Salah satu fungsi bukan injeksi, tetapi merupakan surjeksi.
- Salah satu fungsi merupakan injeksi, tetapi bukan surjeksi.
- Salah satu fungsi sekaligus merupakan injeksi dan surjeksi.

Hal ini menggambarkan fakta penting bahwa sifat injektif atau surjektif suatu fungsi tidak hanya bergantung pada rumus yang menentukan keluaran fungsi tersebut, tetapi juga pada domain dan kodomainnya.

Salah satu fungsi khusus yang penting dan selalu merupakan injeksi sekaligus surjeksi adalah fungsi **identitas** pada suatu himpunan. Jika A adalah suatu himpunan, fungsi identitas pada A dinyatakan dengan i_A , dan $i_A(a) = a$ untuk setiap $a \in A$.

Komposisi Fungsi

Dalam pembelajaran matematika sebelumnya, kita sering menjumlahkan dan mengalikan fungsi (misalnya, jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$ memetakan $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, maka $(fg)(x) = x^2(x + 1)$ dan $(f + g)(x) = x^2 + (x + 1)$). Dalam topologi, pada umumnya kita tidak memperhatikan struktur aljabar apa pun yang mungkin dimiliki suatu himpunan. Karena itu, kita akan beralih dari penjumlahan dan perkalian, lalu memusatkan perhatian pada komposisi fungsi.

Gagasan dasar komposisi fungsi adalah bahwa, jika memungkinkan, keluaran suatu fungsi f digunakan sebagai masukan suatu fungsi g . Fungsi yang dihasilkan dapat disebut “ f kemudian g ” dan dinamakan komposit f dengan g . Notasi yang kita gunakan adalah $g \circ f$ (perhatikan urutannya — f diterapkan lebih dahulu). Sebagai contoh, jika

$$f(x) = 3x^2 + 2 \text{ dan } g(x) = \sin(x),$$

keduanya memetakan $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, maka kita dapat menghitung $(g \circ f)(x)$ sebagai berikut:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 2) = \sin(3x^2 + 2).$$

Dalam hal ini, $f(x)$, yaitu keluaran fungsi f , digunakan sebagai masukan bagi fungsi g . Gagasan ini melandasi definisi formal komposisi dua fungsi.

Definisi 2.4 Misalkan A , B , dan C himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ fungsi. **Komposit** f dan g adalah fungsi $g \circ f : A \rightarrow C$ yang didefinisikan oleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

untuk setiap $x \in A$

Fungsi $g \circ f$ kita sebut fungsi komposit, dan $(g \circ f)(x)$ kita baca sebagai “ g komposisi f dari x ”.

Kegiatan 2.2 Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, dan $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Definisikan $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$, dan $h : B \rightarrow C$ dengan

$$\begin{aligned} f(1) &= b, \quad f(2) = c, \quad f(3) = a, \\ g(1) &= d, \quad g(2) = c, \quad g(3) = d, \text{ dan} \\ h(a) &= \gamma, \quad h(b) = \alpha, \quad h(c) = \beta, \quad h(d) = \alpha. \end{aligned}$$

- Tentukan citra unsur-unsur di dalam A oleh fungsi $h \circ f$.
- Tentukan citra unsur-unsur di dalam A oleh fungsi $h \circ g$.
- Apakah di antara f , g , dan h ada yang merupakan injeksi? Apakah di antara f , g , dan h ada yang merupakan surjeksi?
- Apakah $h \circ f$ merupakan injeksi? Apakah $h \circ f$ merupakan surjeksi? Jelaskan.
- Apakah $h \circ g$ merupakan injeksi? Apakah $h \circ g$ merupakan surjeksi? Jelaskan.

Dalam [Kegiatan 2.2](#), kita menanyakan apakah fungsi-fungsi komposit tertentu merupakan injeksi atau surjeksi, atau keduanya. Dalam matematika, lazim untuk menyelidiki apakah sifat tertentu suatu objek juga dimiliki oleh objek yang berkaitan dengannya. Secara khusus, kita mungkin ingin mengetahui apakah komposit dua fungsi injektif juga merupakan injeksi. (Tentu saja, kita dapat mengajukan pertanyaan serupa untuk surjeksi.) Pertanyaan-pertanyaan ini diselidiki dalam aktivitas berikutnya.

Kegiatan 2.3 Diberikan himpunan A , B , C , dan D berikut:

$$A = \{a, b, c\}, B = \{p, q, r\}, C = \{u, v, w, x\}, \text{ dan } D = \{u, v\}.$$

- (a) Susun suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ yang merupakan injeksi dan suatu fungsi $g : B \rightarrow C$ yang merupakan injeksi. Dalam hal ini, apakah fungsi komposit $g \circ f : A \rightarrow C$ merupakan injeksi? Jelaskan.
- (b) Susun suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ yang merupakan surjeksi dan suatu fungsi $g : B \rightarrow D$ yang merupakan surjeksi. Dalam hal ini, apakah fungsi komposit $g \circ f : A \rightarrow D$ merupakan surjeksi? Jelaskan.
- (c) Susun suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ yang merupakan bijeksi dan suatu fungsi $g : B \rightarrow A$ yang merupakan bijeksi. Dalam hal ini, apakah fungsi komposit $g \circ f : A \rightarrow A$ merupakan bijeksi? Jelaskan.

Dalam [Kegiatan 2.3](#), kita menyelidiki beberapa sifat fungsi komposit yang berkaitan dengan injeksi, surjeksi, dan bijeksi. Teorema berikut merangkum hasil yang hendak diilustrasikan oleh penyelidikan tersebut.

Teorema 2.5 Misalkan A , B , dan C himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$.

1. Jika f dan g keduanya merupakan injeksi, maka $(g \circ f) : A \rightarrow C$ merupakan injeksi.
2. Jika f dan g keduanya merupakan surjeksi, maka $(g \circ f) : A \rightarrow C$ merupakan surjeksi.
3. Jika f dan g keduanya merupakan bijeksi, maka $(g \circ f) : A \rightarrow C$ merupakan bijeksi.

Kegiatan 2.4

- (a) Buktikan bagian (1) dari [Teorema 2.5](#).
- (b) Buktikan bagian (2) dari [Teorema 2.5](#).
- (c) Mengapa bukti bagian (3) dari [Teorema 2.5](#) merupakan akibat langsung dari bagian (1) dan (2)?

Fungsi Invers

Setelah mempelajari fungsi komposit, kita beralih ke gagasan penting lainnya: invers suatu fungsi. Dalam mata kuliah matematika sebelumnya, Anda mungkin telah mempelajari bahwa fungsi eksponensial (dengan basis e) dan fungsi logaritma natural saling berinvers. Hubungan ini mungkin pernah Anda lihat dinyatakan sebagai berikut: Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $x > 0$ dan setiap $y \in \mathbb{R}$,

$y = \ln(x)$ jika dan hanya jika $x = e^y$. Perhatikan bahwa x merupakan masukan dan y merupakan keluaran bagi fungsi logaritma natural jika dan hanya jika y merupakan masukan dan x merupakan keluaran bagi fungsi eksponensial. Pada dasarnya, fungsi invers (dalam hal ini, fungsi eksponensial) membalik tindakan fungsi semula (dalam hal ini, fungsi logaritma natural). Dalam bentuk pasangan terurut (pasangan masukan-keluaran), hal ini berarti bahwa jika (x, y) merupakan pasangan terurut dalam suatu fungsi, maka (y, x) merupakan pasangan terurut dalam invers fungsi tersebut. Gagasan untuk menukar peran koordinat pertama dan kedua mendasari definisi invers suatu fungsi.

Definisi 2.6 Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi. **Invers** dari f , yang dinyatakan dengan f^{-1} , adalah himpunan pasangan terurut

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}.$$

Perhatikan bahwa definisi ini tidak menyatakan bahwa f^{-1} merupakan fungsi. Sebaliknya, f^{-1} hanyalah subhimpunan dari $B \times A$. Dalam [Kegiatan 2.5](#), kita akan menyelidiki syarat-syarat yang membuat invers suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ juga merupakan fungsi dari B ke A .

Kegiatan 2.5 Misalkan $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, dan $C = \{p, q, r\}$. Definisikan

$f : A \rightarrow C$ dengan

$g : A \rightarrow C$ dengan

$h : B \rightarrow C$ dengan

$f(a) = r$	$g(a) = p$	$h(a) = p$
$f(b) = p$	$g(b) = q$	$h(b) = q$
$f(c) = q$	$g(c) = p$	$h(c) = r$
		$h(d) = q$

- (a) Tentukan invers setiap fungsi sebagai suatu himpunan pasangan terurut.
- (b) (i) Apakah f^{-1} merupakan fungsi dari C ke A ? Jelaskan.
(ii) Apakah g^{-1} merupakan fungsi dari C ke A ? Jelaskan.
(iii) Apakah h^{-1} merupakan fungsi dari C ke B ? Jelaskan.
- (c) Buatlah konjektur tentang syarat-syarat pada suatu fungsi $F : S \rightarrow T$ yang memastikan bahwa inversnya merupakan fungsi dari T ke S .

Hasil [Kegiatan 2.5](#) semestinya berupa teorema berikut.

Teorema 2.7 Misalkan A dan B himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$. Invers f merupakan fungsi dari B ke A jika dan hanya jika f merupakan bijeksi.

Garis besar bukti [Teorema 2.7](#) diberikan dalam aktivitas berikut.

Kegiatan 2.6 [Teorema 2.7](#) merupakan pernyataan bikondisional, sehingga kita perlu membuktikan kedua arahnya. Misalkan A dan B himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$.

- (a) Andaikan f merupakan bijeksi. Kita akan membuktikan bahwa f^{-1} merupakan fungsi, yakni bahwa f^{-1} memenuhi syarat-syarat dalam [Definisi 2.1](#).
- (i) Misalkan $b \in B$. Sifat apa dari f yang memastikan bahwa $(b, a) \in f^{-1}$ untuk suatu $a \in A$? Kesimpulan apa yang dapat kita tarik tentang f^{-1} ?
- (ii) Sekarang misalkan $b \in B$, $a_1, a_2 \in A$, dan andaikan bahwa

$$(b, a_1) \in f^{-1} \text{ dan } (b, a_2) \in f^{-1}.$$

Apa yang ditunjukkan hal ini tentang pasangan-pasangan terurut yang harus termuat dalam f ? Sifat apa dari f yang memastikan bahwa $a_1 = a_2$? Kesimpulan apa yang dapat kita tarik tentang f^{-1} ?

- (b) Sekarang andaikan f^{-1} merupakan fungsi dari B ke A . Kita akan membuktikan bahwa f merupakan bijeksi.
- (i) Apa yang perlu ditunjukkan untuk membuktikan bahwa f merupakan injeksi? Gunakan fakta bahwa f^{-1} merupakan fungsi untuk membuktikan bahwa f merupakan injeksi.
- (ii) Apa yang perlu ditunjukkan untuk membuktikan bahwa f merupakan surjeksi? Gunakan fakta bahwa f^{-1} merupakan fungsi untuk membuktikan bahwa f merupakan surjeksi.

Dalam keadaan ketika $f : A \rightarrow B$ merupakan bijeksi dan f^{-1} merupakan fungsi dari B ke A , kita dapat menulis $f^{-1} : B \rightarrow A$. Dalam hal ini, kita sering menyebut f sebagai **fungsi invertibel**, dan biasanya kita tidak menggunakan penyajian pasangan terurut, baik untuk f maupun f^{-1} . Alih-alih menulis $(a, b) \in f$, kita menulis $f(a) = b$, dan alih-alih menulis $(b, a) \in f^{-1}$, kita menulis $f^{-1}(b) = a$. Dengan menggunakan fakta bahwa $(a, b) \in f$ jika dan hanya jika $(b, a) \in f^{-1}$, sekarang kita dapat menulis $f(a) = b$ jika dan hanya jika $f^{-1}(b) = a$. [Teorema 2.8](#) memformalkan pengamatan ini.

Teorema 2.8 Misalkan A dan B himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu bijeksi. Maka $f^{-1} : B \rightarrow A$ merupakan fungsi, dan untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$,

$$f(a) = b \text{ jika dan hanya jika } f^{-1}(b) = a.$$

Hasil berikut memberikan informasi yang berguna tentang fungsi invers. Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 8](#).

Corollary 2.9 Misalkan A dan B himpunan tak kosong, serta misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu bijeksi. Maka

1. Untuk setiap x di dalam A , $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.
2. Untuk setiap y di dalam B , $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Pertanyaan berikutnya adalah apa yang dapat kita katakan tentang komposisi bijeksi. Secara khusus, jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ keduanya merupakan bijeksi, maka $f^{-1} : B \rightarrow A$ dan $g^{-1} : C \rightarrow B$ keduanya merupakan fungsi. Apakah $g \circ f$ pasti invertibel dan, jika demikian, apa bentuk $(g \circ f)^{-1}$?

Kegiatan 2.7 Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ keduanya merupakan bijeksi.

- (a) Mengapa kita mengetahui bahwa $g \circ f$ invertibel?
- (b) Sekarang kita menentukan invers $g \circ f$. Kita mungkin tergoda untuk mengira bahwa $(g \circ f)^{-1}$ adalah $g^{-1} \circ f^{-1}$, tetapi komposit ini tidak didefinisikan karena g^{-1} memetakan C ke B dan f^{-1} memetakan B ke A . Namun, $f^{-1} \circ g^{-1}$ didefinisikan. Untuk membuktikan bahwa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, kita perlu membuktikan bahwa dua fungsi tersebut sama. Bagaimana kita membuktikan bahwa dua fungsi sama?
- (c) Misalkan $c \in C$.
 - (i) Sifat apa yang memastikan bahwa terdapat $b \in B$ sedemikian sehingga $g(b) = c$?
 - (ii) Sifat apa yang memastikan bahwa terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$?
 - (iii) Unsur apakah $(g \circ f)^{-1}(c)$? Mengapa?
 - (iv) Unsur apakah $f^{-1}(b)$? Mengapa? Unsur apakah $g^{-1}(c)$? Mengapa?
 - (v) Unsur apakah $(f^{-1} \circ g^{-1})(c)$? Mengapa? Kesimpulan apa yang dapat kita tarik tentang $(g \circ f)^{-1}$ dan $f^{-1} \circ g^{-1}$? Jelaskan.

Hasil [Kegiatan 2.7](#) tercakup dalam teorema berikut.

Teorema 2.10 Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ bijeksi. Maka $g \circ f$ merupakan bijeksi dan $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Fungsi dan Himpunan

Kita menutup bagian ini dengan menghubungkan subhimpunan dan fungsi. Pertama, kita perkenalkan sedikit notasi. Jika f adalah fungsi dari himpunan X ke himpunan Y , dan jika A adalah subhimpunan dari X serta B adalah subhimpunan dari Y , kita mendefinisikan $f(A)$ dan $f^{-1}(B)$ sebagai

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\},$$

dan

$$f^{-1}(B) = \{a \in X \mid f(a) \in B\}.$$

Kita menyebut $f(A)$ sebagai citra himpunan A di bawah f , sedangkan $f^{-1}(B)$ adalah prapeta himpunan B di bawah f . Perhatikan bahwa $f^{-1}(B)$ didefinisikan untuk setiap fungsi, bukan hanya untuk fungsi yang mempunyai invers. Jadi, penting untuk dipahami bahwa penggunaan notasi $f^{-1}(B)$ tidak berarti bahwa f mempunyai invers.

Ketika nanti kita membahas fungsi kontinu, kita perlu memahami perilaku suatu fungsi terhadap subhimpunan. Salah satu hasilnya diberikan dalam lema berikut.

Lema 2.11 Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, $\{A_\alpha\}$ suatu koleksi subhimpunan dari X yang diindeks oleh α dalam himpunan indeks I , dan $\{B_\beta\}$ suatu koleksi subhimpunan dari Y yang diindeks oleh β dalam himpunan indeks J . Maka

1. $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, dan
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$.

Bukti. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi dan $\{A_\alpha\}$ suatu koleksi subhimpunan dari X yang diindeks oleh α dalam himpunan indeks I . Untuk membuktikan bagian 1, kita tunjukkan inklusi pada kedua arah.

Misalkan $b \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$. Maka $b = f(a)$ untuk suatu $a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Akibatnya, $a \in A_\rho$ untuk suatu $\rho \in I$. Jadi, $b \in f(A_\rho) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$. Kita menyimpulkan bahwa $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$.

Sekarang, misalkan $b \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$. Maka $b \in f(A_\rho)$ untuk suatu $\rho \in I$. Karena $A_\rho \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, diperoleh $b \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$. Jadi, $\bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subseteq f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$. Kedua inklusi tersebut membuktikan bagian 1.

Untuk bagian 2, kita kembali menunjukkan inklusi pada kedua arah. Misalkan $a \in f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right)$. Maka $f(a) \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$. Jadi, terdapat $\mu \in J$ sedemikian sehingga $f(a) \in B_\mu$. Ini berarti $a \in f^{-1}(B_\mu) \subseteq \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$. Kita menyimpulkan bahwa $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) \subseteq \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$.

Untuk inklusi sebaliknya, misalkan $a \in \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$. Maka $a \in f^{-1}(B_\mu)$ untuk suatu $\mu \in J$. Jadi, $f(a) \in B_\mu \subseteq \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$. Dengan demikian, $a \in f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right)$. Jadi, $\bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right)$. Kedua inklusi tersebut membuktikan bagian 2. ■

Pada tahap ini, wajar untuk bertanya apakah [Lema 2.11](#) masih berlaku jika gabungan kita ganti dengan irisan. Pertanyaan itu kita serahkan kepada [Latihan 7](#).

Hasil lainnya dibahas dalam kegiatan berikut.

Kegiatan 2.8 Misalkan X , Y , dan Z adalah himpunan, serta $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ adalah fungsi. Misalkan C suatu subhimpunan dari Z . Terdapat hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(C)$ dan $f^{-1}(g^{-1}(C))$. Temukan dan buktikan hubungan tersebut.

Kardinalitas Himpunan

Seberapa besar sebuah himpunan? Jika suatu himpunan berhingga, kita dapat menghitung banyaknya unsur dalam himpunan itu dan langsung menjawab pertanyaan tersebut. Jika suatu himpunan tak berhingga, pertanyaannya menjadi sedikit lebih rumit. Sebagai contoh, seberapa besar $\mathbb{Z}$? Seberapa besar $\mathbb{Q}$? Karena $\mathbb{Z}$ adalah subhimpunan dari $\mathbb{Q}$, kita mungkin mengira bahwa $\mathbb{Q}$ memuat lebih banyak unsur daripada $\mathbb{Z}$. Namun, $\mathbb{Z}$ tak berhingga; jadi, mungkinkah suatu himpunan mempunyai lebih banyak unsur daripada himpunan bilangan bulat? Kita tidak akan menjawab pertanyaan itu dalam bagian ini, tetapi pertanyaan tersebut menarik untuk direnungkan.

Jika dua himpunan berhingga memiliki banyak unsur yang sama, wajar jika kita mengatakan bahwa kedua himpunan itu sama besar. Bagaimana gagasan ini dapat kita perluas ke himpunan tak berhingga? Jika dua himpunan berhingga memiliki banyak unsur yang sama, kita dapat memasangkan setiap unsur dalam satu himpunan dengan tepat satu unsur dalam himpunan lainnya. Inilah tepatnya yang dilakukan

oleh suatu bijeksi. Jadi, suatu himpunan dengan n unsur dapat dipasangkan dengan himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$, dengan n suatu bilangan bulat positif. Dengan cara inilah kita dapat mendefinisikan himpunan berhingga.

Definisi 2.12 Suatu himpunan A disebut **berhingga** jika $A = \emptyset$ atau terdapat suatu bijeksi f yang memetakan A ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ untuk suatu bilangan bulat positif n .

Jika $A = \emptyset$, kita mengatakan bahwa A mempunyai **kardinalitas** 0. Jika terdapat suatu bijeksi dari A ke himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$, kita mengatakan bahwa A mempunyai kardinalitas n . Jika tidak ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga terdapat bijeksi dari himpunan A ke $\{1, 2, \dots, n\}$, kita mengatakan bahwa A adalah himpunan **tak berhingga** dan bahwa A mempunyai kardinalitas tak berhingga. Kita menggunakan istilah **kardinalitas** alih-alih banyaknya unsur karena kita tidak dapat benar-benar menghitung banyaknya unsur dalam suatu himpunan tak berhingga. Kardinalitas himpunan A (yakni banyaknya unsur dalam himpunan tersebut) dinotasikan dengan $|A|$. Sebagai latihan, tunjukkan bahwa jika A dan B adalah himpunan dengan $|A| = n$ dan $|B| = m$, maka $n = m$ jika dan hanya jika terdapat suatu bijeksi $f : A \rightarrow B$. Hal ini menunjukkan bahwa kardinalitas terdefinisi dengan baik. Karena komposisi dua bijeksi merupakan bijeksi dan invers suatu bijeksi juga merupakan bijeksi, jika terdapat suatu bijeksi dari himpunan A ke $\{1, 2, \dots, n\}$ dan suatu bijeksi dari himpunan B ke $\{1, 2, \dots, n\}$ untuk suatu bilangan bulat positif n , maka terdapat suatu bijeksi antara A dan B . Dengan gagasan ini, kita mengatakan bahwa dua himpunan (baik berhingga maupun tak berhingga) mempunyai kardinalitas yang sama jika terdapat suatu bijeksi antara kedua himpunan tersebut. Kita akan membahas kardinalitas secara lebih terperinci nanti.

Ringkasan

Gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Fungsi f dari himpunan tak kosong A ke himpunan B adalah suatu koleksi pasangan terurut (a, b) sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat pasangan (a, b) dalam f , dan jika (a, b) serta (a, b') berada dalam f , maka $b = b'$. Jika f suatu fungsi, kita menggunakan notasi $f(a) = b$ untuk menyatakan bahwa $(a, b) \in f$.
- Jika f adalah fungsi dari A ke B , himpunan A merupakan domain fungsi tersebut.
- Jika f adalah fungsi dari A ke B , himpunan B merupakan kodomain fungsi tersebut. Himpunan

$$\{f(a) \mid a \in A\}$$

merupakan daerah hasil fungsi tersebut. Jadi, daerah hasil suatu fungsi adalah subhimpunan dari kodomainnya.

- Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B merupakan injeksi jika kesamaan $f(a) = f(a')$ untuk $a, a' \in A$ selalu mengakibatkan $a = a'$. Fungsi f merupakan surjeksi jika, untuk setiap $b \in B$, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$.
- Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B dan g adalah fungsi dari B ke himpunan C , komposit $g \circ f$ merupakan fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ untuk setiap $a \in A$.
- Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B merupakan bijeksi jika f sekaligus merupakan surjeksi dan injeksi. Jika f merupakan bijeksi dari A ke B , maka f mempunyai invers f^{-1} yang didefinisikan oleh $f^{-1}(b) = a$ ketika $f(a) = b$.
- Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B , dan jika C adalah subhimpunan dari A , citra C di bawah f adalah himpunan

$$f(C) = \{f(c) \mid c \in C\},$$

dan jika D adalah subhimpunan dari B , prapeta D adalah himpunan

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}.$$

- Sifat-sifat penting yang menghubungkan citra dan prapeta himpunan dengan gabungan himpunan adalah sebagai berikut. Jika f adalah fungsi dari himpunan X ke himpunan Y , jika $\{A_\alpha\}$ adalah suatu koleksi subhimpunan dari X yang diindeks oleh α dalam himpunan indeks I , dan $\{B_\beta\}$ adalah suatu koleksi subhimpunan dari Y yang diindeks oleh β dalam himpunan indeks J , maka

$$\text{i } f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha), \text{ dan}$$

$$\text{ii } f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta).$$

Latihan

1.

- Carilah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga setiap unsur kodomain memiliki tepat satu prapeta.
- Carilah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga setiap unsur kodomain memiliki setidaknya dua prapeta.
- Carilah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga setiap unsur memiliki tepat dua prapeta.
- Carilah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga terdapat sebuah unsur kodomain yang memiliki tepat tiga prapeta dan sebuah unsur kodomain lain yang memiliki tepat dua prapeta.
- Carilah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga terdapat sebuah unsur kodomain yang memiliki tak berhingga banyak prapeta.

2. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan apakah fungsi tersebut merupakan injeksi, surjeksi, bijeksi, atau bukan salah satu di antaranya. Ingatlah untuk memperhatikan dengan cermat domain dan kodomain dalam setiap kasus. Berikan alasan untuk semua kesimpulan Anda.

- $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $F(x) = 5x + 3$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$
- $G : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $G(x) = 5x + 3$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$
- $f : (\mathbb{R} \setminus \{4\}) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = \frac{3x}{x-4}$, untuk setiap $x \in (\mathbb{R} \setminus \{4\})$
- $g : (\mathbb{R} \setminus \{4\}) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{3\})$ didefinisikan oleh $g(x) = \frac{3x}{x-4}$, untuk setiap $x \in (\mathbb{R} \setminus \{4\})$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ didefinisikan oleh $h(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, dengan $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ didefinisikan oleh $k(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

3. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e, g\}$, lalu definisikan $f : A \rightarrow B$ sebagaimana diberikan dalam [Tabel 2.13](#).

Tabel 2.13 Fungsi dari A ke B

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	c	d	a	g	a	c	e	d	c	a

- Apakah f merupakan injeksi? Apakah f merupakan surjeksi? Jelaskan.
- Carilah subhimpunan terbesar C dari A (terbesar dalam hal banyaknya unsur C) sedemikian sehingga $f|_C$ merupakan injeksi.
- Carilah subhimpunan D dari B sedemikian sehingga fungsi dengan aturan yang sama, dipandang sebagai $f : A \rightarrow D$, merupakan surjeksi.

- (d) Carilah subhimpunan X dari A dan Y dari B sedemikian sehingga $f|_X : X \rightarrow Y$ merupakan bijeksi.
4. Misalkan A dan B merupakan himpunan yang masing-masing memiliki setidaknya dua unsur berbeda.
- (a) Gambarkan suatu subhimpunan $X \subset A \times B$ yang merupakan hasil kali Kartesius antara suatu subhimpunan dari A dan suatu subhimpunan dari B .
- (b) Tunjukkan bahwa terdapat suatu subhimpunan $W \subset A \times B$ yang bukan merupakan hasil kali Kartesius antara suatu subhimpunan dari A dan suatu subhimpunan dari B . [Dengan demikian, tidak setiap subhimpunan dari suatu hasil kali Kartesius merupakan hasil kali Kartesius dari sepasang subhimpunan.]
5. Kardinalitas suatu himpunan berhingga didefinisikan sebagai banyaknya unsur himpunan tersebut. Kita menyatakan kardinalitas himpunan A dengan $|A|$. Misalkan A dan B merupakan himpunan dengan $|A| = n$ dan $|B| = m$ untuk bilangan bulat positif m dan n . Buktikan bahwa terdapat bijeksi $f : A \rightarrow B$ jika dan hanya jika $n = m$.
6. Misalkan X dan Y merupakan himpunan dan $f : X \rightarrow Y$ merupakan fungsi.
- (a) Misalkan A merupakan subhimpunan dari X . Tunjukkan bahwa $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Buatlah contoh untuk menunjukkan bahwa secara umum, $A \neq f^{-1}(f(A))$.
- Petunjuk.** Untuk menunjukkan bahwa kedua himpunan tersebut tidak sama, pertimbangkan himpunan X dan Y yang masing-masing memiliki dua unsur.
- (b) Misalkan B merupakan subhimpunan dari Y . Tunjukkan bahwa $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Buatlah contoh untuk menunjukkan bahwa secara umum, $f(f^{-1}(B)) \neq B$.
- Petunjuk.** Untuk menunjukkan bahwa kedua himpunan tersebut tidak sama, pertimbangkan himpunan X dan Y yang masing-masing memiliki dua unsur.
- (c) Buktikan bahwa f merupakan surjeksi jika dan hanya jika $f(f^{-1}(B)) = B$ untuk setiap subhimpunan B dari Y .
- (d) Buktikan bahwa f merupakan injeksi jika dan hanya jika $f^{-1}(f(A)) = A$ untuk setiap subhimpunan A dari X .
7. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ merupakan fungsi dan $\{A_\alpha\}$ merupakan koleksi subhimpunan dari X yang diindeks oleh α dalam himpunan indeks I , serta $\{B_\beta\}$ merupakan koleksi subhimpunan dari Y yang diindeks oleh β dalam himpunan indeks J . Buktikan atau sangkal setiap pernyataan berikut. Jika suatu pernyataan tidak benar, apakah salah satu arah inklusi berlaku? Buktikan jawaban Anda.
- (a) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$
- (b) $f^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcap_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$
8. Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong, dan $f : A \rightarrow B$ merupakan bijeksi. Buktikan bahwa
- (a) Untuk setiap x dalam A , $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.
- (b) Untuk setiap y dalam B , $(f \circ f^{-1})(y) = y$.
9. Misalkan R , S , dan T merupakan himpunan, serta $g : R \rightarrow S$ dan $h : S \rightarrow T$ merupakan fungsi. Misalkan O merupakan subhimpunan dari T . Tunjukkan bahwa $(h \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(h^{-1}(O))$.

10. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan himpunan tak kosong, dan misalkan $X = X_1 \times X_2$. Definisikan $\pi_i : X \rightarrow X_i$ dengan $\pi_i(x) = x_i$, dengan $x = (x_1, x_2)$. Kita menyebut π_i sebagai **proyeksi** dari X ke X_i . Misalkan Y_1 dan Y_2 merupakan himpunan tak kosong, dan misalkan $Y = Y_1 \times Y_2$. Andaikan bahwa untuk setiap i terdapat fungsi $f_i : X_i \rightarrow Y_i$. Sebagai contoh, misalkan $X_i = \{i, i+1\}$ dan $Y_i = \{-i, -i-1\}$. Kita kemudian dapat mendefinisikan f_i dengan $f_i(x) = -x$ untuk i yang bernilai 1 ataupun 2.

- (a) Buktikan bahwa π_i merupakan surjeksi untuk setiap i .
- (b) Buktikan bahwa terdapat tepat satu fungsi $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga $\pi_i \circ f = f_i \circ \pi_i$ untuk setiap i . (Perhatikan bahwa salah satu π_i memetakan X ke X_i , sedangkan yang lain memetakan Y ke Y_i .)
- (c) Fungsi f dari bagian (b) dinyatakan dengan $f = f_1 \times f_2$. Misalkan Z_1 dan Z_2 merupakan dua himpunan tak kosong, dan misalkan $Z = Z_1 \times Z_2$. Andaikan bahwa terdapat fungsi $g_i : Y_i \rightarrow Z_i$ untuk setiap i . Tunjukkan bahwa

$$(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2).$$

- (d) Andaikan setiap f_i memiliki invers h_i . Tunjukkan bahwa $(f_1 \times f_2)^{-1} = h_1 \times h_2$.

11. Misalkan $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif. Definisikan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ sebagai berikut: Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, tetapkan

$$f(n) = \frac{1 + (-1)^n(2n-1)}{4}.$$

Apakah fungsi f merupakan injeksi? Apakah fungsi f merupakan surjeksi? Berikan alasan untuk kesimpulan Anda.

Petunjuk. Mulailah dengan menghitung beberapa keluaran fungsi sebelum mencoba menulis bukti. Saat menyelidiki apakah fungsi tersebut merupakan injeksi, ada baiknya Anda membagi kasus menurut apakah masukannya genap atau ganjil. Saat menyelidiki apakah f merupakan surjeksi, pertimbangkan pembagian kasus menurut apakah keluarannya positif atau kurang dari atau sama dengan nol.

12. Operasi $*$ pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S yang, untuk pasangan $(x, y) \in S \times S$, menetapkan unsur $x * y$ dalam S . Sebagai contoh, penjumlahan bilangan bulat dapat didefinisikan sebagai fungsi $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang memetakan pasangan $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke bilangan bulat $f(a, b) = a + b$.

- (a) Apakah fungsi f merupakan injeksi? Berikan alasan untuk kesimpulan Anda.
- (b) Apakah fungsi f merupakan surjeksi? Berikan alasan untuk kesimpulan Anda.

13. Misalkan A , B , dan C merupakan himpunan dan $f : A \rightarrow B$ serta $g : B \rightarrow C$ merupakan fungsi.

- (a) Benarkah bahwa jika $g \circ f$ merupakan injeksi, maka f dan g keduanya merupakan injeksi? Jika jawabannya tidak, adakah syarat yang harus dipenuhi oleh f atau g jika $g \circ f$ merupakan injeksi? Buktikan jawaban Anda.
- (b) Benarkah bahwa jika $g \circ f$ merupakan surjeksi, maka f dan g keduanya merupakan surjeksi? Jika jawabannya tidak, adakah syarat yang harus dipenuhi oleh f atau g jika $g \circ f$ merupakan surjeksi? Buktikan jawaban Anda.

- 14.

- (a) Apakah komposisi fungsi merupakan operasi komutatif? Buktikan jawaban Anda.
- (b) Apakah komposisi fungsi merupakan operasi asosiatif? Buktikan jawaban Anda.

15.

- (a) Definisikan $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ dengan $f([x]) = [x^2 + 4]$ untuk setiap $[x] \in \mathbb{Z}_5$. Tuliskan invers dari f sebagai himpunan pasangan terurut, dan jelaskan mengapa f^{-1} bukan fungsi.
- (b) Definisikan $g : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ dengan $g([x]) = [x^3 + 4]$ untuk setiap $[x] \in \mathbb{Z}_5$. Tuliskan invers dari g sebagai himpunan pasangan terurut, dan jelaskan mengapa g^{-1} merupakan fungsi.
- (c) Mungkinkah kita menuliskan rumus untuk $g^{-1}([y])$, dengan $[y] \in \mathbb{Z}_5$? Jawaban atas pertanyaan ini bergantung pada apakah akar pangkat tiga dari unsur-unsur $\mathbb{Z}_5$ dapat didefinisikan. Ingatlah bahwa untuk bilangan real x , kita mendefinisikan akar pangkat tiga dari x sebagai bilangan real y sedemikian sehingga $y^3 = x$. Dengan kata lain, $y = \sqrt[3]{x}$ jika dan hanya jika $y^3 = x$. Dengan menggunakan gagasan ini, mungkinkah kita mendefinisikan akar pangkat tiga dari setiap unsur $\mathbb{Z}_5$? Jika ya, tentukan $\sqrt[3]{[0]}$, $\sqrt[3]{[1]}$, $\sqrt[3]{[2]}$, $\sqrt[3]{[3]}$, dan $\sqrt[3]{[4]}$.
- (d) Sekarang jawablah pertanyaan yang diajukan pada awal bagian (c). Jika memungkinkan, tentukan rumus untuk $g^{-1}([y])$ dengan $g^{-1} : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$.

16. Misalkan A merupakan himpunan semua fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yang kontinu pada $[a, b]$ (gunakan kembali pengetahuan Anda tentang fungsi kontinu dari kalkulus untuk soal ini). Misalkan B merupakan subhimpunan dari A yang terdiri atas semua fungsi dengan turunan yang kontinu pada $[a, b]$. Misalkan C merupakan subhimpunan dari B yang terdiri atas semua fungsi yang bernilai 0 di a .

- (a) (i) Berikan contoh fungsi yang berada dalam A , tetapi tidak dalam B , dengan $[a, b] = [-1, 1]$.
(ii) Berikan contoh fungsi yang berada dalam B , tetapi tidak dalam C , dengan $[a, b] = [-1, 1]$.
(iii) Berikan contoh fungsi yang berada dalam C dengan $[a, b] = [-1, 1]$.

(b) Misalkan $d : B \rightarrow A$ didefinisikan oleh

$$d(f) = f'.$$

Apakah fungsi d invertibel? Berikan alasan untuk jawaban Anda.

(c) Untuk setiap fungsi $f \in A$, misalkan $h(f)$ merupakan fungsi yang didefinisikan oleh

$$(h(f))(x) = \int_a^x f(t) dt$$

untuk $x \in [a, b]$.

- (i) Tunjukkan bahwa h memetakan A ke C .
(ii) Tunjukkan bahwa h invertibel dengan mencari fungsi $g : C \rightarrow A$ sedemikian sehingga g dan h merupakan fungsi invers satu sama lain.

17. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Untuk setiap pernyataan berikut, nyatakan “benar” jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan tersebut hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, nyatakan “salah” dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Jika A merupakan subhimpunan dari X , maka $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
(b) Jika A merupakan subhimpunan dari X , maka $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
(c) Jika B merupakan subhimpunan dari Y , maka $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
(d) Jika B merupakan subhimpunan dari Y , maka $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
(e) Jika A_1 dan A_2 merupakan subhimpunan dari X dengan $A_1 \subseteq A_2$, maka $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

-
- (f) Jika B_1 dan B_2 merupakan subhimpunan dari Y dengan $B_1 \subseteq B_2$, maka $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
 - (g) Jika B_1 dan B_2 merupakan subhimpunan dari Y dengan $B_1 \subseteq B_2$, maka $f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1)$.
 - (h) Jika A_1 dan A_2 merupakan subhimpunan dari X , maka $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
 - (i) Jika B_1 dan B_2 merupakan subhimpunan dari Y , maka $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 - (j) Jika A_1 dan A_2 merupakan subhimpunan dari X , maka $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
 - (k) Jika B_1 dan B_2 merupakan subhimpunan dari Y , maka $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
 - (l) Jika A_1 dan A_2 merupakan subhimpunan dari X , maka $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.
 - (m) Jika B_1 dan B_2 merupakan subhimpunan dari Y , maka $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Bab 3

Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

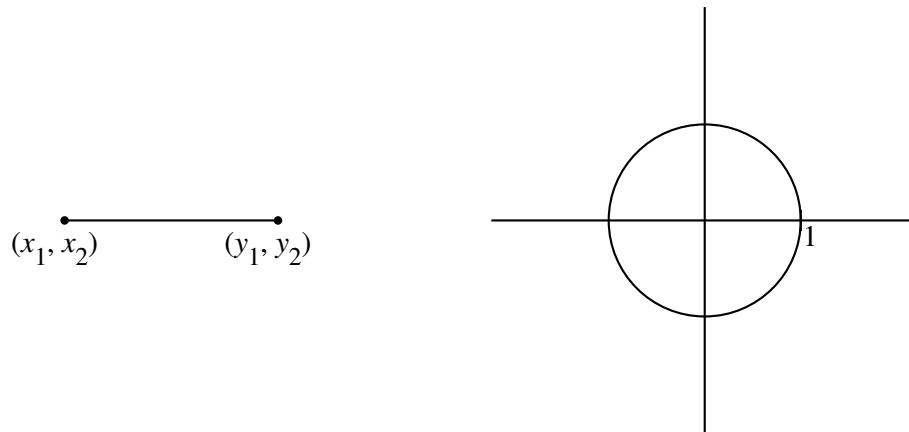
- Apa itu metrik dan apa itu ruang metrik?
- Apa perbedaan dan persamaan antara metrik Euklides, metrik taksi, dan metrik maksimum?

Pendahuluan

Ruang metrik merupakan contoh khusus ruang topologi. Ruang metrik adalah ruang yang dilengkapi dengan suatu metrik. Metrik adalah fungsi yang mengukur jarak antara titik-titik dalam ruang metrik.

Kita sudah mengenal satu metrik khusus, yaitu metrik Euklides d_E pada $\mathbb{R}^2$, yang didefinisikan oleh

$$d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$



Gambar 3.1 Jarak Euklides antara (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) , serta lingkaran satuan Euklides pada $\mathbb{R}^2$.

Dengan metrik ini, jarak antara dua titik (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut, sedangkan lingkarannya (himpunan titik yang berjarak 1 dari titik asal) berbentuk seperti lingkaran yang biasa kita bayangkan, sebagaimana diperlihatkan dalam [Gambar 3.1](#).

Seperti yang akan kita lihat, ada banyak metrik lain yang dapat didefinisikan pada $\mathbb{R}^n$ ataupun pada himpunan-himpunan lain.

Lema 3.2 Misalkan a dan b bilangan real. Maka

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bukti. Misalkan a dan b bilangan real. Untuk membuktikan lemma ini, kita meninjau beberapa kasus.

Kasus 1: $a \geq 0$ dan $b \geq 0$

Dalam kasus ini, $a + b$ tak negatif sehingga $|a| = a$, $|b| = b$, dan $|a + b| = a + b$. Dengan demikian,

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$$

Kasus 2: $a \leq 0$ dan $b \leq 0$

Dalam kasus ini, $a = -a'$ dan $b = -b'$, dengan a' dan b' tak negatif. Berdasarkan Kasus 1,

$$\begin{aligned} |a + b| &= |-(a' + b')| = |a' + b'| = a' + b' = |a'| + |b'| \\ &= |-a'| + |-b'| = |a| + |b|. \end{aligned}$$

Kasus 3: Salah satu dari a atau b positif dan yang lainnya negatif

Tanpa mengurangi keumuman, kita andaikan $a > 0$ dan $b < 0$. Sekali lagi, kita meninjau beberapa kasus. Perhatikan bahwa $b < 0$ mengakibatkan $a + b < a$.

- Andaikan $b \geq -2a$. Maka $a + b \geq -a$, sehingga $-a \leq a + b < a$. Akibatnya,

$$|a + b| \leq a = |a| < |a| + |b|.$$

- Kasus terakhir terjadi ketika $b < -2a$. Dalam kasus ini, $-b > 2a$, sehingga

$$|b| = -b > 2a = 2|a| > |a|.$$

Maka $a + b < a = |a| < |b|$. Terakhir, $a > 0$ mengakibatkan $a + b > b = -|b|$. Jadi,

$$-|b| < a + b < |b|$$

dan

$$|a + b| \leq |b| < |a| + |b|.$$

Ini membuktikan lemma kita untuk setiap pasangan a, b . ■

Aktivitas Persiapan 3.1 Perhatikan fungsi d_T yang memasangkan setiap pasangan titik dalam $\mathbb{R}^2$ dengan bilangan real

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Fungsi d_T ini kadang-kadang disebut **metrik taksi** atau **jarak taksi** karena jarak antara titik x dan y dapat dibayangkan sebagai jarak yang ditempuh dengan menyusuri ruas-ruas jalan kota, alih-alih bergerak langsung dari titik x ke titik y .

Setiap fungsi jarak seharusnya memenuhi sifat-sifat tertentu: jarak antara dua titik tidak boleh negatif; jarak dari titik A ke titik B harus sama dengan jarak dari titik B ke titik A ; jarak terpendek antara titik A dan B tidak boleh melebihi jumlah jarak dari A ke suatu titik C dan jarak dari C ke B ; dan jarak antara dua titik hanya boleh bernilai nol jika kedua titik tersebut sama. Dalam aktivitas ini, kita menentukan apakah d_T memiliki sifat-sifat tersebut. Misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ berada di dalam $\mathbb{R}^2$.

(a) Buktikan bahwa $d_T(x, y) \geq 0$.

(b) Buktikan bahwa $d_T(x, y) = d_T(y, x)$.

(c) Buktikan bahwa $d_T(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

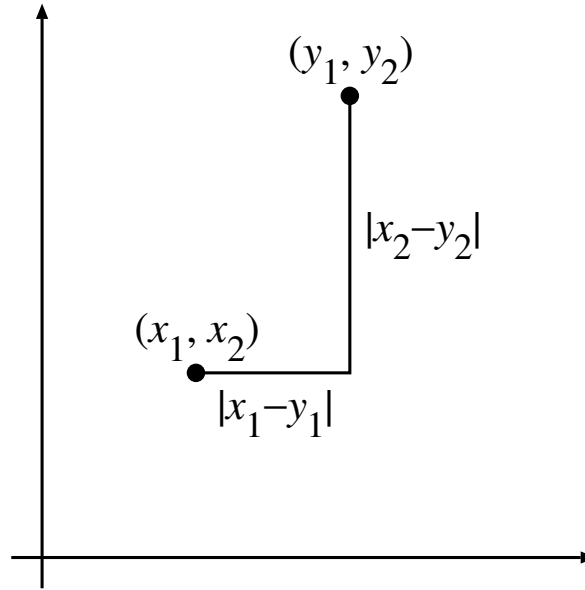
(d) Misalkan $z = (z_1, z_2)$ berada di dalam $\mathbb{R}^2$. Pelajari bukti [Lema 3.2](#), kemudian gunakan [Lema 3.2](#) untuk

menunjukkan bahwa

$$d_T(x, y) \leq d_T(x, z) + d_T(z, y).$$

(Apakah Anda memiliki pertanyaan tentang bukti lemma ini?)

- (e) Ilustrasi jarak taksi d_T antara titik (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) diperlihatkan dalam [Gambar 3.3](#). Gambarkanlah lingkaran satuan (himpunan titik yang berjarak 1 dari titik asal) menurut metrik taksi. Jelaskan alasan Anda.



Gambar 3.3 Jarak taksi antara (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) pada $\mathbb{R}^2$.

Metrik taksi dapat diperluas ke $\mathbb{R}^n$ untuk setiap $n \geq 1$ sebagai berikut. Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$, maka jarak taksi $d_T(x, y)$ dari x ke y didefinisikan sebagai

$$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Ruang Metrik

Dalam sebagian besar pengalaman kita mempelajari matematika, pembahasan berlangsung di $\mathbb{R}^2$, tempat kita mengukur jarak antara titik (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) dengan jarak Euklides standar d_E . Dalam aktivitas pendahuluan, kita melihat bahwa fungsi d_T memenuhi banyak sifat yang sama dengan d_E . Sifat-sifat ini memungkinkan kita menggunakan d_E maupun d_T sebagai fungsi jarak. Setiap fungsi jarak kita sebut **metrik**, dan setiap ruang tempat suatu metrik didefinisikan disebut **ruang metrik**.

Definisi 3.4 Suatu **metrik** pada ruang X adalah fungsi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ di dalam X ,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$, dan
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Sifat 1 dan 2 suatu metrik menyatakan bahwa metrik tersebut **definit positif**, sedangkan sifat 3 menyatakan bahwa metrik tersebut **simetris**. Sifat 4 dalam definisi biasanya merupakan sifat metrik yang paling sulit diverifikasi dan disebut **pertidaksamaan segitiga**.

Definisi 3.5 Suatu **ruang metrik** adalah pasangan (X, d) , dengan d suatu metrik pada ruang X .

Apabila metriknya jelas dari konteks, kita cukup menyebut X sebagai ruang metrik.

Kegiatan 3.2 Untuk setiap butir berikut, tentukan apakah (X, d) merupakan ruang metrik. Jika (X, d) merupakan ruang metrik, jelaskan alasannya. Jika (X, d) bukan ruang metrik, tentukan sifat metrik mana yang dipenuhi oleh d dan mana yang tidak. Jika (X, d) merupakan ruang metrik, berikan deskripsi geometris lingkaran satuan (himpunan semua titik di dalam X yang berjarak 1 dari unsur nol) di ruang tersebut.

(a) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$.

(b) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$

(c) $X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

(d) $X = C[0, 1]$, himpunan semua fungsi kontinu pada interval $[0, 1]$,

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Perlu diperhatikan bahwa tidak semua ruang metrik bersifat tak berhingga. Pada contoh berikut, kita membahas suatu metrik pada ruang berhingga.

Contoh 3.6 Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dan definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan nilai-nilai pada [Tabel 3.7](#).

Tabel 3.7 Tabel nilai fungsi d

	a	b	c
a	0	3	5
b	3	0	4
c	5	4	0

Menurut definisi, kita mempunyai $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, dengan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. Karena tabel tersebut simetris terhadap diagonalnya, kita dapat melihat bahwa $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$. Satu-satunya sifat yang masih perlu diverifikasi adalah pertidaksamaan segitiga. Jika $d(x, y) = 0$, maka

$$d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y)$$

untuk setiap $x, y, z \in X$. Jika $d(x, z) = 0$, maka $x = z$ dan

$$d(x, y) = d(z, y) \leq d(z, z) + d(z, y).$$

Jika $d(z, y) = 0$, maka $z = y$ dan

$$d(x, y) = d(x, z) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

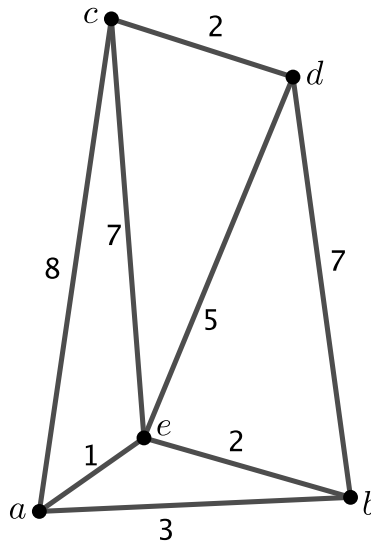
Dengan demikian, tersisa tiga kasus yang perlu dipertimbangkan, yaitu ketika x, y , dan z berbeda satu sama lain. Sekarang,

$$\begin{aligned} d(a, b) &= 3 \leq 5 + 4 = d(a, c) + d(c, b), \\ d(a, c) &= 5 \leq 3 + 4 = d(a, b) + d(b, c), \end{aligned}$$

$$d(b, c) = 4 \leq 3 + 5 = d(b, a) + d(a, c).$$

Jadi, d merupakan metrik pada X . □

Contoh 3.6 menunjukkan bahwa himpunan berhingga pun dapat menjadi ruang metrik. Bahkan, kita dapat membentuk ruang metrik berhingga dengan mengambil sebarang subhimpunan berhingga S dari ruang metrik (X, d) , lalu menggunakan pembatasan d pada S sebagai metrik. **Contoh 3.6** mengilustrasikan hal ini dengan menetapkan $a = (0, 0)$, $b = (3, 0)$, dan $c = (3, 4)$ di dalam $\mathbb{R}^2$. Dengan demikian, d merupakan pembatasan metrik Euklides pada himpunan X . Cara lain untuk membangun ruang metrik berhingga adalah memulai dengan himpunan titik yang berhingga, kemudian membuat graf yang menggunakan titik-titik tersebut sebagai simpul. Buatlah sisi-sisi sedemikian sehingga graf tersebut terhubung (artinya, terdapat lintasan dari setiap simpul ke setiap simpul lainnya), lalu berikan bobot pada sisi-sisinya seperti yang diilustrasikan pada **Gambar 3.8**. Selanjutnya, kita mendefinisikan metrik d pada S dengan menetapkan $d(x, y)$ sebagai panjang lintasan terpendek antara simpul x dan y di dalam graf. Sebagai contoh, $d(b, c) = d(b, e) + d(e, c) = 9$ pada graf ini.



Gambar 3.8 Graf untuk mendefinisikan suatu metrik.

Seperti metrik Euklides dan metrik taksi, butir (c) dalam **Kegiatan 3.2** dapat diperluas ke $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut. Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$, maka jarak maksimum $d_M(x, y)$ dari x ke y didefinisikan sebagai

$$d_M(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Metrik d_M disebut metrik **maksimum**. Pada bagian berikutnya, kita membuktikan bahwa metrik Euklides memang merupakan suatu metrik. Pembuktian bahwa d_T dan d_M merupakan metrik diserahkan kepada **Latihan 5** dan **Latihan 6**.

Metrik Euklides pada $\mathbb{R}^n$

Ruang metrik yang paling kita kenal adalah ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_E)$, dengan

$$d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Metrik d_E disebut metrik **standar** atau metrik **Euklides** pada $\mathbb{R}^2$.

Metrik Euklides ini dapat kita perumum dari $\mathbb{R}^2$ ke ruang real berdimensi berapa pun. Misalkan n bilangan bulat positif dan misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ serta $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Kita definisikan $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Dalam aktivitas berikutnya, kita akan menunjukkan bahwa d_E memenuhi tiga sifat pertama suatu metrik.

Kegiatan 3.3 Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$.

- (a) Tunjukkan bahwa $d_E(x, y) \geq 0$.
- (b) Tunjukkan bahwa $d_E(x, y) = d_E(y, x)$.
- (c) Tunjukkan bahwa jika $x = y$, maka $d_E(x, y) = 0$.
- (d) Tunjukkan bahwa jika $d_E(x, y) = 0$, maka $x = y$.

Membuktikan bahwa pertidaksamaan segitiga terpenuhi sering kali merupakan bagian tersulit dalam membuktikan bahwa suatu fungsi adalah metrik. Kita akan menguraikan pembuktian ini dengan bantuan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz.

Lema 3.9 Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz. Misalkan n bilangan bulat positif dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Maka

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right). \quad (3.1)$$

Kegiatan 3.4 Sebelum membuktikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, mari kita telaah pertidaksamaan tersebut dalam dua keadaan khusus.

- (a) Misalkan $x = (1, 4)$ dan $y = (3, 2)$ berada di dalam $\mathbb{R}^2$. Verifikasikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz dalam keadaan ini.
- (b) Misalkan $x = (1, 2, -3)$ dan $y = (-4, 0, -1)$ berada di dalam $\mathbb{R}^3$. Verifikasikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz dalam keadaan ini.

Sekarang kita buktikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz.

Bukti. Misalkan n bilangan bulat positif dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Untuk memverifikasi (3.1), cukup ditunjukkan bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Hal ini sulit dilakukan secara langsung, tetapi ada siasat yang dapat kita gunakan. Perhatikan bentuk

$$\sum (x_i - \lambda y_i)^2.$$

(Semua penjumlahan kita dipahami berlangsung dari 1 sampai n , sehingga batas penjumlahan tidak akan kita tuliskan lagi sepanjang sisa pembuktian.) Sekarang

$$0 \leq \sum (x_i - \lambda y_i)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum (x_i^2 - 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2) \\
&= \left(\sum y_i^2 \right) \lambda^2 - 2 \left(\sum x_i y_i \right) \lambda + \left(\sum x_i^2 \right). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Untuk menafsirkan bentuk terakhir ini dengan lebih jelas, misalkan $a = \sum y_i^2$, $b = -2 \sum x_i y_i$, dan $c = \sum x_i^2$. Jika $y = (0, \dots, 0)$, pertidaksamaan yang hendak dibuktikan langsung berlaku. Jadi, dalam argumen berikutnya kita dapat menganggap $y \neq (0, \dots, 0)$, sehingga $a > 0$. Pertidaksamaan yang diberikan oleh (3.2) kemudian dapat ditulis dalam bentuk

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0.$$

Jadi, kita memiliki polinom kuadrat $p(\lambda)$ yang tidak pernah bernilai negatif. Hal ini menyiratkan bahwa polinom kuadrat $p(\lambda)$ memiliki paling banyak satu akar real. Rumus kuadrat memberikan akar-akar $p(\lambda)$ sebagai

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jika $b^2 - 4ac > 0$, maka $p(\lambda)$ memiliki dua akar real. Oleh karena itu, agar $p(\lambda)$ memiliki paling banyak satu akar real, harus berlaku

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4 \left(\sum x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum y_i^2 \right) \left(\sum x_i^2 \right)$$

atau

$$\left(\sum y_i^2 \right) \left(\sum x_i^2 \right) \geq \left(\sum x_i y_i \right)^2.$$

Dengan demikian, Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz terbukti. ■

Salah satu akibat Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz yang kita perlukan untuk menunjukkan bahwa d_E adalah metrik ialah hasil berikut.

Corollary 3.10 *Misalkan n bilangan bulat positif dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Maka*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Kegiatan 3.5 Sebelum membuktikan akibat tersebut, mari kita telaah hasil itu dalam dua keadaan khusus.

- (a) Misalkan $x = (1, 4)$ dan $y = (3, 2)$ berada di dalam $\mathbb{R}^2$. Verifikasikan [Corollary 3.10](#) dalam keadaan ini.
- (b) Misalkan $x = (1, 2, -3)$ dan $y = (-4, 0, -1)$ berada di dalam $\mathbb{R}^3$. Verifikasikan [Corollary 3.10](#) dalam keadaan ini.

Sekarang kita buktikan [Corollary 3.10](#).

Bukti. Misalkan n bilangan bulat positif dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Sekarang

$$\begin{aligned}
\sum (x_i + y_i)^2 &= \sum (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) \\
&= \sum x_i^2 + 2 \sum x_i y_i + \sum y_i^2 \\
&\leq \sum x_i^2 + 2 \left(\sqrt{\sum x_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum y_i^2} \right) + \sum y_i^2
\end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum y_i^2} \right)^2.$$

Mengambil akar kuadrat kedua ruas menghasilkan pertidaksamaan yang diinginkan. ■

Sekarang kita dapat menyelesaikan pembuktian bahwa d_E adalah metrik.

Kegiatan 3.6 Misalkan n bilangan bulat positif dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, serta $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ berada di dalam $\mathbb{R}^n$. Gunakan [Corollary 3.10](#) untuk menunjukkan bahwa

$$d_E(x, y) \leq d_E(x, z) + d_E(z, y).$$

Dengan demikian, pembuktian bahwa metrik Euklides memang merupakan metrik telah selesai.

Kita telah melihat beberapa metrik dalam bagian ini, dan sebagian di antaranya memiliki nama khusus. Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

- Metrik Euklides d_E , dengan

$$\begin{aligned} d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

- Metrik taksi d_T , dengan

$$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

- Metrik maksimum d_M , dengan

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}. \end{aligned}$$

Kita baru menunjukkan bahwa d_T dan d_M merupakan metrik pada $\mathbb{R}^2$, tetapi argumen serupa berlaku di dalam $\mathbb{R}^n$. Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 5](#) dan [Latihan 6](#). Selain itu, **metrik diskret**

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y \end{cases}$$

menjadikan setiap himpunan X sebagai ruang metrik. Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 1](#).

Ringkasan

Gagasan penting yang telah kita bahas dalam bab ini antara lain sebagai berikut.

- Metrik pada suatu ruang X adalah fungsi yang mengukur jarak antara unsur-unsur ruang tersebut. Secara lebih formal, metrik pada ruang X adalah fungsi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sedemikian sehingga
 1. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$,
 2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ di dalam X ,
 3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$, dan

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Ruang metrik adalah suatu ruang beserta metrik yang didefinisikan pada ruang tersebut.

- Metrik Euklides, metrik taksi, dan metrik maksimum semuanya merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$, sehingga ketiganya memberikan cara untuk mengukur jarak antara titik-titik di $\mathbb{R}^n$. Ketiga metrik ini berbeda dalam cara mendefinisikan jarak.
 - Metrik Euklides adalah metrik standar yang telah kita gunakan sepanjang pengalaman kita mempelajari matematika. Untuk unsur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$, metrik Euklides d_E didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

Dengan metrik ini, lingkaran satuan di $\mathbb{R}^2$ (himpunan titik yang berjarak 1 dari titik asal) adalah lingkaran satuan standar yang kita kenal dari geometri Euklides.

- Metrik taksi d_T didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d_T(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Lingkaran satuan di $\mathbb{R}^2$ dengan metrik taksi, apabila dilihat dalam geometri Euklides, adalah persegi dengan titik sudut $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, dan $(0, -1)$.

- Metrik maksimum d_M didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}. \end{aligned}$$

Dengan metrik maksimum, lingkaran satuan di $\mathbb{R}^2$, apabila dilihat dalam geometri Euklides, adalah persegi dengan titik sudut $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, dan $(1, -1)$.

Latihan

Definisi 3.11 Misalkan (Y, d_Y) suatu ruang metrik. Untuk setiap bilangan real positif r , **bola terbuka yang berpusat di b dan berjari-jari r** dalam (Y, d_Y) adalah himpunan

$$B(b, r) = \{y \in Y \mid d_Y(y, b) < r\}.$$

1. Misalkan X suatu himpunan. Tunjukkan bahwa fungsi d (metrik diskret) yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y \end{cases}$$

merupakan metrik.

2. Misalkan $X = \{1, 3, 5\} \subset \mathbb{Z}$ dan definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = xy - 1 \pmod{n}$. Artinya, $d(x, y)$ adalah sisa pembagian $xy - 1$ oleh n .

- Untuk setiap nilai n , tentukan apakah d mendefinisikan suatu metrik pada X . Buktikan jawaban Anda.
 - Sebagai motivasi untuk definisi berikut, pada $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi suatu metrik (tidak harus fungsi d di atas), lingkaran satuan adalah himpunan semua titik di $\mathbb{R}^2$ yang berjarak 1 dari titik asal. Jika jaraknya kita syaratkan kurang dari 1, kita memperoleh apa yang disebut bola terbuka. Definisi tersebut berlaku dalam setiap ruang metrik. Jika (X, d) merupakan ruang metrik untuk nilai n yang diberikan, tentukan semua bola terbuka dalam X yang berpusat di 1. Jika (X, d) bukan ruang metrik, jelaskan alasannya.
- (a) $n = 4$
- (b) $n = 8$
3. Misalkan Q himpunan semua bilangan rasional dalam bentuk paling sederhana. Bilangan rasional $\frac{r}{s}$ berada dalam bentuk paling sederhana jika $s > 0$ serta r dan s tidak mempunyai faktor persekutuan yang lebih besar dari 1. Definisikan $d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ dengan
- $$d\left(\frac{a}{b}, \frac{r}{s}\right) = \max\{|a - r|, |b - s|\}.$$
- (a) Buktikan bahwa d merupakan metrik.
- (b) Suatu metrik memungkinkan kita menentukan unsur-unsur mana dalam ruang metrik yang “berdekatan”. Deskripsikan himpunan unsur di Q yang berjarak kurang dari 1 terhadap $\frac{2}{3}$ dengan menggunakan metrik d ini. Dengan kata lain, deskripsikan bola terbuka berpusat di $\frac{2}{3}$ dengan jari-jari 1 (lihat Definisi 3.11).
- (c) Jika a, b , dan c merupakan unsur suatu ruang metrik (X, d_X) , kita mengatakan bahwa b berada di antara a dan c jika $d_X(a, c) = d_X(a, b) + d_X(b, c)$. Dengan metrik Euklides pada $\mathbb{Q}$, terdapat tak berhingga banyak bilangan rasional yang berbeda di antara 0 dan 1 (yaitu bilangan rasional di antara 0 dan 1 yang terletak pada garis Euklides melalui 0 dan 1). Deskripsikan semua titik dalam $(\mathbb{Q}, d)$ yang berada di antara 0 dan 1.
4. Misalkan $(\mathbb{Q}, d)$ ruang metrik dari Latihan 3. Jika a, b , dan c merupakan unsur suatu ruang metrik (X, d_X) , kita mengatakan bahwa b berada **di antara** a dan c jika $d_X(a, c) = d_X(a, b) + d_X(b, c)$. Dengan metrik Euklides pada $\mathbb{Q}$, terdapat tak berhingga banyak bilangan rasional yang berbeda di antara 0 dan 1 (yaitu bilangan rasional di antara 0 dan 1 yang terletak pada garis Euklides melalui 0 dan 1). Dalam latihan ini kita menyelidiki bilangan-bilangan yang berada di antara bilangan lain dalam ruang $(\mathbb{Q}, d)$.
- (a) Temukan semua unsur dalam $(\mathbb{Q}, d)$ yang berada di antara 0 dan 1.
- (b) Manakah yang lebih dekat ke 0 dalam $(\mathbb{Q}, d)$: 1 atau $\frac{1}{3}$?
- (c) Sekarang temukan semua unsur dalam $(\mathbb{Q}, d)$ yang berada di antara 0 dan $\frac{1}{3}$.
5. Buktikan bahwa metrik taksi d_T merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$.
6. Misalkan A dan B subhimpunan berhingga tak kosong dari $\mathbb{R}$, dan misalkan $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
- (a) Buktikan bahwa $\max(A + B) \leq \max A + \max B$.
- (b) Buktikan bahwa metrik maksimum d_M merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$.
7. Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kita tuliskan $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definisikan $d_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d_H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ |x| + |y| & \text{selain itu} \end{cases}$$

- (a) Tunjukkan bahwa d_H merupakan metrik (disebut **metrik hub**).
- (b) (i) Misalkan $a = (\frac{1}{2}, 0)$. Deskripsikan secara eksplisit titik-titik yang termasuk dalam himpunan $B(a, 1)$ di $(\mathbb{R}^2, d_H)$. (Lihat [Latihan 2](#) untuk definisi bola terbuka.)
- (ii) Misalkan $a = (3, 4)$. Deskripsikan secara eksplisit titik-titik yang termasuk dalam himpunan $B(a, 1)$ di $(\mathbb{R}^2, d_H)$.
- (iii) Sekarang deskripsikan secara eksplisit semua bola terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_H)$.
8. Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dan p suatu bilangan prima. Untuk setiap pasangan bilangan bulat berbeda m dan n , terdapat bilangan bulat $t = t(m, n)$ sedemikian sehingga $|m - n| = k \times p^t$, dengan p tidak membagi k . Sebagai contoh, jika $p = 5$, $m = 34$, dan $n = 7$, maka $m - n = 27 = 27 \times 5^0$. Jadi $t(34, 7) = 0$. Namun, jika $m = 54$ dan $n = 4$, maka $m - n = 50 = 2 \times 5^2$. Jadi $t(54, 4) = 2$. Definisikan $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = n \\ \frac{1}{p^t} & \text{jika } m \neq n. \end{cases}$$

- (a) Tentukan nilai $d(62, 170)$ dengan $p = 3$ dan $d(14008, 2003)$ dengan $p = 7$.
- (b) Buktikan bahwa jika a, b , dan c berada di $\mathbb{Z}$, maka
- $$t(a, c) \geq \min\{t(a, b), t(b, c)\}.$$
- (c) Buktikan bahwa $(\mathbb{Z}, d)$ merupakan ruang metrik.
- (d) Misalkan $p = 3$. Deskripsikan himpunan semua unsur x dalam $(\mathbb{Z}, d)$ yang memenuhi $d(x, 0) = 1$.
- (e) Tetap gunakan $p = 3$. Deskripsikan himpunan semua unsur x dalam $(\mathbb{Z}, d)$ yang memenuhi $d(x, 0) < \frac{1}{2}$.
9. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik. Kita dapat menjadikan hasil kali Kartesius $X \times Y$ suatu ruang metrik dengan mendefinisikan metrik d' pada $X \times Y$ sebagai berikut. Jika (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) berada di $X \times Y$, maka

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Anda boleh menganggap tanpa bukti bahwa d' merupakan metrik pada $X \times Y$.

- (a) Misalkan $(X, d_X) = (\mathbb{R}^2, d_M)$ dan $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}^2, d_T)$. Misalkan $u = ((1, 2), (1, -1))$ dan $v = ((0, 5), (2, -2))$. Berapakah

$$d'(u, v)?$$

Ingat bahwa

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

dan

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

- (b) Misalkan $(X, d_X) = (\mathbb{R}, d_E)$ dan $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d)$, dengan d metrik diskret. Misalkan

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ dan } -1 \leq y \leq 1\}$$

di $X \times Y$. Misalkan $a = (0, 1)$ di $X \times Y$. Deskripsikan secara geometris bentuk bola terbuka $B(a, 1)$ dalam ruang hasil kali $X \times Y$. Gambarlah bola terbuka ini.

10. Misalkan $X = \mathbb{R}^+$, himpunan bilangan real positif, dan definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = |\ln(y/x)|.$$

Apakah d merupakan metrik pada X ? Buktikan jawaban Anda.

11. Misalkan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}.$$

Tunjukkan bahwa d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$. (Petunjuk: Untuk pertidaksamaan segitiga, perhatikan bahwa $d(x, y) = f(|x - y|)$, dengan $f(t) = \frac{t}{t+1}$, dan f merupakan fungsi naik.)

12. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan k suatu konstanta. Definisikan $kd : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

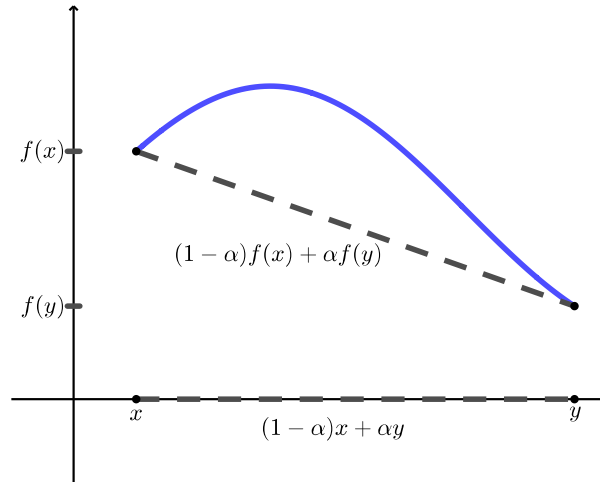
$$(kd)(x, y) = kd(x, y).$$

Dengan syarat apa, jika ada, kd merupakan metrik pada X ? Jelaskan alasan Anda.

13. Fungsi bernilai real f pada suatu interval disebut **cekung** jika

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \geq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad (3.3)$$

untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ dan setiap x serta y dalam interval tersebut. Perhatikan bahwa ekspresi $(1 - \alpha)x + \alpha y$ linear terhadap α , bernilai x ketika $\alpha = 0$, dan bernilai y ketika $\alpha = 1$. Jadi $(1 - \alpha)x + \alpha y$ merupakan parameterisasi ruas garis yang menghubungkan x dengan y . Seperti diperlihatkan Gambar 3.12, persamaan (3.3) menyatakan bahwa grafik fungsi cekung f pada setiap interval $[x, y]$ terletak di atas garis sekan yang menghubungkan titik $(x, f(x))$ dan $(y, f(y))$.



Gambar 3.12 Suatu fungsi cekung.

- (a) Misalkan $f(x) = -x^2$ memetakan $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides standar. Tunjukkan bahwa f cekung pada interval $[-1, 1]$.

Petunjuk. Mulailah dari fakta bahwa $\alpha(1 - \alpha)(x - y)^2 \geq 0$.

- (b) Tunjukkan bahwa jika f merupakan fungsi cekung pada $[0, \infty)$ dan $f(0) \geq 0$. Jika a dan b berada

dalam interval tersebut, maka

$$f(a) + f(b) \geq f(a + b).$$

Petunjuk. Tinjau (3.3) dengan $y = 0$. Lalu gunakan fakta bahwa $\frac{a}{a+b}$ berada di $[0, 1]$.

- (c) Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ suatu fungsi naik dan cekung sedemikian sehingga $f(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$. Buktikan bahwa $f \circ d$ merupakan metrik pada X .
14. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Fungsi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $d(x, y) = (x - y)^2$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.
- (b) Setiap himpunan tak kosong dapat dijadikan ruang metrik.
- (c) Pada setiap himpunan yang memuat sekurang-kurangnya dua unsur, dapat didefinisikan tak berhingga banyak metrik.
- (d) Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik dengan $|X| \geq 2$. Maka fungsi $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $d((a, b), (c, d)) = d_X(a, c) + d_Y(b, d)$ merupakan metrik pada $X \times Y$.
- (e) Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Jika X tak berhingga, maka daerah hasil d juga merupakan himpunan tak berhingga.

Bab 4

Penerapan Ruang Metrik

Pendahuluan

Pada bagian ini, kita menelaah dua penerapan ruang metrik.

Metrik Hamming

Dalam masyarakat kita, banyak sekali informasi dikomunikasikan secara elektronik. Transaksi bank, program televisi, komunikasi militer, panggilan telepon seluler, citra digital, dan hampir setiap pertukaran yang dapat dibayangkan dapat didigitalkan dan dikirimkan secara elektronik, atau memang sudah dilakukan dengan cara tersebut. Dalam banyak situasi, kita perlu membandingkan satu kumpulan data dengan kumpulan lainnya (misalnya, pencarian untai teks atau pencocokan citra di Internet, serta untaian DNA), dan metrik sering digunakan untuk tujuan ini. Komputer bekerja dengan sistem biner, artinya komputer hanya mengenali nol dan satu. Karena itu, pesan teks digital merupakan suatu untai nol dan satu. Dengan kata lain, pesan digital merupakan kumpulan unsur dalam ruang X^n untuk suatu bilangan bulat positif n , dengan $X = \{0, 1\}$. Setiap unsur dalam X^n disebut **kata**—yakni, kata adalah unsur dalam X^n yang dinyatakan dalam bentuk $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Seperti halnya dalam bahasa Inggris, yang tidak setiap kombinasi hurufnya membentuk kata yang bermakna, tidak setiap kata dapat dikenali sebagai bagian dari pesan yang dapat dipahami. Sebagai contoh, kita dapat mengodekan huruf-huruf dalam alfabet dengan menetapkan bilangan 1 sampai 26 pada huruf-huruf tersebut, kemudian menjadikannya unsur dalam X^n dengan mengonversinya ke bentuk biner. Himpunan semua kata yang dapat dipahami disebut **kode**. Jadi, kode hanyalah suatu subhimpunan X^n yang unsur-unsurnya disepakati oleh semua pihak sebagai kata-kata yang bermakna. Kata-kata dalam suatu kode disebut **kata kode**. Untuk menangani masalah yang terjadi dalam pengiriman pesan digital, seperti mengacak pesan (**pengodean**), memulihkan pesan dari bentuk teracak (**pendekodean**), serta mendeteksi dan memperbaiki galat dalam pesan, kita perlu memiliki cara untuk mengukur jarak antarkata. Salah satu caranya adalah menggunakan metrik Hamming.

Definisi 4.1 Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ merupakan kata-kata dalam X^n . **Jarak Hamming** d_H antara x dan y adalah

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Ingatlah bahwa untuk setiap i , baik x_i maupun y_i bernilai 0 atau 1. Oleh karena itu,

$$|x_i - y_i| = \begin{cases} 0 & \text{jika } x_i = y_i \\ 1 & \text{jika } x_i \neq y_i. \end{cases}$$

Dengan kata lain, $d_H(x, y)$ menghitung banyaknya komponen tempat x dan y berbeda.

Kegiatan 4.1

(a) Jelaskan mengapa d_H merupakan suatu metrik.

(b) Misalkan kita membuat kode

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$$

dalam X^6 , dengan

$$\begin{array}{lll} c_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) & c_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 1) & c_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ c_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 1) & c_5 = (0, 0, 0, 1, 1, 0) & c_6 = (0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ c_7 = (0, 0, 1, 1, 0, 0) & c_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 1) & \end{array}$$

Artinya, kata-kata $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$, dan c_8 merupakan satu-satunya kata yang dapat menyusun suatu pesan. Hitung $d_H(c_2, c_8)$.

(c) Misalkan kita menerima pesan

$$(0, 0, 0, 1, 1, 1) (0, 0, 1, 1, 0, 0) (1, 0, 0, 0, 0, 0) (0, 0, 0, 0, 1, 1) (0, 0, 1, 0, 0, 1). \quad (4.1)$$

- (i) Bagaimana kita mengetahui bahwa telah terjadi galat dalam transmisi pesan yang kita terima?
- (ii) Untuk memperbaiki galat dalam pesan yang diterima ini, kita mengganti kata-kata yang salah dengan kata kode dalam C yang paling dekat dengan masing-masing kata tersebut. Perbaiki lah pesan ini. (Perhatikan bahwa mungkin terdapat lebih dari satu kemungkinan penggantian. Temukan semua kemungkinannya.)

Metrik Levenshtein

Metrik Levenshtein merupakan salah satu ukuran jarak yang digunakan para peneliti untuk memahami DNA. DNA tersusun atas dua rantai nukleotida, yang saling berpilin membentuk heliks ganda. Nukleotida terdiri atas empat jenis: adenin (A), sitosin (C), guanin (G), dan timin (T). Nukleotida pada kedua rantai dalam suatu untai DNA saling berpasangan (A dengan T dan C dengan G), sehingga nukleotida pada satu rantai menentukan nukleotida pada rantai lainnya. Karena itu, kita dapat merepresentasikan suatu untai DNA dengan untai huruf dari alfabet $\{A, C, G, T\}$. Salah satu persoalan yang dihadapi peneliti DNA adalah cara membandingkan dua untai DNA, dan metrik Levenshtein merupakan salah satu cara untuk mengukur jarak di antara keduanya. Metrik lain dapat digunakan, tetapi metrik Levenshtein sesuai untuk tugas ini karena beberapa alasan. Selama evolusi, perubahan pada urutan DNA terjadi karena substitusi nukleotida, atau karena penyisipan maupun penghapusan nukleotida. Perubahan evolusioner ini dapat dimodelkan lebih baik oleh operasi-operasi yang menentukan jarak Levenshtein daripada oleh metrik lain. Selain itu, metrik Levenshtein dapat digunakan untuk menghitung jarak antara untai-untai yang panjangnya berbeda. Metrik Levenshtein juga diterapkan dalam pemeriksa ejaan, pengenalan wicara, dan deteksi plagiarisme otomatis. Untuk memahami cara menghitung metrik Levenshtein, perhatikan pertanyaan tentang seberapa jauh jarak antara kata “green” dan “grease”.

Untuk membandingkan kedua kata ini, kita harus dapat mengubah, menambahkan, atau menghapus huruf. Jika $x = x_1x_2 \cdots x_n$ merupakan suatu untai huruf, kita memperbolehkan operasi-operasi berikut:

penghapusan: ganti x dengan $x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_n$ untuk suatu i ,

- penyisipan:** ganti x dengan $x_1 \cdots x_i y x_{i+1} \cdots x_n$, dengan y merupakan huruf yang diperbolehkan dan $0 \leq i \leq n$,
- substitusi:** ganti x dengan $x_1 \cdots x_{i-1} y x_{i+1} \cdots x_n$, dengan y merupakan huruf yang diperbolehkan dan $1 \leq i \leq n$.

Kegiatan 4.2

- (a) Dengan menggunakan operasi-operasi yang diperbolehkan, ubahlah kata “green” menjadi kata “grease”. Sebutkan secara spesifik setiap operasi yang Anda gunakan. (Catatan: untai-untai huruf antara tidak harus membentuk kata yang dapat dikenali.) Berapa banyak operasi yang Anda gunakan?

Jika diperlukan tiga operasi untuk mengubah “green” menjadi “grease”, kita dapat mengatakan bahwa jarak antara “green” dan “grease” paling besar 3. Akan tetapi, mungkin saja “green” dapat diubah menjadi “grease” dengan kurang dari 3 operasi, sehingga penilaian kita tentang jarak antara kedua kata tersebut dapat berubah. Secara umum, untuk mendefinisikan jarak Levenshtein d_L antara untai x dan untai y di atas suatu alfabet tetap Σ , misalkan m_d menyatakan banyaknya penghapusan, m_i menyatakan banyaknya penyisipan, dan m_s menyatakan banyaknya substitusi yang digunakan untuk mengubah x menjadi y . Mungkin terdapat banyak kombinasi berbeda dari m_d , m_i , dan m_s yang mengubah x menjadi y , sehingga kita menginginkan jumlah terkecil.

Definisi 4.2 Jarak Levenshtein $d_L(x, y)$ antara untai x dan y adalah

$$d_L(x, y) = \min\{m_d + m_i + m_s\}.$$

Kegiatan 4.3

- (a) Buktikan bahwa fungsi jarak Levenshtein benar-benar merupakan metrik pada himpunan Σ^* semua untai berhingga di atas alfabet tetap Σ (baik yang membentuk kata bermakna maupun tidak).
- (b) Sebuah pemeriksa ejaan memperbaiki kata yang salah eja “tupotagry”. Dengan menggunakan metrik Levenshtein, kata manakah yang akan dipilih pemeriksa ejaan sebagai kata yang paling dekat dengan “tupotagry”? Mengapa?

”topography” ”topology” ”tautology”

Bab 5

Batas Bawah Terbesar

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan batas bawah dan batas bawah terbesar dari suatu subhimpunan $\mathbb{R}$?
- Apa yang dimaksud dengan batas atas dan batas atas terkecil dari suatu subhimpunan $\mathbb{R}$?
- Bagaimana batas bawah terbesar digunakan untuk mendefinisikan jarak dari suatu titik ke suatu himpunan? Mengapa batas bawah terbesar perlu digunakan?

Pendahuluan

Bilangan real memiliki suatu sifat khusus yang, antara lain, memungkinkan kita mendefinisikan jarak antara suatu titik dan suatu himpunan di ruang metrik. Sifat tersebut juga memungkinkan kita mendefinisikan jarak antarsubhimpunan pada jenis ruang metrik tertentu, sehingga terbentuk suatu ruang metrik yang sama sekali baru, yang unsur-unsurnya adalah subhimpunan dari ruang metrik semula. Dalam aktivitas ini, kita akan menelaah sifat bilangan real tersebut.

Kita mulai dengan meninjau cara mendefinisikan jarak antara suatu bilangan real dan suatu interval di $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides d_E yang didefinisikan oleh

$$d_E(x, y) = |x - y|.$$

Misalkan $x = 1$ dan misalkan A adalah interval tertutup $[-1, 0]$. Wajar jika kita mengusulkan bahwa jarak antara titik x dan himpunan A , yang dinotasikan dengan $d_E(x, A)$, seharusnya merupakan jarak dari titik x ke titik di A yang paling dekat dengan x . Jadi, dalam kasus ini kita akan mengatakan

$$d_E(x, A) = d_E(x, [-1, 0]) = d_E(x, 0) = 1.$$

Hal ini mungkin mengarahkan kita untuk mengusulkan bahwa jarak dari suatu titik x ke suatu himpunan A , yang dinotasikan dengan $d_E(x, A)$, adalah jarak minimum dari titik tersebut ke sebarang titik di dalam himpunan itu, yaitu $d_E(x, A) = \min\{d_E(x, a) \mid a \in A\}$.

Bagaimana jika kita mengubah himpunan A menjadi interval terbuka $(-1, 0)$? Lalu, berapakah seharusnya $d_E(x, A)$, atau apakah jarak ini seharusnya ada? Jika kita memandang jarak antara suatu titik dan suatu himpunan sebagai ukuran seberapa jauh kita harus bergerak dari titik tersebut hingga mencapai himpunan itu, maka dalam kasus $x = 1$ dan $A = (-1, 0)$, segera setelah kita menempuh jarak lebih dari 1 dari x ke arah A , kita mencapai himpunan A . Jadi, secara intuitif kita dapat mengatakan bahwa $d_E(x, (-1, 0)) = 1$

juga. Namun, kita tidak dapat mendefinisikan jarak ini sebagai jarak dari x ke suatu titik di A karena $0 \notin A$. Kita memerlukan cara lain untuk merumuskan gagasan jarak dari suatu titik ke suatu himpunan.

Dalam kasus seperti ini, dengan $x = 1$ dan $A = (-1, 0)$, kita dapat menelaah himpunan $T = \{d_E(x, a) \mid a \in A\}$ dan mencermati beberapa fakta tentang himpunan tersebut. Sebagai contoh, himpunan T merupakan subhimpunan dari bilangan real tak negatif. Selain itu, dalam contoh ini tidak ada bilangan di T yang lebih kecil dari 1. Karena sifat ini, kita akan menyebut bilangan 1 sebagai **batas bawah** untuk T . Secara umum,

Definisi 5.1 Misalkan S adalah subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$. Suatu **batas bawah** untuk S adalah bilangan real m sedemikian sehingga $m \leq s$ untuk setiap $s \in S$.

Jika suatu subhimpunan S dari $\mathbb{R}$ memiliki batas bawah, kita mengatakan bahwa S **terbatas di bawah**. Jadi, himpunan $T = \{d_E(1, a) \mid a \in (-1, 0)\}$ terbatas di bawah oleh 1. Himpunan T juga terbatas di bawah oleh 0.5 dan 0. Bahkan, setiap bilangan yang lebih kecil dari 1 merupakan batas bawah untuk T . Namun, gagasan pentingnya adalah bahwa tidak ada bilangan yang lebih besar dari 1 yang merupakan batas bawah untuk T . Karena itu, kita menyebut 1 sebagai **batas bawah terbesar** dari T . Secara umum,

Definisi 5.2 Misalkan S adalah subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah. Suatu **batas bawah terbesar** untuk S adalah bilangan real m sedemikian sehingga memenuhi dua syarat berikut.

1. m merupakan batas bawah untuk S ; dan
2. jika k merupakan batas bawah untuk S , maka $m \geq k$.

Batas bawah terbesar juga disebut **infimum**. Sekarang kita dapat menggunakan gagasan batas bawah terbesar ini untuk mendefinisikan jarak antara 1 dan $A = (-1, 0)$ sebagai batas bawah terbesar dari himpunan $\{d_E(1, a) \mid a \in (-1, 0)\}$. Namun, ada beberapa pertanyaan yang perlu kita jawab sebelum dapat melakukannya. Salah satunya adalah apakah setiap subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah memiliki infimum. Jawaban atas pertanyaan ini adalah ya, dan kita akan menerima hasil ini sebagai suatu aksioma dalam sistem bilangan real (yang sering disebut **aksioma kelengkapan**).

Aktivitas Persiapan 5.1

- (a) Apakah setiap subhimpunan $\mathbb{R}$ memiliki batas bawah? Jelaskan. (Jika suatu subhimpunan $\mathbb{R}$ memiliki batas bawah, kita mengatakan bahwa himpunan tersebut **terbatas di bawah**.)
- (b) Manakah dari subhimpunan S dari $\mathbb{R}$ berikut yang terbatas di bawah? Jika himpunannya terbatas di bawah, berapakah infimumnya?
 - (i) $S = \{x \mid 3x^2 - 12x + 3 < 0\}$
 - (ii) $S = \{3x^3 - 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$
 - (iii) $S = \{2^r + 3^s \mid r, s \in \mathbb{Z}^+\}$
- (c) Bagaimana cara mendefinisikan batas atas terkecil dari suatu subhimpunan S dari $\mathbb{R}$?

Jarak dari Titik ke Himpunan

Metrik digunakan untuk menetapkan keterpisahan antarobjek. Ruang topologi dapat dikelompokkan ke dalam berbagai kategori berdasarkan seberapa baik jenis-jenis himpunan tertentu dapat dipisahkan. Kita telah mendefinisikan metrik sebagai fungsi yang mengukur jarak antartitik di suatu ruang metrik, dan dalam aktivitas ini kita memperluas gagasan tersebut untuk mengukur jarak antara sebuah titik dan suatu subhimpunan di ruang metrik. Akan tetapi, sebelum itu kita perlu menjawab dua pertanyaan. Pertanyaan pertama telah kita kemukakan dalam aktivitas pendahuluan. Kita akan mengasumsikan **aksioma kelengkapan** bagi

bilangan real, yakni bahwa setiap subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah selalu mempunyai batas bawah terbesar. Pertanyaan kedua adalah apakah batas bawah terbesar itu unik.

Kegiatan 5.2 Misalkan S suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah, dan asumsikan bahwa S mempunyai batas bawah terbesar. Dalam aktivitas ini, kita akan menunjukkan bahwa infimum S itu unik.

- Metode apa yang dapat kita gunakan untuk membuktikan bahwa S hanya mempunyai satu batas bawah terbesar?
- Misalkan m dan m' keduanya merupakan batas bawah terbesar untuk S . Mengapa m dan m' keduanya merupakan batas bawah untuk S ?
- Dua hal apa yang dinyatakan sifat kedua batas bawah terbesar mengenai hubungan antara m dan m' ?
- Mengapa batas bawah terbesar dari S harus unik?

Setelah meninjau keberadaan dan keunikan batas bawah terbesar, kini kita dapat mengatakan bahwa setiap subhimpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah mempunyai batas bawah terbesar yang unik. Kita menggunakan notasi $\text{glb}(S)$ (atau $\text{inf}(S)$ untuk **infimum** dari S) bagi batas bawah terbesar dari S . Terdapat pula **batas atas terkecil** ($\text{lub}(S)$, atau $\text{sup}(S)$ untuk **supremum**) bagi suatu subhimpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas.

Sekarang kita dapat mendefinisikan secara formal jarak antara sebuah titik dan suatu subhimpunan di ruang metrik.

Definisi 5.3 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, misalkan $x \in X$, dan misalkan A suatu subhimpunan tak kosong dari X . **Jarak dari x ke A** adalah

$$\inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Kita menotasikan jarak dari x ke A dengan $d(x, A)$. Ketika menghitung jarak seperti ini, metrik yang mendasarinya harus dipahami dengan jelas.

Kegiatan 5.3 Dalam aktivitas ini, kita menelaah beberapa fakta mengenai jarak antara sebuah titik dan suatu himpunan. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, misalkan $x \in X$, dan misalkan A suatu subhimpunan tak kosong dari X .

- Mengapa $d(x, A)$ pasti ada?
- Jika $d(x, A) = 0$, apakah harus berlaku $x \in A$?

Ringkasan

Gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini antara lain sebagai berikut.

- Batas bawah untuk subhimpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah adalah bilangan real m sedemikian sehingga $m \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Batas bawah terbesar (atau infimum) untuk subhimpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah adalah bilangan real m sedemikian sehingga memenuhi dua syarat berikut.
 - m merupakan batas bawah untuk S , dan
 - jika k merupakan batas bawah untuk S , maka $m \geq k$.
- Batas atas untuk subhimpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas adalah bilangan real M sedemikian sehingga $M \geq s$ untuk setiap $s \in S$. Batas atas terkecil (atau supremum) untuk sub-

himpunan tak kosong S dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas adalah bilangan real M sedemikian sehingga memenuhi dua syarat berikut.

- i M merupakan batas atas untuk S , dan
 - ii jika k merupakan batas atas untuk S , maka $M \leq k$.
- Jarak dari sebuah titik x ke suatu himpunan tak kosong A di ruang metrik (X, d) adalah $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Mungkin tidak ada titik $a \in A$ yang memenuhi $d(x, A) = d(x, a)$, sehingga infimum diperlukan untuk mendefinisikan jarak ini.

Latihan

Lima teorema berikut merupakan sasaran pembuktian dalam latihan-latihan di bawah. Bacalah pernyataannya terlebih dahulu, lalu kembangkan setiap pembuktian melalui urutan tugas yang terkait.

Teorema 5.4 Sifat Archimedes. Untuk setiap bilangan real x , terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $N > x$.

Teorema 5.5 Untuk setiap bilangan real x dan y dengan $x > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $Nx > y$.

Teorema 5.6 Jika x suatu bilangan real positif, maka terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $\frac{1}{N} < x$.

Teorema 5.7 Untuk sebarang dua bilangan real yang berbeda x dan y , terdapat bilangan rasional yang terletak di antaranya.

Teorema 5.8 Untuk sebarang dua bilangan real yang berbeda x dan y , terdapat bilangan irasional yang terletak di antaranya.

- Misalkan S suatu subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah. Misalkan $a \in \mathbb{R}$, dan definisikan $a + S$ sebagai $a + S = \{a + s \mid s \in S\}$.
 - Jelaskan mengapa $a + \inf(S)$ merupakan batas bawah bagi $a + S$. Jelaskan mengapa $a + S$ memiliki infimum.
 - Misalkan b suatu batas bawah bagi $a + S$. Tunjukkan bahwa $a + \inf(S) \geq b$. Lalu jelaskan mengapa $a + \inf(S) = \inf(a + S)$.
- Misalkan S suatu subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$.
 - Andaikan S terbatas di atas, dan misalkan $t = \sup(S)$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $r < t$, terdapat bilangan $s \in S$ sedemikian sehingga $r < s \leq t$.
 - Andaikan S terbatas di bawah, dan misalkan $t = \inf(S)$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $r > t$, terdapat bilangan $s \in S$ sedemikian sehingga $t \leq s < r$.
- Misalkan A dan B merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas dan di bawah. Misalkan $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

- (a) Ikuti langkah-langkah berikut untuk menunjukkan bahwa $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- (i) Misalkan $x = \sup(A)$ dan $y = \sup(B)$. Tunjukkan bahwa $x + y$ merupakan batas atas bagi $A + B$.
 - (ii) Bagian sebelumnya menunjukkan bahwa $A + B$ terbatas di atas sehingga memiliki supremum. Misalkan $z = \sup(A + B)$. Jelaskan mengapa $z \leq x + y$.
 - (iii) Untuk menunjukkan bahwa $z = x + y$, kita harus membuktikan bahwa z tidak mungkin lebih kecil daripada $x + y$. Andaikan, demi memperoleh kontradiksi, bahwa $z < x + y$. Misalkan $\epsilon = x + y - z$. Gunakan hasil [Latihan 2](#) untuk memperoleh kontradiksi.
- (b) Buktikan bahwa $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- (c) Buktikan atau bantah: $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
- (d) Buktikan atau bantah: $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$
4. Misalkan $X = C[a, b]$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, adalah himpunan semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke $\mathbb{R}$. Definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan
- $$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$
- (a) Berapakah $d(x^2, 1 - 2x)$ pada $[0, 1]$?
- (b) Buktikan bahwa d merupakan metrik pada X . Deskripsikan secara geometris bagaimana metrik ini mengukur jarak antara fungsi f dan g . (Metrik ini disebut **metrik supremum** atau **metrik seragam** pada X .)
5. Dalam latihan ini, kita membuktikan **sifat Archimedes** bilangan asli. Perhatikan bahwa himpunan bilangan asli, yang dinotasikan dengan $\mathbb{N}$ atau $\mathbb{Z}^+$, adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Misalkan x suatu bilangan real.
- (a) Andaikan tidak terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $N > x$. Jelaskan bagaimana kita dapat menyimpulkan bahwa $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas.
 - (b) Dengan mengandaikan bahwa $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas, jelaskan mengapa $\mathbb{Z}^+$ harus memiliki batas atas terkecil M .
 - (c) Jelaskan mengapa M tidak mungkin menjadi batas atas terkecil bagi $\mathbb{Z}^+$. Jelaskan mengapa hal ini membuktikan sifat Archimedes.
6. Dalam latihan ini, kita membuktikan dua pernyataan yang ekuivalen dengan sifat Archimedes (lihat [Latihan 5](#)). Kedua pernyataan tersebut dicantumkan dalam pendahuluan kumpulan latihan ini.
- (a) Misalkan x dan y bilangan real dengan $x > 0$.
 - (i) Tunjukkan bahwa jika sifat Archimedes benar, maka [Teorema 5.5](#) juga benar.
 - (ii) Tunjukkan bahwa jika [Teorema 5.5](#) benar, maka sifat Archimedes juga benar. Simpulkan bahwa [Teorema 5.5](#) ekuivalen dengan sifat Archimedes.
 - (b) Buktikan bahwa [Teorema 5.6](#) ekuivalen dengan sifat Archimedes.
7. Kita dapat menggunakan batas bawah terbesar untuk membuktikan teorema tentang kerapatan bilangan rasional yang dicantumkan dalam pendahuluan kumpulan latihan ini. Teorema ini menunjukkan suatu fakta penting — bilangan rasional bersifat **rapat** dalam himpunan bilangan real. Kita membuktikan teorema ini dalam latihan ini. Misalkan x dan y bilangan real dan andaikan $x < y$. Berdasarkan sifat Archimedes bilangan asli (lihat [Latihan 5](#) dan [Latihan 6](#)), terdapat bilangan bulat positif n sedemikian

sehingga $n(y - x) > 1$. Misalkan $S = \{k \in \mathbb{Z} \mid k > nx\}$. Sifat Archimedes juga menjamin adanya bilangan bulat positif yang memenuhi syarat pembentuk himpunan tersebut; oleh karena itu, himpunan itu tidak kosong.

- (a) Tunjukkan bahwa S terbatas di bawah dalam $\mathbb{R}$.
- (b) Jelaskan mengapa S memuat suatu bilangan bulat m sedemikian sehingga jika $q \in \mathbb{Z}$ dengan $q < m$, maka $q \leq nx$. Prinsip Pengurutan Baik berikut mungkin berguna:

Setiap subhimpunan tak kosong dari bilangan bulat yang terbatas di bawah memuat infimumnya.

(Prinsip Pengurutan Baik merupakan salah satu dari banyak aksioma yang ekuivalen dengan Prinsip Induksi Matematika. Prinsip-prinsip ini diterima sebagai aksioma dan dianggap benar.)

- (c) Jelaskan mengapa $m > nx$ dan $m - 1 \leq nx$. Gunakan pertidaksamaan ini bersama dengan $n(y - x) > 1$ untuk menunjukkan bahwa $nx < m < ny$. Kemudian, temukan suatu bilangan rasional yang terletak di antara x dan y .
8. Tunjukkan bahwa setiap bola terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ memuat suatu titik $x = (x_1, x_2)$ dengan x_1 dan x_2 keduanya rasional.
9. Kita sudah terbiasa menyelesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 2 = 0$ dan memperoleh penyelesaian $\pm\sqrt{2}$. Namun, apakah kita benar-benar mengetahui bahwa bilangan $\sqrt{2}$ ada? Kita membahas pertanyaan tersebut dalam latihan ini dan menunjukkan keberadaan bilangan $\sqrt{2}$ dengan menggunakan batas bawah terbesar. Di sini, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ adalah himpunan bilangan real positif.
- (a) Sebagai langkah awal, misalkan $S = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 > 2\}$. Jelaskan mengapa S harus memiliki batas bawah terbesar m .
 - (b) Selanjutnya, kita menunjukkan bahwa $m^2 = 2$, sehingga $m = \sqrt{2}$. Kita meninjau kasus $m^2 < 2$ dan $m^2 > 2$.
 - (i) Andaikan $m^2 < 2$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$\left(m + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Jelaskan mengapa hal ini juga tidak mungkin terjadi.

- (ii) Andaikan $m^2 > 2$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$\left(m - \frac{1}{n}\right)^2 > 2.$$

Jelaskan mengapa hal ini juga tidak mungkin terjadi.

- (c) Jelaskan bagaimana kita telah menunjukkan keberadaan $\sqrt{2}$.
10. Serupa dengan [Latihan 7](#), kita dapat membuktikan teorema tentang kerapatan bilangan irasional yang dicantumkan dalam pendahuluan kumpulan latihan ini.
- (a) Langkah pertama adalah menunjukkan keberadaan suatu bilangan irasional. Kita akan melakukannya dengan membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ irasional. Gunakan pembuktian dengan kontradiksi dan andaikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional. Artinya, $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ untuk suatu bilangan bulat positif r dan s sedemikian sehingga r dan s tidak memiliki faktor persekutuan positif selain 1.

- (i) Jelaskan mengapa $r^2 = 2s^2$. Karena 2 prima, diperoleh bahwa 2 membagi r .
 - (ii) Tunjukkan bahwa 2 membagi s . Jelaskan bagaimana hal ini membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional.
- (b) Misalkan x dan y dua bilangan real berbeda. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat q dan bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $z = \frac{q\sqrt{2}}{2^N}$ merupakan bilangan irasional di antara x dan y .

Petunjuk. Pertimbangkan pendekatan dalam [Latihan 7](#).

11. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan tak kosong dari X . Untuk $x, y \in X$, buktikan bahwa $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.

12. Buktikan bahwa jika (X, d) suatu ruang metrik dan B serta C subhimpunan tak kosong dari X , maka

$$d(a, B \cup C) = \min\{d(a, B), d(a, C)\}$$

untuk setiap $a \in X$.

13. Untuk setiap pernyataan berikut, jawab benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawab salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya. Sepanjang latihan ini, misalkan S dan T subhimpunan tak kosong dan terbatas dari $\mathbb{R}$ (suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}$ disebut terbatas jika terbatas di atas dan di bawah).

- (a) Setiap subhimpunan tak kosong dari S terbatas.
- (b) Jika $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$, maka $\sup(S + T) = \max\{\sup(S), \sup(T)\}$.
- (c) Jika $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$, maka $\inf(S + T) = \min\{\inf(S), \inf(T)\}$.
- (d) Jika U suatu subhimpunan tak kosong dari S , maka $\sup(U) \leq \sup(S)$.
- (e) Jika U suatu subhimpunan tak kosong dari S , maka $\inf(S) \leq \inf(U)$.
- (f) Jika A suatu subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}$ dengan $d_E(x, A) = 0$ dalam metrik Euklides, maka $x \in A$.

Bab 6

Fungsi Kontinu di Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa artinya suatu fungsi antara ruang-ruang metrik kontinu di suatu titik?
- Apa artinya suatu fungsi antara ruang-ruang metrik bersifat kontinu?

Pendahuluan

Kita mungkin telah menjumpai fungsi kontinu sebelumnya. Kekontinuan merupakan pertimbangan penting dalam masalah optimisasi karena suatu fungsi kontinu mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada setiap interval tertutup dan terbatas. Fungsi kontinu juga memenuhi Teorema Nilai Antara, yakni bahwa suatu fungsi kontinu f mengambil semua nilai di antara $f(a)$ dan $f(b)$ pada interval $[a, b]$. Salah satu akibat penting Teorema Nilai Antara adalah bahwa jika f merupakan fungsi kontinu pada suatu interval dan $f(a)$ serta $f(b)$ berlainan tanda, maka f pasti mempunyai akar di dalam interval $[a, b]$. Dalam bagian ini, kita akan mulai menelaah kekontinuan fungsi antara ruang-ruang metrik. Tujuan akhir kita dalam bagian-bagian mendatang adalah memahami fungsi kontinu dengan cukup baik sehingga kita dapat mendefinisikan kekontinuan hanya dalam kaitannya dengan himpunan terbuka.

Dalam kalkulus, kita membahas gagasan kekontinuan. Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dengan menggunakan metrik Euklides standar) kontinu di titik a jika

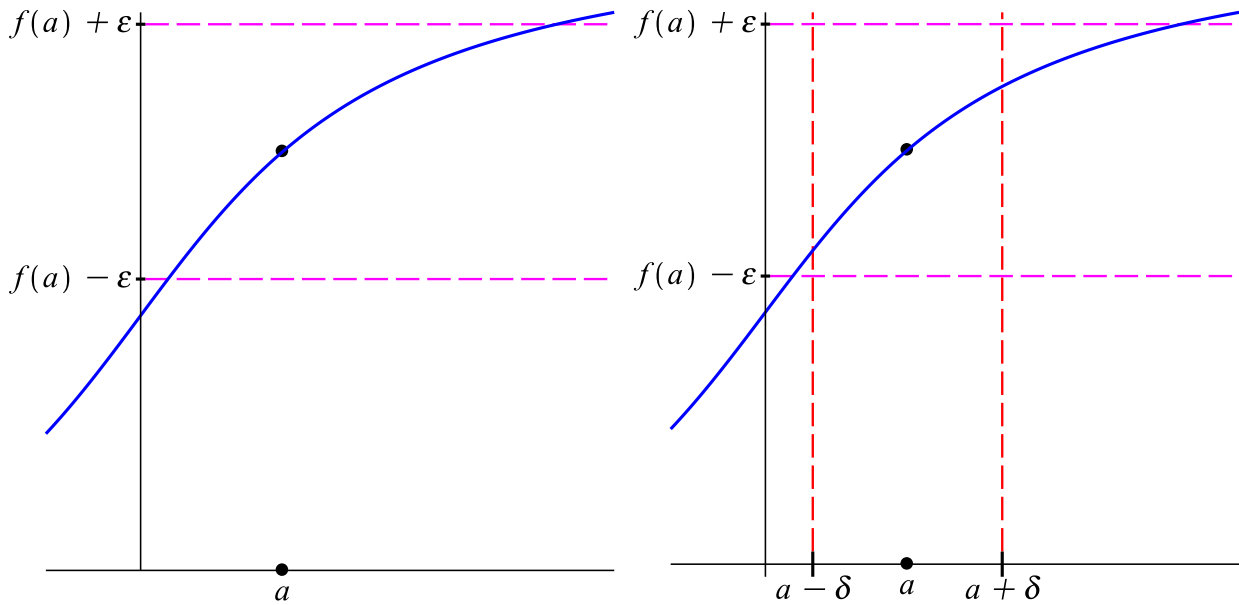
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Pernyataan ini mengharuskan kita menjelaskan apa artinya suatu fungsi f mempunyai limit di sebuah titik. Secara intuitif, gagasannya adalah bahwa fungsi f mempunyai limit L ketika $x = a$ jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sedekat yang kita inginkan dengan L dengan memilih x sedekat yang diperlukan dengan (tetapi tidak sama dengan) a . Untuk memperluas gagasan limit informal ini menjadi kekontinuan di suatu titik, kita dapat mengatakan bahwa fungsi f kontinu di titik a jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sedekat yang kita inginkan dengan $f(a)$ dengan memilih x sedekat yang diperlukan dengan a (kini x boleh sama dengan a).

Untuk mendefinisikan kekontinuan dalam konteks yang lebih umum (di ruang topologi), kita memerlukan definisi kekontinuan yang ketat sebagai landasan. Kita akan mulai dengan membahas fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, lalu mengembangkannya menjadi fungsi kontinu di ruang metrik. Gagasan-gagasan ini pada akhirnya akan memungkinkan kita mendefinisikan fungsi kontinu di ruang topologi.

Kita mulai dengan mempelajari fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Tujuan kita adalah memperketat definisi informal mengenai kekontinuan di suatu titik. Untuk melakukannya, kita perlu mendefinisikan secara formal apa yang dimaksud dengan

- membuat nilai $f(x)$ “sedekat yang kita inginkan dengan $f(a)$ ”, dan
- memilih x “sedekat yang kita perlukan dengan a ”.



Gambar 6.1 Ilustrasi definisi kekontinuan di suatu titik.

Mari kita bahas pernyataan pertama, yakni membuat nilai $f(x)$ “sedekat yang kita inginkan dengan $f(a)$ ”. Artinya, jika kita menetapkan sembarang toleransi, misalnya 0.0001, kita dapat membuat nilai $f(x)$ berjarak kurang dari 0.0001 terhadap $f(a)$. Karena nilai mutlak $|f(x) - f(a)|$ mengukur kedekatan $f(x)$ dengan $f(a)$, kita dapat menuliskan kembali pernyataan bahwa nilai $f(x)$ berjarak kurang dari 0.0001 terhadap $f(a)$ sebagai $|f(x) - f(a)| < 0.0001$. Tentu saja, jarak 0.0001 mungkin belum sedekat yang kita inginkan dengan $f(a)$, sehingga kita memerlukan cara untuk menyatakan bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat apa pun dengan $f(a)$ — dalam toleransi sebarang. Untuk itu, kita menjadikan toleransi sebagai parameter ϵ . Tugas kita kemudian adalah membuat nilai $f(x)$ berjarak kurang dari ϵ terhadap $f(a)$, berapa pun besar ϵ . Kita menuliskannya sebagai

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Kita dapat menggambarannya seperti di sisi kiri [Gambar 6.1](#). Di sini kita ingin membuat nilai $f(x)$ berada di dalam pita ϵ di sekitar $f(a)$, yakni di atas dan di bawah $f(a)$. Dengan kata lain, kita ingin dapat membuat nilai $f(x)$ berada di antara $f(a) - \epsilon$ dan $f(a) + \epsilon$.

Sekarang kita harus menjawab pertanyaan tentang cara “membuat” nilai $f(x)$ berjarak kurang dari ϵ terhadap $f(a)$. Karena nilai $f(x)$ bergantung pada x , kita “membuat” nilai $f(x)$ mempunyai sifat yang diinginkan dengan memilih masukan x secara tepat. Agar f kontinu ketika $x = a$, kita harus dapat memilih nilai x yang cukup dekat dengan a sehingga $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Secara bergambar, kita dapat melihat bagaimana hal ini terjadi pada gambar di sisi kanan [Gambar 6.1](#). Kita harus dapat menemukan interval di sekitar $x = a$ sedemikian sehingga graf $f(x)$ berada di dalam pita ϵ di sekitar $f(a)$ untuk nilai-nilai x di interval tersebut. Dengan kata lain, kita harus dapat menemukan suatu bilangan positif δ sedemikian sehingga jika x berada dalam interval $(a - \delta, a + \delta)$, maka graf $f(x)$ berada dalam pita ϵ di sekitar $y = f(a)$. Secara lebih formal, jika diberikan sembarang toleransi positif ϵ , kita harus dapat menemukan bilangan positif δ sedemikian sehingga jika $|x - a| < \delta$ (yakni, x berada dalam interval $(a - \delta, a + \delta)$), maka $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ (atau $f(x)$ berada dalam pita ϵ di sekitar $y = f(a)$).

Pernyataan ini memberikan definisi yang ketat tentang arti suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di suatu titik.

Definisi 6.2 Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **kontinu di titik** a jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - a| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Perhatikan bahwa nilai δ boleh bergantung pada nilai a dan ϵ , tetapi tidak pada nilai x .

Aktivitas Persiapan 6.1 [Laboratorium epsilon-delta O003](#)¹ memungkinkan kita bereksperimen dengan definisi ini tanpa sambungan jaringan. Gunakan laboratorium interaktif ini untuk dua soal pertama dalam aktivitas ini.

- (a) Gunakan fungsi tetap $f(x) = x \sin(x)$ pada laboratorium. Anda dapat mengubah jendela tampilan, titik pangkal a , epsilon, dan delta dengan kontrol yang tersedia. Tentukan nilai δ sedemikian sehingga $|f(x) - f(1)| < 0.5$ setiap kali $|x - 1| < \delta$. Jelaskan metode Anda.
- (b) Sekarang carilah nilai δ sedemikian sehingga $|f(x) - f(2.5)| < 0.25$ setiap kali $|x - 2.5| < \delta$. Jelaskan metode Anda.
- (c) (i) Apakah negasi dari definisi kekontinuan di suatu titik? Dengan kata lain, apa yang perlu kita lakukan untuk menunjukkan bahwa suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tidak kontinu ketika $x = a$?
 (ii) Gunakan negasi definisi tersebut untuk menjelaskan mengapa fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x < 1 \\ 1 & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

tidak kontinu ketika $x = 1$.

Fungsi Kontinu antara Ruang-Ruang Metrik

Dalam aktivitas pendahuluan, kita telah melihat cara mendefinisikan secara formal arti suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di suatu titik.

Perhatikan bahwa [Definisi 6.2](#) hanya bergantung pada kemampuan untuk mengukur kedekatan antartitik. Karena persis itulah yang dilakukan oleh metrik, kita dapat memperluas gagasan kekontinuan ini untuk mendefinisikan kekontinuan fungsi antara ruang-ruang metrik. Kekontinuan merupakan gagasan penting dalam topologi, dan kita akan banyak menggunakan gagasan ini sepanjang semester.

Jika $d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $d_E(x, y) = |x - y|$, maka kita telah melihat bahwa d_E merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ (perhatikan bahwa d_E adalah metrik Euklides pada $\mathbb{R}$). Dengan menggunakan metrik ini, kita dapat merumuskan kembali arti suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di suatu titik.

Definisi 6.3 Definisi Alternatif. Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **kontinu di titik** a jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_E(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_E(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Definisi alternatif ini bergantung pada metrik d_E . Kita dapat dengan mudah mengganti metrik d_E dengan metrik lain yang kita pilih. Hal ini memungkinkan kita mendefinisikan kekontinuan di suatu titik bagi fungsi antara ruang-ruang metrik.

Definisi 6.4 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ **kontinu di** $a \in X$ jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Setelah mendefinisikan kekontinuan di suatu titik, kita dapat mendefinisikan fungsi kontinu.

¹external/o003-epsilon-delta-lab.html

Definisi 6.5 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ **kontinu** jika f kontinu di setiap titik dalam X .

Contoh 6.6 Secara umum, untuk membuktikan bahwa fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu, dengan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, kita mulai dengan memilih unsur sembarang a dalam X . Kemudian kita ambil suatu bilangan ϵ yang lebih besar dari 0 dan menunjukkan bahwa terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ setiap kali $d_X(x, a) < \delta$. Nilai δ yang kita perlukan tidak boleh bergantung pada x (karena x belum diketahui), tetapi boleh bergantung pada nilai a yang kita pilih, dan kemungkinan juga akan bergantung pada ϵ . Dengan kata lain, terdapat fungsi C yang hanya bergantung pada variabel bebas a dan ϵ dan menghasilkan δ , yakni $\delta = C(a, \epsilon)$. Sebagai contoh, misalkan $X = \mathbb{R}$ dan d_X didefinisikan sebagai

$$d_X(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}.$$

Pembuktian bahwa d_X merupakan metrik diserahkan kepada [Latihan 9](#). Tinjau $f : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$, dengan $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_E)$. Untuk menunjukkan bahwa f kontinu, kita ambil $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$.

Pekerjaan pendahuluan. Langkah-langkah berikut bukan bagian dari pembuktian, tetapi menunjukkan cara kita menemukan δ yang diperlukan. Kita mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_E(f(x), f(a)) < \epsilon$. Artinya, kita ingin membuat

$$d_E(f(x), f(a)) = \sqrt{(f(x) - f(a))^2} = |f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| < \epsilon$$

setiap kali

$$d_X(x, a) = \min\{|x - a|, 1\} < \delta.$$

Sekarang $|x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a| |x + a|$. Jika $d_X(x, a) < \delta$, maka $\min\{|x - a|, 1\} < \delta$. Jika kita memilih $\delta < 1$, maka $d_X(x, a) < \delta < 1$ mengakibatkan $|x - a| < 1$, sehingga $d_X(x, a) = |x - a|$. Sekarang

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|.$$

Akibatnya,

$$|x - a| |x + a| < \delta(1 + 2|a|).$$

Agar hasil kali ini lebih kecil daripada ϵ , kita dapat memilih δ sedemikian sehingga $\delta(1 + 2|a|) < \epsilon$, atau $\delta < \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}$. Dengan kata lain, pilihan δ bergantung pada a dan ϵ ; sebagai contoh, kita dapat mengambil $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}\right\}$. Sekarang kita kesampingkan paragraf ini dan menyajikan pembuktiannya, yang pada dasarnya membalik langkah-langkah yang baru saja kita lakukan. Jika langkah-langkah itu tidak dapat dibalik, kita harus memikirkan ulang argumen kita. Langkah berikut dalam pembuktian mungkin tampak seperti sulap bagi pembaca yang belum terbiasa, tetapi kita telah melihat apa yang terjadi di balik layar sehingga langkah itu bukan misteri bagi kita.

Misalkan δ suatu bilangan positif yang lebih kecil daripada $\min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}\right\}$. Maka

$$d_X(x, a) = \min\{|x - a|, 1\} < \delta$$

mengakibatkan $d_X(x, a) < \delta < 1$, sehingga $d_X(x, a) = |x - a| < \delta < 1$. Selanjutnya,

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} d_E(f(x), f(a)) &= \sqrt{(f(x) - f(a))^2} \\ &= |f(x) - f(a)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |x^2 - a^2| \\
&= |(x - a)(x + a)| \\
&= |x - a| |x + a| \\
&< \delta(1 + 2|a|) \\
&< \left(\frac{\epsilon}{1 + 2|a|} \right) (1 + 2|a|) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Kita menyimpulkan bahwa f kontinu di setiap titik dalam X , sehingga f merupakan fungsi kontinu. $\square$

Tidak semua fungsi bersifat kontinu, seperti yang akan kita lihat dalam contoh berikut.

Contoh 6.7 Misalkan $X = Y = \mathbb{R}$ dan definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(x) = x$. Misalkan d_X metrik Euklides dan d_Y metrik diskret. (Ingatlah bahwa $d_Y(x, y) = 1$ setiap kali $x \neq y$.) Misalkan $a \in X$ dan $0 < \epsilon < 1$.

Misalkan $\delta > 0$, dan ambil $x = a + \frac{\delta}{2}$. Maka $x \neq a$ dan $d_X(x, a) < \delta$. Akan tetapi,

$$d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(x, a) = 1.$$

Jadi, jika $0 < \epsilon < 1$, tidak terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Kita menyimpulkan bahwa f tidak kontinu di titik mana pun dalam X . $\square$

Fungsi-fungsi tertentu selalu kontinu, seperti ditunjukkan oleh aktivitas berikut.

Kegiatan 6.2

- (a) Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $b \in Y$. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(x) = b$ untuk setiap $x \in X$. Tunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu.
- (b) Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Definisikan fungsi $i_X : X \rightarrow X$ dengan $i_X(x) = x$ untuk setiap $x \in X$. Tunjukkan bahwa i_X merupakan fungsi kontinu. (Fungsi i_X disebut **fungsi identitas** pada X .)
- (c) Mengapa argumen pada bagian (b) tidak bertentangan dengan [Contoh 6.7](#)?

Contoh-contoh yang lebih rumit terdapat dalam aktivitas berikut.

Kegiatan 6.3 Misalkan $X = (\mathbb{R}^2, d_T)$ dan $Y = (\mathbb{R}^2, d_M)$, dengan

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

merupakan metrik taksi dan

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

merupakan metrik maksimum. Definisikan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $f((a, b)) = (a + b, b)$.

- (a) Apakah f merupakan fungsi kontinu dari X ke Y ? Berikan alasan untuk jawaban Anda.
- (b) Apakah f merupakan fungsi kontinu dari Y ke X ? Berikan alasan untuk jawaban Anda.

Komposit Fungsi Kontinu

Misalkan (X, d_X) , (Y, d_Y) , dan (Z, d_Z) merupakan ruang-ruang metrik, dan andaikan $f : X \rightarrow Y$ serta $g : Y \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu. Wajar jika kita bertanya apakah komposit $g \circ f : X \rightarrow Z$ juga merupakan fungsi kontinu.

Kegiatan 6.4 Misalkan (X, d_X) , (Y, d_Y) , dan (Z, d_Z) merupakan ruang-ruang metrik, dan andaikan $f : X \rightarrow Y$ serta $g : Y \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu. Kita akan membuktikan bahwa $g \circ f$ merupakan fungsi kontinu.

- (a) Apa yang harus kita lakukan untuk menunjukkan bahwa $g \circ f$ merupakan fungsi kontinu? Apa dua langkah pertama dalam pembuktian kita?
- (b) Misalkan $a \in X$ dan misalkan $b = f(a)$. Andaikan diberikan $\epsilon > 0$. Jelaskan mengapa pasti ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $d_Y(y, b) < \delta_1$ mengakibatkan $d_Z(g(y), g(b)) < \epsilon$.
- (c) Sekarang jelaskan mengapa ada $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta_2$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$.
- (d) Buktikan bahwa $g \circ f : X \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu.

Kekontinuan merupakan konsep penting dalam topologi. Kita telah melihat cara mendefinisikan kekontinuan di ruang metrik, dan tidak lama lagi kita akan memperluas gagasan ini untuk mendefinisikan kekontinuan tanpa merujuk pada metrik sama sekali. Dengan demikian, kelak kita dapat mendefinisikan fungsi kontinu di antara sebarang ruang topologi.

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $a \in X$ jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.
- Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu jika f kontinu di setiap titik dalam X .

Latihan

1. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = |x|$, dengan metrik Euklides pada domain maupun kodomain. Apakah f kontinu di $x = 0$? Buktikan jawaban Anda.
2. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{jika } x \neq 0 \\ 1 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$ Apakah f kontinu di $x = 0$? Buktikan jawaban Anda.
3. Misalkan $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_E)$, dengan d_E sebagai metrik Euklides.
 - (a) Misalkan $(X, d_X) = (\mathbb{R}^2, d_E)$. Buktikan atau berikan contoh tandingan: fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$ bersifat kontinu.
 - (b) Misalkan $(X, d_X) = (\mathbb{R}^2, d_M)$, dengan d_M sebagai metrik maksimum. Buktikan atau berikan contoh tandingan: fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$ bersifat

kontinu.

4. Misalkan X sebarang himpunan dan definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Latihan 1 meminta kita menunjukkan bahwa d merupakan metrik (metrik diskret) pada X . Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik, dengan d_X sebagai metrik diskret. Tentukan semua fungsi kontinu f dari X ke Y .

5. Misalkan f dan g merupakan fungsi kontinu dari $(\mathbb{R}, d_E)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$.

- (a) Misalkan $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq 0$ dan definisikan $kf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $(kf)(x) = kf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa kf merupakan fungsi kontinu.
- (b) Definisikan $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $f + g$ merupakan fungsi kontinu.

6. Misalkan f dan g merupakan fungsi kontinu dari $(\mathbb{R}, d_E)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$. Dalam soal ini, kita akan membuktikan bahwa fg merupakan fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Misalkan a berada di $\mathbb{R}$, dan ikuti langkah-langkah berikut untuk menunjukkan bahwa fg kontinu di $x = a$. Misalkan ϵ suatu bilangan positif.

- (a) Mula-mula, kita akan menyatakan $f(x)g(x) - f(a)g(a)$ dalam bentuk yang lebih berguna. Gunakan fakta bahwa $f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$ dan $g(x) = g(a) + (g(x) - g(a))$ untuk menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(a)g(a) &= f(a)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)) \\ &\quad + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

- (b) Jelaskan mengapa terdapat bilangan-bilangan positif δ_1 , δ_2 , δ_3 , dan δ_4 sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \text{ jika } |x - a| < \delta_1 \\ |g(x) - g(a)| &< \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \text{ jika } |x - a| < \delta_2 \\ |f(x) - f(a)| &< \frac{\epsilon}{3(1 + |g(a)|)} \text{ jika } |x - a| < \delta_3 \\ |g(x) - g(a)| &< \frac{\epsilon}{3(1 + |f(a)|)} \text{ jika } |x - a| < \delta_4. \end{aligned}$$

- (c) Gunakan hasil dari (a) dan (b) untuk menunjukkan bahwa fg kontinu di $x = a$. (Petunjuk: $1 + |f(a)| > |f(a)|$.)

7. Misalkan f dan g merupakan fungsi dari $(\mathbb{R}, d_E)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$.

- (a) Benarkah bahwa jika $f + g$ merupakan fungsi kontinu, maka f dan g juga merupakan fungsi kontinu? Buktikan jawaban Anda.
- (b) Benarkah bahwa jika fg merupakan fungsi kontinu, maka f dan g juga merupakan fungsi kontinu? Buktikan jawaban Anda.

8. Misalkan $f(x) = 2x^2 + 1$ memetakan $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dengan metrik Euklides pada domain maupun kodomain.

(a) Misalkan $\epsilon = \frac{1}{4}$. Carilah nilai δ sedemikian sehingga $|x - 1| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(1)| < \epsilon$. Anda dapat menggunakan [Laboratorium epsilon-delta O003](#)² untuk memeriksa nilai δ Anda secara numerik.

(b) Buktikan bahwa f kontinu di $x = 1$.

9. Definisikan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}.$$

Buktikan bahwa d merupakan metrik.

10. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu, dengan metrik Euklides pada kedua salinan $\mathbb{R}$. Andaikan $f(x) = 0$ setiap kali x rasional. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Petunjuk. Gunakan [Latihan 7](#).

11. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = 0$ jika x irasional dan $f(x) = 1$ jika x rasional. Gunakan metrik Euklides pada kedua salinan $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa f tidak kontinu di titik mana pun dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. Gunakan [Latihan 7](#) dan [Latihan 10](#).

12. Misalkan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $g(x) = 0$ jika x irasional dan $g(x) = x$ jika x rasional. Gunakan metrik Euklides pada kedua salinan $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa g hanya kontinu di 0.

13. Misalkan $a < b$ dan X himpunan semua fungsi kontinu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Misalkan d^* fungsi jarak pada X yang didefinisikan oleh

$$d^*(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

untuk $f, g \in X$. Untuk setiap $f \in X$, tetapkan

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

(a) Tentukan nilai $d^*(f, g)$ ketika $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$, dan $[a, b] = [-3, 3]$.

(b) Tentukan nilai $I(f)$ jika $f(x) = 2x$ dan $[a, b] = [0, 2]$.

(c) Buktikan bahwa fungsi $I : (X, d^*) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ bersifat kontinu, dengan d sebagai metrik Euklides.

Petunjuk. Sebelum mencoba membuktikan pernyataan ini, akan membantu jika Anda terlebih dahulu menuliskan secara eksplisit apa artinya I kontinu dalam metrik d^* dan d .

14. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

(a) Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, dengan (X, d_X) dan (Y, d_Y) sebagai ruang metrik. Jika d_X merupakan metrik diskret dan d_Y sebarang metrik, maka f kontinu.

(b) Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, dengan (X, d_X) dan (Y, d_Y) sebagai ruang metrik. Jika d_Y merupakan metrik diskret dan d_X sebarang metrik, maka f kontinu.

(c) Misalkan d_1 dan d_2 dua metrik pada suatu himpunan X . Fungsi identitas $i_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ yang didefinisikan oleh $i_X(x) = x$ untuk setiap $x \in X$ bersifat kontinu.

(d) Misalkan f dan g merupakan fungsi kontinu dari $(\mathbb{R}^2, d_T)$ (metrik taksi) ke $(\mathbb{R}, d_E)$. Maka fungsi

²external/o003-epsilon-delta-lab.html

$f + g$ dari $(\mathbb{R}^2, d_T)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$ yang didefinisikan oleh $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ merupakan fungsi kontinu.

- (e) Jika (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik dengan $y \in Y$, maka fungsi konstan $f : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $f(x) = y$ untuk setiap $x \in X$ merupakan fungsi kontinu.

Bab 7

Bola Terbuka dan Lingkungan pada Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa itu bola terbuka dalam ruang metrik? Sebutkan salah satu sifat penting bola terbuka.
- Apa itu lingkungan suatu titik dalam ruang metrik?
- Bagaimana kita dapat menggunakan bola terbuka atau lingkungan untuk menentukan kekontinuan suatu fungsi di suatu titik?

Pendahuluan

Himpunan terbuka sangat penting dalam topologi. Nanti kita akan melihat bahwa setiap ruang topologi sepenuhnya ditentukan oleh himpunan-himpunan terbukanya, dan fungsi kontinu dapat didefinisikan hanya dengan menggunakan himpunan terbuka. Pada bagian ini kita memperkenalkan gagasan bola terbuka dan lingkungan dalam ruang metrik serta menemukan beberapa sifatnya. Pembahasan ini akan menjadi landasan untuk memperkenalkan himpunan terbuka pada bagian berikutnya.

Ingat bahwa kekontinuan suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) di titik a didefinisikan menggunakan himpunan titik $x \in X$ yang memenuhi $d_X(x, a) < \delta$ dan titik $y \in Y$ yang memenuhi $d_Y(y, f(a)) < \epsilon$, untuk bilangan real positif δ dan ϵ . Dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides d_E , untuk bilangan real x dan a , himpunan nilai x yang memenuhi $d_E(x, a) < \delta$ adalah himpunan nilai x yang memenuhi $|x - a| < \delta$. Kita sering menuliskan himpunan ini dalam notasi interval sebagai $(a - \delta, a + \delta)$ dan menyebut $(a - \delta, a + \delta)$ sebagai interval terbuka. Alasan informal mengapa kita menyebut interval tersebut terbuka (berbeda dengan interval $[a - \delta, a + \delta]$, $(a - \delta, a + \delta]$, or $[a - \delta, a + \delta]$) ialah bahwa interval terbuka tidak memuat satu pun dari kedua titik ujungnya. Alasan yang lebih mendasar untuk menyebut interval tersebut terbuka ialah bahwa jika x' adalah sembarang unsur dalam $(a - \delta, a + \delta)$, maka kita dapat menemukan interval terbuka lain di sekitar x' yang seluruhnya termuat dalam interval $(a - \delta, a + \delta)$. Jadi, secara naif, kita dapat membayangkan interval terbuka sebagai interval yang menyediakan cukup ruang bagi setiap titik di dalamnya untuk sedikit bergerak di sekitar posisinya sambil tetap berada di dalam interval tersebut.

Karena interval terbuka $(a - \delta, a + \delta)$ dapat dijelaskan sepenuhnya dengan metrik Euklides sebagai himpunan nilai x yang memenuhi $d_E(x, a) < \delta$, tidak ada alasan untuk tidak memperluas gagasan interval terbuka ini ke sembarang ruang metrik. Namun, perlu kita perhatikan bahwa $\mathbb{R}$ berdimensi satu, sedangkan kebanyakan ruang metrik tidak demikian, sehingga istilah “interval” tidak lagi sesuai. Kita mengganti konsep interval dengan konsep bola terbuka.

Definisi 7.1 Misalkan (X, d_X) suatu ruang metrik dan $a \in X$. Untuk $\delta > 0$, **bola terbuka** $B(a, \delta)$ **berjari-jari δ dan berpusat di a** adalah himpunan

$$B(a, \delta) = \{x \in X \mid d_X(x, a) < \delta\}.$$

Perlu diperhatikan bahwa notasi kita untuk bola terbuka tidak digunakan secara universal. Sebagai contoh, beberapa buku menggunakan $B_\delta(a)$ untuk menyatakan $B(a, \delta)$ dalam notasi kita.

Aktivitas Persiapan 7.1 Jelaskan dan buat sketsa bola terbuka yang dinyatakan pada masing-masing ruang metrik berikut.

- (a) Bola terbuka $B(2, 1)$ dalam ruang metrik $(\mathbb{R}, d_E)$ dengan metrik Euklides

$$d_E(x, y) = |x - y|.$$

- (b) Bola terbuka $B((3, 2), 1)$ dalam ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dengan metrik Euklides

$$d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

- (c) Bola terbuka $B((3, 2), 1)$ dalam ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_M)$ dengan metrik maksimum

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

- (d) Bola terbuka $B((3, 2), 1)$ dalam ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dengan metrik taksi

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

- (e) Bola terbuka $B((3, 2), 1)$ dalam ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ dengan metrik diskret

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Apa perbedaan antara $B((3, 2), 1)$ dan $B((3, 2), r)$ dalam ruang metrik ini jika $r > 1$? Bagaimana jika $r < 1$?

Lingkungan

Kita telah mengenal gagasan interval terbuka dalam $\mathbb{R}$. Selanjutnya, kita memperkenalkan gagasan lingkungan suatu titik dan mencirikan kekontinuan dalam kaitannya dengan lingkungan. Ini merupakan langkah berikutnya dalam mengembangkan gagasan kekontinuan di ruang topologi.

Bola terbuka $B(a, \delta)$ dalam ruang metrik (X, d) juga disebut **δ -lingkungan** di sekitar a . Lingkungan suatu titik dapat dipandang sebagai sebarang himpunan yang mencakup titik tersebut.

Definisi 7.2 Misalkan (X, d_X) suatu ruang metrik dan $a \in X$. Suatu subhimpunan N dari X merupakan **lingkungan** bagi a jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq N$.

Contoh 7.3

- Dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, himpunan $\mathbb{R}^+$ (bilangan-bilangan riil positif) merupakan lingkungan bagi $a = 1$ karena bola terbuka $B(1, 0.5)$ termuat seluruhnya dalam $\mathbb{R}^+$.
- Dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, himpunan $\mathbb{Z}$ bukan lingkungan bagi $a = 1$ karena setiap bola terbuka

yang berpusat di $a = 1$ memuat sejumlah bilangan bukan bulat.

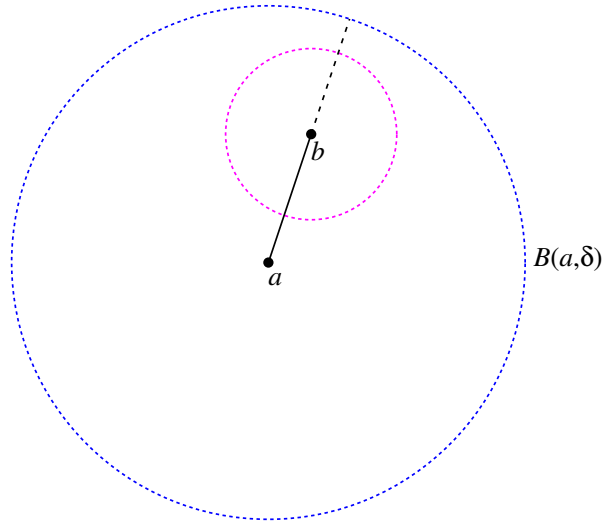
- Dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik diskret, himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan lingkungan bagi $a = 1$ karena bola terbuka $B(a, 1) = \{a\}$.

□

Sebagai contoh lain, bola terbuka $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi a . Kita bahkan dapat mengatakan lebih banyak mengenai bola terbuka.

Kegiatan 7.2 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, $a \in X$, dan $\delta > 0$. Dalam aktivitas ini, kita mengajukan pertanyaan: apakah $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi setiap titik di dalamnya?

- Misalkan $b \in B(a, \delta)$. Apa yang harus kita lakukan untuk menunjukkan bahwa $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi b ?
- Gunakan [Gambar 7.4](#) untuk membantu menunjukkan bahwa $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi b .



Gambar 7.4 $B(a, \delta)$ sebagai lingkungan bagi b .

- Apakah pernyataan sebaliknya benar? Artinya, jika suatu himpunan merupakan lingkungan bagi setiap titiknya, apakah himpunan tersebut merupakan bola terbuka? Pembuktian tidak diperlukan, tetapi berikan argumen yang meyakinkan.

Kekontinuan dan Lingkungan

Sekarang kita dapat mendefinisikan kekontinuan dalam kaitannya dengan lingkungan alih-alih menggunakan metrik. Keuntungannya adalah bahwa gagasan ini tidak secara eksplisit bergantung pada keberadaan metrik, sehingga kita akan dapat menggunakan konsep kekontinuan ini untuk sebarang ruang topologi.

Ingatlah bahwa suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) kontinu di $a \in X$ jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Kita dapat menafsirkan definisi kekontinuan ini dengan mengatakan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, di bawah fungsi f , prapeta bola terbuka $B(f(a), \epsilon)$ memuat bola terbuka $B(a, \delta)$ untuk suatu $\delta > 0$. Wajar jika kita bertanya apakah himpunan $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ itu sendiri merupakan bola terbuka. Kita menyelidiki pertanyaan ini dalam aktivitas berikut.

Kegiatan 7.3 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) yang kontinu di $a \in X$. Dengan menggunakan notasi dari paragraf di atas, dalam aktivitas ini kita menentukan apakah $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ harus sama dengan $B(a, \delta)$ untuk suatu δ .

Definisikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = x^2,$$

dan gunakan metrik Euklides d_E pada seluruh aktivitas. Asumsikan bahwa f merupakan fungsi kontinu. Maka f kontinu di $x = 2$.

- (a) Tentukan $B(f(2), 1)$.
- (b) Tentukan $f^{-1}(B(f(2), 1))$.
- (c) Apakah $f^{-1}(B(f(2), 1))$ merupakan bola terbuka yang berpusat di 2? Jelaskan.

Kesimpulan yang dapat ditarik dari **Kegiatan 7.3** adalah bahwa jika f kontinu, kita hanya dapat menyimpulkan bahwa prapeta $B(f(a), \epsilon)$ **memuat** sebuah bola terbuka yang berpusat di a . Menurut definisi kekontinuan, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ memuat bola terbuka $B(a, \delta)$, maka f kontinu di a . Kita merangkum hal ini dalam teorema berikut.

Teorema 7.5 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) , dan misalkan $a \in X$. Maka f kontinu di $a \in X$ jika dan hanya jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Kita dapat memperluas gagasan kekontinuan ini untuk mendeskripsikan kekontinuan dalam kaitannya dengan lingkungan. Syarat ini nantinya memungkinkan kita meninjau fungsi kontinu sekalipun ruang kita tidak dilengkapi metrik.

Teorema 7.6 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Maka f kontinu di $a \in X$ jika dan hanya jika prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a .

Bukti. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Untuk membuktikan pernyataan bikondisional ini, kita harus membuktikan kedua implikasinya. Pertama, asumsikan bahwa f kontinu di suatu titik $a \in X$. Kita akan menunjukkan bahwa untuk setiap lingkungan N bagi $f(a)$ dalam Y , prapetanya, yaitu $f^{-1}(N)$ dalam X , merupakan lingkungan bagi a dalam X . Misalkan N suatu lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Untuk menunjukkan bahwa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X , kita perlu menemukan bola terbuka di sekitar a yang termuat dalam $f^{-1}(N)$. Karena N merupakan lingkungan bagi $f(a)$, menurut definisi terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Karena f kontinu di a , terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Jadi, jika $x \in B(a, \delta)$, maka $f(x) \in B(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Dengan demikian, $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(N)$, dan $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X .

Pembuktian implikasi sebaliknya diserahkan kepada aktivitas berikut. ■

Kegiatan 7.4 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Misalkan $a \in X$. Dalam aktivitas ini, kita membuktikan bahwa jika prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a , maka f kontinu di a .

- (a) Menurut **Teorema 7.5**, apa yang perlu kita lakukan untuk menunjukkan bahwa f kontinu di a ?
- (b) Misalkan ϵ lebih besar daripada 0. Mengapa $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y ?
- (c) Apa yang dinyatakan oleh hipotesis kita mengenai $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$?
- (d) Apa yang dapat kita simpulkan dari bagian (c)?

(e) Bagaimana bagian (a)-(d) menunjukkan bahwa f kontinu di a ?

Kita mengakhiri bagian ini dengan beberapa fakta penting mengenai lingkungan. Asumsikan bahwa (X, d) suatu ruang metrik dan $a \in X$.

- Terdapat suatu lingkungan yang memuat a .
- Jika N merupakan lingkungan bagi a dan $N \subseteq M$, maka M merupakan lingkungan bagi a .
- Jika M dan N merupakan lingkungan bagi a , maka $M \cap N$ juga demikian.

Pembuktiannya langsung dan diserahkan kepada [Latihan 8](#).

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas pada bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Jika (X, d) suatu ruang metrik dan $a \in X$, maka bola terbuka yang berpusat di a adalah himpunan berbentuk

$$B(a, \delta) = \{x \in X \mid d(x, a) < \delta\}$$

untuk suatu bilangan positif δ .

- Suatu subhimpunan N dari ruang metrik (X, d) merupakan lingkungan titik $a \in N$ jika terdapat bilangan real positif δ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq N$.
- Salah satu sifat penting bola terbuka ialah bahwa setiap bola terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Inilah langkah pertama kita menuju definisi konsep himpunan terbuka yang akan menjadi landasan ruang topologi.
- Suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) kontinu di $a \in X$ jika $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan a dalam X untuk setiap lingkungan N dari $f(a)$ dalam Y .

Latihan

1. Tentukan, disertai bukti, manakah di antara himpunan-himpunan A berikut yang merupakan lingkungan dari a dalam ruang metrik yang diberikan.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dengan $a = (0.5, 0.5)$

(b) A adalah sumbu x dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dengan $a = (0, 0)$, dengan d_T sebagai metrik taksi

(c) A adalah himpunan bilangan rasional dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ dengan $a = 0$

(d) A adalah himpunan bilangan bulat positif dalam (Q, d) dan $a = 1$, dengan Q sebagai himpunan semua bilangan rasional dalam bentuk paling sederhana dan metrik $d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$$

(Fakta bahwa d merupakan metrik dibahas dalam [Latihan 3](#).)

2. Misalkan $X = \{1, 3, 5\}$ dan definisikan $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d_X(x, y) = xy - 1 \pmod{8}$. Artinya, $d_X(x, y)$ adalah sisa pembagian $xy - 1$ oleh 8. Fakta bahwa d_X merupakan metrik pada X dikaji dalam [Latihan 2](#). Misalkan (Y, d_Y) suatu ruang metrik. Mungkinkah kita mendefinisikan suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang tidak kontinu? Jelaskan.

3. Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tetapkan $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definisikan $d_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

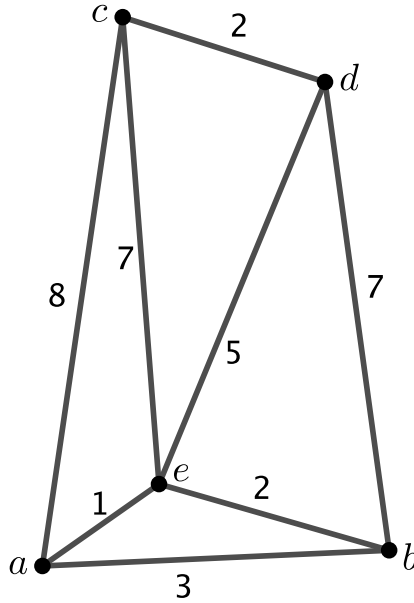
$$d_H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ |x| + |y| & \text{selain itu} \end{cases}.$$

Fakta bahwa d_H merupakan metrik dikaji dalam [Latihan 7](#). Misalkan $(X, d_X) = (\mathbb{R}^2, d_H)$ dan $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_E)$. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : X \rightarrow Y$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = (0, 0) \\ 1 & \text{selain itu} \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } |x| < 1 \\ 1 & \text{selain itu} \end{cases}.$$

Salah satu dari f dan g kontinu, sedangkan yang lain tidak. Tentukan yang mana, disertai bukti untuk masing-masing fungsi.

4. Ingat kembali dari [Bab 3](#) bahwa kita dapat membangun ruang metrik berhingga dengan memulai dari suatu himpunan titik berhingga lalu membuat graf yang titik-titiknya menjadi simpul. Kita membuat sisi-sisi sedemikian sehingga graf tersebut terhubung (artinya, terdapat lintasan dari setiap simpul ke setiap simpul lainnya) dan memberikan bobot pada sisi-sisinya. Selanjutnya, kita mendefinisikan metrik d pada X dengan menetapkan $d(x, y)$ sebagai panjang lintasan terpendek antara simpul x dan y pada graf tersebut. Perhatikan ruang metrik (X, d) yang bersesuaian dengan graf dalam [Gambar 7.7](#).



Gambar 7.7 Graf untuk mendefinisikan suatu metrik.

- (a) Tentukan semua bola terbuka $B(a, \delta)$ untuk setiap bilangan real positif δ .
- (b) Tentukan semua lingkungan dari a .
- 5.
- (a) Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ didefinisikan oleh $f(x) = ax + b$ untuk suatu bilangan real a dan b dengan $a \neq 0$. Misalkan $p \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$. Tunjukkan bahwa $f^{-1}(B(f(p), r))$ memuat suatu bola terbuka yang berpusat di p . Simpulkan bahwa setiap fungsi linear dari $(\mathbb{R}, d_E)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$ bersifat kontinu.

Petunjuk. Berdasarkan [Latihan 5](#), kita dapat mengasumsikan $a > 0$ untuk menyederhanakan soal.

- (b) Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ didefinisikan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk suatu bilangan real a, b , dan c dengan $a \neq 0$. Misalkan $p \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$. Tunjukkan bahwa $f^{-1}(B(f(p), r))$ memuat suatu bola terbuka yang berpusat di p . Simpulkan bahwa setiap fungsi kuadrat dari $(\mathbb{R}, d_E)$ ke $(\mathbb{R}, d_E)$ bersifat kontinu.

Petunjuk. Pertimbangkan beberapa kasus.

6. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan tak kosong dari X . [Latihan 11](#) memberi tahu kita bahwa

$$d(b, A) \leq d(b, c) + d(c, A)$$

untuk semua $b, c \in X$. Definisikan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = d(x, A)$. Misalkan $b \in X$. Diberikan $\epsilon > 0$, tunjukkan bahwa terdapat lingkungan N dari b sedemikian sehingga $x \in N$ mengakibatkan $f(x) \in B(f(b), \epsilon)$. Simpulkan bahwa f merupakan fungsi kontinu. (Asumsikan bahwa metrik pada $\mathbb{R}$ adalah metrik Euklides.)

7. Misalkan a dan b merupakan dua titik berbeda dalam suatu ruang metrik X . Buktikan bahwa terdapat lingkungan N_a dan N_b , masing-masing dari a dan b , sedemikian sehingga $N_a \cap N_b = \emptyset$.

8. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $a \in X$. Buktikan setiap pernyataan berikut.

- (a) Terdapat suatu lingkungan yang memuat a .
- (b) Jika N merupakan lingkungan dari a dan $N \subseteq M$, maka M merupakan lingkungan dari a .
- (c) Jika M dan N merupakan lingkungan dari a , maka demikian pula halnya dengan $M \cap N$.

9. Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ suatu fungsi kontinu. Tunjukkan bahwa jika $f(a) > 0$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, maka terdapat lingkungan N dari a sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk semua $x \in N$.

10. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dengan d sebagai metrik diskret. Tunjukkan bahwa setiap subhimpunan dari X merupakan lingkungan dari setiap titiknya.

11. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Jika N merupakan lingkungan dari suatu titik a dalam ruang metrik X , maka setiap bola terbuka yang termuat dalam N juga merupakan lingkungan dari a .
- (b) Jika N merupakan lingkungan dari suatu titik a dalam ruang metrik X , maka N merupakan lingkungan dari setiap titiknya.
- (c) Jika X dan Y merupakan ruang metrik dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu, maka $f(N)$ merupakan lingkungan dari $f(a)$ dalam Y setiap kali N merupakan lingkungan dari a dalam X .
- (d) Jika X dan Y merupakan ruang metrik, $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $a \in X$, dan N merupakan lingkungan dari $f(a)$ dalam Y , maka $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan dari a dalam X .
- (e) Jika a suatu titik dalam ruang metrik X dan δ suatu bilangan real positif, maka bola terbuka $B(a, \delta)$ memuat tak berhingga banyak titik dari X .
- (f) Jika $N_1, N_2, \dots, N_k$ merupakan lingkungan dari suatu titik a dalam ruang metrik X untuk suatu bilangan bulat positif k , maka $\bigcap_{i=1}^k N_i$ merupakan lingkungan dari a .

-
- (g) Jika N_α merupakan lingkungan dari suatu titik a dalam ruang metrik X untuk setiap α dalam suatu himpunan indeks I , maka $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha$ merupakan lingkungan dari a .

Bab 8

Himpunan Terbuka dalam Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan himpunan terbuka dalam ruang metrik?
- Apa yang dimaksud dengan titik interior dari suatu subhimpunan dalam ruang metrik? Bagaimana hubungan titik interior dengan himpunan terbuka?
- Apa yang dimaksud dengan interior suatu himpunan? Bagaimana hubungan interior suatu himpunan dengan himpunan terbuka?
- Bagaimana kita dapat menggunakan himpunan terbuka untuk menentukan kekontinuan suatu fungsi?
- Sifat penting apa yang dimiliki himpunan terbuka terkait dengan gabungan dan irisan?

Pendahuluan

Perhatikan interval (a, b) dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Jika $m = \frac{a+b}{2}$, maka $(a, b) = B\left(m, \frac{b-a}{2}\right)$, sehingga setiap interval terbuka merupakan bola terbuka. Sebagai bola terbuka, interval terbuka (a, b) merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Hal ini mendasari definisi himpunan terbuka dalam ruang metrik.

Ingat bahwa kita mendefinisikan suatu subhimpunan N dari X sebagai lingkungan bagi titik a dalam ruang metrik (X, d) jika N memuat suatu bola terbuka $B(a, \epsilon)$ untuk suatu $\epsilon > 0$. Kita telah melihat bahwa setiap bola terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya, dan kini kita akan memperluas gagasan tersebut untuk mendefinisikan **himpunan terbuka** dalam ruang metrik.

Definisi 8.1 Suatu subhimpunan O dari ruang metrik X disebut himpunan terbuka jika O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya.

Jadi, menurut definisi, setiap bola terbuka merupakan himpunan terbuka. Masih menurut definisi, himpunan terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Himpunan terbuka berbeda dari himpunan yang tidak terbuka. Sebagai contoh, $(0, 1)$ merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, tetapi $[0, 1)$ bukan himpunan terbuka. Himpunan $[0, 1)$ bukan himpunan terbuka karena tidak ada bola terbuka berpusat di 0 yang seluruhnya termuat dalam $[0, 1)$. Jadi, 0 memiliki sifat yang berbeda dari titik-titik lain

dalam $[0, 1)$. Himpunan $[0, 1)$ merupakan lingkungan bagi setiap titik dalam $(0, 1)$, tetapi bukan lingkungan bagi 0. Kita dapat memandang titik-titik dalam $(0, 1)$ sebagai titik-titik yang berada di interior himpunan $[0, 1)$. Hal ini membawa kita ke definisi berikut.

Definisi 8.2 Misalkan A suatu subhimpunan dari ruang metrik X . Titik $a \in A$ disebut **titik interior** dari A jika A merupakan lingkungan bagi a .

Seperti yang akan segera kita lihat, himpunan terbuka dapat dicirikan melalui titik-titik interior.

Aktivitas Persiapan 8.1

- (a) Tentukan apakah himpunan A merupakan himpunan terbuka dalam ruang metrik (X, d) . Jelaskan alasan Anda.
- (i) $X = \mathbb{R}$, $d = d_E$, metrik Euklides, $A = [0, 0.5)$.
 - (ii) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $d = d_E$, metrik Euklides, $A = [0, 0.5)$. Anggap bahwa metrik Euklides merupakan suatu metrik pada X .
 - (iii) $X = \{a, b, c, d\}$, d adalah metrik diskret yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y, \end{cases}$$

dan $A = \{a, b\}$.

- (b) (i) Apa saja titik interior dari himpunan-himpunan berikut dalam $(\mathbb{R}, d_E)$? Jelaskan.

$$(0, 1) \quad (0, 1] \quad [0, 1) \quad [0, 1].$$

- (ii) Misalkan $A = \{0, 1, 2\}$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Apa saja titik interior dari A ? Jelaskan.

- (iii) Misalkan $\mathbb{Q}$ himpunan bilangan rasional dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Apa saja titik interior dari $\mathbb{Q}$? Jelaskan.

Himpunan Terbuka

Himpunan terbuka sangat penting dalam topologi. Bahkan, nanti kita akan melihat bahwa setiap ruang topologi sepenuhnya ditentukan oleh himpunan-himpunan terbukanya. Ingat bahwa bola terbuka merupakan himpunan terbuka. Ada subhimpunan lain yang terdapat dalam setiap ruang metrik, dan kita dapat menanyakan apakah subhimpunan tersebut terbuka atau tidak.

Kegiatan 8.2 Misalkan X suatu ruang metrik.

- (a) Apakah $\emptyset$ merupakan himpunan terbuka dalam X ? Jelaskan.
- (b) Apakah X merupakan himpunan terbuka dalam X ? Jelaskan.

Kita telah mendefinisikan bola terbuka, dan bola terbuka merupakan contoh utama himpunan terbuka. Bahkan, seperti yang ditunjukkan oleh teorema berikut, bola-bola terbuka menentukan himpunan-himpunan terbuka.

Teorema 8.3 Misalkan X suatu ruang metrik. Suatu subhimpunan O dari X terbuka jika dan hanya jika O merupakan gabungan bola-bola terbuka.

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik dan O suatu subhimpunan dari X . Untuk membuktikan pernyataan bikondisional ini, pertama-tama kita mengasumsikan bahwa O merupakan himpunan terbuka dan menunjukkan bahwa O merupakan gabungan bola-bola terbuka. Misalkan $a \in O$. Karena O terbuka, terdapat $\epsilon_a > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \epsilon_a) \subseteq O$. Kita akan menunjukkan bahwa

$$O = \bigcup_{a \in O} B(a, \epsilon_a).$$

Berdasarkan cara kita memilih ϵ_a , $B(a, \epsilon_a) \subseteq O$ untuk setiap $a \in O$. Jadi, $\bigcup_{a \in O} B(a, \epsilon_a) \subseteq O$. Untuk inklusi sebaliknya, misalkan $x \in O$. Kemudian $x \in B(x, \epsilon_x)$, sehingga $x \in \bigcup_{a \in O} B(a, \epsilon_a)$. Dengan demikian, $O \subseteq \bigcup_{a \in O} B(a, \epsilon_a)$. Kita menyimpulkan bahwa jika O merupakan himpunan terbuka, maka O merupakan gabungan bola-bola terbuka.

Arah sebaliknya akan Anda buktikan dalam aktivitas berikut. ■

Kegiatan 8.3 Misalkan X suatu ruang metrik. Untuk membuktikan implikasi yang tersisa dari [Teorema 8.3](#), asumsikan bahwa suatu subhimpunan O dari X merupakan gabungan bola-bola terbuka.

- (a) Apa yang perlu kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa O merupakan himpunan terbuka?
- (b) Misalkan $x \in O$. Mengapa terdapat bola terbuka B yang termuat dalam O dan memuat x ?
- (c) Lengkapi bukti untuk menunjukkan bahwa O merupakan himpunan terbuka.

[Teorema 8.3](#) menyatakan bahwa setiap himpunan terbuka tersusun dari bola-bola terbuka, sehingga bola-bola terbuka menghasilkan semua himpunan terbuka, seperti halnya basis suatu ruang vektor dalam aljabar linear menghasilkan semua unsur ruang vektor tersebut. Karena itu, kita menyebut himpunan semua bola terbuka dalam suatu ruang metrik sebagai **basis** bagi himpunan-himpunan terbuka ruang metrik tersebut. Kita akan membahas gagasan ini secara lebih terperinci dalam bagian selanjutnya.

Gabungan dan Irisan Himpunan Terbuka

Setelah mendefinisikan himpunan terbuka, kita mungkin bertanya-tanya apa yang terjadi jika kita mengambil gabungan atau irisan dari himpunan-himpunan terbuka.

Kegiatan 8.4

- (a) Misalkan $A = (-2, 1)$ dan $B = (-1, 2)$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.
 - (i) Apakah $A \cup B$ terbuka? Jelaskan.
 - (ii) Apakah $A \cap B$ terbuka? Jelaskan.
- (b) Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Misalkan $A_n = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.
 - (i) Tentukan $\bigcup_{n \geq 1} A_n$. Bukti tidak diperlukan.
 - (ii) Apakah $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ terbuka dalam $\mathbb{R}$? Jelaskan.
 - (iii) Tentukan $\bigcap_{n \geq 1} A_n$. Bukti tidak diperlukan.
 - (iv) Apakah $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ terbuka dalam $\mathbb{R}$? Jelaskan.

[Kegiatan 8.4](#) menunjukkan bahwa irisan sebarang dari himpunan-himpunan terbuka belum tentu terbuka. Namun, ada beberapa hal yang dapat kita nyatakan tentang gabungan dan irisan himpunan-himpunan terbuka.

Teorema 8.4 Misalkan X suatu ruang metrik.

1. Gabungan sebarang dari himpunan-himpunan terbuka dalam X merupakan himpunan terbuka dalam X .
2. Sebarang irisan berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam X merupakan himpunan terbuka dalam X .

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik. Untuk membuktikan bagian 1, asumsikan bahwa $\{O_\alpha\}$ merupakan koleksi himpunan terbuka dalam X , dengan α berkisar pada suatu himpunan indeks I , dan misalkan $O = \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Berdasarkan [Teorema 8.3](#), kita mengetahui bahwa O_α merupakan gabungan bola-bola terbuka untuk setiap $\alpha \in I$. Menggabungkan semua bola terbuka tersebut menunjukkan bahwa O merupakan gabungan bola-bola terbuka dan oleh karena itu merupakan himpunan terbuka berdasarkan [Teorema 8.3](#).

Untuk bagian 2, asumsikan bahwa $O_1, O_2, \dots, O_n$ merupakan himpunan-himpunan terbuka dalam X untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Untuk menunjukkan bahwa $O = \bigcap_{k=1}^n O_k$ merupakan himpunan terbuka, kita akan menunjukkan bahwa O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Misalkan $x \in O$. Maka $x \in O_k$ untuk setiap $1 \leq k \leq n$. Ambil k di antara 1 dan n . Karena O_k terbuka, kita mengetahui bahwa O_k merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Jadi, terdapat $\epsilon_k > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \epsilon_k) \subseteq O_k$. Karena nilai k hanya berhingga banyaknya, misalkan $\epsilon = \min\{\epsilon_k \mid 1 \leq k \leq n\}$. Kemudian $B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_k)$ untuk setiap k , sehingga $B(x, \epsilon) \subseteq \bigcap_{k=1}^n O_k = O$. Oleh karena itu, O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan O merupakan himpunan terbuka. ■

Kekontinuan dan Himpunan Terbuka

Ingatlah bahwa kita telah menunjukkan bahwa suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi $a \in X$ setiap kali N merupakan lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Kini kita dapat memberikan pencirian lain bagi fungsi kontinu dalam kaitannya dengan himpunan terbuka. Pencirian inilah yang akan menjadi definisi kekontinuan kita dalam ruang topologi.

Teorema 8.5 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) . Maka f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka dalam X setiap kali O merupakan himpunan terbuka dalam Y .

Bukti. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Untuk membuktikan pernyataan bikondisional ini, kita perlu membuktikan kedua implikasinya. Pertama, asumsikan bahwa f merupakan fungsi kontinu. Kita harus menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka dalam X untuk setiap himpunan terbuka O dalam Y . Jadi, misalkan O suatu himpunan terbuka dalam Y . Untuk menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X , kita akan menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Misalkan $a \in f^{-1}(O)$. Maka $f(a) \in O$. Karena O merupakan himpunan terbuka, terdapat bola terbuka $B(f(a), \epsilon)$ di sekitar $f(a)$ yang seluruhnya termuat dalam O . Karena $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi $f(a)$, kita mengetahui bahwa $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ merupakan lingkungan bagi a . Jadi, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Selanjutnya, $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon) \subseteq O$, sehingga $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(O)$. Kita menyimpulkan bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan karena itu merupakan himpunan terbuka dalam X .

Pembuktian implikasi sebaliknya diserahkan kepada aktivitas berikut. ■

Kegiatan 8.5 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) .

- (a) Asumsi apa yang kita buat untuk membuktikan implikasi yang tersisa dari [Teorema 8.5](#)? Apa yang perlu kita tunjukkan untuk membuktikan kesimpulannya?
- (b) Misalkan $a \in X$, dan misalkan N suatu lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Mengapa terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$?

- (c) Apa yang dinyatakan oleh hipotesis kita mengenai $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ dalam X ?
- (d) Mengapa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a ? Bagaimana hal ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu?

Ingatlah bahwa setiap himpunan terbuka merupakan gabungan bola-bola terbuka. Jadi, kita dapat menyederhanakan pembuktian kekontinuan fungsi dalam ruang metrik dengan hanya menggunakan bola terbuka alih-alih himpunan terbuka sebarang. Aktivitas berikut memberikan perinciannya.

Dalam aktivitas berikut, kita membuktikan akibat berikut dari [Teorema 8.5](#).

Corollary 8.6 *Suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X setiap kali B merupakan bola terbuka dalam Y .*

Kegiatan 8.6 Untuk menyiapkan pembuktiannya, misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi.

- (a) Karena akibat ini merupakan pernyataan bikondisional, kita perlu membuktikan kedua implikasinya. Pertama, asumsikan bahwa f kontinu. Gunakan [Teorema 8.5](#) untuk menjelaskan mengapa $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X setiap kali B merupakan bola terbuka dalam Y .
- (b) Untuk implikasi yang tersisa, asumsikan bahwa $f^{-1}(B)$ merupakan himpunan terbuka dalam X untuk setiap bola terbuka B dalam Y . Untuk menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu, kita akan menggunakan [Teorema 8.5](#) dan menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X setiap kali O merupakan himpunan terbuka dalam Y . Jadi, misalkan O suatu himpunan terbuka dalam Y .
- (i) Apa yang dinyatakan oleh [Teorema 8.3](#) mengenai O ?
- (ii) Ingatlah bahwa [Lema 2.11](#) menyatakan bahwa jika $\{B_\beta\}$ merupakan koleksi subhimpunan dari Y untuk β dalam suatu himpunan indeks J , maka

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta).$$

Gunakan [Lema 2.11](#) untuk menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X dan simpulkan bahwa f merupakan fungsi kontinu.

Contoh 8.7 Sebagai contoh penerapan [Corollary 8.6](#), kita membuktikan bahwa fungsi kuadrat dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu. Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides d_E , dan misalkan $f : X \rightarrow X$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Kita akan menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu dengan memverifikasi bahwa $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X untuk setiap bola terbuka B dalam X . Misalkan $B = B(b, \beta) = (b - \beta, b + \beta)$ suatu bola terbuka dalam X . Misalkan $B' = B(b, \beta) \cap (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$. Kita meninjau beberapa kasus.

- Misalkan $B' = \emptyset$. Maka $f^{-1}(B) = \emptyset$ dan $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X .
- Misalkan $B' = [0, b + \beta)$. Maka $f^{-1}(B) = (-\sqrt{b + \beta}, \sqrt{b + \beta})$ dan $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X .
- Kasus terakhir adalah $B' = (b - \beta, b + \beta)$. Maka

$$f^{-1}(B) = (-\sqrt{b + \beta}, -\sqrt{b - \beta}) \cup (\sqrt{b - \beta}, \sqrt{b + \beta})$$

dan $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X .

Karena prapeta setiap bola terbuka merupakan himpunan terbuka, kita menyimpulkan bahwa f merupakan fungsi kontinu. $\square$

Interior Suatu Himpunan

Himpunan terbuka dapat dicirikan melalui titik-titik interiornya. Menurut definisi, setiap himpunan terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya, sehingga setiap titik dari suatu himpunan terbuka O merupakan titik interior dari O . Sebaliknya, jika setiap titik dari suatu himpunan O merupakan titik interior dari himpunan tersebut, maka O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan bersifat terbuka. Argumen ini dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 8.8 *Misalkan X suatu ruang metrik. Suatu subhimpunan O dari X merupakan himpunan terbuka jika dan hanya jika setiap titik dari O merupakan titik interior dari O .*

Kumpulan titik-titik interior suatu himpunan membentuk subhimpunan dari himpunan tersebut, yang disebut **interior** himpunan itu.

Definisi 8.9 Interior dari suatu subhimpunan A dari ruang metrik X adalah himpunan

$$\text{Int}(A) = \{a \in A \mid a \text{ adalah titik interior dari } A\}.$$

Kegiatan 8.7 Tentukan $\text{Int}(A)$ untuk setiap himpunan A berikut.

- (a) $A = (0, 1]$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$
- (b) $A = [0, 1]$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$
- (c) $A = \{-2\} \cup [0, 5] \cup \{7, 8, 9\}$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$

Kita mungkin menduga bahwa interior suatu himpunan merupakan himpunan terbuka. Hal ini benar, tetapi kita bahkan dapat menyatakan lebih jauh. Seperti yang akan ditunjukkan oleh [Teorema 8.10](#), jika A merupakan subhimpunan dari ruang metrik X , $\text{Int}(A)$ tidak hanya merupakan himpunan terbuka, tetapi setiap himpunan terbuka yang termuat dalam A juga merupakan subhimpunan dari $\text{Int}(A)$. Jadi, dalam arti relasi inklusi, $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A .

Teorema 8.10 *Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Maka interior A merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A .*

Bukti. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Kita perlu membuktikan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan terbuka dalam X , dan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A . Pertama, kita menunjukkan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan terbuka. Misalkan $a \in \text{Int}(A)$. Maka a merupakan titik interior dari A , sehingga A merupakan lingkungan bagi a . Hal ini berarti bahwa terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \epsilon) \subseteq A$. Namun, $B(a, \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya, sehingga setiap titik dalam $B(a, \epsilon)$ merupakan titik interior dari A . Dengan demikian, $B(a, \epsilon) \subseteq \text{Int}(A)$. Jadi, $\text{Int}(A)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan, akibatnya, $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan terbuka.

Pembuktian bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A diserahkan kepada aktivitas berikut. ■

Kegiatan 8.8 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X .

- (a) Apa yang harus kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A ?
- (b) Misalkan O suatu subhimpunan terbuka dari X yang termuat dalam A , dan misalkan $x \in O$. Apa yang dapat kita simpulkan dari fakta bahwa O terbuka?

(c) Lengkapi pembuktian bahwa $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Salah satu akibat dari [Teorema 8.10](#) adalah sebagai berikut.

Corollary 8.11 *Suatu subhimpunan O dari ruang metrik X merupakan himpunan terbuka jika dan hanya jika $O = \text{Int}(O)$.*

Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 2](#).

Rangkuman

Gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Suatu subhimpunan O dari ruang metrik (X, d) merupakan himpunan terbuka jika O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Dengan kata lain, O terbuka jika O merupakan gabungan bola-bola terbuka.
- Suatu titik a dalam subhimpunan A dari ruang metrik (X, d) merupakan titik interior dari A jika A merupakan lingkungan bagi a . Suatu himpunan O merupakan himpunan terbuka jika setiap titik dari O merupakan titik interior dari O .
- Interior suatu himpunan adalah himpunan semua titik interior dari himpunan tersebut. Interior suatu himpunan A dalam ruang metrik X merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A . Suatu himpunan bersifat terbuka jika dan hanya jika himpunan tersebut sama dengan interiornya.
- Suatu fungsi f dari ruang metrik X ke ruang metrik Y kontinu jika $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X setiap kali O terbuka dalam Y .
- Gabungan sebarang koleksi himpunan terbuka bersifat terbuka, sedangkan irisan sebarang koleksi berhingga himpunan terbuka juga bersifat terbuka.

Latihan

1. Misalkan d metrik diskret. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik.
 - (a) Tunjukkan bahwa setiap subhimpunan dari X terbuka.
 - (b) Misalkan (Y, d_Y) suatu ruang metrik. Buktikan bahwa setiap fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu.
 - (c) Apakah setiap fungsi $f : Y \rightarrow X$ juga kontinu? Jika ya, buktikan jawaban Anda. Jika tidak, carilah sebuah contoh tandingan.
2. Buktikan bahwa suatu subhimpunan O dari ruang metrik X merupakan himpunan terbuka jika dan hanya jika $O = \text{Int}(O)$.
3. Misalkan A dan B subhimpunan dari ruang metrik X dengan $A \subseteq B$. Buktikan atau sangkal pernyataan-pernyataan berikut.
 - (a) $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$
 - (b) $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$

4. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Tunjukkan bahwa himpunan $(a, b]$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ bukan himpunan terbuka.
5. Misalkan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, 0 < y < 1\}$.
 - (a) Apakah A merupakan himpunan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$? Buktikan jawaban Anda.
 - (b) Apakah A merupakan himpunan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$? Buktikan jawaban Anda.
 - (c) Apakah A merupakan himpunan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$? Buktikan jawaban Anda.
6. Misalkan S suatu himpunan berhingga yang terdiri atas titik-titik dalam $\mathbb{R}^2$. Apakah himpunan $\mathbb{R}^2 \setminus S$ merupakan himpunan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$? Buktikan jawaban Anda.
7. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Buktikan bahwa f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\text{Int}(B)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$ untuk setiap subhimpunan B dari Y .
8. Tinjau ruang metrik (Q, d) , dengan $d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$d\left(\frac{a}{b}, \frac{u}{v}\right) = \max\{|a - u|, |b - v|\}$$

(Fakta bahwa d merupakan metrik dibahas dalam [Latihan 3](#).) Deskripsikan bola terbuka $B(q, 2)$ dalam Q jika $q = \frac{2}{5}$.

9. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan misalkan x_1 serta x_2 titik-titik berbeda dalam X . Buktikan bahwa terdapat himpunan-himpunan terbuka O_1 yang memuat x_1 dan O_2 yang memuat x_2 sedemikian sehingga $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. (Hal ini menunjukkan bahwa kita dapat memisahkan titik-titik dalam ruang metrik dengan himpunan terbuka. Sifat-sifat pemisahan penting dalam topologi.)
10. Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides d_E , dan misalkan $Y = \mathbb{R}$ dengan metrik d yang didefinisikan oleh $d(x, y) = \frac{|x-y|}{|x-y|+1}$ (fakta bahwa d merupakan metrik dibahas dalam [Latihan 11](#)). Misalkan a dan b bilangan-bilangan real, dan misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = ax + b$. Dengan kata lain, f merupakan fungsi linear sebarang dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.
 - (a) Deskripsikan bola-bola terbuka dalam (Y, d) . Artinya, jika a suatu bilangan real dan δ suatu bilangan real positif, apa tepatnya himpunan titik yang membentuk $B(a, \delta)$ dalam Y ?
 - (b) Apakah f dari X ke Y kontinu untuk sebarang bilangan real a dan b ? Buktikan jawaban Anda.
 - (c) Apakah f dari Y ke X kontinu untuk sebarang bilangan real a dan b ? Buktikan jawaban Anda.
11. Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f((x, y)) = x$. Asumsikan bahwa kita menggunakan metrik maksimum d_M pada $\mathbb{R}^2$ dan metrik Euklides d_E pada $\mathbb{R}$. Gunakan Teorema untuk menentukan apakah f merupakan fungsi kontinu. Buktikan dugaan Anda.
12. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataannya selalu benar. Jika pernyataannya hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
 - (a) Jika A dan B merupakan subhimpunan tak kosong dari ruang metrik X , maka $\text{Int}(A \cup B) \subseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
 - (b) Jika A dan B merupakan subhimpunan tak kosong dari ruang metrik X , maka $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$.
 - (c) Jika A dan B merupakan subhimpunan tak kosong dari ruang metrik X , maka $\text{Int}(A \cap B) \subseteq$

$$\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).$$

- (d) Jika A dan B merupakan subhimpunan tak kosong dari ruang metrik X , maka $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$.
- (e) Setiap subhimpunan dari suatu himpunan terbuka dalam ruang metrik (X, d) terbuka dalam X .
- (f) Suatu subhimpunan O dari $\mathbb{R}^2$ terbuka terhadap metrik Euklides d_E jika dan hanya jika O terbuka terhadap metrik taksi d_T .
- (g) Misalkan $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ dilengkapi dengan metrik Euklides. Maka $[0, 1]$ merupakan subhimpunan terbuka dari X .

Bab 9

Barisan di Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan barisan di ruang metrik?
- Apa artinya suatu barisan mempunyai limit di ruang metrik?
- Bagaimana kita dapat menggunakan barisan untuk menentukan kekontinuan suatu fungsi di sebuah titik?

Pendahuluan

Kita telah mengenal barisan dalam kalkulus, dan kita dapat memperluas gagasan limit barisan ke ruang metrik. Barisan menyediakan cara lain untuk menjelaskan banyak gagasan dalam ruang metrik. Sebagai contoh, kita akan melihat bahwa kita dapat mencirikan kekontinuan dalam kaitannya dengan barisan, dan kita dapat menggunakan barisan untuk menentukan himpunan terbuka dan tertutup.

Ingat kembali dari kalkulus bahwa barisan bilangan real adalah daftar bilangan dalam urutan tertentu. Kita menuliskan barisan $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sebagai $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ atau cukup (a_n) . Jika kita menganggap setiap a_n sebagai keluaran suatu fungsi, kita dapat memberikan definisi barisan yang lebih formal sebagai fungsi $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $a_n = f(n)$ untuk setiap n .

Suatu barisan bilangan real (a_n) konvergen ke bilangan L jika suku-sukunya dapat dibuat sedekat yang diinginkan dengan L melalui pemilihan n yang cukup besar. Sekali lagi, ini merupakan penjelasan informal yang perlu dirumuskan secara lebih tepat. Seperti yang kita lihat pada fungsi kontinu, kita dapat merumuskan gagasan “kedekatan” secara tepat dengan memperkenalkan simbol bagi suatu bilangan yang dapat dibuat sekecil apa pun. Jadi, kita dapat mengatakan bahwa suku-suku a_n dapat mendekati suatu bilangan L sedekat yang kita inginkan jika kita dapat membuat $|a_n - L| < \epsilon$ untuk setiap bilangan positif ϵ . Gagasan memilih n yang cukup besar berarti mencari suatu bilangan bulat tetap N yang cukup besar sehingga $|a_n - L| < \epsilon$ jika $n \geq N$. Hal ini membawa kita pada definisi berikut.

Definisi 9.1 Suatu barisan bilangan real (a_n) mempunyai **limit** L jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N (yang hanya bergantung pada ϵ) sedemikian sehingga

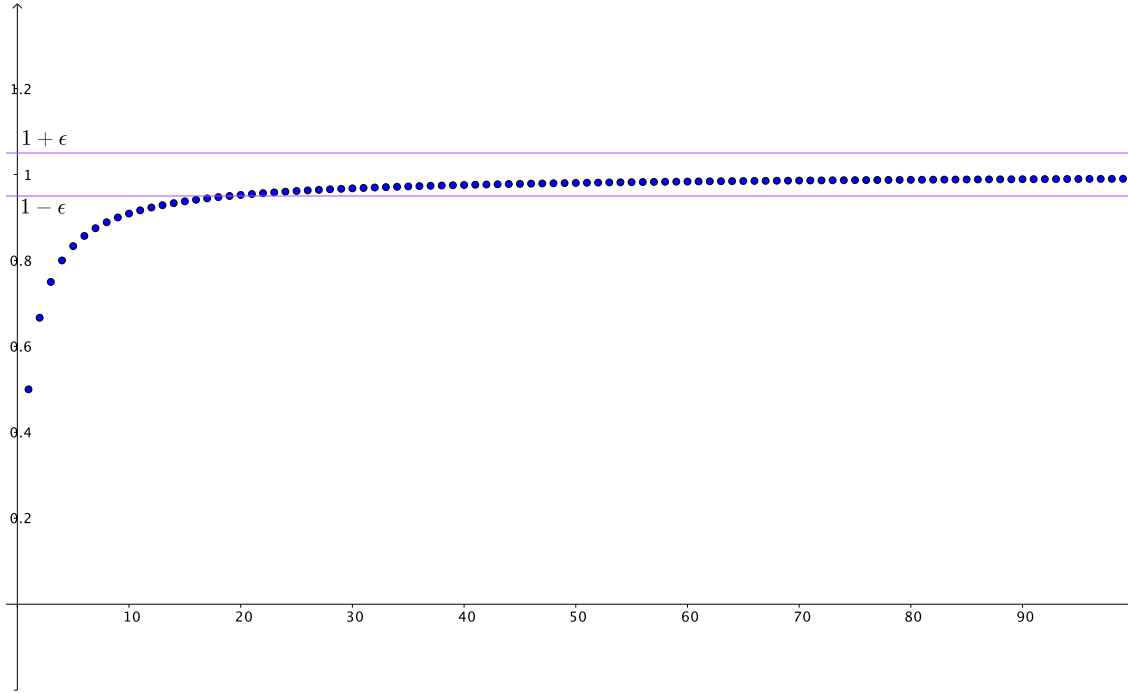
$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{jika } n \geq N.$$

Ketika suatu barisan (a_n) mempunyai limit L , kita menuliskan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

atau cukup $\lim a_n = L$ (karena kita mengasumsikan limit barisan diambil ketika n menuju tak hingga), dan kita mengatakan bahwa barisan (a_n) **konvergen** ke L .

Contoh 9.2 Kita dapat menggambar grafik suatu barisan bilangan real (a_n) sebagai himpunan titik (n, a_n) . Dengan cara ini kita dapat memvisualisasikan suatu barisan dan limitnya. Berdasarkan definisi, L merupakan limit barisan (a_n) jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, kita dapat memilih indeks yang cukup besar sehingga semua suku berikutnya terletak di dalam pita horizontal di antara garis $y = L - \epsilon$ dan $L + \epsilon$, seperti diperlihatkan pada [Gambar 9.3](#) untuk barisan $\left(\frac{n}{1+n}\right)$.



Gambar 9.3 Limit barisan $\left(\frac{n}{1+n}\right)$.

Untuk memverifikasi bahwa limit barisan $\left(\frac{n}{1+n}\right)$ adalah 1, kita mulai dengan $\epsilon > 0$.

Perhitungan awal. Sekarang kita perlu mencari N sehingga $n \geq N$ mengakibatkan $\left|\frac{n}{1+n} - 1\right| < \epsilon$. Seperti pada contoh kekontinuan kita, perhitungan ini bukan bagian dari bukti, tetapi menunjukkan cara kita menemukan N yang dibutuhkan. Agar $\left|\frac{n}{1+n} - 1\right| < \epsilon$, kita memerlukan

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{1+n} - 1\right| &< \epsilon \\ \left|\frac{n}{1+n} - \frac{1+n}{1+n}\right| &< \epsilon \\ \left|\frac{-1}{1+n}\right| &< \epsilon \\ 1+n &> \frac{1}{\epsilon} \\ n &> \frac{1}{\epsilon} - 1. \end{aligned}$$

Sekarang kita menggunakan perhitungan awal ini untuk menyusun bukti.

Ambil $N > \frac{1}{\epsilon} - 1$ (sehingga N bergantung pada ϵ). Maka, untuk $n \geq N$, kita memperoleh

$$\begin{aligned} n &\geq N > \frac{1}{\epsilon} - 1 \\ 1 + n &> \frac{1}{\epsilon} \\ |-1| \left| \frac{1}{1+n} \right| &< \epsilon \\ \left| \frac{-1}{1+n} \right| &< \epsilon \\ \left| \frac{n}{1+n} - 1 \right| &< \epsilon \\ \left| \frac{n}{1+n} - \frac{1+n}{1+n} \right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi, barisan $\left(\frac{n}{1+n}\right)$ mempunyai limit 1. □

Definisi 9.1 hanya berlaku bagi barisan bilangan real. Pada akhirnya, kita ingin merumuskan definisi dengan cara yang memungkinkan kita mendefinisikan limit barisan di ruang metrik dan ruang topologi. Jadi, kita harus merumuskan ulang definisi sedemikian rupa sehingga tidak bergantung pada jarak.

Ingat bahwa $|x - y|$ mendefinisikan metrik d_E pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$d_E(x, y) = |x - y|.$$

Jadi, kita dapat merumuskan kembali definisi limit barisan bilangan real sebagai berikut.

Definisi 9.4 Definisi Alternatif. Suatu barisan bilangan real (a_n) mempunyai **limit** L jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N (yang hanya bergantung pada ϵ) sedemikian sehingga

$$d_E(a_n, L) < \epsilon \text{ jika } n \geq N.$$

Setelah kita mendeskripsikan limit barisan dalam kaitannya dengan metrik, kita dapat memperluas gagasan tersebut ke sembarang ruang metrik.

Definisi 9.5 Suatu **barisan** di ruang metrik (X, d) adalah fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$.

Jika f merupakan barisan di X , kita menuliskan barisan yang didefinisikan oleh f sebagai $(f(n))$, dengan $n \in \mathbb{Z}^+$. Kita juga menggunakan notasi (a_n) apabila $a_n = f(n)$. Dengan adanya metrik pada X , kita dapat mendeskripsikan limit barisan.

Definisi 9.6 Misalkan (X, d) ruang metrik. Suatu barisan (a_n) di X mempunyai **limit** $L \in X$ jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N (yang hanya bergantung pada ϵ) sedemikian sehingga

$$d(a_n, L) < \epsilon \text{ jika } n \geq N.$$

Dengan kata lain, suatu barisan (a_n) di ruang metrik (X, d) mempunyai limit $L \in X$ jika $\lim d(a_n, L) = 0$ — yakni, barisan bilangan real $d(a_n, L)$ mempunyai limit 0. Sama seperti pada barisan bilangan real, ketika suatu barisan (a_n) mempunyai limit L , kita mengatakan bahwa barisan (a_n) **konvergen** ke L , atau bahwa L merupakan limit barisan (a_n) .

Aktivitas Persiapan 9.1

- (a) Jelaskan mengapa barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen ke 0 di $\mathbb{R}$ dengan menggunakan metrik Euklides d_E , yakni

$$d_E(x, y) = |x - y|.$$

- (b) Perhatikan barisan $(a_n) = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)\right)$ di $(\mathbb{R}^2, d_T)$, dengan d_T adalah metrik taksi yang didefinisikan oleh

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Apakah barisan (a_n) konvergen? Jika ya, tentukan limitnya dan buktikan bahwa nilai yang Anda ajukan memang merupakan limit barisan tersebut. Jika tidak, jelaskan alasannya.

- (c) Misalkan $(b_n) = ((2n, n^2))$ di ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$, dengan d adalah metrik diskret yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Apakah barisan (b_n) konvergen? Jika ya, tentukan limitnya dan buktikan bahwa nilai yang Anda ajukan memang merupakan limit barisan tersebut. Jika tidak, jelaskan alasannya.

Barisan dan Kekontinuan dalam Ruang Metrik

Kita telah melihat bahwa kekontinuan dapat dicirikan dengan berbagai cara. Sebagai contoh, terdapat definisi $\epsilon - \delta$ dan pencirian dalam hal lingkungan. Pada bagian ini, kita menyelidiki barisan dan limit barisan dalam ruang metrik, lalu memberikan pencirian fungsi kontinu dalam hal barisan.

Kegiatan 9.2 Pertanyaan yang wajar diajukan adalah apakah limit suatu barisan bersifat tunggal. Kita akan menjawab pertanyaan itu dalam kegiatan ini. Misalkan (X, d) ruang metrik dan (a_n) barisan di X . Andaikan barisan (a_n) memiliki limit di X . Untuk menunjukkan bahwa limit barisan (a_n) bersifat tunggal, kita perlu menunjukkan bahwa jika $\lim a_n = a$ dan $\lim a_n = a'$ untuk suatu $a, a' \in X$, maka $a = a'$.

Andaikan $\lim a_n = a$ dan $\lim a_n = a'$ untuk suatu $a, a' \in X$. Tanpa banyak petunjuk, membuktikan $a = a'$ mungkin tampak sulit. Akan tetapi, jika $d(a, a') < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$, maka haruslah $a = a'$. Jadi, ambil $\epsilon > 0$.

- Mengapa harus ada bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N$?
- Mengapa harus ada bilangan bulat positif N' sedemikian sehingga $d(a_n, a') < \frac{\epsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N'$?
- Sekarang, tetapkan $m = \max\{N, N'\}$. Apa yang dapat kita katakan tentang $d(a_m, a)$ dan $d(a_m, a')$? Mengapa?
- Gunakan pertidaksamaan segitiga untuk menyimpulkan bahwa $d(a, a') < \epsilon$. Apa lagi yang dapat kita simpulkan?

Sekarang kita akan menelaah bagaimana kekontinuan dapat dideskripsikan dalam hal barisan. Gagasan dasarnya adalah sebagai berikut. Andaikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di titik a . Artinya, fungsi f memiliki limit di a . Jadi, jika kita mengambil sebarang barisan (a_n) yang konvergen ke a , kekontinuan f mengakibatkan $f(a) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$. Teorema berikut menyatakan bahwa hal ini merupakan syarat perlu sekaligus syarat cukup bagi kekontinuan.

Teorema 9.7 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang metrik, dan misalkan $a \in X$. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu di a jika dan hanya jika $\lim f(a_n) = f(a)$ untuk setiap barisan (a_n) di X yang konvergen ke a .

Bukti. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang metrik, misalkan $a \in X$, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Andaikan f kontinu di a . Kita akan menunjukkan bahwa $\lim f(a_n) = f(a)$ untuk setiap barisan (a_n) di X yang konvergen ke a . Misalkan (a_n) barisan di X yang konvergen ke a (kita tahu bahwa barisan demikian ada, yakni barisan konstan (a)). Untuk memverifikasi bahwa $\lim f(a_n) = f(a)$, ambil $\epsilon > 0$. Karena f kontinu di a , terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ apabila $d_X(x, a) < \delta$. Karena (a_n) konvergen ke a , kita tahu bahwa terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $d_X(a_n, a) < \delta$ apabila $n \geq N$. Hal ini mengakibatkan

$$d_Y(f(a_n), f(a)) < \epsilon \text{ apabila } n \geq N.$$

Kita menyimpulkan bahwa jika f kontinu di a , maka $\lim f(a_n) = f(a)$ untuk setiap barisan (a_n) di X yang konvergen ke a .

Bukti implikasi sebaliknya terdapat dalam kegiatan berikut. ■

Kegiatan 9.3 Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang metrik, misalkan $a \in X$, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Dalam kegiatan ini, kita membuktikan implikasi yang tersisa dari [Teorema 9.7](#), yaitu bahwa f kontinu di a jika $\lim f(a_n) = f(a)$ untuk setiap barisan (a_n) di X yang konvergen ke a .

- (a) Untuk memperoleh asumsi tambahan yang dapat kita gunakan, mari kita memakai pembuktian dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa f tidak kontinu di a . Mengapa kita kemudian dapat mengatakan bahwa terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga tidak ada $\delta > 0$ dengan sifat bahwa $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$?
- (b) Untuk memperoleh kontradiksi, kita akan membangun barisan (a_n) yang konvergen ke a , sedangkan $(f(a_n))$ tidak konvergen ke $f(a)$.
 - (i) Jelaskan mengapa kita dapat menemukan bilangan bulat positif K sedemikian sehingga $\frac{1}{K} < \epsilon$.
 - (ii) Jika $k > K$, jelaskan mengapa terdapat unsur $a_k \in B(a, \frac{1}{k})$ sedemikian sehingga $d_Y(f(a_k), f(a)) \geq \epsilon$.
 - (iii) Untuk $k \leq K$, misalkan a_k sebarang unsur dalam $B(a, \frac{1}{k})$. Jelaskan mengapa a merupakan limit barisan (a_n) .
 - (iv) Jelaskan mengapa $f(a)$ bukan limit barisan $(f(a_n))$. Kesimpulan apa yang dapat kita tarik, dan mengapa?

Salah satu penerapan umum [Teorema 9.7](#) diperlihatkan dalam kegiatan berikut.

Kegiatan 9.4 Misalkan f fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dengan domain dan kodomain dilengkapi metrik Euklides, yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$$

Untuk fungsi f ini, dalam kegiatan ini kita menelaah kekontinuan f di 0.

- (a) Gambarlah grafik f pada suatu interval kecil yang berpusat di 0. Berdasarkan grafik tersebut, apakah menurut Anda f memiliki limit di 0? Jelaskan. (Di sini tidak ada jawaban yang benar atau salah; yang diminta hanyalah intuisi Anda berdasarkan grafik tersebut.)
- (b) Untuk nilai masukan berapakah $f(x) = 1$?
- (c) Gunakan hasil butir (b) untuk menemukan barisan (a_n) yang konvergen ke 0 dan memenuhi $f(a_n) = 1$ untuk setiap n .
- (d) Apa yang ditunjukkan oleh hasil butir (c) tentang kekontinuan f di 0?

Meskipun terkadang sulit membuktikan suatu fakta tentang semua barisan yang konvergen ke suatu

titik, [Kegiatan 9.4](#) menunjukkan bahwa kita dapat menggunakan [Teorema 9.7](#) untuk membuktikan bahwa fungsi f tidak kontinu di a dengan menemukan hanya satu barisan (a_n) yang konvergen ke a dan memenuhi $\lim f(a_n) \neq f(a)$. Kita menutup bagian ini dengan satu catatan terakhir.

CATATAN PENTING: [Teorema 9.7](#) menyatakan bahwa jika $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu, maka penerapan f dan operasi pengambilan limit dapat dipertukarkan. Artinya, jika (a_n) barisan di X yang konvergen ke $a \in X$, maka

$$f(a) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n).$$

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Barisan dalam ruang metrik X adalah fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$.
- Barisan (a_n) dalam ruang metrik (X, d) memiliki limit L di X jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $d(a_n, L) < \epsilon$ setiap kali $n \geq N$.
- Misalkan f adalah fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) . Maka f kontinu di $a \in X$ jika dan hanya jika $\lim f(a_n) = f(a)$ untuk setiap barisan (a_n) di X yang konvergen ke a .

Latihan

Teorema 9.8 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, $x \in X$, dan A adalah subhimpunan tak kosong dari X . Maka terdapat barisan (a_n) di A sedemikian sehingga

$$\lim d(x, a_n) = d(x, A).$$

1. Tentukan dengan bukti apakah setiap barisan berikut konvergen atau divergen dalam ruang metrik yang disebutkan.

(a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$

(b) $a_n = (2, n)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$

(c) a_n adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$a_n(x) = \frac{1}{n}x$$

di mana X adalah himpunan fungsi bernilai real pada interval $[0, 1]$ dan metrik d didefinisikan oleh

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

(Lihat [Latihan 4](#).)

2. Misalkan A adalah subhimpunan dari $\mathbb{R}$.

(a) Tunjukkan bahwa jika A terbatas di atas, maka terdapat barisan (a_n) di A sedemikian sehingga $\lim a_n = \sup(A)$.

(b) Tunjukkan bahwa jika A terbatas di bawah, maka terdapat barisan (a_n) di A sedemikian sehingga $\lim a_n = \inf(A)$.

(c) Apakah limit pada (a) atau (b) harus berada di A ? Jelaskan.

3. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, $x \in X$, dan A adalah subhimpunan tak kosong dari X . Ingat bahwa jarak dari x ke A adalah

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Dalam latihan ini, kita akan melihat cara memandang jarak antara suatu titik dan suatu himpunan melalui barisan. Misalkan $m = d(x, A)$. Kita akan menunjukkan bahwa harus ada barisan (a_n) di A sedemikian sehingga $d(x, A) = \lim d(x, a_n)$.

- (a) Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, misalkan $B_n = B(x; m + \frac{1}{n})$. Mengapa harus berlaku $B_n \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$?
- (b) Pilih $a_n \in B_n \cap A$ untuk setiap n . Sifat apakah yang dimiliki barisan ini? Jelaskan mengapa langkah-langkah di atas membuktikan teorema berikut.

4.

- (a) Misalkan (Y, d') adalah subruang dari (X, d) . Misalkan $a_1, a_2, \dots$ adalah barisan titik di Y dan misalkan $a \in Y$. Buktikan bahwa jika $\lim_n a_n = a$ dalam (Y, d') , maka $\lim_n a_n = a$ dalam (X, d) .
- (b) Pernyataan sebaliknya secara harfiah dari bagian (a), dengan semua hipotesisnya dipertahankan, sebenarnya benar; jelaskan alasannya. Contoh berikut menunjukkan fenomena yang berbeda: suatu barisan titik di subruang dapat konvergen di ruang ambien menuju titik di luar subruang sehingga tidak konvergen di subruang. Tinjaulah subruang $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$ (bilangan rasional) dari $(\mathbb{R}, d)$. Misalkan $a_1, a_2, \dots$ adalah barisan bilangan rasional sedemikian sehingga $\lim_n a_n = \sqrt{2}$ dalam ruang ambien; limit ambien ini tidak terletak di subruang bilangan rasional. Buktikan bahwa, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk $n, m > N$, $|a_n - a_m| < \epsilon$. Apakah barisan $a_1, a_2, \dots$ konvergen jika dipandang sebagai barisan titik di $\mathbb{Q}$?

5. Dalam latihan ini, kita membuktikan beberapa hasil standar dari kalkulus mengenai limit barisan. Misalkan (a_n) dan (b_n) adalah barisan konvergen dalam ruang metrik $(\mathbb{R}, d_E)$.

- (a) Tunjukkan bahwa $\lim ka_n = k \lim a_n$ untuk setiap bilangan real k .
- (b) Tunjukkan bahwa $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (c) Tunjukkan bahwa barisan (a_n) terbatas. Artinya, tunjukkan bahwa terdapat bilangan real positif M sedemikian sehingga $|a_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}^+$.
- (d) Tunjukkan bahwa $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$.
- (e) Jika $b_n \neq 0$ untuk setiap n dan $\lim b_n \neq 0$, tunjukkan bahwa $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

6. Misalkan f dan g adalah fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dengan metrik Euklides standar pada keduanya. Definisikan fungsi fg dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dengan

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Buktikan bahwa fg adalah fungsi kontinu.
- (b) Andaikan $g(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Definisikan fungsi $\frac{f}{g}$ dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dengan $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Gunakan definisi kekontinuan untuk membuktikan bahwa $\frac{f}{g}$ adalah fungsi kontinu.

7. Misalkan $(c_n) = (a_n, b_n)$ menyatakan barisan dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$; setiap sukunya adalah pasangan dari suku-suku berindeks sama dalam kedua barisan koordinat. Tunjukkan bahwa barisan (c_n) konvergen

ke titik (a, b) jika dan hanya jika (a_n) konvergen ke a dan (b_n) konvergen ke b dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

8. Definisikan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \text{ irasional} \\ x & \text{jika } x \text{ rasional.} \end{cases}$$

- (a) Untuk fungsi f di atas, andaikan kedua salinan $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan topologi Euklides. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut kontinu tepat di satu titik.
- (b) Modifikasilah fungsi f untuk membentuk fungsi baru $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga g kontinu tepat di bilangan 0 dan 1. Buktikan hasil Anda. Dapatkah Anda melihat cara memperluas konstruksi ini untuk membentuk fungsi $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang kontinu tepat pada sebarang himpunan berhingga dari titik-titik yang telah ditentukan?
9. Misalkan X adalah himpunan fungsi bernilai real pada interval $[0, 1]$ dan misalkan d adalah metrik pada X yang didefinisikan oleh

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

(Lihat [Latihan 4.](#)) Dalam latihan ini, kita menyelidiki perbedaan antara konvergensi titik demi titik suatu barisan fungsi dan konvergensi dalam ruang metrik (X, d) . Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, definisikan $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f_n(x) = x^n$.

- (a) Misalkan $0 \leq a < 1$. Tunjukkan bahwa barisan (a_n) dengan $a_n = a^n$ konvergen ke 0 dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.
- (b) Karena barisan (1) konvergen ke 1, jika kita memperhatikan perilakunya di setiap titik, kita mungkin menduga bahwa barisan (f_n) konvergen ke fungsi f yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \neq 1 \\ 1 & \text{jika } x = 1. \end{cases} \quad (9.1)$$

Tentukan apakah barisan (f_n) konvergen ke f dalam ruang metrik (X, d) .

- (c) Sekarang, andaikan kita memandang barisan (f_n) sebagai barisan fungsi dalam $C[0, 1]$, yaitu ruang fungsi kontinu dari $[0, 1]$ ke $\mathbb{R}$, dengan metrik

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

(Lihat [Kegiatan 3.2.](#)) Fungsi pada (9.1) bukan fungsi kontinu, sehingga tidak dapat menjadi limit barisan (f_n) dalam $C[0, 1]$. Tentukan apakah barisan (f_n) memiliki limit dalam $C[0, 1]$. Jika ya, apakah limitnya? Jika tidak, buktikan bahwa barisan tersebut tidak memiliki limit.

10. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Jika (a_n) adalah barisan dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ dengan $a_{n+1} < a_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ dan himpunan $\{a_n\}$ terbatas di bawah, maka $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah limit barisan (a_n) .
- (b) Misalkan X adalah ruang metrik dan A subhimpunan tak kosong dari X . Jika $a \in X$ dan $B(a, r)$ dalam X memuat suatu titik dari A untuk setiap $r > 0$, maka terdapat barisan di A yang konvergen ke a .
- (c) Misalkan R adalah subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas dan di bawah. Jika S

adalah subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ dan $x \leq y$ untuk semua $x \in S$ dan semua $y \in R$, maka $\sup(S) \leq \inf(R)$.

- (d) Barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen ke 0 dalam ruang metrik Q yang terdiri dari semua bilangan rasional dalam bentuk paling sederhana, dengan metrik d yang didefinisikan oleh

$$d\left(\frac{a}{b}, \frac{r}{s}\right) = \max\{|a - r|, |b - s|\}.$$

(Lihat [Latihan 3](#).)

- (e) Satu-satunya barisan konvergen dalam ruang metrik (X, d) dengan metrik diskret d adalah barisan yang pada akhirnya konstan. (Barisan (a_n) dalam ruang metrik X disebut pada akhirnya konstan jika terdapat unsur $a \in X$ dan $N \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $a_n = a$ untuk semua $n \geq N$.)

Bab 10

Himpunan Tertutup di Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan titik batas, titik limit, dan titik terasing dari suatu himpunan di ruang metrik? Bagaimana keterkaitan ketiganya dan apa perbedaannya?
- Apa artinya suatu himpunan bersifat tertutup di ruang metrik?
- Sifat penting apa yang dimiliki himpunan tertutup dalam kaitannya dengan gabungan dan irisan?
- Bagaimana kita dapat menggunakan himpunan tertutup untuk menentukan kekontinuan suatu fungsi?
- Bagaimana kaitan titik limit dengan barisan?
- Bagaimana kaitan titik batas dengan barisan?
- Apa yang dimaksud dengan batas suatu himpunan di ruang metrik?
- Bagaimana kaitan titik limit dan titik batas dengan himpunan tertutup?
- Apa yang dimaksud denganutupan suatu himpunan di ruang metrik?
- Bagaimana kaitan himpunan tertutup dengan barisan?

Pendahuluan

Setelah mendefinisikan himpunan terbuka di ruang metrik, wajar jika kita bertanya apakah terdapat himpunan tertutup. Ingat bahwa interval tertutup penting dalam kalkulus karena setiap fungsi kontinu pada interval tertutup mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada interval tersebut. Jika terdapat himpunan tertutup di ruang metrik, kita dapat menanyakan apakah ada hasil serupa bagi fungsi kontinu pada himpunan tertutup. Pada bagian ini kita memperkenalkan gagasan himpunan tertutup di ruang metrik dan menemukan beberapa sifatnya.

Setiap interval berbentuk $[a, b]$ dalam $\mathbb{R}$ merupakan himpunan tertutup terhadap metrik Euklides. Yang membedakan interval-interval tertutup ini dari interval terbuka adalah bahwa interval terbuka tidak memuat satu pun titik ujungnya — hal inilah yang menjadikan interval terbuka suatu lingkungan bagi setiap titiknya. Secara umum, himpunan terbuka bersifat terbuka karena tidak memuat batasnya. Jika suatu himpunan terbuka tidak memuat batasnya, maka sebagai kebalikannya, komplementnya semestinya memuat batas tersebut.

Hal ini mengantarkan kita pada definisi himpunan tertutup.

Definisi 10.1 Suatu subhimpunan C dari ruang metrik X disebut **tertutup** jika komplementnya $X \setminus C$ terbuka.

Kita mengatakan bahwa himpunan terbuka bersifat terbuka karena tidak memuat batasnya dan himpunan tertutup bersifat tertutup karena memuat batasnya. Namun, kita belum mendefinisikan apa yang dimaksud dengan batas. Titik a pada “batas” interval terbuka berbentuk $O = (a, b)$ dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides memiliki sifat bahwa setiap bola terbuka yang memuat a juga memuat titik-titik di O dan titik-titik yang tidak berada di O . Hal inilah yang membuat titik a terletak pada batas. Kita juga dapat memandang titik a sebagai berada tepat pada batas himpunan O . Hal ini memotivasi definisi berikut.

Definisi 10.2 Misalkan X ruang metrik, dan misalkan A subhimpunan dari X . Suatu **titik batas** dari A adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$.

Sebagai contoh, dalam $A = (0, 1)$ sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d_E)$, bilangan 0 merupakan titik batas dari A karena setiap interval terbuka dalam $\mathbb{R}$ yang memuat 0 juga memuat titik-titik di A dan titik-titik yang tidak berada di A . Titik batas dapat muncul dengan cara lain. Jika $A = \{0, 1\}$ sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d_E)$, maka 0 kembali merupakan titik batas karena setiap interval terbuka dalam $\mathbb{R}$ yang memuat 0 juga memuat suatu titik (0) di A dan titik-titik yang tidak berada di A . Namun, 0 merupakan satu-satunya titik di A yang termuat dalam setiap interval terbuka yang memuat 0. Dalam hal ini kita menyebut 0 sebagai **titik terasing** dari A , sedangkan untuk himpunan $A = (0, 1)$ kita menyebut 0 sebagai **titik akumulasi** atau **titik limit** dari A (penggunaan kata “limit” di sini akan menjadi jelas nanti).

Definisi 10.3 Misalkan X ruang metrik, dan misalkan A subhimpunan dari X .

1. Suatu **titik akumulasi** atau **titik limit** dari A adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x .
2. Suatu **titik terasing** dari A adalah titik $a \in A$ sedemikian sehingga terdapat lingkungan N dari a di X dengan $N \cap A = \{a\}$.

Anda mungkin bertanya-tanya tentang penggunaan istilah “titik limit” dan bagaimana titik limit berkaitan dengan limit. Seperti akan kita lihat nanti, titik limit merupakan limit barisan, tetapi definisi yang telah kita berikan ini kelak dapat diterapkan secara langsung pada ruang topologi.

Perhatikan bahwa setiap titik batas merupakan titik limit atau titik terasing. Buktinya diserahkan sebagai latihan.

Aktivitas Persiapan 10.1

- (a) Untuk setiap himpunan A yang diberikan, tentukan semua titik batas, titik limit, dan titik terasing. Kemudian tentukan apakah himpunan A merupakan himpunan tertutup dalam ruang metrik (X, d) . Jelaskan alasan Anda.
- (i) $X = \mathbb{R}$, $d = d_E$, metrik Euklides, $A = [0, 0.5)$.
 - (ii) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$, $d = d_E$, metrik Euklides, $A = (0, 0.5]$.
 - (iii) $X = \{a, b, c, e\}$, d adalah metrik diskret yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ 1 & \text{jika } x \neq y, \end{cases}$$

dan $A = \{a, b\}$.

- (b) Tentukan apakah setiap pernyataan berikut benar atau salah. Jika benar, berikan argumen yang meyakinkan. Jika salah, berikan contoh tandingan yang spesifik.
- (i) Setiap titik limit merupakan titik batas.
 - (ii) Setiap titik batas merupakan titik limit.
 - (iii) Setiap titik limit merupakan titik terasing
 - (iv) Setiap titik terasing merupakan titik limit.
 - (v) Setiap titik batas merupakan titik terasing.
 - (vi) Setiap titik terasing merupakan titik batas.

Himpunan Tertutup di Ruang Metrik

Ingat bahwa [Definisi 10.1](#) mendefinisikan himpunan tertutup di ruang metrik sebagai himpunan yang komplementnya terbuka. Kita telah melihat bahwa $\emptyset$ dan X keduanya merupakan subhimpunan terbuka dari X . Sekarang kita mengajukan pertanyaan yang sama, kali ini dalam kaitannya dengan himpunan tertutup.

Kegiatan 10.2 Misalkan X ruang metrik.

- (a) Apakah $\emptyset$ tertutup di X ? Jelaskan.
- (b) Apakah X tertutup di X ? Jelaskan.

Perhatikan bahwa suatu subhimpunan ruang metrik dapat sekaligus terbuka dan tertutup. Kita menyebut himpunan seperti itu **terbuka-tertutup** (karena sekaligus tertutup dan terbuka). Ketika membahas himpunan terbuka, kita melihat bahwa gabungan sebarang himpunan terbuka bersifat terbuka, tetapi irisan sebarang himpunan terbuka belum tentu terbuka (meskipun irisan berhingga himpunan terbuka bersifat terbuka). Karena himpunan tertutup merupakan komplement himpunan terbuka, kita patut mengharapkan hasil serupa bagi himpunan tertutup.

Kegiatan 10.3 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Misalkan $A_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$.

- (a) Tentukan $\bigcup_{n \geq 2} A_n$. Bukti tidak diperlukan.
- (b) Apakah $\bigcup_{n \geq 2} A_n$ tertutup di $\mathbb{R}$? Jelaskan.

[Kegiatan 10.3](#) menunjukkan bahwa gabungan sebarang himpunan tertutup belum tentu tertutup. Namun, teorema berikut menjelaskan apa yang dapat kita simpulkan tentang gabungan dan irisan himpunan tertutup. Hasil-hasil ini semestinya tidak mengejutkan mengingat hubungan antara himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

Teorema 10.4 Misalkan X ruang metrik.

1. Irisan sebarang keluarga himpunan tertutup di X merupakan himpunan tertutup di X .
2. Gabungan berhingga himpunan tertutup di X merupakan himpunan tertutup di X .

Bukti. Misalkan X ruang metrik. Untuk membuktikan bagian 1, andaikan bahwa $\{C_\alpha\}$ merupakan koleksi himpunan tertutup di X untuk α dalam suatu himpunan indeks I . Hukum De Morgan menunjukkan bahwa

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus C_\alpha.$$

Ruas terakhir merupakan gabungan sebarang himpunan terbuka dan karenanya merupakan himpunan terbuka. Jadi, berdasarkan definisi, $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ merupakan himpunan tertutup.

Untuk bagian 2, andaikan bahwa $C_1, C_2, \dots, C_n$ merupakan himpunan tertutup di X untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Untuk menunjukkan bahwa $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$ merupakan himpunan tertutup, kita akan menunjukkan bahwa $X \setminus C$ merupakan himpunan terbuka. Sekarang

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n X \setminus C_i$$

merupakan irisan berhingga himpunan terbuka, sehingga merupakan himpunan terbuka. Oleh karena itu, $\bigcup_{i=1}^n C_i$ merupakan himpunan tertutup. ■

Kekontinuan dan Himpunan Tertutup

Ingatlah bahwa kita telah menunjukkan bahwa suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) bersifat kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(O)$ terbuka untuk setiap himpunan terbuka O di Y . Kita mungkin menduga bahwa hasil serupa berlaku untuk himpunan tertutup. Karena himpunan tertutup merupakan komplement dari himpunan terbuka, untuk membuat hubungan ini kita perlu mengetahui hubungan antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$ untuk $B \subset Y$.

Kegiatan 10.4 Misalkan f diberikan sebagai fungsi. Fungsi f tersebut memetakan ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) , dan misalkan B suatu subhimpunan dari Y .

- (a) Misalkan $x \in X \setminus f^{-1}(B)$.
 - (i) Apa yang dapat kita simpulkan tentang $f(x)$ dari hal ini?
 - (ii) Apa yang dapat kita simpulkan tentang hubungan antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$?
- (b) Misalkan $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$.
 - (i) Apa yang dapat kita simpulkan tentang $f(x)$ dari hal ini?
 - (ii) Apa yang dapat kita simpulkan tentang hubungan antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$?
- (c) Apa hubungan antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$?

Sekarang kita dapat menelaah kekontinuan dan himpunan tertutup.

Kegiatan 10.5 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) .

- (a) Andaikan f kontinu dan C merupakan himpunan tertutup di Y . Bagaimana hasil [Kegiatan 10.4](#) menunjukkan bahwa $f^{-1}(C)$ tertutup di X ?
- (b) Sekarang andaikan $f^{-1}(C)$ tertutup di X untuk setiap C yang tertutup di Y . Bagaimana hasil [Kegiatan 10.4](#) menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu?

Hasil [Kegiatan 10.5](#) dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 10.5 Misalkan f suatu fungsi dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) . Maka f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(C)$ tertutup di X untuk setiap himpunan tertutup C di Y .

Titik Limit, Titik Batas, Titik Terasing, dan Barisan

Ingatlah bahwa titik limit dari suatu subhimpunan A dari ruang metrik X adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x . Anda mungkin bertanya-tanya mengapa kata “limit” digunakan dalam definisi titik limit. Kegiatan berikut akan memperjelas hal ini.

Kegiatan 10.6 Misalkan X suatu ruang metrik, misalkan A suatu subhimpunan dari X , dan misalkan x suatu titik limit dari A .

- (a) Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$. Jelaskan mengapa $B(x, \frac{1}{n})$ harus memuat suatu titik a_n di A yang berbeda dari x .
- (b) Berapakah $\lim a_n$? Mengapa?

Hasil [Kegiatan 10.6](#) dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 10.6 Misalkan X suatu ruang metrik, misalkan A suatu subhimpunan dari X , dan misalkan x suatu titik limit dari A . Maka terdapat suatu barisan (a_n) di A yang konvergen ke x .

Tentu saja, barisan konstan (a) selalu konvergen ke titik a , sehingga setiap titik dalam suatu himpunan A merupakan limit dari suatu barisan. Untuk titik limit, terdapat barisan tak konstan yang konvergen ke titik tersebut. Kita dapat menanyakan apa yang dapat dikatakan tentang suatu titik $a \in A$ jika setiap barisan di A yang konvergen ke $a \in A$ pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) . (Yang dimaksud dengan barisan (a_n) yang pada akhirnya konstan adalah terdapat bilangan bulat positif K sedemikian sehingga untuk $k \geq K$, berlaku $a_k = a$ untuk suatu unsur a .) Hal inilah yang akan kita telaah dalam kegiatan berikut.

Kegiatan 10.7 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X .

- (a) Misalkan a suatu titik terasing dari A . Buktikan bahwa setiap barisan di A yang konvergen ke a pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) .
- (b) Buktikan bahwa jika setiap barisan di A yang konvergen ke a pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) , maka a merupakan titik terasing dari A .

Titik batas adalah titik yang, dalam arti tertentu, terletak “di antara” suatu himpunan dan komplementnya. Kita akan segera membuat gagasan “di antara” ini lebih konkret.

Argumen yang serupa dengan argumen dalam [Kegiatan 10.6](#) memberikan hasil berikut tentang titik batas.

Teorema 10.7 Misalkan X suatu ruang metrik, misalkan A suatu subhimpunan dari X , dan misalkan b suatu titik batas dari A . Maka terdapat barisan (x_n) di $X \setminus A$ dan barisan (a_n) di A yang konvergen ke b .

Titik Limit dan Himpunan Tertutup

Terdapat hubungan antara titik limit dan himpunan tertutup. Himpunan terbuka $(1, 2)$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ tidak memuat semua titik limitnya maupun satu pun titik batasnya, sedangkan himpunan tertutup $[1, 2]$ memuat semua titik batas dan titik limitnya. Hal ini merupakan sifat penting dari himpunan tertutup. Ingatlah bahwa untuk suatu titik limit x dari subhimpunan A dari ruang metrik X , setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x . Lingkungan tersebut dapat kita buat sekecil apa pun sehingga, dalam arti tertentu, titik-titik limit dari A yang tidak berada di A merupakan titik-titik di X yang dapat berjarak sedekat apa pun dari himpunan A . Kita menyatakan himpunan semua titik limit dari A dengan A' , dan

titik-titik limit suatu himpunan dapat menentukan apakah himpunan tersebut tertutup.

Teorema 10.8 Misalkan C suatu subhimpunan dari ruang metrik X , dan misalkan C' himpunan semua titik limit dari C . Maka C tertutup jika dan hanya jika $C' \subseteq C$.

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik, dan misalkan C suatu subhimpunan dari X . Pertama, andaikan C tertutup dan tunjukkan bahwa C memuat semua titik limitnya. Misalkan $x \in X$ suatu titik limit dari C . Kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa $x \notin C$. Maka $x \in X \setminus C$, yang merupakan himpunan terbuka. Hal ini mengakibatkan bahwa terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \epsilon) \subseteq X \setminus C$. Namun, lingkungan $B(x, \epsilon)$ ini tidak memuat satu pun titik di C , yang bertentangan dengan fakta bahwa x merupakan titik limit dari C . Kita menyimpulkan bahwa $x \in C$ dan C memuat semua titik limitnya.

Implikasi sebaliknya dari hasil yang baru saja kita buktikan akan ditelaah dalam kegiatan berikut. ■

Kegiatan 10.8 Misalkan C suatu subhimpunan dari ruang metrik X , dan misalkan C' himpunan semua titik limit dari C . Dalam kegiatan ini, kita membuktikan bahwa C tertutup jika C memuat semua titik limitnya. Jadi, andaikan $C' \subseteq C$.

- (a) Apa yang perlu kita lakukan untuk menunjukkan bahwa C tertutup?
- (b) Jika kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi untuk membuktikan bahwa C tertutup, kita mengandaikan bahwa C tidak tertutup. Apa yang dapat kita simpulkan tentang $X \setminus C$ dari hal ini?
- (c) Apa yang dapat kita simpulkan dari hasil butir (b)?
- (d) Bagaimana hasil butir (c) bertentangan dengan asumsi bahwa C memuat semua titik limitnya?

Tutupan Suatu Himpunan

Kita telah melihat bahwa interior suatu himpunan adalah subhimpunan terbuka terbesar dari himpunan tersebut. Ada hasil serupa untuk himpunan tertutup. Sebagai contoh, misalkan $A = (0, 1)$ di $(\mathbb{R}, d_E)$. Himpunan A adalah himpunan terbuka, tetapi jika kita menggabungkan A dengan titik-titik limitnya, kita memperoleh himpunan tertutup $C = [0, 1]$. Selain itu, himpunan $[0, 1]$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A . Hal ini mengarah pada gagasan tentang **tutupan** suatu himpunan.

Definisi 10.9 **Tutupan** suatu subhimpunan A pada ruang metrik X adalah himpunan

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Dengan kata lain, tutupan suatu himpunan adalah kumpulan anggota himpunan tersebut dan titik-titik limit himpunan tersebut — yaitu titik-titik yang berada di “tepi” himpunan tersebut. Arti penting tutupan suatu himpunan A adalah bahwa tutupan A merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A .

Teorema 10.10 Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Tutupan A adalah himpunan tertutup. Selain itu, tutupan A adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A .

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Untuk membuktikan bahwa $\overline{A}$ adalah himpunan tertutup, kita akan membuktikan bahwa $\overline{A}$ memuat titik-titik limitnya. Misalkan $x \in \overline{A}'$. Untuk menunjukkan bahwa $x \in \overline{A}$, kita gunakan pembuktian dengan kontradiksi dan andaikan bahwa $x \notin \overline{A}$. Hal ini menyiratkan bahwa $x \notin A$ dan $x \notin A'$. Karena $x \notin A'$, terdapat lingkungan N dari x yang tidak memuat titik-titik A selain x . Akan tetapi, $A \subseteq \overline{A}$ dan $x \notin \overline{A}$, sehingga $N \cap A = \emptyset$. Hal ini menyiratkan bahwa terdapat bola terbuka $B \subseteq N$ yang berpusat di x sedemikian sehingga $B \cap A = \emptyset$. Fakta bahwa $x \in \overline{A}'$ berarti bahwa $B \cap \overline{A}$ memuat suatu titik y di $\overline{A}$ yang berbeda dari x . Karena $B \cap A = \emptyset$, pastilah

$y \in A'$. Namun, hal ini, bersama dengan fakta bahwa B merupakan lingkungan dari y , berarti bahwa B harus memuat titik dari A yang berbeda dari y . Akan tetapi, $B \cap A = \emptyset$, sehingga kita memperoleh kontradiksi. Kita simpulkan bahwa $x \in \bar{A}$ dan $\bar{A}' \subseteq \bar{A}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup.

Pembuktian bahwa $\bar{A}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A diserahkan kepada kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 10.9 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X .

- Apa yang harus kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa $\bar{A}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A ?
- Andaikan C suatu subhimpunan tertutup dari X yang memuat A . Untuk menunjukkan bahwa $\bar{A} \subseteq C$, mengapa cukup untuk menunjukkan bahwa $A' \subseteq C$?
- Jika $x \in A'$, apa yang dapat kita katakan tentang x ?
- Lengkapilah pembuktian bahwa $\bar{A} \subseteq C$.

Salah satu konsekuensi dari [Teorema 10.10](#) adalah sebagai berikut.

Corollary 10.11 *Suatu subhimpunan C dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika $C = \bar{C}$.*

Kita juga dapat mencirikan himpunan tertutup sebagai himpunan yang memuat batasnya.

Definisi 10.12 Batas $\text{Bdry}(A)$ dari suatu subhimpunan A pada ruang metrik X adalah himpunan semua titik batas dari A .

Teorema 10.13 *Suatu subhimpunan C dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya.*

Pembuktian [Teorema 10.13](#) diserahkan kepada [Latihan 10](#).

Ingat bahwa titik batas dari suatu subhimpunan A pada ruang metrik X adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$. Titik-titik batas adalah titik-titik yang, dalam arti tertentu, berada “di antara” suatu himpunan dan komplementnya. Sebagai contoh, jika $A = (0, 1]$ di $\mathbb{R}$, batas A adalah himpunan $\{0, 1\}$. Kita juga memperoleh bahwa $\bar{A} = [0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$, dan $\bar{\mathbb{R} \setminus A} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Perhatikan bahwa $\text{Bdry}(A) = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$. Pernyataan ini selalu benar, sebagaimana dirumuskan secara formal dalam teorema berikut.

Teorema 10.14 *Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Maka*

$$\text{Bdry}(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Untuk membuktikan $\text{Bdry}(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$, kita perlu memverifikasi inklusi pada kedua arah. Misalkan $x \in \text{Bdry}(A)$ dan N suatu lingkungan dari x . Maka N memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$. Kita meninjau kasus $x \in A$ dan kasus $x \notin A$.

- Andaikan $x \in A$. Maka $x \in \bar{A}$. Selain itu, $x \notin X \setminus A$, sehingga N harus memuat suatu titik di $X \setminus A$ yang berbeda dari x . Hal ini menjadikan x titik limit dari $X \setminus A$, sehingga $x \in \bar{X \setminus A}$.
- Andaikan $x \notin A$. Maka $x \in X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$. Selain itu, $x \notin A$, sehingga N harus memuat suatu titik di A yang berbeda dari x . Hal ini menjadikan x titik limit dari A , sehingga $x \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Dalam kedua kasus tersebut, kita memperoleh $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, sehingga $\text{Bdry}(A) \subseteq \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Untuk implikasi sebaliknya, lihat kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 10.10 Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Dalam kegiatan ini, kita membuktikan bahwa

$$\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \subseteq \text{Bdry}(A).$$

Misalkan $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

- (a) Apa yang harus berlaku bagi x , mengingat x berada dalam irisan dua himpunan?
- (b) Misalkan N suatu lingkungan dari x . Seperti yang kita lakukan dalam pembuktian [Teorema 10.14](#), kita meninjau kasus $x \in A$ dan $x \notin A$.
 - (i) Andaikan $x \in A$. Mengapa N harus memuat suatu titik di A dan suatu titik yang tidak berada di A ? Apa yang dapat kita simpulkan tentang x ?
 - (ii) Andaikan $x \notin A$. Mengapa N harus memuat suatu titik di A dan suatu titik yang tidak berada di A ? Apa yang dapat kita simpulkan tentang x ?
 - (iii) Apa yang dapat kita simpulkan dari bagian (i) dan (ii)?

Himpunan Tertutup dan Limit Barisan

Misalkan kita meninjau suatu barisan (a_n) di dalam subhimpunan A dari ruang metrik X yang konvergen ke suatu titik x . Haruskah $x \in A$? Kita akan meninjau pertanyaan ini dalam kegiatan berikutnya.

Kegiatan 10.11 Misalkan $A = (0, 1)$ dan $B = [0, 1]$ di $(\mathbb{R}, d_E)$. Untuk setiap bilangan bulat positif n , misalkan $a_n = \frac{1}{n+1}$. Perhatikan bahwa barisan (a_n) termuat dalam himpunan A maupun B .

- (a) Barisan (a_n) konvergen ke titik apa di $\mathbb{R}$?
- (b) Apakah $\lim a_n$ berada di A ?
- (c) Benarkah $\lim a_n \in B$?
- (d) Sebutkan dua perbedaan penting antara himpunan A dan B yang menjelaskan perbedaan jawaban pada bagian (b) dan (c). Jawablah dengan menggunakan terminologi yang telah kita perkenalkan dalam bagian ini.

Hasil [Kegiatan 10.11](#) dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 10.15 *Suatu subhimpunan C dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika setiap barisan (c_n) di C yang konvergen ke suatu titik $c \in X$ memenuhi $c \in C$.*

Bukti. Misalkan X suatu ruang metrik dan C suatu subhimpunan dari X . Pertama, andaikan C tertutup. Misalkan (c_n) suatu barisan konvergen di C dengan $c = \lim c_n$. Jadi, $c \in C$ atau c merupakan titik limit dari C . Karena C memuat titik-titik limitnya, kedua kasus tersebut memberikan $c \in C$. Jadi, $\lim c_n \in C$.

Pembuktian implikasi yang tersisa diserahkan kepada kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 10.12 Misalkan X suatu ruang metrik dan C suatu subhimpunan dari X . Dalam kegiatan ini, kita akan membuktikan pernyataan berikut: jika setiap kali suatu barisan (c_n) di C konvergen ke suatu titik $c \in X$, titik c tersebut berada di C , maka C adalah himpunan tertutup.

- (a) Sebutkan tiga cara berbeda untuk menunjukkan bahwa suatu subhimpunan dari ruang metrik adalah

himpunan tertutup. Cara manakah yang mungkin relevan dalam situasi ini untuk menunjukkan bahwa himpunan C tertutup?

- (b) Misalkan c suatu titik limit dari C . Apa yang dapat kita simpulkan dari hal tersebut?
- (c) Lengkapilah pembuktian bahwa C adalah himpunan tertutup.

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Misalkan X suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X .
 - i Suatu titik $x \in X$ adalah titik batas dari A jika setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$.
 - ii Suatu titik x adalah titik limit dari A jika setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x .
 - iii Suatu titik $a \in A$ adalah titik terasing dari A jika terdapat lingkungan N dari a sedemikian sehingga $N \cap A = \{a\}$.

Titik batas dan titik limit tidak harus berada dalam himpunan A , sedangkan titik terasing dari A harus berada dalam A . Untuk $A = (0, 1) \cup \{2\}$ sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d_E)$, 0 merupakan titik batas, tetapi bukan titik terasing, sedangkan 2 merupakan titik batas, tetapi bukan titik limit. Selain itu, 0.5 merupakan titik limit, tetapi bukan titik batas maupun titik terasing. Jika A dipandang sebagai subhimpunan dari $\mathbb{R}$ dengan metrik diskret, setiap titik dari A merupakan titik terasing, tetapi tidak ada titik di $\mathbb{R}$ yang merupakan titik batas atau titik limit dari A . Jadi, meskipun setiap titik batas merupakan titik limit atau titik terasing, ketiga konsep tersebut berbeda.

- Suatu subhimpunan A dari ruang metrik X tertutup jika $X \setminus A$ merupakan himpunan terbuka.
- Sebarang irisan himpunan-himpunan tertutup adalah tertutup, sedangkan gabungan berhingga dari himpunan-himpunan tertutup adalah tertutup.
- Suatu fungsi f dari ruang metrik X ke ruang metrik Y kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(C)$ merupakan himpunan tertutup di X setiap kali C merupakan himpunan tertutup di Y .
- Misalkan X suatu ruang metrik, misalkan A suatu subhimpunan dari X , dan misalkan x suatu titik limit dari A . Maka terdapat barisan (a_n) di A yang konvergen ke x .
- Misalkan X suatu ruang metrik, misalkan A suatu subhimpunan dari X , dan misalkan x suatu titik batas dari A . Maka terdapat barisan (x_n) di $X \setminus A$ dan barisan (a_n) di A yang konvergen ke x .
- Batas suatu subhimpunan A dari ruang metrik X adalah himpunan titik-titik batas dari A .
- Suatu subhimpunan A dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika A memuat semua titik limitnya. Demikian pula, A tertutup jika dan hanya jika A memuat semua titik batasnya.
- Himpunan semua titik limit dari suatu subhimpunan A pada ruang metrik X dinotasikan dengan A' . Tutupan A adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A'$. Tutupan A adalah himpunan tertutup terkecil di X yang memuat A .
- Suatu subhimpunan A dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika $\lim a_n$ berada di A setiap kali (a_n) merupakan barisan konvergen di A .

Latihan

1. Untuk soal ini, argumen informal tetapi meyakinkan sudah memadai.

- (a) Misalkan $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}^2, d_E)$. Perhatikan bahwa D adalah cakram satuan pada bidang. Tentukan semua titik interior, titik batas, titik akumulasi (titik limit), dan titik terasing dari D . Berikan alasan untuk kesimpulan Anda. Apakah D merupakan himpunan terbuka? Apakah D merupakan himpunan tertutup? Jelaskan.
- (b) Misalkan $A = \mathbb{Q}$, himpunan bilangan rasional, sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d_E)$. Tentukan semua titik interior, titik batas, titik akumulasi (titik limit), dan titik terasing dari A . Berikan alasan untuk kesimpulan Anda. Apakah A merupakan himpunan terbuka? Apakah A merupakan himpunan tertutup? Jelaskan.
- (c) Misalkan $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d_E)$. Tentukan semua titik interior, titik batas, titik akumulasi (titik limit), dan titik terasing dari A . Berikan alasan untuk kesimpulan Anda. Apakah A merupakan himpunan terbuka? Apakah A merupakan himpunan tertutup? Jelaskan.

2. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Misalkan $a \in X$, dan misalkan $r > 0$. Kita tahu bahwa bola terbuka $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ merupakan himpunan terbuka. Misalkan

$$B[a, r] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Buktikan atau sangkal: $B[a, r]$ merupakan himpunan tertutup di X .

3. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Kita telah melihat bahwa suatu subhimpunan dari X dapat sekaligus terbuka dan tertutup. Himpunan yang sekaligus terbuka dan tertutup dapat dicirikan melalui batasnya. Temukan dan buktikan pencirian tersebut. (Pernyataan Anda harus berbentuk: Suatu subhimpunan A dari ruang metrik X sekaligus terbuka dan tertutup jika dan hanya jika batas A adalah .)
4. Misalkan A adalah subhimpunan dari suatu ruang metrik. Misalkan A' adalah himpunan titik limit dari A dan A^i adalah himpunan titik terasing dari A . Buktikan pernyataan-pernyataan berikut.

- (a) $A' \cup A^i = A \cup A'$
- (b) $A' \cap A^i = \emptyset$
- (c) $A \subseteq A' \cup A^i$
- (d) $x \in \overline{A}$ jika dan hanya jika terdapat suatu barisan titik-titik di A yang konvergen ke x
- (e) $\overline{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A
- (f) $\text{Int}(A)$ adalah gabungan semua himpunan terbuka yang termuat di dalam A
- (g) $\overline{A}$ adalah gabungan saling lepas dari $\text{Int}(A)$ dan $\text{Bdry}(A)$
- (h) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{Int}(A)$
- (i) $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$

5. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan A adalah subhimpunan dari X . Buktikan bahwa suatu titik $x \in X$ adalah titik limit dari A jika dan hanya jika setiap bola terbuka yang berpusat di x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x .

6. Misalkan A adalah subhimpunan dari suatu ruang metrik. Misalkan A' adalah himpunan titik limit dari A dan A^i adalah himpunan titik terasing dari A .

- (a) Buktikan bahwa $A' \cap A^i = \emptyset$ dan $A \subseteq A' \cup A^i$.
- (b) Buktikan bahwa $x \in \overline{A}$ jika dan hanya jika terdapat suatu barisan titik-titik di A yang konvergen ke x .
- (c) Buktikan bahwa jika F adalah himpunan tertutup sedemikian sehingga $A \subseteq F$, maka $\overline{A} \subseteq F$. Selanjutnya, buktikan bahwa $\overline{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup F tersebut dan karena itu tertutup.
7. Buktikan [Teorema 10.7](#) bahwa jika A adalah subhimpunan dari ruang metrik X dan b adalah titik batas dari A , maka terdapat barisan (x_n) di $X \setminus A$ dan barisan (a_n) di A yang konvergen ke b .
8. Ingat bahwa jarak dari suatu titik x dalam ruang metrik X ke suatu subhimpunan tak kosong A dari X adalah

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Buktikan bahwa suatu subhimpunan C dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika, kapan pun $x \in X$ dan $d(x, C) = 0$, berlaku $x \in C$.

9. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Dalam latihan ini, kita menunjukkan bahwa beberapa subhimpunan dari X , selain $\emptyset$ dan X , pasti tertutup. Tunjukkan bahwa setiap subhimpunan berhingga dari X tertutup.

Petunjuk. Apa saja titik limit dari suatu subhimpunan berhingga?

10. Buktikan bahwa suatu subhimpunan C dari ruang metrik X tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya.
11. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) adalah ruang metrik dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ adalah suatu fungsi.
- (a) Buktikan bahwa f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\text{Int}(B)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$ untuk setiap subhimpunan B dari Y .
- (b) Berikan contoh ketika inklusi, dan bukan kesamaan, pada (a) merupakan hasil terbaik yang dapat diperoleh.
- (c) Berikan contoh yang menunjukkan bahwa kesamaan pada (a) memang dapat tercapai.
12. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan misalkan A adalah subhimpunan dari X . Buktikan bahwa setiap titik batas dari A merupakan titik limit atau titik terasing dari A .
13. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, dan misalkan A serta B adalah subhimpunan dari X .
- (a) Apakah berlaku $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$? Jika benar, buktikan. Jika salah, tunjukkan alasannya dan buktikan setiap inklusi yang benar.
- (b) Apakah berlaku $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$? Jika benar, buktikan. Jika salah, tunjukkan alasannya dan buktikan setiap inklusi yang benar.
14. Ingat bahwa gabungan tak hingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam ruang metrik belum tentu tertutup, dan irisan tak hingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam ruang metrik belum tentu terbuka. Dalam latihan ini, kita menyelidiki keadaan yang memungkinkan kita menyimpulkan bahwa gabungan tak hingga dari himpunan-himpunan tertutup bersifat tertutup dan irisan tak hingga dari himpunan-himpunan terbuka bersifat terbuka. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik.
- (a) Pertama-tama, kita buktikan sebuah hasil pendahuluan. Misalkan C adalah subhimpunan tertutup dari X dan $x \in X$. Buktikan bahwa jika $x \notin C$, maka $d(x, C) > 0$.

-
- (b) Misalkan $\{C_\alpha\}$ adalah suatu koleksi subhimpunan tertutup dari X , dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I , yang memiliki sifat berikut: untuk setiap $x \in X$, terdapat $\epsilon_x > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \epsilon_x)$ beririsan dengan hanya berhingga banyak himpunan C_α . Buktikan bahwa $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ tertutup.
- (c) Tentukan dan buktikan pernyataan analog untuk himpunan-himpunan terbuka di X .
15. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika x adalah suatu titik dalam ruang metrik X , maka himpunan beranggota tunggal $\{x\}$ tertutup.
- (b) Satu-satunya subhimpunan dari $\mathbb{R}$ yang sekaligus terbuka dan tertutup terhadap metrik standar adalah $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$.
- (c) Jika (X, d) adalah ruang metrik dengan $X = \{1, 3, 5\}$ dan $d(x, y) = xy - 1 \pmod{8}$, maka himpunan $\{1, 3\}$ sekaligus terbuka dan tertutup di X .
- (d) Jika X adalah ruang metrik dan $A \subseteq X$, maka $\text{Int}(\overline{A}) = A$.
- (e) Batas dari setiap subhimpunan ruang metrik X merupakan himpunan tertutup.
- (f) Jika A adalah subhimpunan dari ruang metrik X , maka $A \subseteq A' \cup A^i$, dengan A' adalah himpunan titik limit dari A dan A^i adalah himpunan titik terasing dari A .

Bab 11

Subruang dan Hasil Kali Ruang Metrik

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan subruang dari suatu ruang metrik?
- Bagaimana kita menentukan himpunan terbuka dan tertutup dalam subruang suatu ruang metrik?
- Apa yang dimaksud dengan hasil kali ruang-ruang metrik, dan bagaimana kita menjadikan hasil kali tersebut sebagai ruang metrik?

Pendahuluan

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Kita dapat menjadikan A sendiri sebagai ruang metrik dengan cara yang sangat sederhana. Ketika melakukannya, kita mengatakan bahwa A merupakan **subruang** dari X .

Aktivitas Persiapan 11.1 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Untuk menjadikan subhimpunan A sebagai ruang metrik, kita perlu mendefinisikan suatu metrik pada A . Agar dapat memandang A sebagai subruang dari X , kita ingin agar metrik pada A sesuai dengan metrik pada X . Jadi, kita mendefinisikan $d' : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d'(a_1, a_2) = d(a_1, a_2)$$

untuk setiap $a_1, a_2 \in A$. Perhatikan bahwa d dan d' merupakan fungsi yang berbeda karena keduanya memiliki domain yang berbeda.

- (a) Tunjukkan bahwa d' merupakan metrik pada A . Karena d' merupakan metrik pada A , maka (A, d') merupakan ruang metrik. Metrik d' merupakan **pembatasan** dari d pada $A \times A$ dan dapat pula dinotasikan dengan d_A .

Definisi 11.1 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Suatu **subruang** dari (X, d) adalah subhimpunan A dari X yang dilengkapi dengan metrik d_A dari $A \times A$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d_A(a_1, a_2) = d(a_1, a_2)$$

untuk setiap $a_1, a_2 \in A$.

Kita dapat menanyakan sifat-sifat ruang X mana, jika ada, yang diwarisi oleh suatu subruang.

Aktivitas Persiapan 11.2

- (a) Misalkan $(X, d) = (\mathbb{R}, d_E)$ dan misalkan $A = [0, 1]$. Misalkan $0 < a < 1$. Apakah himpunan $[0, a)$ terbuka di X ? Apakah himpunan $[0, a)$ terbuka di A ? Jelaskan.
- (b) Misalkan $(X, d) = (\mathbb{R}, d_E)$ dan misalkan $A = \mathbb{Z}$. Apa saja subhimpunan terbuka dari A ? Jelaskan.
- (c) Misalkan $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_E)$, misalkan $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (sumbu x di $\mathbb{R}^2$), dan misalkan $Z = \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$. Perhatikan bahwa $Z \subset A \subset X$; kita dapat memandang Z sebagai subruang dari A maupun X , serta A sebagai subruang dari X .
 - (i) Jelaskan mengapa A merupakan subhimpunan tertutup dari X .
 - (ii) Jelaskan mengapa Z merupakan subhimpunan terbuka dari A .
 - (iii) Apakah Z merupakan subhimpunan terbuka dari X ? Jelaskan.

Himpunan Terbuka dan Tertutup di Subruang

Dalam aktivitas pendahuluan, kita melihat bahwa suatu subruang belum tentu mewarisi sifat-sifat ruang yang lebih besar. Sebagai contoh, suatu subhimpunan dari sebuah subruang mungkin terbuka di subruang tersebut, tetapi tidak terbuka di ruang yang lebih besar. Namun, terdapat hubungan antara subhimpunan-subhimpunan terbuka di suatu subruang dan himpunan-himpunan terbuka di ruang yang lebih besar.

Teorema 11.2 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Suatu subhimpunan O_A dari A terbuka di A jika dan hanya jika terdapat himpunan terbuka O_X di X sedemikian sehingga $O_A = O_X \cap A$.

Bukti. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Misalkan O_A suatu subhimpunan terbuka dari A . Jadi, untuk setiap $a \in O_A$ terdapat $\delta_a > 0$ sedemikian sehingga $B_A(a, \delta_a) \subseteq O_A$, dengan $B_A(a, \delta_a)$ adalah bola terbuka di A yang berpusat di a dan berjari-jari δ_a . Maka, $O_A = \bigcup_{a \in O_A} B_A(a, \delta_a)$. Sekarang misalkan $B_X(a, \delta_a)$ bola terbuka di X yang berpusat di a dan berjari-jari δ_a , dan misalkan $O_X = \bigcup_{a \in O_A} B_X(a, \delta_a)$. Perhatikan bahwa

$$B_A(a, \delta_a) = B_X(a, \delta_a) \cap A.$$

Karena merupakan gabungan bola-bola terbuka di X , himpunan O_X terbuka di X . Sekarang

$$\begin{aligned} O_X \cap A &= \left(\bigcup_{a \in O_A} B_X(a, \delta_a) \right) \cap A = \bigcup_{a \in O_A} (B_X(a, \delta_a) \cap A) \\ &= \bigcup_{a \in O_A} B_A(a, \delta_a) = O_A. \end{aligned}$$

Jadi, terdapat himpunan terbuka O_X di X sedemikian sehingga $O_A = O_X \cap A$.

Untuk implikasi sebaliknya, lihat aktivitas berikut. ■

Kegiatan 11.3 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Andaikan $O_A = A \cap O_X$ untuk suatu himpunan O_X yang terbuka di X . Dalam aktivitas ini kita akan membuktikan bahwa O_A merupakan subhimpunan terbuka dari A .

- (a) Misalkan $a \in O_A$. Jelaskan mengapa harus terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B_X(a, \delta)$, yaitu bola terbuka di X yang berjari-jari δ dan berpusat di a dalam ruang X , merupakan subhimpunan dari O_X .
- (b) Apa kandidat yang wajar untuk sebuah bola terbuka di A yang berpusat di a dan termuat dalam O_A ? Buktikan dugaan Anda.
- (c) Kesimpulan apa yang dapat kita tarik?

Sekarang kita dapat menanyakan bagaimana keadaan himpunan tertutup dalam suatu subruang. Jika X merupakan ruang metrik dan A suatu subruang, maka menurut definisi, suatu subhimpunan C_A dari A tertutup jika dan hanya jika $C_A = A \setminus O_A$ untuk suatu himpunan O_A yang terbuka di A . Pernyataan yang sepadan dengan [Teorema 11.2](#) juga berlaku bagi himpunan tertutup dalam subruang.

Teorema 11.3 Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Suatu subhimpunan C_A dari A tertutup di A jika dan hanya jika terdapat himpunan tertutup C_X di X sedemikian sehingga $C_A = C_X \cap A$.

Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 4](#).

Hasil Kali Ruang Metrik

Jika kita memiliki dua ruang metrik (X_1, d_1) dan (X_2, d_2) , kita mungkin bertanya apakah himpunan $X_1 \times X_2$ dapat dijadikan ruang metrik. Pendekatan yang wajar adalah mendefinisikan fungsi $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d((x, y), (u, v)) = d_1(x, u) + d_2(y, v)$$

untuk (x, y) dan (u, v) dalam $X_1 \times X_2$. Namun, d ini tidak mendefinisikan suatu metrik. Sebagai contoh, jika $x \in X_1$ dan $y \neq v$ dalam X_2 , maka $d((x, y), (x, v)) = 0$ meskipun $(x, y) \neq (x, v)$. Untuk membentuk suatu metrik, kita dapat mengambil petunjuk dari metrik Euklides pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pada $\mathbb{R}$, metrik tersebut berbentuk $d_1(x, y) = |x - y|$, sedangkan pada $\mathbb{R}^2$ metriknya adalah

$$\begin{aligned} d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_1(x_2, y_2)^2}. \end{aligned}$$

Jadi, pada (X_1, d_1) dan (X_2, d_2) kita dapat mempertimbangkan untuk mendefinisikan $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}. \quad (11.1)$$

Kegiatan 11.4 Dalam aktivitas ini, kita memverifikasi beberapa sifat yang menjadikan d , sebagaimana didefinisikan dalam [\(11.1\)](#), suatu metrik. Misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ berada dalam $X_1 \times X_2$

- (a) Jelaskan mengapa $d(x, y)$ lebih besar daripada atau sama dengan 0.
- (b) Jelaskan mengapa $d(x, y) = d(y, x)$.
- (c) Jelaskan mengapa $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

[Kegiatan 11.4](#) memberikan tiga dari empat sifat yang diperlukan untuk membuktikan bahwa d , sebagaimana didefinisikan dalam [\(11.1\)](#), merupakan suatu metrik. Sekarang kita memverifikasi sifat terakhir, yaitu pertidaksamaan segitiga.

Misalkan x dan y didefinisikan seperti dalam [Kegiatan 11.4](#), dan misalkan $z = (z_1, z_2)$ berada dalam $X_1 \times X_2$. Maka

$$\begin{aligned}
 d(x, z)^2 &= d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2 \\
 &\leq (d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1))^2 + (d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2))^2 \\
 &= (d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2) + 2(d_1(x_1, y_1)d_1(y_1, z_1) + d_2(x_2, y_2)d_2(y_2, z_2)) \\
 &\quad + (d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2) \\
 &= d(x, y)^2 + 2(d_1(x_1, y_1)d_1(y_1, z_1) + d_2(x_2, y_2)d_2(y_2, z_2)) + d(y, z)^2 \\
 &\leq d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2.
 \end{aligned}$$

Pertidaksamaan terakhir mengikuti dari pertidaksamaan Cauchy–Schwarz yang diterapkan pada pasangan jarak koordinat. Karena semua suku tak negatif, kita menyimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
 d(x, z) &\leq \sqrt{d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2} \\
 &= \sqrt{(d(x, y) + d(y, z))^2} \\
 &= d(x, y) + d(y, z).
 \end{aligned}$$

Kita menyimpulkan bahwa d , sebagaimana didefinisikan dalam [\(11.1\)](#), merupakan suatu metrik pada $X_1 \times X_2$. Dengan demikian, kita dapat menjadikan hasil kali sebarang dua ruang metrik sebagai ruang metrik.

Dalam aktivitas berikutnya, kita meninjau hasil kali bola-bola terbuka dan himpunan-himpunan terbuka dalam hasil kali ruang metrik.

Kegiatan 11.5 Misalkan $X_1 = [1, 2]$ dan $X_2 = [3, 4]$ sebagai subruang dari $\mathbb{R}$ dengan menggunakan metrik Euklides.

- (a) Jelaskan secara terperinci seperti apa ruang hasil kali $X_1 \times X_2$.
- (b) Jika B_1 merupakan bola terbuka dalam X_1 dan B_2 merupakan bola terbuka dalam X_2 , apakah $B_1 \times B_2$ merupakan bola terbuka dalam $X_1 \times X_2$? Jelaskan.
- (c) Jika B_1 merupakan bola terbuka dalam X_1 dan B_2 merupakan bola terbuka dalam X_2 , apakah $B_1 \times B_2$ merupakan himpunan terbuka dalam $X_1 \times X_2$? Jelaskan.
- (d) Jika mungkin, temukan suatu subhimpunan terbuka dari $X_1 \times X_2$ yang tidak berbentuk $O_1 \times O_2$, dengan O_1 terbuka dalam X_1 dan O_2 terbuka dalam X_2 .

[Kegiatan 11.5](#) menunjukkan bahwa himpunan-himpunan terbuka dalam suatu hasil kali lebih rumit daripada sekadar hasil kali himpunan-himpunan terbuka dalam ruang-ruang faktornya. Kita akan kembali membahas hasil kali ketika meninjau ruang topologi nanti.

Kita menutup bagian ini dengan satu komentar terakhir mengenai hasil kali. Kita dapat menjadikan hasil kali Kartesius dari sebarang banyaknya ruang metrik yang berhingga sebagai ruang metrik dengan konstruksi yang sama seperti yang kita gunakan untuk hasil kali dua ruang.

Definisi 11.4 Misalkan (X_i, d_i) merupakan ruang metrik untuk i dari 1 sampai suatu bilangan bulat positif n . **Ruang metrik hasil kali** (X, d) adalah hasil kali Kartesius

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

dengan metrik d yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$$

apabila $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada dalam X .

Metrik d disebut **metrik hasil kali**, sedangkan ruang-ruang (X_i, d_i) disebut ruang **koordinat** atau ruang **faktor** dari (X, d) . Pembuktian bahwa d merupakan suatu metrik pada dasarnya sama seperti dalam kasus $n = 2$, dan diserahkan kepada [Latihan 6](#).

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Suatu subhimpunan A dari ruang metrik (X, d) menjadi ruang metrik yang disebut subruang ketika dilengkapi dengan metrik $d|_{A \times A}$ pada A .
- Jika X merupakan ruang metrik dan A merupakan subruang dari X , suatu subhimpunan O_A dari A terbuka dalam A jika dan hanya jika $O_A = A \cap O$ untuk suatu himpunan terbuka O dalam X . Suatu subhimpunan C_A dari A tertutup dalam A jika $C_A = A \setminus O_A$ untuk suatu himpunan terbuka O_A dalam A . Sebagai alternatif, suatu himpunan C_A tertutup dalam A jika $C_A = A \cap C$ untuk suatu himpunan tertutup C dalam X .
- Misalkan (X_i, d_i) merupakan ruang metrik untuk i dari 1 sampai suatu bilangan bulat positif n . Ruang metrik hasil kali (X, d) adalah hasil kali Kartesius

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

dengan metrik d yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$$

apabila $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada dalam X .

Latihan

1. Tentukan apakah himpunan-himpunan S berikut terbuka dalam subruang A dari ruang metrik $(\mathbb{R}, d_E)$.
 - (a) $S = [1, 2)$ dalam $A = [1, 3]$
 - (b) $S = \{1, 2\}$ dalam $A = \mathbb{Q}$
 - (c) $S = \{1, 2\}$ dalam $A = \mathbb{Z}$
2. Misalkan O suatu himpunan terbuka dalam ruang metrik (X, d) . Tunjukkan bahwa suatu subhimpunan U dari O terbuka dalam $(O, d|_{O \times O})$ jika dan hanya jika U terbuka dalam (X, d) .
3. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu. Jika A merupakan subruang dari X , apakah pembatasan $f|_A$ dari f pada A yang memetakan A ke Y

harus kontinu? Berikan bukti bahwa pembatasan tersebut kontinu, atau berikan suatu contoh yang menunjukkan bahwa pembatasan tersebut tidak harus kontinu.

4. Buktikan [Teorema 11.3](#). Artinya, misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A suatu subhimpunan dari X . Buktikan bahwa suatu subhimpunan C_A dari A tertutup dalam A jika dan hanya jika terdapat suatu himpunan tertutup C_X dalam X sedemikian sehingga $C_A = C_X \cap A$.
5. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik. Buktikan atau sangkal: fungsi $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

merupakan suatu metrik pada $X \times Y$.

6. Misalkan (X_i, d_i) merupakan ruang metrik untuk i dari 1 sampai suatu bilangan bulat positif n . Misalkan $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$$

apabila $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ berada dalam X . Tunjukkan bahwa d merupakan suatu metrik pada $\prod_{i=1}^n X_i$.

7. Misalkan (x_n) suatu barisan bilangan real yang tak menurun dan terbatas di atas. Artinya, $x_n \leq x_{n+1}$ untuk setiap n dan terdapat bilangan real positif K sedemikian sehingga $x_n \leq K$ untuk setiap n . Tunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen.
8. Hasil kali tak hingga dapat dipandang sebagai ruang metrik. Salah satu contoh penting adalah ruang Hilbert H , yang terdiri atas semua barisan tak hingga (x_n) dengan $x_n \in \mathbb{R}$ untuk setiap n dan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ berhingga. Ruang Hilbert memiliki penerapan penting dalam fisika, khususnya dalam mekanika kuantum.

- (a) Berikan dua unsur berbeda dalam H dan satu barisan tak hingga yang tidak berada dalam H . Jelaskan contoh-contoh Anda.
- (b) Kita mendefinisikan norma suatu unsur $x = (x_n)$ dalam H sebagai

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Dari norma ini, kita dapat mendefinisikan jarak antara unsur-unsur $x = (x_n)$ dan $y = (y_n)$ dalam H sebagai berikut:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

dengan $x - y = (x_n - y_n)$. Cara lain untuk menuliskan d adalah

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Salah satu potensi masalah dengan fungsi d ini adalah bahwa kita perlu mengetahui: jika x dan y berada dalam H , maka $x - y \in H$. Artinya, tunjukkan bahwa jika $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ berhingga, maka $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$ juga berhingga.

Petunjuk. Tinjaulah suatu jumlah berhingga dan gunakan [Latihan 7](#).

- (c) Tunjukkan bahwa d merupakan suatu metrik pada H .
- (d) Misalkan $E^m = \{(x_n) \in H \mid x_k = 0 \text{ untuk } k > m\}$. Misalkan $f : E^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ didefinisikan oleh $f((x_n)_{n=1}^\infty) = (x_n)_{n=1}^m$. Tunjukkan bahwa f merupakan bijeksi sedemikian sehingga $d((x_n), (y_n)) = d_E(f((x_n)), f((y_n)))$ untuk sebarang unsur $(x_n), (y_n)$ dalam E^m . Jadi, E^m pada dasarnya sama dengan $\mathbb{R}^m$, sehingga kita dapat memandang ruang $\mathbb{R}^m$ tertanam dalam H sebagai suatu subruang dari H untuk setiap $m \in \mathbb{Z}^+$.
9. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika d merupakan metrik diskret pada ruang metrik X , maka untuk sebarang subruang A dari X , pembatasan d pada A merupakan metrik diskret.
- (b) Jika d merupakan metrik pada ruang X yang bukan metrik diskret, dan jika A merupakan subhimpunan dari X , maka $d|_A$ tidak mungkin merupakan metrik diskret.
- (c) Misalkan A suatu subruang dari ruang metrik (X, d) . Jika suatu barisan (a_n) berada dalam A dan $\lim a_n = a$ untuk suatu $a \in A$, maka $\lim a_n = a$ dalam X .
- (d) Misalkan A suatu subruang dari ruang metrik (X, d) . Jika suatu barisan (a_n) berada dalam A dan $\lim a_n = a$ untuk suatu $a \in X$, maka $\lim a_n = a$ dalam A .
- (e) Jika (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang-ruang metrik, maka fungsi $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

merupakan suatu metrik pada $X \times Y$.

- (f) Jika (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang-ruang metrik, maka fungsi $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2)d_Y(y_1, y_2)$$

merupakan suatu metrik pada $X \times Y$.

Bagian II

Ruang Topologi, Kekontinuan,
Homeomorfisme, Subruang, Kuosien,
Kekompakan, Keterhubungan,
Lintasan, dan Hasil Kali

Bab 12

Ruang Topologi

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan topologi dan ruang topologi?
- Sifat penting apa yang dimiliki himpunan terbuka terkait gabungan dan irisan?
- Apa yang dimaksud dengan basis untuk suatu topologi? Mengapa basis untuk suatu topologi berguna?
- Apa yang dimaksud dengan lingkungan dalam ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan titik interior dan interior suatu himpunan dalam ruang topologi?
- Apa hubungan antara interior suatu himpunan dan himpunan terbuka dalam ruang topologi?

Pendahuluan

Banyak sifat yang telah kita perkenalkan pada ruang metrik (kekontinuan, titik limit, dan batas) dapat dirumuskan dalam istilah himpunan terbuka pada ruang tersebut. Dengan pemikiran itu, kita dapat memperluas konsep ruang dengan menghilangkan metrik dan cukup mendefinisikan himpunan terbuka pada ruang tersebut. Hasilnya adalah apa yang disebut **ruang topologi**.

Ingat bahwa himpunan terbuka dalam ruang metrik memenuhi sifat-sifat tertentu, antara lain gabungan sebarang himpunan terbuka adalah terbuka dan irisan berhingga himpunan terbuka adalah terbuka. Sekarang kita gunakan sifat-sifat ini sebagai aksioma untuk mendefinisikan ruang topologi.

Definisi 12.1 Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Suatu himpunan τ^3 yang terdiri dari subhimpunan-subhimpunan X disebut **topologi** pada X jika

1. X dan $\emptyset$ merupakan anggota τ ,
2. gabungan sebarang himpunan-himpunan dalam τ merupakan himpunan dalam τ , dan
3. irisan berhingga sebarang himpunan dalam τ merupakan himpunan dalam τ .

Suatu **ruang topologi** adalah himpunan apa pun yang dilengkapi dengan suatu topologi. Jika X adalah ruangnya dan τ topologi pada X , kita menyatakan ruang topologi tersebut sebagai (X, τ) . Anggota-anggota

³Simbol τ adalah huruf Yunani tau kecil.

τ disebut **himpunan terbuka** dalam ruang topologi. Jika topologinya sudah jelas dari konteks, kita cukup menyebut X sebagai ruang topologi. Berikut beberapa contoh.

Aktivitas Persiapan 12.1

- (a) Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Apakah himpunan $\tau = \{a, b\}$ merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi.
- (b) Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$. Apakah koleksi subhimpunan yang terdiri dari $\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi. Jika bukan, koleksi subhimpunan terkecil apa dari X yang perlu ditambahkan ke τ agar τ menjadi topologi pada X ?
- (c) Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$. Apakah koleksi subhimpunan yang terdiri dari

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, X\}$$

merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi. Jika bukan, koleksi subhimpunan terkecil apa dari X yang perlu ditambahkan ke τ agar τ menjadi topologi pada X ?

- (d) Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$. Apakah koleksi subhimpunan yang terdiri dari

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, X\}$$

merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi. Jika bukan, koleksi subhimpunan terkecil apa dari X yang perlu ditambahkan ke τ agar τ menjadi topologi pada X ?

- (e) Misalkan F adalah koleksi subhimpunan berhingga dari $\mathbb{R}$. Misalkan $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup F$. Pertama, tuliskan tiga anggota F dan tiga himpunan yang bukan anggota F . Selanjutnya, apakah τ merupakan topologi pada $\mathbb{R}$? Berikan justifikasi.
- (f) Misalkan $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}\}$. Apakah τ merupakan topologi pada $\mathbb{R}$? Berikan justifikasi.
- (g) Misalkan X suatu himpunan dan $\tau = \{\emptyset, X\}$. Apakah τ merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi.
- (h) Misalkan X suatu himpunan dan τ koleksi semua subhimpunan X . Apakah τ merupakan topologi pada X ? Berikan justifikasi.

Contoh-Contoh Topologi

Dalam kegiatan pendahuluan kita telah melihat beberapa contoh topologi. Misalkan X suatu himpunan tak kosong.

- Topologi yang terdiri dari semua subhimpunan X disebut **topologi diskret**.
- Topologi $\{\emptyset, X\}$ adalah **topologi indiskret**.
- Jika (X, d) merupakan ruang metrik, maka koleksi yang terdiri dari gabungan semua bola terbuka merupakan topologi yang disebut **topologi metrik**. Hasil ini memberi tahu kita bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang topologi di bawah topologi metrik. Kelak kita akan melihat bahwa tidak setiap ruang topologi merupakan ruang metrik.

Topologi diskret dan indiskret dapat didefinisikan pada himpunan apa pun dan sering digunakan untuk membuat contoh. Topologi lain yang dapat didefinisikan pada himpunan apa pun dibahas dalam kegiatan berikutnya.

Kegiatan 12.2 Misalkan X suatu himpunan dan τ_{FC} terdiri dari himpunan kosong beserta semua subhimpunan O dari X sedemikian sehingga $X \setminus O$ berhingga.

- (a) Buktikan bahwa τ_{FC} merupakan topologi pada X . (Topologi τ_{FC} disebut **topologi komplemen berhingga** atau **topologi kofinit**.)
- (b) Jelaskan mengapa τ_{FC} merupakan topologi diskret ketika X berhingga.

Basis untuk Topologi

Menjelaskan secara lengkap himpunan terbuka dalam suatu topologi dapat sulit. Sebagai gantinya, kita dapat menjelaskan topologi menggunakan koleksi himpunan yang membangkitkan topologi tersebut. Sebagai contoh, jika (X, d) merupakan ruang metrik, maka koleksi himpunan terbuka dalam X membentuk topologi pada X , yang disebut topologi **metrik**. Kita juga telah melihat bahwa dalam ruang metrik, setiap himpunan terbuka dalam X merupakan gabungan bola-bola terbuka. Karena itu kita menyebut koleksi bola terbuka sebagai **basis** untuk himpunan-himpunan terbuka dalam X . Hal yang sama dapat kita lakukan dalam ruang topologi mana pun. Sebagai contoh yang tidak sepele, suatu topologi menarik yang didefinisikan pada bilangan bulat positif diperkenalkan oleh S.W. Golomb. Topologi ini dapat digunakan untuk membuktikan bahwa terdapat tak berhingga banyak bilangan prima. Topologi ini juga menjadikan bilangan bulat positif sebagai ruang Hausdorff terhubung (konsep-konsep ini akan dibahas lebih lanjut nanti). Topologi Golomb didefinisikan sebagai berikut. Jika a dan b merupakan bilangan bulat koprima dalam $\mathbb{Z}^+$ (yaitu, a dan b tidak memiliki faktor positif bersama selain 1 sehingga pembagi persekutuan terbesar a dan b adalah 1), misalkan

$$B_{a,b} = \{a + bn \mid n \geq 0\}.$$

Koleksi himpunan $B_{a,b}$ merupakan basis untuk topologi Golomb, dan ruang topologi $(\mathbb{Z}^+, \tau)$ disebut **ruang Golomb**. Membuktikan bahwa himpunan-himpunan $B_{a,b}$ membentuk basis suatu topologi merupakan latihan dalam teori bilangan, sehingga kita tidak membahas rinciannya.

Kegiatan 12.3 Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$. Anda boleh mengasumsikan bahwa τ merupakan topologi pada X . Jelaskan mengapa setiap himpunan terbuka tak kosong dalam ruang topologi (X, τ) dapat ditulis menggunakan gabungan sebarang dan irisan berhingga dari $\{a\}$, $\{b\}$, dan $\{c, d\}$.

Kegiatan 12.3 menunjukkan bahwa, seperti bola-bola terbuka dalam ruang metrik, suatu topologi dapat memiliki koleksi subhimpunan yang gabungannya membentuk semua himpunan terbuka dalam topologi tersebut. Namun kita perlu sedikit berhati-hati. Suatu basis akan membangkitkan koleksi himpunan terbuka untuk sebuah topologi, sehingga himpunan-himpunan basis yang kita gunakan harus merupakan himpunan terbuka. Selain itu, setiap titik dalam ruang topologi harus menjadi anggota salah satu himpunan basis, dan karena unsur-unsur basis harus menghasilkan semua himpunan terbuka dalam topologi, setiap himpunan dalam topologi (kecuali himpunan kosong) harus merupakan gabungan himpunan-himpunan dalam suatu basis. Kita juga harus dapat memastikan bahwa setiap irisan berhingga himpunan dalam topologi tetap merupakan himpunan dalam topologi ketika kita menulis himpunan-himpunan tersebut dalam istilah himpunan basis. Untuk menjamin dua syarat terakhir, akan kita lihat bahwa cukup mensyaratkan: untuk setiap titik dalam irisan unsur-unsur basis, terdapat unsur basis lain di dalam irisan tersebut yang memuat titik itu. Hal ini dirangkum dalam **Teorema 12.2**.

Teorema 12.2 Misalkan X suatu himpunan dan $\mathcal{B}$ koleksi subhimpunan dari X sedemikian sehingga

1. Untuk setiap $x \in X$, terdapat himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
2. Jika $x \in X$ merupakan anggota $B_1 \cap B_2$ untuk suatu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Maka himpunan τ yang terdiri dari himpunan kosong dan gabungan unsur-unsur $\mathcal{B}$ merupakan topologi pada X .

Sebelum membuktikan [Teorema 12.2](#), kita perlu mengetahui satu fakta tentang himpunan $\mathcal{B}$.

Kegiatan 12.4 Misalkan X suatu himpunan dan $\mathcal{B}$ koleksi subhimpunan dari X sedemikian sehingga

- (a) Untuk setiap $x \in X$, terdapat himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
- (b) Jika $x \in X$ merupakan anggota $B_1 \cap B_2$ untuk suatu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Misalkan $B_1, B_2, \dots, B_n$ merupakan anggota $\mathcal{B}$. Tujuan kegiatan ini adalah memperluas sifat 2 dan menunjukkan bahwa jika $x \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k$, maka terdapat himpunan $B \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B$ dan $B \subseteq \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k$.

- (i) Karena pernyataan yang ingin kita buktikan bergantung pada bilangan bulat positif n , kita akan menggunakan induksi matematika. Jelaskan mengapa kasus $n = 1$ dan $n = 2$ benar.
- (ii) Apa hipotesis induksinya dan apa yang ingin kita buktikan pada langkah induksi?
- (iii) Gunakan hipotesis induksi dan kondisi 2 untuk melengkapi pembuktian lema yang dicantumkan setelah kegiatan ini.

Sekarang kita dapat membuktikan [Teorema 12.2](#).

Lema 12.3 Misalkan X suatu himpunan dan $\mathcal{B}$ koleksi subhimpunan dari X sedemikian sehingga

1. Untuk setiap $x \in X$, terdapat himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
2. Jika $x \in X$ merupakan anggota $B_1 \cap B_2$ untuk suatu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Misalkan $B_1, B_2, \dots, B_n$ merupakan anggota $\mathcal{B}$. Jika $x \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k$, maka terdapat himpunan $B \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B$ dan $B \subseteq \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k$.

Bukti. Misalkan X suatu himpunan, dan misalkan $\mathcal{B}$ serta τ memenuhi kondisi yang diberikan. Berdasarkan definisi, $\emptyset \in \tau$. Untuk setiap $x \in X$ terdapat himpunan $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x$. Maka $X = \bigcup_{x \in X} B_x$, dan $X \in \tau$. Untuk melengkapi pembuktian bahwa τ merupakan topologi pada X , kita perlu menunjukkan bahwa τ tertutup terhadap gabungan sebarang dan irisan berhingga. Kita pertimbangkan gabungan terlebih dahulu. Misalkan $\{U_\alpha\}$ koleksi himpunan dalam τ untuk α pada suatu himpunan pengindeks I . Berdasarkan definisi, setiap U_α kosong atau merupakan gabungan unsur-unsur $\mathcal{B}$. Jadi $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ kosong, atau merupakan gabungan himpunan-himpunan dalam $\mathcal{B}$. Dengan demikian, $U \in \tau$ dan τ tertutup terhadap gabungan sebarang.

Sekarang kita tunjukkan bahwa τ tertutup terhadap irisan berhingga. Misalkan n bilangan bulat positif dan $\{U_k\}$ koleksi himpunan dalam τ untuk $1 \leq k \leq n$. Misalkan $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$. Jika $U_k = \emptyset$ untuk suatu k , maka $U = \emptyset$ merupakan anggota τ . Jadi anggap $U_k \neq \emptyset$ untuk setiap k antara 1 dan n . Misalkan $x \in U$. Maka $x \in U_k$ untuk setiap k . Untuk setiap m antara 1 dan n , fakta bahwa U_m merupakan gabungan unsur-unsur dalam $\mathcal{B}$ menyiratkan adanya $B_m \subseteq U_m$ dengan $x \in B_m$. Jadi, $x \in \bigcap_{1 \leq m \leq n} B_m$.

Lema 12.3 menunjukkan bahwa terdapat himpunan $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x$ dan $B_x \subseteq \bigcap_{1 \leq m \leq n} B_m \subseteq \bigcap_{1 \leq m \leq n} U_m = U$. Karena x merupakan anggota sebarang dari U , kita harus memiliki $U \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x$. Namun setiap B_x merupakan subhimpunan dari U , sehingga $\bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U$. Akibatnya,

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

dan $U \in \tau$. Jadi, τ merupakan topologi pada X . ■

Setiap koleksi $\mathcal{B}$ himpunan seperti yang diberikan dalam [Teorema 12.2](#) memiliki nama khusus.

Definisi 12.4 Misalkan X suatu himpunan. Himpunan $\mathcal{B}$ merupakan **basis untuk suatu topologi** (atau cukup disebut **basis**) pada X jika

1. Untuk setiap $x \in X$, terdapat himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
2. Jika $x \in X$ merupakan anggota $B_1 \cap B_2$ untuk suatu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Unsur-unsur suatu basis $\mathcal{B}$ disebut **unsur basis** atau **himpunan terbuka dasar**. Basis untuk topologi pada himpunan X mendefinisikan topologi pada X seperti ditunjukkan dalam [Teorema 12.2](#).

Perhatikan bahwa karena sifat (1) dari [Definisi 12.4](#), gabungan himpunan-himpunan dalam basis harus memuat X . Dengan kata lain, himpunan-himpunan dalam basis menutupi ruang tersebut. Sifat kedua memastikan bahwa jika suatu titik berada dalam irisan dua himpunan terbuka dasar, maka terdapat himpunan terbuka dasar yang lebih kecil yang memuat x .

Definisi 12.5 Misalkan $\mathcal{B}$ suatu basis untuk topologi pada himpunan X . **Topologi τ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$** memuat himpunan kosong dan semua gabungan sebarang unsur basis.

Jika topologi untuk ruang X sudah jelas dari konteks, kita juga menyebut basis topologi tersebut sebagai basis untuk X .

Kegiatan 12.5

(a) Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$.

(i) Apakah himpunan

$$\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, c, d\}\}$$

merupakan basis untuk τ ? Jika bukan, tambahkan sesedikit mungkin himpunan ke $\mathcal{B}$ agar menjadi basis untuk topologi ini.

(ii) Apakah himpunan

$$\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

merupakan basis untuk τ ? Jika bukan, tambahkan sesedikit mungkin himpunan ke $\mathcal{B}$ agar menjadi basis untuk topologi ini.

(b) Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dan X memiliki topologi diskret (topologi yang terdiri dari semua subhimpunan X). Apakah $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ merupakan basis untuk topologi diskret pada X ? Jika bukan, tambahkan sesedikit mungkin himpunan ke $\mathcal{B}$ agar menjadi basis untuk topologi ini.

(c) Tentukan basis untuk topologi diskret pada sembarang himpunan X .

Ruang Metrik dan Ruang Topologi

Setiap ruang metrik merupakan ruang topologi, dengan topologi berupa koleksi himpunan terbuka yang ditentukan oleh metrik. Topologi ini disebut **topologi metrik**. Pertanyaan alami adalah apakah setiap ruang topologi merupakan ruang metrik. Artinya, diberikan suatu ruang topologi, dapatkah kita mendefinisikan metrik pada ruang tersebut sehingga himpunan-himpunan terbukanya tepat sama dengan himpunan dalam topologinya? Sebagai contoh, setiap ruang dengan topologi diskret merupakan ruang metrik dengan metrik diskret.

Kegiatan 12.6 Misalkan $X = \{a, b, c, e\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Jelaskan mengapa tidak mungkin ada metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga himpunan terbuka dalam topologi metrik adalah himpunan-himpunan dalam τ .

Petunjuk. Andaikan metrik tersebut ada dan pertimbangkan bola-bola terbuka yang berpusat di c .

Kita menyimpulkan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang topologi, tetapi tidak setiap ruang topologi merupakan ruang metrik. Ruang topologi yang dapat direalisasikan sebagai ruang metrik disebut **termetriskan**.

Lingkungan dalam Ruang Topologi

Ingat bahwa dalam ruang metrik kita mendefinisikan lingkungan suatu titik a sebagai subhimpunan ruang yang memuat bola terbuka berpusat di a . Setiap bola terbuka merupakan himpunan terbuka, sehingga gagasan lingkungan dapat diperluas ke ruang topologi.

Definisi 12.6 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dan $a \in X$. Subhimpunan N dari X merupakan **lingkungan** dari a jika N memuat suatu himpunan terbuka yang memuat a .

Mari kita lihat beberapa contoh.

Kegiatan 12.7 Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

- (a) Tentukan semua lingkungan titik a .
- (b) Tentukan semua lingkungan titik c .

Dalam ruang metrik, suatu himpunan terbuka merupakan lingkungan dari setiap titiknya. Hal ini juga berlaku dalam ruang topologi.

Teorema 12.7 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi. Subhimpunan O dari X terbuka jika dan hanya jika O merupakan lingkungan dari setiap titiknya.

Bukti. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan O subhimpunan dari X . Pertama-tama kita tunjukkan bahwa jika O terbuka, maka O merupakan lingkungan dari setiap titiknya. Andaikan O himpunan terbuka dan $a \in O$. Himpunan O memuat himpunan terbuka O yang memuat a , sehingga O merupakan lingkungan dari a .

Arah sebaliknya menjadi pokok kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 12.8 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi. Misalkan O subhimpunan dari X . Andaikan O merupakan lingkungan dari setiap titiknya.

- (a) Apa yang perlu kita lakukan untuk menunjukkan bahwa O merupakan himpunan terbuka?
- (b) Misalkan $a \in O$. Mengapa harus ada himpunan terbuka O_a sedemikian sehingga $a \in O_a \subseteq O$?
- (c) Lengkapi pembuktian bahwa O merupakan himpunan terbuka.

Interior Himpunan dalam Ruang Topologi

Kita telah melihat bahwa topologi mendefinisikan himpunan terbuka dalam ruang topologi. Seperti pada ruang metrik, himpunan terbuka dapat dicirikan melalui titik-titik interiornya. Dalam ruang metrik kita mendefinisikan titik interior dalam istilah lingkungan — hal yang sama berlaku dalam ruang topologi.

Definisi 12.8 Misalkan A subhimpunan dari ruang topologi X . Titik $a \in A$ merupakan **titik interior** dari A jika A merupakan lingkungan dari a .

Ingat bahwa suatu himpunan merupakan lingkungan suatu titik jika himpunan tersebut memuat himpunan terbuka yang memuat titik itu. Berdasarkan definisi, setiap himpunan terbuka merupakan lingkungan dari setiap titiknya, sehingga setiap titik dari himpunan terbuka O merupakan titik interior O . Sebaliknya, jika setiap titik suatu himpunan O merupakan titik interior, maka O merupakan lingkungan dari setiap titiknya dan bersifat terbuka. Argumen ini dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 12.9 Misalkan X suatu ruang topologi. Subhimpunan O dari X terbuka jika dan hanya jika setiap titik O merupakan titik interior O .

Koleksi titik interior dalam suatu himpunan membentuk subhimpunan dari himpunan tersebut, yang disebut **interior** himpunan itu.

Definisi 12.10 Interior subhimpunan A dari ruang topologi X adalah himpunan

$$\text{Int}(A) = \{a \in A \mid a \text{ merupakan titik interior dari } A\}.$$

Kegiatan 12.9

- Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$, dengan τ topologi standar (dalam konteks ini, standar berarti topologi metrik yang ditentukan oleh metrik Euklides). Misalkan $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$ di $\mathbb{R}$. Berapakah $\text{Int}(A)$? Apa subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A ?
- Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$, dengan τ topologi diskret (topologi yang semua subhimpunannya terbuka). Misalkan $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$ di $\mathbb{R}$. Berapakah $\text{Int}(A)$? Apa subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A ?
- Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$, dengan τ topologi komplemen berhingga (topologi yang himpunan terbukanya adalah himpunan kosong serta semua subhimpunan O dari $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\mathbb{R} \setminus O$ berhingga). Misalkan $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$ di $\mathbb{R}$. Berapakah $\text{Int}(A)$? Apa subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A ?
- Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

andaikan τ merupakan topologi pada X . Misalkan $A = \{b, c, d\}$. Berapakah $\text{Int}(A)$? Apa subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A ?

Kita mungkin mengharapkan bahwa interior suatu himpunan merupakan himpunan terbuka, sebagaimana dalam ruang metrik. Hal ini benar, tetapi kita dapat menyatakan lebih banyak. Dalam [Kegiatan 12.9](#) kita melihat bahwa pada contoh-contoh kita $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A . Bahwa hal ini selalu benar merupakan pokok teorema berikutnya.

Teorema 12.11 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan A subhimpunan dari X . Interior A merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A .

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A subhimpunan dari X . Kita perlu membuktikan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan terbuka dalam X , dan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A . Pertama-tama kita tunjukkan bahwa $\text{Int}(A)$ terbuka. Misalkan $a \in \text{Int}(A)$. Maka a merupakan titik interior A , sehingga A merupakan lingkungan a . Ini berarti terdapat

himpunan terbuka O yang memuat a sedemikian sehingga $O \subseteq A$. Namun O merupakan lingkungan dari setiap titiknya, sehingga setiap titik dalam O merupakan titik interior A . Jadi $O \subseteq \text{Int}(A)$. Dengan demikian, $\text{Int}(A)$ merupakan lingkungan dari setiap titiknya dan, akibatnya, $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan terbuka.

Pembuktian bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A diserahkan pada kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 12.10 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan A subhimpunan dari X .

- (a) Apa yang harus kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A ?
- (b) Misalkan O subhimpunan terbuka dari X yang terkandung dalam A , dan misalkan $x \in O$. Apa yang diberitahukan oleh fakta bahwa O terbuka? Kemudian lengkapi pembuktian bahwa $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Salah satu konsekuensi dari [Teorema 12.11](#) adalah sebagai berikut.

Corollary 12.12 *Subhimpunan O dari ruang topologi X terbuka jika dan hanya jika $O = \text{Int}(O)$.*

Ringkasan

Definisi 12.13 Misalkan τ_1 dan τ_2 dua topologi pada himpunan X . Jika $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka τ_1 merupakan topologi yang **lebih kasar** (atau **lebih lemah**) daripada τ_2 . Kita juga mengatakan bahwa τ_2 merupakan topologi yang **lebih halus** (atau **lebih kuat**) daripada τ_1 .

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Topologi pada himpunan X adalah koleksi subhimpunan terbuka dari X . Secara lebih khusus, himpunan τ yang terdiri dari subhimpunan suatu himpunan X merupakan topologi pada X jika
 1. X dan $\emptyset$ merupakan anggota τ ,
 2. gabungan sebarang himpunan dalam τ merupakan himpunan dalam τ , dan
 3. irisan berhingga sebarang himpunan dalam τ merupakan himpunan dalam τ .

Ruang topologi adalah himpunan yang dilengkapi dengan topologi pada himpunan tersebut.

- Gabungan sebarang himpunan terbuka adalah terbuka dan irisan berhingga himpunan terbuka adalah terbuka dalam ruang topologi.
- Menjelaskan secara lengkap himpunan terbuka dalam suatu topologi dapat sulit, dan bekerja dengan himpunan terbuka sebarang juga dapat sulit. Jika suatu koleksi himpunan yang lebih sederhana membangkitkan topologi, koleksi himpunan sederhana tersebut merupakan basis untuk topologi itu. Secara lebih formal, himpunan $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi pada himpunan X jika
 1. Untuk setiap $x \in X$, terdapat himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
 2. Jika $x \in X$ merupakan anggota $B_1 \cap B_2$ untuk suatu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- Subhimpunan A dari ruang topologi X merupakan lingkungan titik $a \in A$ jika terdapat himpunan terbuka O yang terkandung dalam A sedemikian sehingga $a \in O$.
- Titik x dalam subhimpunan A dari ruang topologi X merupakan titik interior A jika A merupakan lingkungan x . Interior himpunan A adalah koleksi semua titik interior A .
- Subhimpunan A dari ruang topologi X terbuka jika dan hanya jika A sama dengan interiornya.

Latihan

1. Anda mungkin bertanya mengapa kita tidak dapat mendefinisikan basis topologi pada himpunan X sebagai sembarang koleksi subhimpunan yang gabungannya adalah X . Pertimbangkan contoh $X = \{a, b, c\}$ dan $S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.
 - (a) Tentukan koleksi semua gabungan anggota-anggota S .
 - (b) Jelaskan mengapa koleksi gabungan anggota-anggota S , bersama dengan himpunan kosong, bukan topologi pada X . Sifat basis yang mana yang tidak terpenuhi?
2. Untuk setiap bilangan bulat a , misalkan $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Artinya, $a\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua kelipatan bilangan bulat dari a .
 - (a) Tunjukkan bahwa $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ merupakan basis untuk topologi τ pada $\mathbb{Z}$.
Petunjuk. Himpunan apakah $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$?
 - (b) Apakah himpunan bilangan bulat positif merupakan himpunan terbuka dalam ruang topologi $(\mathbb{Z}, \tau)$? Jelaskan.
 - (c) Apakah himpunan bilangan bulat ganjil terbuka dalam ruang topologi $(\mathbb{Z}, \tau)$? Jelaskan.
 - (d) Apakah himpunan $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 5\}$ terbuka dalam ruang topologi $(\mathbb{Z}, \tau)$? Jelaskan.
3. Latihan ini merupakan generalisasi dari [Latihan 2](#). Misalkan a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$. Misalkan $A_{a,b} = a\mathbb{Z} + b = \{ak + b \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Tunjukkan bahwa $\{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$ merupakan basis untuk topologi τ pada $\mathbb{Z}$.
Petunjuk. Jika $B_1 = A_{a_1, b_1}$ dan $B_2 = A_{a_2, b_2}$, serta $x \in B_1 \cap B_2$, apa yang dapat kita katakan tentang $A_{a_1 a_2, x}$?
 - (b) Misalkan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $f(n) = n + (-1)^n$.
 - (i) Buktikan bahwa f merupakan bijeksi.
 - (ii) Jika O merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{Z}$, apakah $f(O)$ merupakan himpunan terbuka?
 - (iii) Jika U merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{Z}$, apakah $f^{-1}(U)$ merupakan himpunan terbuka?**Petunjuk.** Apakah f^{-1} ?
4. Misalkan $\mathcal{B} = \{(-x, x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$.
 - (a) Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi τ pada $\mathbb{R}$.
 - (b) Setiap himpunan basis terbuka dalam $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Jadi kita dapat menanyakan apakah topologi τ berbeda dari topologi Euklides yang dibangkitkan oleh semua interval terbuka dalam $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa terdapat interval berbentuk (a, b) yang terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ tetapi bukan himpunan terbuka dalam τ .
5. Misalkan $X = \{a, b, c\}$, dan misalkan $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$ serta $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Baik τ_1 maupun τ_2 merupakan topologi pada X , tetapi setiap anggota τ_1 juga merupakan anggota τ_2 . Jika hal ini terjadi, kita mengatakan bahwa τ_1 merupakan topologi yang lebih lemah daripada τ_2 . [Latihan 4](#) memberikan sebuah contoh. Gunakan definisi formal pada bagian ringkasan dalam tugas-tugas berikut.

- (a) Apa topologi paling lemah pada suatu himpunan?
- (b) Apa topologi paling kuat pada suatu himpunan?
- (c) Jika suatu topologi pada X memuat semua himpunan satu titik, maka setiap subhimpunan terbuka dan topologi kita adalah topologi diskret. Selain itu, jika suatu topologi pada X memuat semua himpunan dua titik, maka untuk x, y , dan z dalam X berlaku $\{x, y\} \cap \{x, z\} = \{x\}$ merupakan anggota topologi dan sekali lagi kita memperoleh topologi diskret. Pertimbangkan topologi

$$\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}.$$

Satu-satunya himpunan yang bukan anggota σ adalah $\{c\}$ dan $\{b, c\}$, tetapi menambahkan salah satu himpunan tersebut ke σ akan menghasilkan topologi diskret. Jadi σ merupakan topologi paling kuat yang mungkin selain topologi diskret.

- (d) Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Adakah topologi σ pada X sedemikian sehingga σ bukan topologi diskret tetapi tidak ada topologi yang lebih kuat pada X selain topologi diskret? Jelaskan.
- (e) Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Adakah topologi γ pada X sedemikian sehingga γ bukan topologi indiskret tetapi tidak ada topologi yang lebih lemah pada X selain topologi indiskret? Jelaskan.
- (f) Secara umum, mungkin terdapat banyak basis berbeda untuk suatu topologi, dan dua basis yang berbeda dapat memiliki kardinalitas yang sama. Hal ini tidak berlaku untuk ruang topologi berhingga. Misalkan X himpunan berhingga dan τ topologi pada X . Dalam latihan ini kita akan menunjukkan bahwa terdapat basis minimal untuk topologi τ . Artinya, terdapat basis $\mathcal{B}_{\min}$ dari τ sedemikian sehingga jika $\mathcal{B}$ adalah basis lain untuk τ , maka $\mathcal{B}_{\min} \subseteq \mathcal{B}$.
- (i) Jika $x \in X$, misalkan U_x adalah irisan semua himpunan terbuka yang memuat x . Jelaskan mengapa U_x merupakan himpunan terbuka.
- (ii) Misalkan $\mathcal{B}_{\min} = \{U_x \mid x \in X\}$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}_{\min}$ merupakan basis untuk τ .
- (iii) Tunjukkan bahwa jika $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk τ , maka $\mathcal{B}_{\min} \subseteq \mathcal{B}$.
- (iv) Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Anda boleh mengasumsikan bahwa τ merupakan topologi pada X . Tentukan basis minimal tunggal untuk τ .

- (g) Sebanyak 9 topologi sasaran yang berbeda pada $X = \{a, b, c\}$ dicantumkan setelah topologi indiskret sebagai titik awal. Setiap topologi sasaran berada dalam satu atau lebih urutan topologi yang disusun menurut kekasaran. Untuk setiap topologi τ pada butir 2--10, tuliskan urutan topologi terpanjang yang dimulai dari $\{\emptyset, X\} \subset \tau$, disusun menurut kekasaran.

- 1 $\{\emptyset, X\}$
- 2 $\{\emptyset, \{a\}, X\}$
- 3 $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$
- 4 $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$
- 5 $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$
- 6 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
- 7 $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
- 8 $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$
- 9 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
- 10 topologi diskret

6. Tentukan semua topologi pada X jika

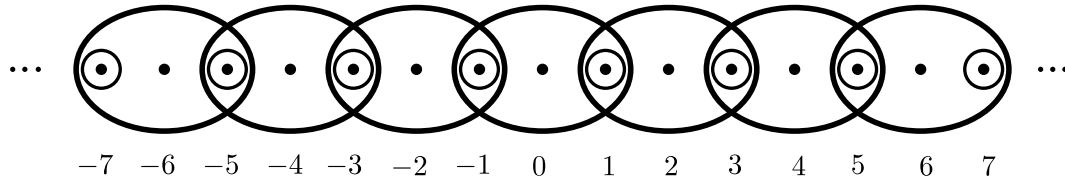
- (a) X merupakan himpunan satu titik
- (b) X merupakan himpunan dua titik
- (c) X merupakan himpunan tiga titik.

Petunjuk. terdapat 29 topologi berbeda

7. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, misalkan $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Misalkan $\tau = \{\emptyset, O_1, O_2, O_3, \dots\}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}^+, \tau)$ merupakan ruang topologi.
8. Misalkan A, B dua subhimpunan dalam ruang topologi X . Apa yang dapat Anda katakan tentang hubungan antara $\text{Int}(A \cap B)$, $\text{Int}(A \cup B)$ dan $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, masing-masing pasangan tersebut? Verifikasi hasil Anda.
9. Misalkan X himpunan tak kosong dan p unsur X . Misalkan τ_p koleksi subhimpunan X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang memuat p . Tunjukkan bahwa τ_p merupakan topologi pada X . (Topologi ini disebut **topologi titik tertentu**).
10. Misalkan X himpunan tak kosong dan p unsur X . Misalkan $\tau_{\bar{p}}$ koleksi subhimpunan X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang tidak memuat p . Tunjukkan bahwa $\tau_{\bar{p}}$ merupakan topologi pada X . (Topologi ini disebut **topologi titik yang dikecualikan**.)
11. Salah satu penerapan topologi adalah pada tampilan citra digital, seperti layar komputer. Tampilan citra digital merupakan susunan persegi panjang piksel dan dapat dimodelkan menggunakan bidang digital. Dalam latihan ini kita mempertimbangkan penyederhanaan bidang digital — garis digital — yang kita pandang sebagai koleksi piksel satu dimensi dengan panjang tak berhingga. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ kita definisikan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Himpunan-himpunan $B(n)$ diilustrasikan dalam [Gambar 12.14](#).



Gambar 12.14 Topologi garis digital.

Dalam latihan ini kita mengeksplorasi koleksi $\mathcal{B} = \{B(n)\}$.

- (a) Tunjukkan bahwa koleksi $\mathcal{B} = \{B(n)\}$ merupakan basis untuk topologi pada $\mathbb{Z}$. (Topologi yang dihasilkan disebut **topologi garis digital** τ_{dl} .⁴ Garis digital memodelkan susunan piksel satu dimensi, dengan bilangan bulat genap sebagai piksel dan bilangan bulat ganjil sebagai batas antar piksel. Informasi tentang **bidang digital** dapat ditemukan dalam [Bab 20](#).)
- (b) Tentukan himpunan mana dari himpunan-himpunan berikut yang terbuka dalam topologi garis digital:
 - (i) $\{0\}$
 - (ii) $\{1\}$
 - (iii) $\{0, 2\}$

- (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (v) $\mathbb{Z}^+$
- (vi) Himpunan bilangan bulat ganjil.

12. Misalkan n bilangan bulat positif dan $\mathcal{P}_n$ koleksi semua polinom dalam n variabel real $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sebagai contoh khusus, polinom

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + 5x_1x_2^2x_3^4 - x_2 + 10x_1^5x_3$$

merupakan anggota $\mathcal{P}_3$. Jika $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan anggota $\mathcal{P}_n$, misalkan $Z(f)$ himpunan nol polinom f . Artinya,

$$Z(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}.$$

Perhatikan bahwa $Z(f)$ merupakan subhimpunan dari $\mathbb{R}^n$. Sebagai contoh, jika $n = 2$ dan $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, maka $Z(f)$ adalah himpunan pasangan terurut dalam $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi $x_1^2 - x_2 = 0$, atau $x_2 = x_1^2$. Ini adalah grafik parabola $y = x^2$ pada bidang.

- (a) Deskripsikan $Z(f)$ dalam $\mathbb{R}^2$ jika $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 1$.
 - (b) Jika E merupakan himpunan polinom dalam $\mathcal{P}_n$, kita definisikan $Z(E) = \bigcap_{f \in E} Z(f)$ sebagai himpunan nol bersama semua polinom dalam E . Deskripsikan $Z(E)$ jika $E = \{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3\}$ dalam $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Misalkan $\mathcal{B}$ himpunan komplemen dari himpunan-himpunan $Z(f)$ untuk $f \in \mathcal{P}_n$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi pada $\mathbb{R}^n$. Topologi yang dihasilkan disebut topologi **Zariski**.
 - (d) Apakah himpunan $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = 0\}$ merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}^2$ dengan topologi Zariski? Jelaskan.
 - (e) Jelaskan mengapa topologi Zariski ketika $n = 1$ sama dengan topologi kofinit pada $\mathbb{R}$. Artinya, tunjukkan bahwa setiap himpunan yang terbuka dalam topologi kofinit terbuka dalam topologi Zariski dan setiap himpunan yang terbuka dalam topologi Zariski terbuka dalam topologi kofinit.
13. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Himpunan $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, d, f\}, \{d, f\}, X\}$ merupakan topologi pada himpunan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- (b) Himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan terbuka dari $\mathbb{R}$ menggunakan topologi komplemen berhingga τ_{FC} pada $\mathbb{R}$.
- (c) Himpunan $\mathcal{B} = \{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ merupakan basis untuk topologi τ pada himpunan $X = \{a, b, c, d\}$, dengan

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}.$$
- (d) Misalkan X himpunan tak kosong. Jika τ merupakan topologi diskret, maka ruang topologi (X, τ) termetriskan.
- (e) Titik b merupakan titik interior dari subhimpunan $A = \{a, b, d\}$ dalam ruang topologi (X, τ) , dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

⁴Topologi garis digital ini memiliki penerapan dalam pemrosesan digital — lihat *Introduction to Topology: Pure and Applied* oleh Colin Adams dan Robert Franzosa, Pearson Education, Inc., 2008, Bagian 1.4 dan 11.3. Himpunan $\mathbb{Z}$ dengan topologi garis digital disebut **garis digital**.

- (f) Jika τ_1 dan τ_2 merupakan topologi pada ruang X , maka $\tau_1 \cup \tau_2$ juga merupakan topologi pada X .
- (g) Jika τ_1 dan τ_2 merupakan topologi pada ruang X , maka $\tau_1 \cap \tau_2$ juga merupakan topologi pada X .

Bab 13

Himpunan Tertutup dalam Ruang Topologi

Pertanyaan Pemandu

- Apa artinya suatu himpunan tertutup dalam ruang topologi?
- Sifat penting apa yang dimiliki himpunan tertutup dalam kaitannya dengan gabungan dan irisan?
- Apa yang dimaksud dengan barisan dalam ruang topologi?
- Apa artinya suatu barisan konvergen dalam ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan limit suatu barisan dalam ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan titik limit suatu subhimpunan dari ruang topologi? Bagaimana kaitan himpunan tertutup dengan titik limit?
- Apa yang dimaksud dengan titik batas suatu subhimpunan dari ruang topologi, dan apa yang dimaksud dengan batas subhimpunan tersebut? Bagaimana kaitan himpunan tertutup dengan titik batas?
- Apa artinya suatu ruang bersifat Hausdorff? Sifat penting apa yang dimiliki ruang Hausdorff?
- Apa saja aksioma separasi T_1 , T_2 , T_3 , dan T_4 ? Gagasan apa yang mendasari sifat-sifat ini?

Pendahuluan

Kita telah mendefinisikan himpunan tertutup di ruang metrik sebagai komplemen dari suatu himpunan terbuka. Karena topologi didefinisikan menggunakan himpunan-himpunan terbuka, definisi yang sama dapat kita gunakan untuk himpunan tertutup dalam ruang topologi. Setelah memiliki definisi himpunan tertutup, kita dapat menanyakan apakah titik limit, batas, dan tutupan dapat didefinisikan dalam ruang topologi, serta apakah gagasan-gagasan ini memiliki sifat-sifat yang bersesuaian di ruang topologi.

Definisi 13.1 Suatu subhimpunan C dari ruang topologi X disebut **tertutup** jika komplemennya, $X \setminus C$, terbuka.

Aktivitas Persiapan 13.1

- (a) Daftarkan semua himpunan tertutup dalam ruang topologi yang diberikan.
- (i) (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.
 - (ii) (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$.
 - (iii) (X, τ) dengan $X = \mathbb{R}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}\}$.
 - (iv) (X, τ) dengan $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. (Apa nama topologi ini?)
 - (v) (X, τ) dengan $X = \mathbb{Z}^+$ dan $\tau = \{\emptyset, X\}$ (topologi ini disebut topologi **indiskret** atau **trivial**).
- (b) Dengan menggunakan contoh-contoh pada bagian (1), temukan (jika mungkin) suatu himpunan yang
- (i) sekaligus tertutup dan terbuka (jika mungkin, temukan yang bukan seluruh ruang ataupun himpunan kosong)
 - (ii) tertutup tetapi tidak terbuka
 - (iii) terbuka tetapi tidak tertutup
 - (iv) tidak terbuka dan tidak tertutup
- (c) Dalam $\mathbb{R}^n$ dengan metrik Euklides, setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup. Apakah sifat ini berlaku dalam ruang topologi (X, τ) , dengan $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$? Jelaskan.

Gabungan dan Irisan Himpunan Tertutup

Sekarang kita telah mendefinisikan himpunan terbuka dan tertutup dalam ruang topologi. Dalam kegiatan pendahuluan, kita melihat bahwa suatu himpunan dapat sekaligus terbuka dan tertutup. Seperti yang kita lakukan pada ruang metrik, setiap himpunan yang sekaligus terbuka dan tertutup akan kita sebut himpunan **buka-tutup** (clopen, gabungan kata closed-open).

Berdasarkan definisi, sebarang gabungan dan setiap irisan berhingga himpunan terbuka dalam ruang topologi bersifat terbuka. Karena himpunan tertutup merupakan komplement himpunan terbuka, kita memperoleh teorema berikut.

Teorema 13.2 *Misalkan X suatu ruang topologi.*

1. *Sebarang irisan himpunan-himpunan tertutup dalam X merupakan himpunan tertutup dalam X .*
2. *Setiap gabungan berhingga himpunan-himpunan tertutup dalam X merupakan himpunan tertutup dalam X .*

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi. Untuk membuktikan bagian 1, andaikan C_α merupakan himpunan tertutup dalam X untuk setiap α dalam suatu himpunan indeks I . Maka

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus C_\alpha.$$

Ruas kanan merupakan gabungan sebarang himpunan-himpunan terbuka, sehingga ruas tersebut terbuka. Oleh karena itu, berdasarkan definisi, $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ merupakan himpunan tertutup.

Untuk bagian 2, andaikan $C_1, C_2, \dots, C_n$ merupakan himpunan-himpunan tertutup dalam X untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Untuk menunjukkan bahwa $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$ merupakan himpunan tertutup, kita akan menunjukkan

bahwa $X \setminus C$ merupakan himpunan terbuka. Sekarang,

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus C_k)$$

merupakan irisan berhingga himpunan-himpunan terbuka, sehingga bersifat terbuka. Dengan demikian, $\bigcup_{k=1}^n C_k$ merupakan himpunan tertutup. ■

Teorema 13.2 menyatakan bahwa sebarang irisan himpunan-himpunan tertutup bersifat tertutup, sedangkan hanya gabungan berhingga himpunan-himpunan tertutup yang dijamin tertutup. Bagaimana kita mengetahui bahwa gabungan tak berhingga himpunan-himpunan tertutup belum tentu tertutup?

Kegiatan 13.2 Misalkan $\mathbb{Z}$ suatu ruang topologi dengan topologi komplement berhingga τ_{FC} . Artinya, suatu himpunan tak kosong O terbuka dalam $\mathbb{Z}$ jika $\mathbb{Z} \setminus O$ berhingga.

- (a) Apa yang harus berlaku bagi kardinalitas himpunan-himpunan tertutup dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$?
- (b) Misalkan $C_n = \{2, 3, \dots, n\}$. Apakah himpunan $\bigcup_{n \geq 3} C_n$ tertutup dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$? Jelaskan.

Titik Limit dan Barisan dalam Ruang Topologi

Ingat bahwa kita mendefinisikan titik limit dari suatu himpunan A dalam ruang metrik X sebagai titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x . Karena kita telah mendefinisikan lingkungan dalam ruang topologi, definisi yang sama dapat kita gunakan.

Definisi 13.3 Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Suatu **titik limit** dari A adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x .

Himpunan A' yang terdiri atas titik-titik limit dari A disebut **himpunan turunan** dari A .

Kegiatan 13.3 Tentukan titik-titik limit dari himpunan-himpunan berikut.

- (a) $\{c, d\}$ dalam (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
- (b) $\{a, b\}$ dalam himpunan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, X\}.$$

- (c) $\{a, b\} \subset X$, dengan $X = \{a, b, c\}$ yang dilengkapi topologi diskret.
- (d) $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$, dengan τ topologi pada $\mathbb{Z}$ yang memiliki basis $\{B(n)\}$, dengan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

(Topologi ini disebut **topologi garis digital** dan memiliki penerapan dalam pemrosesan digital. Fakta bahwa koleksi $\{B(n)\}$ merupakan basis untuk suatu topologi pada $\mathbb{Z}$ dibahas dalam [Latihan 11](#).)

Dalam ruang metrik, suatu himpunan tertutup jika dan hanya jika memuat semua titik limitnya. Karena itu, hasil yang bersesuaian dalam ruang topologi semestinya tidak mengejutkan.

Teorema 13.4 Misalkan C suatu subhimpunan dari ruang topologi X , dan misalkan C' himpunan titik-titik limit dari C . Maka C tertutup jika dan hanya jika $C' \subseteq C$.

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan C suatu subhimpunan dari X . Pertama, andaikan C tertutup dan tunjukkan bahwa C memuat semua titik limitnya. Misalkan $x \in X$ suatu titik limit dari C . Kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa $x \notin C$. Maka $x \in X \setminus C$, dan himpunan ini terbuka. Artinya, terdapat suatu lingkungan (yaitu $X \setminus C$) dari x yang tidak memuat satu pun titik di C . Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa x merupakan titik limit dari C . Jadi, $x \in C$, sehingga C memuat semua titik limitnya.

Sebaliknya, andaikan C memuat semua titik limitnya. Untuk menunjukkan bahwa C tertutup, kita buktikan bahwa $X \setminus C$ terbuka. Kita kembali menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa $X \setminus C$ tidak terbuka. Maka terdapat $x \in X \setminus C$ sedemikian sehingga tidak ada lingkungan dari x yang seluruhnya termuat dalam $X \setminus C$. Akibatnya, setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di C , sehingga x merupakan titik limit dari C . Dengan demikian, $x \in C$, bertentangan dengan fakta bahwa $x \in X \setminus C$. Jadi, $X \setminus C$ terbuka dan C tertutup. ■

Dalam ruang metrik, kita melihat bahwa titik limit suatu himpunan merupakan limit dari suatu barisan titik-titik dalam himpunan tersebut. Untuk menyelidiki gagasan ini dalam ruang topologi, kita mendefinisikan barisan dengan cara yang sama seperti dalam ruang metrik.

Definisi 13.5 Suatu **barisan** dalam ruang topologi X adalah fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$.

Kita menggunakan notasi dan istilah barisan yang sama seperti dalam ruang metrik: kita menuliskan (x_n) untuk menyatakan suatu barisan f , dengan $x_n = f(n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$. Kekonvergenan dalam ruang topologi tidak dapat kita definisikan menggunakan metrik, tetapi dapat kita definisikan menggunakan himpunan terbuka. Ingat bahwa suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) konvergen ke titik x di ruang tersebut jika, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \epsilon$ untuk semua $n \geq N$. Dengan kata lain, setiap bola terbuka yang berpusat di x memuat semua suku barisan setelah suatu indeks tertentu. Kita dapat mengganti bola terbuka dengan himpunan terbuka untuk memperoleh definisi kekonvergenan yang serupa dalam ruang topologi.

Definisi 13.6 Suatu barisan (x_n) dalam ruang topologi X **konvergen** ke titik $x \in X$ jika, untuk setiap himpunan terbuka O yang memuat x , terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $x_n \in O$ untuk semua $n \geq N$.

Jika suatu barisan (x_n) konvergen ke titik x , kita menyebut x suatu **limit** dari barisan (x_n) .

Kegiatan 13.4 Dalam ruang metrik, limit barisan bersifat tunggal. Kita dapat menanyakan apakah hasil yang sama berlaku dalam ruang topologi. Tinjau ruang topologi (X, τ) , dengan $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Tentukan semua limit dari setiap barisan konstan dalam X .

Hasil [Kegiatan 13.4](#) menunjukkan bahwa perilaku barisan dalam ruang topologi tidak selalu sesuai dengan yang kita harapkan. Akibatnya, barisan tidak memainkan peran sepenting perannya dalam ruang metrik. Meskipun demikian, konsep titik limit tetap penting, demikian pula gagasan batas danutupan dalam ruang topologi.

Tutupan dalam Ruang Topologi

Setelah memiliki definisi titik limit, kita dapat mendefinisikan tutupan suatu himpunan seperti yang kita lakukan dalam ruang metrik.

Definisi 13.7 Tutupan dari suatu subhimpunan A dari ruang topologi X adalah himpunan

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Dengan kata lain, tutupan suatu himpunan terdiri atas elemen-elemen himpunan tersebut beserta titik-titik limitnya. Teorema berikut merupakan padanan teorema tentang tutupan dalam ruang metrik.

Teorema 13.8 Misalkan X suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan dari X . Tutupan A merupakan himpunan tertutup. Selain itu, tutupan A merupakan subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A .

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan dari X . Untuk membuktikan bahwa $\overline{A}$ merupakan himpunan tertutup, kita akan membuktikan bahwa $\overline{A}$ memuat titik-titik limitnya. Misalkan $x \in \overline{A}'$. Untuk menunjukkan bahwa $x \in \overline{A}$, kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa $x \notin \overline{A}$. Hal ini mengakibatkan $x \notin A$ dan $x \notin A'$. Karena $x \notin A'$, terdapat suatu lingkungan N dari x yang tidak memuat titik di A selain x . Namun, $A \subseteq \overline{A}$ dan $x \notin \overline{A}$, sehingga $N \cap A = \emptyset$. Akibatnya, terdapat himpunan terbuka $O \subseteq N$ yang memuat x dan memenuhi $O \cap A = \emptyset$. Karena $x \in \overline{A}'$, $O \cap \overline{A}$ memuat suatu titik y di $\overline{A}$ yang berbeda dari x . Karena $O \cap A = \emptyset$, haruslah $y \in A'$. Namun, karena O merupakan lingkungan dari y , himpunan O harus memuat suatu titik di A yang berbeda dari y . Hal ini bertentangan dengan $O \cap A = \emptyset$. Jadi, $x \in \overline{A}$ dan $\overline{A}' \subseteq \overline{A}$. Dengan demikian, $\overline{A}$ merupakan himpunan tertutup.

Pembuktian bahwa $\overline{A}$ merupakan subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A diserahkan kepada kegiatan berikutnya. ■

Kegiatan 13.5 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X .

- Apa yang harus kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa $\overline{A}$ merupakan subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A ?
- Andaikan C suatu subhimpunan tertutup dari X yang memuat A . Untuk menunjukkan bahwa $\overline{A} \subseteq C$, mengapa cukup menunjukkan bahwa $A' \subseteq C$?
- Jika $x \in A'$, apa yang dapat kita simpulkan tentang x ?
- Lengkapilah pembuktian bahwa $\overline{A} \subseteq C$.

Salah satu akibat [Teorema 13.8](#) adalah sebagai berikut.

Corollary 13.9 Suatu subhimpunan C dari ruang topologi X tertutup jika dan hanya jika $C = \overline{C}$.

Batas Suatu Himpunan

Selain titik limit, kita juga telah mendefinisikan titik batas dalam ruang metrik. Ingat bahwa titik batas dari suatu himpunan A dalam ruang metrik X dapat dipandang sebagai sebarang titik dalam $\overline{A} \cap \overline{X} \setminus A$. Kita menggunakan definisi yang sama dalam ruang topologi.

Definisi 13.10 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Suatu **titik batas** dari A adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$. **Batas** dari A adalah himpunan

$$\text{Bdry}(A) = \{x \in X \mid x \text{ adalah titik batas dari } A\}.$$

Seperti dalam ruang metrik, titik-titik batas suatu himpunan A adalah titik-titik yang berada “di antara” A dan komplementnya.

Kegiatan 13.6 Tentukan batas dari himpunan-himpunan berikut.

(a) $\{c, d\}$ dalam (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

(b) $\{a, b\}$ dalam himpunan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, X\}.$$

(c) $\{a, b\} \subset X$, dengan $X = \{a, b, c\}$ yang dilengkapi topologi diskret.

(d) $\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{R}$ yang dilengkapi topologi komplemen berhingga τ_{FC} .

Seperti dalam ruang metrik, kita dapat mencirikan himpunan tertutup sebagai himpunan yang memuat batasnya.

Teorema 13.11 *Suatu subhimpunan C dari ruang topologi X tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya.*

Pembuktian [Teorema 13.11](#) diserahkan kepada [Latihan 10](#).

Aksioma Separasi

Seperti telah kita lihat, barisan dalam ruang topologi pada umumnya tidak berperilaku seperti yang kita harapkan. Oleh karena itu, kita mencari syarat pada ruang topologi yang membuat barisan menunjukkan perilaku yang lebih teratur. Dalam kegiatan pendahuluan, kita melihat bahwa dalam ruang topologi, himpunan beranggota tunggal tidak harus tertutup. Dalam [Kegiatan 13.4](#), kita juga melihat bahwa limit barisan dalam ruang topologi tidak harus tunggal. Perilaku seperti ini membatasi hasil yang dapat dibuktikan tentang ruang tersebut. Oleh karena itu, kita mendefinisikan kelas-kelas ruang topologi yang perilakunya lebih mendekati intuisi kita.

Kegiatan 13.7

(a) Tinjau suatu ruang metrik (X, d) , dan misalkan x dan y titik-titik berbeda dalam X .

(i) Jelaskan mengapa x dan y tidak mungkin sekaligus menjadi limit dari barisan yang sama jika terdapat bola terbuka saling lepas $B(x, r)$ yang berpusat di x dan $B(y, s)$ yang berpusat di y sedemikian sehingga $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$.

(ii) Sekarang, tunjukkan bahwa kita dapat menemukan bola terbuka saling lepas $B(x, r)$ yang berpusat di x dan $B(y, s)$ yang berpusat di y sedemikian sehingga $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$.

(b) Kembali ke contoh dalam [Kegiatan 13.4](#) dengan $X = \{a, b, c\}$ dan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

Kita telah melihat bahwa setiap titik dalam X merupakan limit dari barisan konstan (c) . Jika $x \neq c$ dalam X , jelaskan mengapa tidak ada himpunan terbuka saling lepas O_x yang memuat x dan O_c yang memuat c .

Fakta yang diuraikan dalam [Kegiatan 13.7](#), yakni bahwa titik-titik berbeda dapat dipisahkan dengan himpunan terbuka saling lepas, membedakan ruang metrik dari ruang lain yang limitnya tidak tunggal. Jika kita membatasi perhatian pada ruang yang titik-titiknya dapat dipisahkan dengan cara ini, kita dapat mengharapkan limit yang tunggal. Ruang seperti itu disebut ruang **Hausdorff**.

Definisi 13.12 Suatu ruang topologi X disebut ruang **Hausdorff** jika untuk setiap pasangan titik berbeda x, y dalam X , terdapat himpunan terbuka O_x yang memuat x dan O_y yang memuat y sedemikian sehingga $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Kegiatan 13.7 menunjukkan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff. Ketika kita mulai memberlakukan syarat pada ruang topologi, kita membatasi ruang-ruang yang kita pertimbangkan.

Kegiatan 13.8

- (a) Misalkan X sebarang himpunan dan τ topologi diskret. Apakah (X, τ) Hausdorff? Berikan alasan untuk jawaban Anda.
- (b) Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi Hausdorff dengan $X = \{x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ suatu himpunan berhingga. Apakah $\{x\}$ merupakan himpunan terbuka? Jelaskan. Apa yang dapat disimpulkan tentang topologi τ ?

Petunjuk. Apakah x merupakan titik limit dari $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$?

Contoh 13.13 Terdapat contoh ruang Hausdorff yang bukan ruang metrik baku. Sebagai contoh, misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$. Kita menggunakan K untuk membentuk topologi pada $\mathbb{R}$ dengan basis yang terdiri atas semua interval terbuka berbentuk (a, b) dan semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$ bilangan-bilangan real. Topologi ini menambahkan himpunan-himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$ pada interval terbuka baku untuk membentuk topologi baru. Topologi ini dikenal sebagai topologi K pada $\mathbb{R}$. Seperti dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, jika x dan y bilangan-bilangan real berbeda, kita dapat memisahkan x dan y dengan interval terbuka. $\square$

Kita mendefinisikan ruang Hausdorff karena ruang tersebut memiliki sifat-sifat yang akrab, seperti yang diperlihatkan oleh teorema-teorema berikut.

Teorema 13.14 *Setiap subhimpunan beranggota tunggal dari ruang topologi Hausdorff merupakan himpunan tertutup.*

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi Hausdorff, dan misalkan $A = \{a\}$ untuk suatu $a \in X$. Untuk menunjukkan bahwa A tertutup, kita buktikan bahwa $X \setminus A$ terbuka. Misalkan $x \in X \setminus A$. Maka $x \neq a$. Jadi, terdapat himpunan terbuka O_x yang memuat x dan O_a yang memuat a sedemikian sehingga $O_x \cap O_a = \emptyset$. Karena itu, $a \notin O_x$ dan $O_x \subseteq X \setminus A$. Dengan demikian, setiap titik dalam $X \setminus A$ merupakan titik interior dan $X \setminus A$ merupakan himpunan terbuka. Hal ini membuktikan bahwa A merupakan himpunan tertutup. $\blacksquare$

Teorema 13.15 *Suatu barisan titik-titik dalam ruang topologi Hausdorff memiliki paling banyak satu limit dalam ruang tersebut.*

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi Hausdorff, dan misalkan (x_n) suatu barisan dalam X . Andaikan (x_n) konvergen ke $a \in X$ dan ke $b \in X$. Andaikan $a \neq b$. Maka terdapat himpunan terbuka O_a yang memuat a dan O_b yang memuat b sedemikian sehingga $O_a \cap O_b = \emptyset$. Karena (x_n) konvergen ke a , terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $x_n \in O_a$ untuk semua $n \geq N$. Namun, hal ini mengakibatkan $x_n \notin O_b$ untuk setiap $n \geq N$. Hal tersebut bertentangan dengan fakta bahwa (x_n) konvergen ke b . Jadi, $a = b$ dan barisan (x_n) memiliki paling banyak satu limit dalam X . $\blacksquare$

Ruang Hausdorff penting karena kita dapat memisahkan titik-titik berbeda dengan himpunan terbuka saling lepas. Kita juga perlu mempertimbangkan jenis objek lain yang dapat dipisahkan dengan himpunan terbuka saling lepas. Sebagai contoh, topologi indiskret cukup buruk dalam arti bahwa himpunan-himpunan terbukanya tidak dapat membedakan titik-titik yang berbeda. Artinya, jika x dan y titik-titik berbeda dalam ruang dengan topologi indiskret, setiap himpunan terbuka yang memuat x juga memuat y . Sebaliknya,

dalam ruang Hausdorff kita dapat memisahkan titik-titik berbeda dengan himpunan terbuka saling lepas. Ini merupakan contoh sifat “separasi”. Jenis sifat separasi lainnya mencirikan jenis ruang topologi yang berbeda. Sifat-sifat separasi ini menentukan jenis objek yang dapat kita pisahkan dengan himpunan terbuka saling lepas — misalnya, titik; titik dan himpunan tertutup; serta dua himpunan tertutup. Berikut adalah sifat-sifat separasi yang paling umum digunakan. Sifat-sifat ini menyingkirkan jenis perilaku yang tidak diinginkan dalam ruang topologi. Sebagai contoh, ingat bahwa limit barisan bersifat tunggal dalam ruang Hausdorff. (Secara tradisional, sifat-sifat separasi ini disebut “aksioma” karena kita umumnya mengandaikan bahwa ruang topologi kita memiliki sifat-sifat tersebut. Namun, sifat-sifat ini bukan aksioma dalam arti yang lazim, melainkan sifat.)

Definisi 13.16 Misalkan X suatu ruang topologi.

1. Ruang X disebut **ruang T_1** atau **ruang Fréchet** jika untuk setiap $x \neq y$ dalam X , terdapat himpunan terbuka U yang memuat y sedemikian sehingga $x \notin U$.
2. Ruang X disebut **ruang T_2** atau **ruang Hausdorff** jika untuk setiap $x \neq y$ dalam X , terdapat himpunan terbuka saling lepas U dan V sedemikian sehingga $x \in U$ dan $y \in V$.
3. Ruang X disebut **reguler** jika untuk setiap himpunan tertutup C dalam X dan setiap titik $x \in X \setminus C$, terdapat himpunan terbuka saling lepas U dan V dalam X sedemikian sehingga $C \subseteq U$ dan $x \in V$. Ruang X disebut **ruang T_3** atau **ruang Hausdorff reguler** jika X merupakan ruang reguler T_1 .
4. Ruang X disebut ruang **normal** jika untuk setiap pasangan subhimpunan tertutup saling lepas C dan D dari X , terdapat himpunan terbuka saling lepas U dan V sedemikian sehingga $C \subseteq U$ dan $D \subseteq V$. Ruang X disebut **ruang T_4** atau **ruang Hausdorff normal** jika X merupakan ruang normal T_1 .

Latihan 16 menunjukkan bahwa setiap ruang metrik bersifat reguler sekaligus normal. Penggunaan huruf T berasal dari istilah bahasa Jerman “Trennungsaxiome” untuk aksioma separasi. Sekali lagi, perhatikan bahwa secara teknis sifat-sifat ini bukan aksioma, melainkan sifat. Pertanyaan yang menarik adalah mengapa kita mensyaratkan ruang T_3 dan T_4 juga merupakan ruang T_1 . Kita ingin aksioma-aksioma ini memberikan pemisahan yang lebih kuat ketika indeksnya bertambah. Tinjau suatu ruang X dengan topologi indiskret. Dalam ruang ini, tidak ada yang terpisahkan. Namun, ruang ini bersifat reguler dan normal secara trivial. Untuk menghindari ketidakselarasan ini, kita membatasi perhatian pada ruang T_1 . Perhatikan bahwa ruang dengan topologi indiskret bukan ruang T_1 .

Setiap ruang T_4 merupakan ruang T_3 , setiap ruang T_3 merupakan ruang T_2 , dan setiap ruang T_2 merupakan ruang T_1 . Pembuktian pernyataan-pernyataan ini diserahkan kepada **Latihan 18**. Sifat-sifat ini juga berbeda satu sama lain. Artinya, terdapat ruang T_1 yang bukan ruang T_2 dan ruang T_2 yang bukan ruang T_3 . Soal-soal tersebut diberikan dalam **Latihan 19**. Fakta bahwa terdapat ruang T_3 yang bukan ruang T_4 sedikit lebih sulit. Salah satu contohnya adalah **bidang Niemytzki**. Bidang Niemytzki adalah setengah bidang atas $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Misalkan L batas Euklides dari X dalam bidang koordinat. Artinya, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Suatu basis untuk topologi pada X terdiri atas cakram terbuka baku yang berpusat di titik-titik dengan $y > 0$ dan seluruhnya berada di atas garis batas, beserta cakram terbuka dalam $X \setminus L$ yang menyinggung L bersama titik singgung masing-masing. Kita tidak akan membuktikan bahwa bidang Niemytzki merupakan ruang T_3 tetapi bukan ruang T_4 . Pembaca yang berminat dapat menemukan pembuktian yang mudah diikuti dalam artikel “Another Proof that the Niemytzki Plane is not Normal” karya David H. Vetterlein dalam *Pi Mu Epsilon Journal*, Vol. 10, No. 2 (SPRING 1995), hlm. 119–121.

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Suatu subhimpunan C dari ruang topologi X tertutup jika $X \setminus C$ terbuka.
- Sebarang irisan himpunan-himpunan tertutup bersifat tertutup, sedangkan gabungan berhingga

himpunan-himpunan tertutup juga bersifat tertutup.

- Suatu barisan dalam ruang topologi X adalah fungsi $f : \mathbb{Z}^+$ ke X .
- Suatu barisan (x_n) dalam ruang topologi X konvergen ke titik x dalam X jika untuk setiap himpunan terbuka O yang memuat x , terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $x_n \in O$ untuk semua $n \geq N$.
- Jika suatu barisan (x_n) dalam ruang topologi X konvergen ke titik x , maka x merupakan suatu limit dari barisan (x_n) .
- Suatu titik limit dari subhimpunan A dari ruang topologi X adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A yang berbeda dari x . Suatu subhimpunan C dari ruang topologi X tertutup jika dan hanya jika C memuat semua titik limitnya.
- Suatu titik batas dari subhimpunan A dari ruang topologi X adalah titik $x \in X$ sedemikian sehingga setiap lingkungan dari x memuat suatu titik di A dan suatu titik di $X \setminus A$. Batas dari A adalah himpunan

$$\text{Bdry}(A) = \{x \in X \mid x \text{ adalah titik batas dari } A\}.$$

Suatu subhimpunan C dari X tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya.

- Suatu ruang topologi X disebut Hausdorff jika titik-titik berbeda dapat dipisahkan oleh himpunan-himpunan terbuka dalam ruang tersebut. Artinya, untuk setiap pasangan titik berbeda x dan y dalam X , terdapat himpunan terbuka O_x yang memuat x dan O_y yang memuat y sedemikian sehingga $O_x \cap O_y = \emptyset$. Ruang Hausdorff penting karena barisan memiliki limit tunggal di dalamnya dan setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup.
- Aksioma separasi menjelaskan jenis objek yang dapat dipisahkan oleh himpunan terbuka.
 - Dalam ruang T_1 , kita dapat memisahkan dua titik berbeda dengan satu himpunan terbuka. Artinya, untuk titik-titik berbeda x dan y dalam suatu ruang topologi yang bersifat T_1 , yaitu X , terdapat himpunan terbuka U yang memisahkan y dari x dalam arti bahwa $y \in U$, tetapi $x \notin U$.
 - Dalam ruang T_2 X , kita dapat memisahkan titik secara lebih tegas. Artinya, jika x dan y merupakan titik-titik berbeda dalam X , terdapat himpunan terbuka U dan V yang saling lepas sedemikian sehingga $x \in U$ dan $y \in V$.
 - Dalam ruang T_3 X , kita dapat memisahkan suatu titik dari himpunan tertutup yang tidak memuat titik tersebut. Artinya, jika C merupakan subhimpunan tertutup dari X dan x merupakan suatu titik yang tidak berada dalam C , terdapat himpunan terbuka U dan V dalam X yang saling lepas sedemikian sehingga $C \subseteq U$ dan $x \in V$.
 - Dalam ruang T_4 X , kita dapat memisahkan himpunan-himpunan tertutup yang saling lepas. Artinya, jika C dan D merupakan dua subhimpunan tertutup dari X dan saling lepas, terdapat himpunan terbuka U dan V yang saling lepas sedemikian sehingga $C \subseteq U$ dan $D \subseteq V$.

Latihan

1. Tentukan dengan tepat ruang topologi berhingga mana saja yang merupakan ruang Hausdorff. Buktikan hasil Anda.
2. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan dari X . Buktikan bahwa $\overline{A} = A \cup \text{Bdry}(A)$.
3. Misalkan A suatu subhimpunan dari suatu ruang topologi. Buktikan bahwa $\text{Bdry}(A) = \emptyset$ jika dan hanya jika A terbuka sekaligus tertutup.

4. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dengan sedikitnya dua unsur dan p suatu unsur tetap di X . Misalkan τ_p topologi titik tertentu dan $\tau_{\bar{p}}$ topologi titik yang dikecualikan pada X . Artinya,

- τ_p adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang memuat p .
- $\tau_{\bar{p}}$ adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik yang dikecualikan merupakan topologi menjadi pokok bahasan [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Misalkan $A = (0, 1]$ suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}$. Tentukan, disertai bukti, $\bar{A}$, $\text{Int}(A)$, dan $\text{Bdry}(A)$ ketika

- (a) $\mathbb{R}$ memiliki topologi τ_p dengan $p = 0$
- (b) $\mathbb{R}$ memiliki topologi $\tau_{\bar{p}}$ dengan $p = 0$.

5. Misalkan $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b \text{ di } \mathbb{R}\}$.

- (a) Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi $\tau_{\ell\ell}$ pada $\mathbb{R}$. Topologi ini disebut topologi **limit bawah** pada $\mathbb{R}$. Garis $\mathbb{R}$ dengan topologi $\tau_{\ell\ell}$ kadang-kadang disebut **garis Sorgenfrey** (dinamai menurut matematikawan Robert Sorgenfrey).
- (b) Tunjukkan bahwa setiap interval terbuka (a, b) juga merupakan himpunan terbuka dalam topologi limit bawah.
- (c) Jika τ_1 dan τ_2 merupakan topologi pada suatu himpunan X sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka τ_1 dikatakan sebagai topologi yang **lebih kasar** daripada τ_2 , atau τ_2 dikatakan sebagai topologi yang **lebih halus** daripada τ_1 . Bagian (b) menunjukkan bahwa topologi limit bawah mungkin lebih halus daripada topologi metrik Euklides. Tentukan apakah hal ini benar, yaitu apakah topologi limit bawah benar-benar lebih halus daripada topologi metrik Euklides pada $\mathbb{R}$. Berikan alasan untuk jawaban Anda.
- (d) Misalkan $a < b$, dengan kedua bilangan tersebut merupakan unsur $\mathbb{R}$. Apakah himpunan $[a, b)$ merupakan himpunan buka-tutup (clopen) dalam $(\mathbb{R}, \tau_{\ell\ell})$? Buktikan jawaban Anda.

6. Suatu subhimpunan A dari ruang topologi X dikatakan **rapat** dalam X jika $\bar{A} = X$.

- (a) Tunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides.
- (b) Apakah $\mathbb{Z}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides? Buktikan jawaban Anda.
- (c) Misalkan A suatu subhimpunan dari ruang topologi X . Buktikan bahwa A rapat dalam X jika dan hanya jika $A \cap O \neq \emptyset$ untuk setiap himpunan terbuka tak kosong O .

7. Misalkan X suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan dari X .

- (a) Tunjukkan bahwa himpunan-himpunan $\text{Int}(A)$, $\text{Bdry}(A)$, dan $\text{Int}(A^c)$ saling lepas (artinya, irisan sebarang dua himpunan tersebut adalah kosong).
- (b) Buktikan bahwa $X = \text{Int}(A) \cup \text{Bdry}(A) \cup \text{Int}(A^c)$.

8. Buktikan bahwa subruang dari suatu ruang Hausdorff juga merupakan ruang Hausdorff.

9. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dengan sedikitnya dua unsur dan p suatu unsur tetap di X . Misalkan τ_p topologi titik tertentu dan $\tau_{\bar{p}}$ topologi titik yang dikecualikan pada X . Artinya,

- τ_p adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang memuat p .
- $\tau_{\bar{p}}$ adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri dari $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik yang dikecualikan merupakan topologi menjadi pokok bahasan [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Tentukan, disertai bukti, apakah X merupakan ruang Hausdorff ketika

- (a) X memiliki topologi τ_p
- (b) X memiliki topologi $\tau_{\bar{p}}$.

10. Buktikan bahwa suatu subhimpunan C dari ruang topologi X tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya.
11. Ingat bahwa suatu titik a dalam subhimpunan A dari ruang metrik X merupakan titik terasing dari A jika terdapat lingkungan N dari a di X sedemikian sehingga $N \cap A = \{a\}$. Kita dapat membuat definisi yang sama dalam sebarang ruang topologi.

Definisi. Suatu titik a dalam subhimpunan A dari ruang topologi X merupakan titik terasing dari A jika terdapat lingkungan N dari a sedemikian sehingga $N \cap A = \{a\}$.

- (a) Jika A suatu subhimpunan dari ruang topologi X , buktikan bahwa suatu titik $a \in A$ merupakan titik terasing dari A jika dan hanya jika $\{a\}$ merupakan himpunan terbuka di A .
 - (b) Kita telah membuktikan bahwa dalam ruang metrik, setiap titik batas dari suatu himpunan A merupakan titik limit atau titik terasing dari A . (Lihat [Latihan 12](#).) Apakah pernyataan yang sama berlaku dalam ruang topologi? Buktikan jawaban Anda.
12. Untuk setiap bilangan bulat a , misalkan $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Artinya, $a\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua kelipatan bulat dari a . Fakta bahwa $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ merupakan basis untuk topologi τ pada $\mathbb{Z}$ dibahas dalam [Latihan 2](#). Dalam latihan ini, bekerjalah pada ruang topologi $(\mathbb{Z}, \tau)$
- (a) Misalkan $A = \mathbb{E}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap.
 - (i) Tentukan, disertai alasan, $\text{Int}(A)$.
 - (ii) Tentukan, disertai alasan, $\overline{A}$.
 - (b) Misalkan $B = \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$. Artinya, $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli.
 - (i) Tentukan, disertai alasan, $\text{Int}(B)$.
 - (ii) Tentukan, disertai alasan, $\overline{B}$.

13. Perhatikan topologi Titik Asal Ganda yang didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$, dengan 0^* dipandang sebagai titik yang tidak berada di $\mathbb{R}^2$ (0^* adalah titik asal ganda kita). Sebagai basis untuk himpunan terbuka, kita gunakan bola-bola terbuka standar untuk setiap titik selain 0 dan 0^* . Untuk setiap nilai parameter yang positif, pada titik 0 kita definisikan himpunan-himpunan terbukanya sebagai

$$N(0, r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{r^2}, y > 0 \right\} \cup \{0\}$$

dan untuk setiap nilai parameter yang positif, pada titik 0^* kita definisikan himpunan-himpunan terbukanya sebagai

$$N(0^*, r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{r^2}, y < 0 \right\} \cup \{0^*\}.$$

Jadi, $N(0, r)$ adalah setengah bagian atas dari cakram berjari-jari $\frac{1}{r}$ yang berpusat di titik asal, dengan sumbu x dikecualikan tetapi titik asal disertakan, sedangkan $N(0^*, r)$ adalah setengah bagian bawah dari cakram berjari-jari $\frac{1}{r}$ yang berpusat di titik asal, dengan sumbu x dikecualikan dan titik 0^* disertakan.

- (a) Tunjukkan bahwa koleksi himpunan yang dijelaskan sebagai basis untuk topologi Titik Asal Ganda benar-benar merupakan basis untuk suatu topologi.
- (b) Apakah X dengan topologi Titik Asal Ganda merupakan ruang Hausdorff? Buktikan jawaban Anda.

14.

- (a) Tunjukkan bahwa setiap himpunan berhingga merupakan himpunan tertutup dalam $\mathbb{R}^n$ dengan topologi Zariski.
- (b) Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ dengan topologi Zariski bukan ruang Hausdorff. (Latihan 12 menunjukkan bahwa suatu basis untuk topologi Zariski pada $\mathbb{R}^n$ adalah koleksi himpunan berbentuk $\mathbb{R}^n \setminus Z(f)$, dengan $Z(f)$ adalah himpunan nol dari polinom f dalam n variabel.)

15. Perhatikan topologi garis digital τ_{dl} pada $\mathbb{Z}$ dengan basis $\{B(n)\}$, dengan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

- (a) Misalkan $A = \{-1, 0, 1\}$ suatu subhimpunan dari $(\mathbb{Z}, \tau_{dl})$.
 - (i) Tentukan titik-titik limit dan titik-titik batas dari A . Buktikan dugaan Anda. Apakah setiap titik limit dari A merupakan titik batas dari A ? Apakah setiap titik batas dari A merupakan titik limit dari A ?
 - (ii) Tentukan $\overline{A}$ dan tuliskan $\mathbb{Z} \setminus \overline{A}$ sebagai gabungan himpunan-himpunan terbuka.
- (b) Sekarang perhatikan subhimpunan $B = \{0\}$ dari $(\mathbb{Z}, \tau_{dl})$.
 - (i) Tentukan titik-titik limit dan titik-titik batas dari B . Buktikan dugaan Anda. Apakah setiap titik limit dari B merupakan titik batas dari B ? Apakah setiap titik batas dari B merupakan titik limit dari B ?
 - (ii) Tentukan $\overline{B}$ dan tuliskan $\mathbb{Z} \setminus \overline{B}$ sebagai gabungan himpunan-himpunan terbuka.

16. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Ingat dari [Latihan 8](#) dalam [Bab 10](#) bahwa jika C suatu subhimpunan tertutup tak kosong dari ruang metrik X dan x suatu unsur dari X , maka $d(x, C) = 0$ jika dan hanya jika $x \in C$. Gunakan gagasan ini untuk mengerjakan hal-hal berikut.

- (a) Buktikan bahwa setiap ruang metrik bersifat reguler.
- (b) Buktikan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang normal.

17. Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$. Misalkan $\mathcal{B}$ koleksi semua interval terbuka berbentuk (a, b) dan semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$ bilangan real seperti dalam [Contoh 13.13](#). Koleksi $\mathcal{B}$ merupakan basis bagi topologi τ_K pada $\mathbb{R}$. Karena koleksi ini memuat semua interval terbuka biasa, τ_K lebih halus daripada topologi Euklides.

- (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ merupakan ruang Hausdorff.
- (b) [Latihan 16](#) menunjukkan bahwa setiap ruang metrik bersifat reguler. Pada bagian latihan ini, tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ bukan ruang reguler. Kita dapat menyimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak termetriskan.

Petunjuk. Perhatikan 0 dan K .

18.

- (a) Buktikan bahwa suatu ruang topologi X merupakan ruang T_1 jika dan hanya jika setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup.
- (b) Tunjukkan bahwa setiap ruang T_2 merupakan ruang T_1 , setiap ruang T_3 merupakan ruang T_2 , dan setiap ruang T_4 merupakan ruang T_3 .

19. Dalam latihan ini, kita memberikan contoh ruang yang merupakan ruang T_1 tetapi bukan ruang T_2 , serta ruang T_2 yang bukan ruang T_3 .

- (a) Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ dengan topologi komplement berhingga merupakan ruang T_1 tetapi bukan ruang T_2 .
- (b) Definisikan ruang $\mathbb{R}_K$ seperti dalam [Contoh 13.13](#) sebagai himpunan bilangan real dengan topologi τ yang memiliki basis berupa interval-interval terbuka standar dalam $\mathbb{R}$ beserta semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan (a, b) sebarang interval terbuka dan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$. Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}_K$ merupakan ruang T_2 tetapi bukan ruang T_3 .

20. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Setiap titik limit dari suatu subhimpunan A dari ruang topologi X juga merupakan titik batas dari A .
- (b) Setiap titik batas dari suatu subhimpunan A dari ruang topologi X juga merupakan titik limit dari A .
- (c) Jika X suatu ruang topologi dan $A \subseteq X$ sedemikian sehingga $\text{Int}(A) = \overline{A}$, maka A terbuka sekaligus tertutup.
- (d) Jika X suatu ruang topologi dan A serta B merupakan subhimpunan dari X dengan $\overline{A} = \overline{B}$ dan $\text{Int}(A) = \text{Int}(B)$, maka $A = B$.
- (e) Jika A dan B merupakan subhimpunan dari ruang topologi X , maka $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (f) Jika A dan B merupakan subhimpunan dari ruang topologi X , maka $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bab 14

Kekontinuan dan Homeomorfisme

Pertanyaan Pemandu

- Bagaimana kita mendefinisikan fungsi kontinu antara dua ruang topologi?
- Apa perbedaan antara ekuivalensi metrik dan ekuivalensi topologis?
- Apa yang dimaksud dengan homeomorfisme? Apa artinya dua ruang topologi bersifat homeomorfik?
- Apa yang dimaksud dengan invarian topologis? Mengapa invarian topologis berguna?

Pengantar

Ingatlah bahwa kita dapat mencirikan suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) sebagai kontinu di $a \in X$ jika $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X setiap kali N merupakan lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Kita telah mendefinisikan lingkungan dalam ruang topologi, sehingga pencirian ini dapat kita gunakan sebagai definisi fungsi kontinu dari satu ruang topologi ke ruang topologi lain.

Definisi 14.1 Suatu fungsi f dari ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) **kontinu di suatu titik** $a \in X$ jika $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X setiap kali N merupakan lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Fungsi f kontinu jika f **kontinu** di setiap titik dalam X .

Kita telah melihat bahwa dalam ruang metrik, kekontinuan dapat dicirikan secara berguna dalam kaitannya dengan himpunan terbuka. Tidak mengherankan bahwa pencirian yang sama berlaku dalam ruang topologi. Untuk aktivitas ini, Anda boleh mengasumsikan hasil [Teorema 14.2](#) (versi ruang topologi dari [Teorema 8.5](#) untuk ruang metrik).

Teorema 14.2 *Misalkan f suatu fungsi dari ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) . Maka f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka dalam X setiap kali O merupakan himpunan terbuka dalam Y .*

Aktivitas Persiapan 14.1

(a) Misalkan

$$(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\})$$

dan misalkan

$$(Y, \tau_Y) = (\{2, 4, 6, 8\}, \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}, Y\}).$$

Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(x) = 2x$.

(i) Apakah f kontinu di 4?

(ii) Apakah f suatu fungsi kontinu?

(b) Misalkan

$$(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\})$$

dan misalkan

$$(Y, \tau_Y) = (\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, Y\}).$$

Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = f(4) = b$.

(i) Tunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu.

(ii) Meskipun f kontinu, himpunan $f(O)$ belum tentu terbuka ketika himpunan asal dipilih sebagai himpunan terbuka dalam X . Temukan contoh demikian untuk fungsi f ini.

(c) Fungsi f yang memiliki sifat bahwa $f(O)$ terbuka setiap kali O terbuka dalam X disebut **pemetaan terbuka**.

Terdapat definisi serupa bagi **pemetaan tertutup**.

(d) Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, X\}$. Definisikan $f : X \rightarrow X$ dengan $f(x) = |x - 3| + 1$. Di titik mana saja f kontinu? Apakah f suatu fungsi kontinu?

(e) Misalkan $f : (\mathbb{Z}, \tau_{FC}) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_E)$, dengan $f(n) = n$ dan τ_{FC} merupakan topologi komplemen berhingga. Apakah f suatu fungsi kontinu? Jika f tidak kontinu, berikan satu titik tertentu tempat f tidak kontinu. Jelaskan.

(f) Misalkan $f : (\mathbb{Z}, d_E) \rightarrow (\mathbb{Z}, \tau_{FC})$, dengan $f(n) = n$ dan τ_{FC} merupakan topologi komplemen berhingga. Apakah f suatu fungsi kontinu? Jika f tidak kontinu, berikan satu titik tertentu tempat f tidak kontinu. Jelaskan.

(g) Kadang-kadang lebih mudah menunjukkan bahwa suatu fungsi f yang memetakan ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) kontinu dengan menggunakan suatu basis alih-alih semua himpunan terbuka. Misalkan $\mathcal{B}$ suatu basis untuk topologi pada Y . Apakah benar bahwa jika $f^{-1}(B)$ terbuka untuk setiap $B \in \mathcal{B}$, maka f kontinu? Buktikan hasil Anda.

Definisi 14.3 Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi dari ruang topologi X ke ruang topologi Y . Maka f merupakan **pemetaan terbuka** jika $f(U)$ terbuka dalam Y setiap kali U terbuka dalam X .

Untuk melengkapi pengantar bagian ini, kita membuktikan [Teorema 14.2](#). Kita membuktikan satu arah sekarang dan membiarkan Anda membuktikan arah lainnya dalam aktivitas berikut.

Misalkan f suatu fungsi dari ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) . Pertama, asumsikan bahwa f kontinu dan tunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka dalam X setiap kali O merupakan himpunan terbuka dalam Y . Misalkan O suatu himpunan terbuka dalam Y . Untuk menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X , kita akan menunjukkan bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Misalkan $a \in f^{-1}(O)$. Maka $f(a) \in O$. Karena O merupakan himpunan terbuka, O merupakan lingkungan bagi $f(a)$. Kekontinuan f berarti bahwa $f^{-1}(O)$ merupakan lingkungan bagi a . Jadi, $f^{-1}(O)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka.

Kegiatan 14.2 Sekarang kita membuktikan implikasi yang tersisa dalam [Teorema 14.2](#). Artinya, misalkan f suatu fungsi dari ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) , dan asumsikan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka setiap kali O terbuka dalam Y . Kita akan membuktikan bahwa f merupakan fungsi kontinu.

- (a) Menurut definisi, apa yang perlu ditunjukkan untuk membuktikan bahwa f merupakan fungsi kontinu?
- (b) Misalkan $a \in X$ dan andaikan N suatu lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Apa yang dapat kita simpulkan dari fakta bahwa N merupakan lingkungan?
- (c) Gunakan asumsi mengenai f dalam aktivitas ini untuk menjelaskan mengapa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X .
- (d) Jelaskan bagaimana kita telah menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu.

Teorema berikut merupakan analog topologis dari [Teorema 10.5](#). Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 4](#).

Teorema 14.4 Misalkan f suatu fungsi dari ruang topologi (X, τ_X) ke ruang topologi (Y, τ_Y) . Maka f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(C)$ tertutup dalam X setiap kali C merupakan himpunan tertutup dalam Y .

Ekuivalensi Metrik

Kita telah melihat bahwa sebuah himpunan dapat dijadikan ruang metrik dengan berbagai metrik. Sebagai contoh, ruang-ruang $(\mathbb{R}^2, d_E)$, $(\mathbb{R}^2, d_T)$, $(\mathbb{R}^2, d_M)$, dan $(\mathbb{R}^2, d)$ semuanya merupakan ruang metrik, dengan d_E sebagai metrik Euklides, d_T sebagai metrik taksi, d_M sebagai metrik maksimum, dan d sebagai metrik diskret. Namun, apakah ruang-ruang metrik ini benar-benar merupakan ruang metrik yang “berbeda”? Apa yang kita maksud dengan “berbeda”?

Kegiatan 14.3 Kita dapat menganggap dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) ekuivalen jika terdapat bijeksi antara kedua himpunan X dan Y yang mempertahankan sifat-sifat metriknya. Artinya, kita mencari suatu fungsi bijektif $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga $d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))$ untuk semua $a, b \in X$. Dengan kata lain, f mempertahankan jarak.

- (a) Misalkan $X = ((0, 1), d_X)$ dan $Y = ((0, 2), d_Y)$, dengan d_X dan d_Y keduanya merupakan metrik Euklides. Apakah mungkin menemukan suatu bijeksi $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan sifat-sifat metrik? Jelaskan.
- (b) Sekarang misalkan $X = ((0, 1), d_X)$ dan $Y = ((0, 2), d_Y)$, dengan d_X didefinisikan oleh $d_X(a, b) = 2|a - b|$ dan $d_Y = d_E$. Anda boleh mengasumsikan bahwa d_X merupakan suatu metrik. Apakah mungkin menemukan suatu bijeksi $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan sifat-sifat metrik? Jelaskan.

Jika terdapat bijeksi antara dua ruang metrik yang mempertahankan jarak, kita mengatakan bahwa kedua ruang metrik tersebut **ekuivalen secara metrik**.

Definisi 14.5 Dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) **ekuivalen secara metrik** jika terdapat bijeksi $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

untuk semua $x, y \in X$.

Karena f merupakan bijeksi, dalam [Definisi 14.5](#) juga berlaku bahwa

$$d_Y(u, v) = d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$$

untuk semua u dan v dalam Y . Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 1](#).

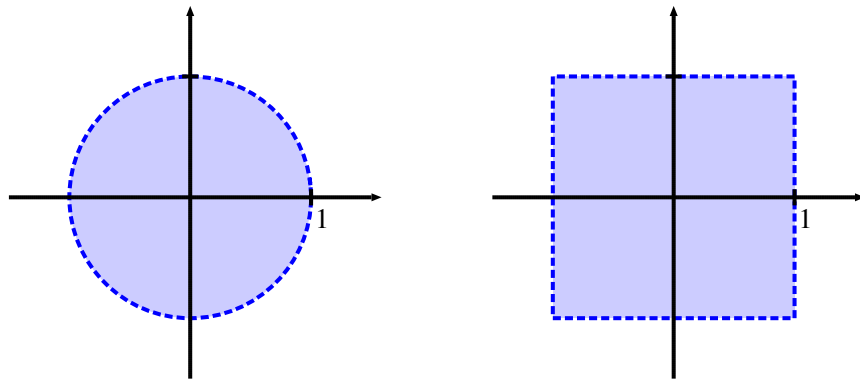
Setiap fungsi bijektif f yang mempertahankan jarak (seperti fungsi dalam [Definisi 14.5](#)) disebut suatu **isometri**.

Definisi 14.6 Suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) merupakan **isometri** jika f bijektif dan

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b) \quad (14.1)$$

untuk semua $a, b \in X$.

Ekuivalensi metrik merupakan jenis ekuivalensi yang sangat kuat — keberadaan suatu isometri tidak memberi banyak keluwesan karena jarak harus dipertahankan. Dari sudut pandang topologi, kita hanya memperhatikan himpunan-himpunan terbuka — tidak ada jarak. Bola satuan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan bola satuan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$ (dengan d_E sebagai metrik Euklides dan d_M sebagai metrik maksimum) tidak terlalu berbeda, sebagaimana dapat kita lihat dalam [Gambar 14.7](#). Jika kita tidak perlu mempertahankan jarak, kita dapat meregangkan bola terbuka $B_E = B((0, 0), 1)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ secara seragam sepanjang garis $y = x$ dan $y = -x$ sehingga bentuknya menjadi bola satuan $B_M = B((0, 0), 1)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$. Hal yang penting ialah peregangan ini mempertahankan himpunan-himpunan terbuka. Jenis ekuivalensi ini jauh lebih luwes dan mempertahankan gagasan utama topologi yang telah kita bahas — sifat-sifat ruang apa yang tidak berubah ketika ruang tersebut diregangkan dan dilengkungkan. Jenis ekuivalensi yang memungkinkan kita memanipulasi suatu ruang tanpa mengubah himpunan-himpunan terbukanya secara mendasar disebut **ekuivalensi topologis**.



Gambar 14.7 Bola-bola satuan terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_M)$.

Ekuivalensi Topologis

Apabila kita dapat mendeformasi suatu himpunan menjadi himpunan lain tanpa melubanginya, kita memandang kedua himpunan tersebut ekuivalen dari sudut pandang topologi. Deformasi f itu harus bijektif agar kedua himpunan memiliki jumlah elemen yang sama, kontinu agar prapeta himpunan terbuka tetap terbuka, dan f^{-1} juga harus kontinu agar citra himpunan terbuka tetap terbuka. Fungsi seperti itu memberikan korespondensi satu-satu antara himpunan-himpunan terbuka dalam kedua ruang. Hal ini membawa kita pada definisi berikut.

Definisi 14.8 Dua ruang topologi (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) **ekuivalen secara topologis** jika terdapat bijeksi kontinu $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga f^{-1} juga kontinu.

Ekuivalensi metrik selalu mengakibatkan ekuivalensi topologis (dengan menggunakan topologi yang diinduksi oleh metrik), dan pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 3](#). Jadi, ekuivalensi metrik merupakan syarat yang lebih kuat daripada ekuivalensi topologis.

Fungsi f (atau f^{-1}) dalam [Definisi 14.8](#) disebut **homeomorfisme**.

Definisi 14.9 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ merupakan **homeomorfisme** jika f adalah bijeksi kontinu dan f^{-1} juga kontinu.

Jika terdapat homeomorfisme dari (X, τ_X) ke (Y, τ_Y) , kita mengatakan bahwa ruang (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi yang **homeomorfik**.

Menunjukkan secara langsung bahwa dua ruang metrik homeomorfik dapat menjadi sulit, tetapi terdapat syarat cukup yang lebih mudah diperiksa dalam ruang metrik. Jika f merupakan homeomorfisme dari ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_E)$ ke ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d_M)$, sifat homeomorfisme f mempertahankan struktur topologis dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, tetapi tidak dengan sendirinya menjamin kehalusan ataupun batas global pada distorsi jarak — hal itu memerlukan syarat tambahan yang lebih kuat. Kita dapat meminta agar distorsi jarak dibatasi dalam kedua arah. Salah satu batas tersebut berbentuk: terdapat konstanta K sedemikian sehingga $d_E(x, y) \leq K d_M(f(x), f(y))$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$. Teorema berikut menyatakan bahwa batas dua arah seperti ini merupakan syarat cukup bagi ekuivalensi topologis ketika kita bekerja pada himpunan dasar yang sama.

Teorema 14.10 Misalkan X suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua metrik d dan d' . Jika terdapat konstanta positif K dan K' sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} d'(x, y) &\leq K d(x, y) \\ d(x, y) &\leq K' d'(x, y) \end{aligned}$$

untuk semua $x, y \in X$, maka (X, d) ekuivalen secara topologis dengan (X, d') .

Bukti. Misalkan X suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua metrik d dan d' . Andaikan terdapat konstanta positif K dan K' sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} d'(x, y) &\leq K d(x, y) \\ d(x, y) &\leq K' d'(x, y) \end{aligned}$$

untuk semua $x, y \in X$. Misalkan $i_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ merupakan pemetaan identitas. Artinya, $i_X(x) = x$ untuk semua $x \in X$. Kita akan membuktikan bahwa i_X merupakan homeomorfisme. Kita tahu bahwa i_X adalah bijeksi, sehingga kita hanya perlu memverifikasi bahwa i_X dan i_X^{-1} kontinu. Ambil $\epsilon > 0$ dan $a \in X$. Pilih $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Andaikan $x \in X$ sedemikian sehingga $d(x, a) < \delta$. Maka

$$d'(i_X(x), i_X(a)) = d'(x, a) \leq K d(x, a) < K \delta = K \left(\frac{\epsilon}{K} \right) = \epsilon.$$

Jadi, i_X kontinu. Argumen yang sama menunjukkan bahwa i_X^{-1} juga kontinu. Oleh karena itu, i_X merupakan homeomorfisme antara (X, d) dan (X, d') . ■

Kegiatan 14.4

- Apakah $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan.
- Apakah $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_T)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan.
- Apakah Anda menduga bahwa $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan tanpa melakukan perhitungan ataupun perbandingan.

Relasi

Kita menggunakan kata “ekuivalen” secara sengaja ketika membahas ekuivalensi metrik atau topologis. Ingat bahwa ekuivalensi merupakan istilah yang digunakan untuk relasi, dan bahwa relasi merupakan cara

membandingkan dua elemen dari suatu himpunan. Kita mengenal banyak relasi pada himpunan, misalnya “<”, “=”, dan “≥” pada bilangan bulat.

Definisi 14.11 Suatu **relasi** pada himpunan S adalah subhimpunan R dari $S \times S$.

Sebagai contoh, subhimpunan $R = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah relasi yang kita sebut relasi kesamaan. Jika R merupakan relasi pada himpunan S , biasanya kita menghilangkan notasi himpunannya dan menulis $a \sim b$ jika $(a, b) \in R$, lalu mengatakan bahwa a berelasi dengan b . Dalam hal ini, kita sering menyebut $\sim$ sebagai relasinya, bukan himpunan R . Kadang-kadang kita menggunakan simbol yang sudah dikenal untuk relasi khusus. Sebagai contoh, kita menulis $a = b$ jika $(a, b) \in R = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Dalam membahas relasi, ada tiga sifat khusus yang kita pertimbangkan.

- Suatu relasi $\sim$ pada himpunan S bersifat **refleksif** jika $a \sim a$ untuk semua $a \in S$.
- Suatu relasi $\sim$ pada himpunan S bersifat **simetris** jika, untuk setiap pilihan elemen a dan b , berlaku $a \sim b$ dengan a dan b berada dalam S , maka kita juga memperoleh $b \sim a$.
- Suatu relasi $\sim$ pada himpunan S bersifat **transitif** jika, untuk setiap pilihan elemen a , b , dan c , berlaku $a \sim b$ dan $b \sim c$ dengan a , b , dan c berada dalam S , maka kita juga memperoleh $a \sim c$.

Ketika kita menggunakan kata “ekuivalensi”, yang dimaksud adalah suatu relasi ekuivalensi.

Definisi 14.12 Suatu **relasi ekuivalensi** adalah relasi pada suatu himpunan yang refleksif, simetris, dan transitif.

Kegiatan 14.5

- Jelaskan mengapa ekuivalensi metrik merupakan relasi ekuivalensi pada setiap himpunan terpilih yang terdiri atas ruang-ruang metrik.
- Jelaskan mengapa ekuivalensi topologis merupakan relasi ekuivalensi pada setiap himpunan terpilih yang terdiri atas ruang-ruang topologi.

Relasi ekuivalensi penting karena relasi ekuivalensi pada suatu himpunan S mempartisi himpunan tersebut menjadi gabungan saling lepas dari kelas-kelas ekuivalensi. Karena ekuivalensi topologis merupakan relasi ekuivalensi, kita dapat memperlakukan ruang-ruang yang ekuivalen secara topologis satu sama lain sebagai ruang yang pada dasarnya sama dari sudut pandang topologi. Berdasarkan relasi homeomorfisme, kelas-kelas ekuivalensi tersebut disebut kelas **homeomorfisme**.

Invarian Topologis

Ruang topologi yang homeomorfik pada dasarnya sama dari sudut pandang topologi, dan memiliki banyak sifat yang sama, meskipun tidak semuanya. Sifat-sifat yang sama tersebut disebut **invarian topologis** atau **sifat topologis**.

Definisi 14.13 Suatu sifat dari ruang topologi X merupakan **sifat topologis** (atau **invarian topologis**) jika setiap ruang topologi yang homeomorfik dengan X memiliki sifat yang sama.

Kegiatan 14.6 Manakah dari sifat-sifat berikut yang merupakan invarian topologis? Artinya, untuk ruang topologi (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) , jika X dan Y merupakan dua ruang yang homeomorfik dan X memiliki sifat tersebut, apakah Y juga harus memiliki sifat tersebut?

- (a) X memiliki topologi indiskret
- (b) X memiliki topologi diskret
- (c) X memiliki topologi komplemen hingga
- (d) X memuat bilangan 2
- (e) X memuat tepat 13 elemen

Ringkasan

Gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Suatu fungsi f dari ruang topologi X ke ruang topologi Y bersifat kontinu jika $f^{-1}(O)$ merupakan himpunan terbuka dalam X setiap kali O merupakan himpunan terbuka dalam Y .
- Dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) ekuivalen secara metrik jika terdapat bijeksi $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}d_X(x, y) &= d_Y(f(x), f(y)) \\ d_Y(u, v) &= d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v))\end{aligned}$$

untuk semua $x, y \in X$ dan $u, v \in Y$. Artinya, X dan Y ekuivalen secara metrik jika terdapat isometri f dari X ke Y sedemikian sehingga f^{-1} juga merupakan isometri. Ekuivalensi topologis merupakan syarat yang lebih lemah. Dua ruang topologi X dan Y ekuivalen secara topologis jika terdapat fungsi kontinu f dari X ke Y sedemikian sehingga f^{-1} juga kontinu. Dengan kata lain, X dan Y ekuivalen secara topologis jika terdapat homeomorfisme antara X dan Y .

- Homeomorfisme antara ruang topologi X dan Y adalah fungsi kontinu f dari X ke Y sedemikian sehingga f^{-1} juga kontinu. Dua ruang topologi X dan Y homeomorfik jika terdapat homeomorfisme $f : X \rightarrow Y$.
- Invarian topologis adalah sifat apa pun yang dimiliki ruang topologi X dan juga harus dimiliki oleh setiap ruang topologi yang homeomorfik dengan X . Kadang-kadang kita dapat menggunakan invarian topologis untuk menentukan bahwa dua ruang topologi tidak homeomorfik.

Latihan

1. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik yang ekuivalen secara metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu bijeksi sedemikian sehingga

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

untuk semua $x, y \in X$. Buktikan bahwa

$$d_Y(u, v) = d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$$

untuk semua u dan v dalam Y .

2. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme. Misalkan A suatu himpunan bagian dari X .

- (a) Jika x merupakan titik limit dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik limit dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.

- (b) Jika x merupakan titik interior dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik interior dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.
- (c) Jika x merupakan titik batas dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik batas dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.
3. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik yang ekuivalen secara metrik. Tunjukkan bahwa X dan Y ekuivalen secara topologis jika menggunakan topologi metriknya.
4. Buktikan [Teorema 14.4](#) bahwa jika (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, maka f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(C)$ merupakan himpunan tertutup dalam X setiap kali C merupakan himpunan tertutup dalam Y .
5. Misalkan (X, τ_X) , (Y, τ_Y) , dan (Z, τ_Z) merupakan ruang topologi.
- (a) Misalkan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu. Buktikan bahwa $g \circ f : X \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu.
- Petunjuk.** [Latihan 9](#) mungkin berguna di sini.
- (b) Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu homeomorfisme. Misalkan h suatu fungsi dari (Y, τ_Y) ke (Z, τ_Z) dan misalkan k suatu fungsi dari (Z, τ_Z) ke (X, τ_X) .
- (i) Buktikan bahwa h kontinu jika dan hanya jika $h \circ f$ kontinu.
- (ii) Buktikan bahwa k kontinu jika dan hanya jika $f \circ k$ kontinu.
6. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, X\}$.
- (a) Temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di satu titik, atau tunjukkan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.
- (b) Temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di dua titik, atau tunjukkan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.
- (c) Temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di tiga titik, atau tunjukkan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.
7. Pertimbangkan $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi topologi Euklides. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suatu fungsi dan misalkan
- $$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
- merupakan grafik dari f . Perhatikan bahwa Γ_f merupakan subruang dari $\mathbb{R}^2$ dan menjadi ruang topologi dengan topologi subruang.
- (a) Tunjukkan bahwa jika f merupakan fungsi kontinu, maka Γ_f homeomorfik dengan $\mathbb{R}$.
- (b) Jika syarat bahwa f kontinu dihilangkan, apakah tetap berlaku bahwa Γ_f homeomorfik dengan $\mathbb{R}$? Buktikan konjektur Anda.
8. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dan p suatu elemen tetap dalam X . Misalkan τ_p merupakan topologi titik tertentu dan $\tau_{\bar{p}}$ merupakan topologi titik yang dikecualikan pada X . Artinya,
- τ_p merupakan koleksi himpunan bagian dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua himpunan bagian dari X yang memuat p .
 - $\tau_{\bar{p}}$ merupakan koleksi himpunan bagian dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua himpunan bagian dari X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik yang dikecualikan merupakan topologi menjadi pokok bahasan [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#).

- (a) Misalkan p suatu titik tetap dalam $\mathbb{R}$. Apakah fungsi identitas $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $i(x) = x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ merupakan homeomorfisme dari $(\mathbb{R}, \tau_p)$ ke $(\mathbb{R}, \tau_{\bar{p}})$? Buktikan jawaban Anda.
 - (b) Apakah $(\mathbb{R}, \tau_p)$ homeomorfik dengan $(\mathbb{R}, \tau_{\bar{p}})$ ketika titik khususnya $p = 0$? Buktikan jawaban Anda.
9. Ruang topologi X **tertanam** dalam ruang topologi Y jika terdapat homeomorfisme dari X ke suatu subruang dari Y . Homeomorfisme tersebut disebut suatu **pembenaman**.
- (a) Tunjukkan bahwa jika X merupakan interval terbuka $(0, 1)$ dengan topologi metrik Euklides, maka X dapat ditanamkan dalam ruang topologi $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides.
 - (b) Tunjukkan bahwa terdapat ruang topologi A dan B yang tidak homeomorfik, tetapi A dapat ditanamkan dalam B dan B dapat ditanamkan dalam A .
10. Misalkan $X = \{a, b\}$ suatu himpunan dengan dua elemen.
- (a) Temukan semua topologi yang berbeda pada X . Jelaskan pula bagaimana Anda tahu bahwa semua topologi telah teridentifikasi.
 - (b) Tentukan kelas-kelas homeomorfisme yang berbeda dari ruang topologi pada himpunan dua elemen. Berikan justifikasi atas jawaban Anda.
11. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Terdapat 29 topologi berbeda pada X , yang ditunjukkan di bawah. Tentukan banyaknya kelas homeomorfisme yang berbeda untuk 29 topologi ini dan identifikasi elemen-elemen setiap kelas homeomorfisme. Berikan justifikasi untuk jawaban Anda.
- (1) $\{\emptyset, X\}$
 - (2) $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$
 - (3) $\{\emptyset, \{a, c\}, X\}$
 - (4) $\{\emptyset, \{b, c\}, X\}$
 - (5) $\{\emptyset, \{a\}, X\}$
 - (6) $\{\emptyset, \{b\}, X\}$
 - (7) $\{\emptyset, \{c\}, X\}$
 - (8) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$
 - (9) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$
 - (10) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$
 - (11) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
 - (12) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$
 - (13) $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$
 - (14) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$
 - (15) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$

- (16) $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$
- (17) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$
- (18) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
- (19) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$
- (20) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
- (21) $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$
- (22) $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$
- (23) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$
- (24) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
- (25) $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$
- (26) $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$
- (27) $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, X\}$
- (28) $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$
- (29) topologi diskret
12. Tunjukkan bahwa sifat T_i merupakan sifat topologis untuk setiap i . (Lihat [Bab 13](#) untuk definisi aksioma pemisahan.)
13. Untuk setiap pernyataan berikut, jawab benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan tersebut hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawab salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika $f : X \rightarrow Y$ merupakan fungsi kontinu antara ruang topologi X dan Y , maka untuk setiap himpunan bagian terbuka U dari X , $f(U)$ terbuka dalam Y .
 - (b) Jika τ_{FC} merupakan topologi komplemen hingga, maka $f(x) = x^2$ yang memetakan $(\mathbb{R}, \tau_{FC})$ ke $(\mathbb{R}, \tau_{FC})$ bersifat kontinu.
 - (c) Jika $f : X \rightarrow Y$ merupakan fungsi bijektif antara ruang topologi X dan Y , dan untuk setiap himpunan bagian terbuka U dari X , $f(U)$ terbuka dalam Y , maka f merupakan homeomorfisme.
 - (d) Jika X dan Y merupakan ruang topologi dengan topologi diskret, dan jika $f : X \rightarrow Y$ merupakan bijeksi, maka ruang X dan Y homeomorfik.
 - (e) Misalkan S suatu himpunan dan R_1 serta R_2 merupakan relasi ekuivalensi pada S . Maka $R = R_1 \cap R_2$ juga merupakan relasi ekuivalensi pada S .
 - (f) Misalkan S suatu himpunan dan R_1 serta R_2 merupakan relasi ekuivalensi pada S . Maka $R = R_1 \cup R_2$ juga merupakan relasi ekuivalensi pada S .

Bab 15

Subruang

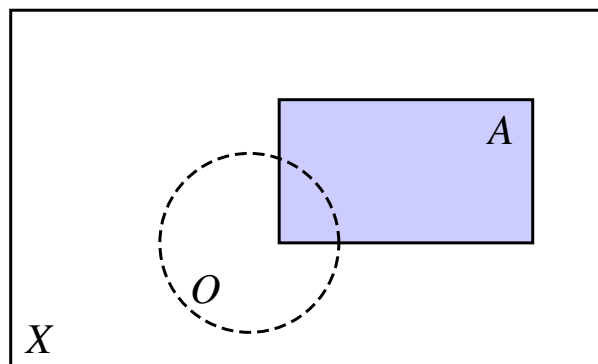
Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan subruang dari suatu ruang topologi?
- Bagaimana kita mendefinisikan topologi subruang?
- Apa yang dimaksud dengan himpunan terbuka relatif dan tertutup relatif?
- Dengan ruang jenis apa $\mathbb{R}$ bertopologi standar homeomorfik?

Pendahuluan

Kita telah melihat bahwa suatu subhimpunan A dari ruang metrik (X, d_X) menjadi subruang dari X ketika dibekali pembatasan metrik d_X pada A . Pada ruang topologi umum kita tidak memiliki metrik, sehingga pendekatan tersebut tidak dapat diterapkan dengan cara yang sama. Namun, kita telah membuktikan bahwa himpunan terbuka dalam subruang A dari ruang metrik (X, d_X) tepat berupa irisan himpunan terbuka dalam X dengan A . Gagasan ini dapat dialihkan ke ruang topologi.

Untuk menjadikan suatu subhimpunan A dari ruang topologi (X, τ) sebagai ruang topologi, kita perlu mendefinisikan topologi pada A .



Gambar 15.1 Calon himpunan terbuka dalam suatu subruang.

Aktivitas Persiapan 15.1 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan tak kosong dari X . Masuk akal untuk menggunakan himpunan terbuka dalam X guna mendefinisikan himpunan terbuka dalam A . Lebih khusus, kita dapat menganggap suatu subhimpunan O_A dari A terbuka dalam A jika O_A merupakan irisan A dengan suatu himpunan terbuka dalam X , seperti diilustrasikan dalam [Gambar 15.1](#). Dengan gagasan ini, kita mendefinisikan τ_A sebagai

$$\tau_A = \{O \cap A \mid O \in \tau\}.$$

- (a) Tunjukkan bahwa τ_A merupakan topologi pada A . Hasil di atas menunjukkan bahwa setiap subhimpunan tak kosong dari suatu ruang topologi (X, τ) juga merupakan ruang topologi dengan topologi τ_A .
- (b) Pada setiap butir berikut, X adalah ruang topologi dan τ merupakan topologi pada X .
 - (i) Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Perhatikan subhimpunan $A = \{b, c\}$ dan daftarkan himpunan terbuka dalam topologi subruang τ_A . Sekarang perhatikan $Z = \{a, b\}$. Apa nama topologi subruang τ_Z pada subhimpunan dari X ini?
 - (ii) Perhatikan $X = \mathbb{R}$ dengan τ topologi indiskret. Apa saja himpunan terbuka dalam topologi subruang pada $[1, 2]$? Sekarang generalisasikan hasilnya untuk sebarang himpunan tak kosong dalam topologi indiskret.
 - (iii) Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ dengan τ topologi diskret. Apa saja himpunan terbuka dalam topologi subruang pada $\{a, b, d\}$? Sekarang generalisasikan hasilnya untuk sebarang himpunan tak kosong dalam topologi diskret.
 - (iv) Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$. Apa saja himpunan terbuka dalam subruang $A = \{a, b, e\}$? Apakah setiap himpunan terbuka dalam A juga terbuka dalam X ? Jelaskan.
 - (v) Misalkan $X = \mathbb{Z}$ dengan $\tau = \tau_{FC}$ topologi komplemen berhingga. Apa saja himpunan terbuka dalam topologi subruang pada $A = \{0, 19, 37, 5284\}$? Dapatkah Anda menggeneralisasikan hasil ini untuk topologi subruang pada sebarang subhimpunan berhingga dari $\mathbb{Z}$?
 - (vi) Misalkan $X = \mathbb{Z}$ dengan $\tau = \tau_{FC}$ topologi komplemen berhingga. Apa saja himpunan terbuka dalam topologi subruang pada himpunan bilangan bulat genap? Dapatkah Anda menggeneralisasikan hasil ini untuk topologi subruang pada sebarang subhimpunan tak berhingga dari $\mathbb{Z}$?

Definisi 15.2 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi. Suatu **subruang** dari (X, τ) adalah subhimpunan tak kosong A dari X yang dibekali topologi

$$\tau_A = \{O \cap A \mid O \in \tau\}.$$

Topologi Subruang

Dalam aktivitas pratinjau, kita melihat bahwa koleksi irisan antara himpunan-himpunan terbuka dalam suatu ruang topologi X dan sebarang subhimpunan tak kosong A dari X membentuk suatu topologi pada A . Dengan topologi tersebut, A merupakan subruang dari X .

Topologi τ_A dalam [Definisi 15.2](#) disebut **topologi subruang**, **topologi terinduksi**, atau **topologi relatif**. Dalam aktivitas pratinjau, kita melihat bahwa himpunan-himpunan yang terbuka dalam suatu subruang A dari ruang topologi X belum tentu terbuka dalam X . Oleh karena itu, himpunan-himpunan dalam τ_A kita sebut **terbuka relatif**.

Setelah mendefinisikan himpunan terbuka relatif, selanjutnya kita dapat memikirkan cara mendefinisikan himpunan tertutup relatif.

Kegiatan 15.2 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X .

- (a) Ingat bahwa suatu subhimpunan dari ruang topologi tertutup jika komplementnya terbuka. Karena (A, τ_A) merupakan ruang topologi, bagaimana himpunan tertutup dalam A didefinisikan? Himpunan semacam itu akan disebut **tertutup relatif**.
- (b) Ingat bahwa suatu subhimpunan U dari A terbuka relatif jika dan hanya jika $U = A \cap O$ untuk suatu subhimpunan terbuka dari X . Berdasarkan hal ini, bagaimana menurut Anda hubungan antara himpunan tertutup relatif dalam A dan suatu himpunan tertutup dalam X ? Nyatakan dan buktikan sebuah teorema yang merumuskan hasil ini.

Basis untuk Subruang

Ingat bahwa suatu basis $\mathcal{B}$ untuk ruang topologi adalah koleksi himpunan yang membangkitkan semua himpunan terbuka melalui gabungan. Jika kita mempunyai basis $\mathcal{B}$ untuk ruang topologi (X, τ) , dan jika A merupakan subruang dari X , kita dapat bertanya apakah basis $\mathcal{B}_A$ dapat diperoleh dari $\mathcal{B}$ secara alami.

Kegiatan 15.3 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dengan basis $\mathcal{B}$, dan misalkan A suatu subruang dari X .

- (a) Ada calon alami yang dapat dipertimbangkan sebagai basis $\mathcal{B}_A$ untuk A . Menurut Anda, bagaimana unsur-unsur dalam $\mathcal{B}_A$ sebaiknya didefinisikan?
- (b) Ingat bahwa suatu himpunan $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk ruang topologi X jika
 - (a) Untuk setiap $x \in X$, terdapat suatu himpunan dalam $\mathcal{B}$ yang memuat x .
 - (b) Jika $x \in X$ merupakan unsur dari $B_1 \cap B_2$ untuk $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tertentu, maka terdapat himpunan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Tunjukkan bahwa himpunan yang Anda peroleh pada (a) merupakan basis untuk topologi terinduksi pada A .

Interval Terbuka dan $\mathbb{R}$

Jika kita memandang homeomorfisme sebagai sesuatu yang memungkinkan kita meregangkan atau melengkungkan suatu ruang, masuk akal untuk membayangkan bahwa kita dapat meregangkan interval terbuka berbentuk (a, b) tanpa batas ke kedua arah tanpa mengubah sifat himpunan-himpunan terbukanya. Dengan kata lain, kita patut menduga bahwa $\mathbb{R}$ bertopologi standar homeomorfik dengan (a, b) bertopologi subruang.

Kegiatan 15.4 Misalkan a dan b bilangan real dengan $a < b$. Untuk menunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, d_E)$ homeomorfik dengan (a, b) , kita memerlukan bijeksi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke (a, b) yang fungsi inversnya juga kontinu.

- (a) Pertama, kita tunjukkan bahwa $(0, 1)$ dan $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan menggunakan topologi metrik Euklides. Definisikan $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \tan \left(\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right).$$

- (i) Jelaskan mengapa f memetakan $(0, 1)$ ke $\mathbb{R}$.
- (ii) Jelaskan mengapa f merupakan injeksi.
- (iii) Jelaskan mengapa f merupakan surjeksi.

(iv) Jelaskan mengapa f dan f^{-1} kontinu.

Petunjuk. Gunakan suatu hasil dari kalkulus.

- (b) Hasil dari (a) adalah bahwa $\mathbb{R}$ dan $(0, 1)$ merupakan ruang-ruang yang homeomorfik. Untuk melengkapi argumen bahwa $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan (a, b) , definisikan fungsi $g : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ dan jelaskan mengapa fungsi g yang Anda peroleh merupakan homeomorfisme.

Dalam [Latihan 4](#), Anda diminta menunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ juga homeomorfik dengan sebarang interval berbentuk (a, ∞) atau $(-\infty, b)$. Selanjutnya kita akan menentukan apakah $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan interval berbentuk $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, atau $(-\infty, b]$.

Ringkasan

Gagasan penting yang telah kita bahas dalam bagian ini meliputi hal-hal berikut.

- Subruang dari suatu ruang topologi adalah sebarang subhimpunan tak kosong dari ruang topologi tersebut yang dilengkapi dengan topologi subruang.
- Subhimpunan terbuka dalam topologi subruang pada suatu subhimpunan A dari ruang topologi X adalah sebarang himpunan berbentuk $O \cap A$, dengan O suatu himpunan terbuka dalam X .
- Himpunan terbuka relatif adalah himpunan terbuka dalam suatu topologi subruang. Himpunan tertutup relatif adalah komplemen dari himpunan terbuka relatif dalam topologi subruang. Dengan kata lain, suatu himpunan tertutup relatif dalam subruang A dari ruang topologi X berbentuk $A \cap C$, dengan C suatu himpunan tertutup dalam X .
- Ruang topologi $\mathbb{R}$ dengan topologi standar homeomorfik dengan setiap interval terbuka, dan juga dengan interval terbuka berbentuk (a, ∞) atau $(-\infty, b)$ untuk sebarang bilangan real a dan b .

Latihan

1. Misalkan X dan Y ruang topologi dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu. Jika A adalah subruang dari X , buktikan bahwa pembatasan $f|_A : A \rightarrow Y$ juga kontinu.
2. Misalkan X suatu ruang topologi, A suatu subruang dari X , dan B suatu subruang dari A . Tunjukkan bahwa topologi subruang yang diwarisi B dari A sama dengan topologi subruang yang diwarisi B dari X .
3. Misalkan A suatu subruang dari ruang topologi X dan B suatu subhimpunan dari A .
 - (a) Buktikan bahwa suatu titik x dalam A merupakan titik limit dari B dalam topologi subruang pada A jika dan hanya jika x merupakan titik limit dari B dalam topologi pada X .
 - (b) Buktikan bahwa tutupan B dalam topologi subruang pada A sama dengan $\overline{B} \cap A$, dengan $\overline{B}$ tutupan B dalam X .
4. Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}$, dengan topologi standar, homeomorfik dengan setiap interval berbentuk (a, ∞) atau $(-\infty, b)$.
5. Misalkan X suatu ruang topologi.
 - (a) Misalkan O suatu subhimpunan terbuka dari X . Buktikan bahwa suatu subhimpunan A dari O terbuka dalam O jika dan hanya jika A terbuka dalam X .

- (b) Misalkan C suatu subhimpunan tertutup dari X . Buktikan bahwa suatu subhimpunan B dari C tertutup dalam C jika dan hanya jika B tertutup dalam X .
6. Suatu sifat ruang topologi disebut hereditier jika sifat tersebut diwarisi oleh setiap subruang. Pernyataan formalnya adalah sebagai berikut.
- Suatu sifat P dari ruang topologi X disebut **hereditier** jika setiap subruang dari X juga memiliki sifat P .
- Tunjukkan bahwa sifat T_1 , T_2 , dan T_3 bersifat hereditier. (Aksioma separasi T_i terdapat dalam [Bab 13](#).) Fakta bahwa T_4 tidak hereditier agak sulit dibuktikan. Salah satu contohnya adalah papan Tychonoff (yang normal) dengan papan Tychonoff terhapus (yang tidak normal) sebagai subruang. Pembaca yang berminat dapat merujuk *Counterexamples in Topology (2nd ed.)*, karya Lynn Arthur Steen dan J. Arthur Seebach, Jr., Dover Publications, 1978.
7. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme dari ruang topologi X ke ruang topologi Y . Misalkan $a \in X$. Apakah subruang $X' = X \setminus \{a\}$ dari X pasti homeomorfik dengan subruang $Y' = Y \setminus \{f(a)\}$ dari Y ? Buktikan dugaan Anda.
8. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika X memiliki topologi diskret, maka setiap subruang dari X memiliki topologi diskret.
 - (b) Jika X adalah ruang topologi yang tidak memiliki topologi diskret, maka tidak ada subruang dari X yang memiliki topologi diskret.
 - (c) Jika $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinu antara ruang topologi X dan Y , dan X merupakan ruang Hausdorff, maka subruang $f(X)$ dari Y merupakan ruang Hausdorff.
 - (d) Jika A adalah subruang dari ruang topologi X dan B merupakan subhimpunan dari X , maka tutupan $B \cap A$ dalam topologi subruang pada A sama dengan $\overline{B} \cap A$, dengan $\overline{B}$ tutupan B dalam X .
 - (e) Jika A adalah subruang dari ruang topologi X dan C merupakan subhimpunan dari X , maka interior $C \cap A$ dalam topologi subruang pada A sama dengan $\text{Int}(C) \cap A$, dengan $\text{Int}(C)$ interior C dalam X .

Bab 16

Ruang Kuosien

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan topologi kuosien?
- Apa yang dimaksud dengan ruang kuosien?
- Apa dua contoh ruang kuosien yang sudah dikenal?

Pendahuluan

Kita mengenal kata **kuosien**, atau hasil bagi, ketika bekerja dengan bilangan rasional. Sebagai contoh, pecahan $\frac{1}{2}$ adalah hasil bagi 1 oleh 2, dan himpunan bilangan rasional merupakan kumpulan semua hasil bagi bilangan bulat yang terdefinisi. Kata kuosien tampaknya berasal dari kata Latin “quotiens”, yang dapat diterjemahkan sebagai “seberapa sering” atau “berapa kali”. Pecahan $\frac{1}{2}$ dapat dipandang sebagai hasil pembagian satu satuan (1) menjadi dua bagian. Karena itu, kata kuosien sering kita gunakan untuk konstruksi apa pun yang membagi suatu himpunan menjadi beberapa bagian. Konstruksi kuosien lain yang sudah dikenal adalah himpunan $\mathbb{Z}_n$, yaitu himpunan kelas-kelas bilangan bulat modulo n . Himpunan $\mathbb{Z}_n$ juga dapat dipandang sebagai kuosien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dengan $n\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan kelipatan n ; dua bilangan bulat a dan b diidentifikasi satu sama lain (atau dianggap **ekuivalen**) jika $b - a \in n\mathbb{Z}$. Hal ini mendefinisikan relasi kongruensi modulo n pada $\mathbb{Z}$, dan unsur-unsur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ adalah kelas-kelas ekuivalensi relasi tersebut. Konstruksi serupa muncul di banyak cabang matematika: kita mendefinisikan suatu relasi ekuivalensi pada sebuah himpunan, lalu membagi himpunan itu menjadi beberapa bagian (kelas-kelas ekuivalensi) dan menyebut himpunan semua kelas ekuivalensi tersebut sebagai **ruang kuosien**. Dalam bab ini, kita menyelidiki konsep ruang kuosien dari ruang topologi.

Sebagai contoh, ambil interval $X = [0, 1]$ dalam $\mathbb{R}$, lalu lengkungkan interval itu sehingga kedua titik ujungnya dapat direkatkan. Objek yang dihasilkan adalah sebuah lingkaran. Dengan mengidentifikasi titik ujung 0 dan 1 pada interval tersebut, kita dapat membentuk ruang topologi baru. Perekatan atau pengidentifikasian titik-titik dalam ruang X ini dapat dirumuskan secara formal sehingga ruang yang dihasilkan dapat dikenali sebagai ruang kuosien.

Topologi Kuosien

Diberikan suatu ruang topologi X dan suatu surjeksi p dari X ke suatu himpunan Y , kita dapat menggunakan topologi pada X untuk mendefinisikan topologi pada Y . Topologi pada Y ini mengidentifikasi titik-titik di X melalui fungsi p . Topologi yang dihasilkan pada Y disebut topologi **kuosien**. Topologi kuosien memberi

kita cara untuk membentuk ruang topologi yang memodelkan perekatan dan penciutan bagian-bagian suatu ruang topologi.

Aktivitas Persiapan 16.1 Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, X\}$. Misalkan $Y = \{a, b, c, d\}$ dan definisikan $p : X \rightarrow Y$ dengan

$$p(1) = b, p(2) = a, p(3) = c, p(4) = d, p(5) = c, \text{ dan } p(6) = a.$$

Tujuan kita dalam aktivitas ini adalah mendefinisikan topologi pada Y yang berkaitan dengan topologi pada X melalui p .

- (a) Kita mengetahui himpunan-himpunan terbuka di X . Karena itu, mari kita perhatikan himpunan-himpunan U di Y sedemikian sehingga $p^{-1}(U)$ terbuka di X . Definisikan σ sebagai koleksi himpunan tersebut. Dengan kata lain,

$$\sigma = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Tentukan semua himpunan dalam σ .

- (b) Tunjukkan bahwa σ merupakan topologi pada Y .
- (c) Jelaskan mengapa $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ kontinu.
- (d) Tunjukkan bahwa σ merupakan topologi terbesar pada Y yang membuat p kontinu. Dengan kata lain, jika σ' merupakan topologi pada Y dengan $\sigma \subsetneq \sigma'$, maka $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma')$ tidak kontinu.

Ruang Kuosien

Seperti yang kita lihat dalam aktivitas pendahuluan, jika terdapat surjeksi p dari ruang topologi (X, τ) ke suatu himpunan Y , kita dapat mendefinisikan topologi pada Y dengan menetapkan himpunan-himpunan terbukanya sebagai semua himpunan $U \subseteq Y$ sedemikian sehingga $p^{-1}(U)$ terbuka di X . Dengan cara inilah kita membentuk apa yang disebut **topologi kuosien**. Sebelum mendefinisikan topologi kuosien, kita perlu mengetahui bahwa konstruksi ini selalu menghasilkan suatu topologi.

Kegiatan 16.2 Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Misalkan

$$\tau_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}.$$

- (a) Mengapa $\emptyset$ dan Y merupakan anggota τ_Y ?
- (b) Misalkan $\{U_\beta\}$ suatu koleksi himpunan dalam τ_Y , dengan β berada dalam suatu himpunan indeks J .
- (i) Tunjukkan bahwa $\bigcup_{\beta \in J} U_\beta$ merupakan anggota τ_Y .
- (ii) Jika J berhingga, tunjukkan bahwa $\bigcap_{\beta \in J} U_\beta$ merupakan anggota τ_Y .
- (c) Kesimpulan apa yang dapat kita tarik mengenai τ_Y ?

Kegiatan 16.2 memungkinkan kita mendefinisikan topologi kuosien.

Definisi 16.1 Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi.

1. **Topologi kuosien** pada Y adalah himpunan

$$\{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}.$$

2. Suatu fungsi $p : X \rightarrow Y$ disebut **pemetaan kuosien** jika p surjektif dan, untuk $U \subseteq Y$, U terbuka di

Y jika dan hanya jika $p^{-1}(U)$ terbuka di X .

3. Jika $p : X \rightarrow Y$ merupakan pemetaan kuosien, maka ruang Y disebut **ruang kuosien** dari X yang ditentukan oleh p .

Kegiatan 16.3

- (a) Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan topologi standar, $Y = \{-1, 0, 1\}$, dan definisikan $p : X \rightarrow Y$ dengan

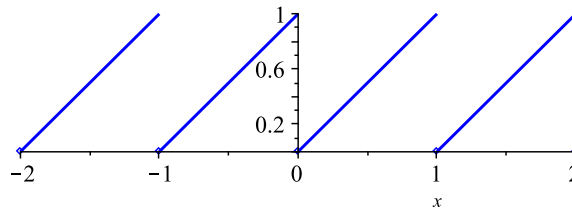
$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x > 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \\ -1 & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Tentukan semua himpunan terbuka dalam topologi kuosien tersebut.

- (b) Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan topologi standar, $Y = [0, 1)$, dan definisikan $p : X \rightarrow Y$ dengan

$$p(x) = x - \lfloor x \rfloor,$$

dengan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$, sehingga $p(1.2) = 1.2 - 1 = 0.2$. Fungsi yang didefinisikan oleh $\lfloor x \rfloor$ disebut juga **fungsi lantai**. Perhatikan bahwa $\lfloor -0.7 \rfloor = -1$. Tentukan semua himpunan dalam topologi kuosien tersebut.



Gambar 16.2 Grafik $p(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Petunjuk. Grafik p pada $[-2, 2]$ ditunjukkan dalam [Gambar 16.2](#).

Sudut pandang lain terhadap topologi kuosien memanfaatkan fakta bahwa setiap relasi ekuivalensi $\sim$ pada suatu himpunan X mempartisi X menjadi gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas, $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Terdapat surjeksi alami q dari X ke himpunan kelas-kelas ekuivalensi, yang diberikan oleh $q(x) = [x]$. Kita menyelidiki sudut pandang ini dalam aktivitas berikut.

Kegiatan 16.4 Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, X\}$. Maka (X, τ) merupakan ruang topologi. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{d, e, f\}$. Definisikan relasi $\sim$ pada X dengan $x \sim y$ jika x dan y keduanya berada dalam A atau keduanya berada dalam B . Anggap bahwa $\sim$

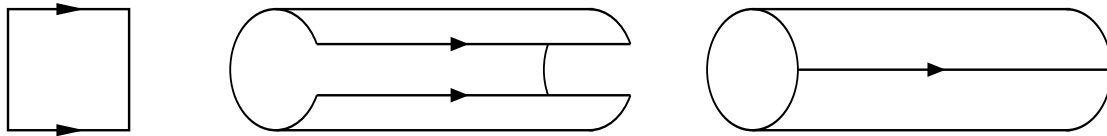
merupakan relasi ekuivalensi. Himpunan A dan B adalah kelas-kelas ekuivalensi relasi ini. Dengan kata lain, $A = [a] = [b] = [c]$ dan $B = [d] = [e] = [f]$. Misalkan $X^* = \{A, B\}$. Kita kemudian dapat mendefinisikan $p : X \rightarrow X^*$ dengan memetakan setiap $x \in X$ ke himpunan yang memuatnya. Dengan kata lain, $p(x) = [x]$ untuk $x \in X$, atau

$$p(a) = A, p(b) = A, p(c) = A, p(d) = B, p(e) = B, \text{ dan } p(f) = B.$$

Tentukan himpunan-himpunan dalam topologi kuosien pada X^* .

Partisi X dalam [Kegiatan 16.4](#) menjadi gabungan saling lepas dari himpunan A dan B mendefinisikan relasi ekuivalensi pada X , dengan $x \sim y$ jika x dan y keduanya berada dalam himpunan yang sama, yakni A atau B . Dengan kata lain, $a \sim b \sim c$ dan $d \sim e \sim f$. Dalam konteks ini, himpunan A dan B merupakan kelas ekuivalensi — $A = [a]$ dan $B = [d]$, dengan $[x]$ menyatakan kelas ekuivalensi dari x . Hal ini membawa kita pada konstruksi umum.

Jika (X, τ) suatu ruang topologi dan $\sim$ suatu relasi ekuivalensi pada X , kita dapat mendefinisikan $X/\sim$ sebagai himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang berbeda dari X terhadap $\sim$. Maka $p : X \rightarrow X/\sim$ yang didefinisikan oleh $p(x) = [x]$ merupakan surjeksi dan $X/\sim$ memiliki topologi kuosien. Ruang $X/\sim$ disebut **ruang kuosien**. Ruang $X/\sim$ disebut juga **ruang identifikasi** karena relasi ekuivalensinya mengidentifikasi titik-titik dalam himpunan tersebut agar dipandang sebagai titik yang sama. Dengan demikian, kita dapat membayangkan ruang kuosien sebagai hasil perekatan atau penciutan bagian-bagian ruang X .

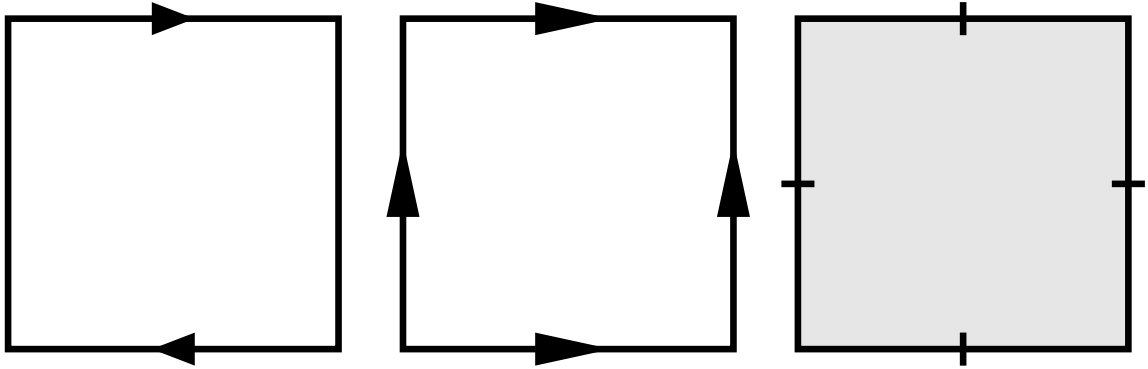


Gambar 16.3 Sebuah tabung sebagai ruang identifikasi $X/\sim$.

Contoh 16.4 Misalkan $I = [0, 1]$ dan $X = I \times I$ dengan topologi standar. Definisikan $\sim$ sebagai relasi ekuivalensi pada X yang dibangkitkan oleh identifikasi $(x, y) \sim (x, y)$ jika $0 < y < 1$ dan $0 \leq x \leq 1$, serta $(x, 0) \sim (x, 1)$ jika $0 \leq x \leq 1$. Dengan konstruksi ini, $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi. Mari kita perhatikan bentuk ruang identifikasi $X/\sim$. Ruang $I \times I$ adalah persegi satuan seperti yang ditunjukkan dalam [Gambar 16.3](#). Setiap titik di bagian dalam persegi hanya diidentifikasi dengan dirinya sendiri. Namun, sisi atas dan sisi bawah diidentifikasi satu sama lain dengan arah yang sama. Bayangkan X sebagai selembar kertas. Kita menggulung persegi itu hingga sisi atas dan sisi bawahnya berimpit. Hasilnya, $X/\sim$ merupakan tabung seperti yang ditunjukkan dalam [Gambar 16.3](#). $\square$

Kegiatan 16.5 Ruang kuosien dapat sulit dideskripsikan. Aktivitas ini menyajikan beberapa contoh tambahan.

- (a) Misalkan $X = [0, 1]$ dengan topologi standar dan definisikan relasi ekuivalensi $\sim$ pada X dengan $0 \sim 1$ dan $x \sim x$ untuk setiap x yang tidak sama dengan 0 maupun 1. Seperti apakah bentuk ruang kuosien $X/\sim$?

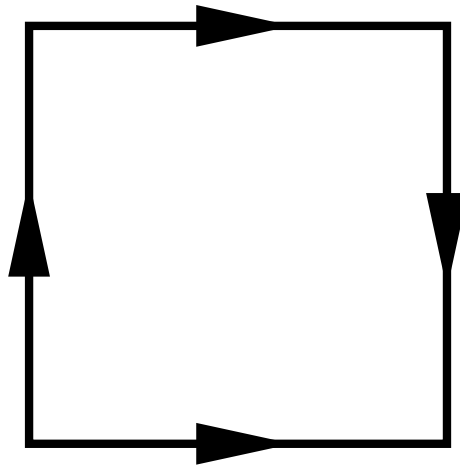


Gambar 16.5 Dari kiri ke kanan: identifikasi untuk bagian (i), (ii), dan (iii)

Petunjuk. Pandang relasi $\sim$ sebagai perekatan titik 0 dan 1.

- (b) Deskripsikan ruang-ruang kuosien dari $X = I \times I$ dengan topologi standar yang diperoleh dari relasi ekuivalensi $\sim$ yang dibangkitkan oleh identifikasi berikut. Gambaran identifikasinya ditunjukkan dalam [Gambar 16.5](#). (Di sini I adalah interval tertutup $[0, 1]$.)
- (i) $(x, y) \sim (x, y)$ jika $0 < y < 1$ dan $0 \leq x \leq 1$, serta $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ jika $0 \leq x \leq 1$. (Ruang ini disebut pita Möbius.)
 - (ii) $(x, y) \sim (x, y)$ jika $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$, $(x, 0) \sim (x, 1)$ untuk $0 < x < 1$, $(0, y) \sim (1, y)$ untuk $0 < y < 1$, serta $(0, 0) \sim (0, 1) \sim (1, 0) \sim (1, 1)$. (Ruang ini disebut torus.)
 - (iii) $(x, y) \sim (x, y)$ jika $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$, serta $(x, y) \sim (u, v)$ jika (x, y) dan (u, v) merupakan titik batas.

Banyak ruang identifikasi menarik lainnya dapat dibentuk. Sebagai contoh, misalkan $X = I \times I$ dan definisikan $\sim$ sebagai relasi ekuivalensi yang dibangkitkan oleh $(x, y) \sim (x, y)$ jika $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$, $(0, y) \sim (1, y)$ untuk $0 < y < 1$, serta $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ untuk $0 < x < 1$. Identifikasi ini digambarkan dalam [Gambar 16.6](#). Ruang identifikasi $X/\sim$ yang dihasilkan adalah botol Klein. Ilustrasi yang baik mengenai konstruksi ini dapat dilihat di [maths.org](https://plus.maths.org/content/introducing-klein-bottle)⁵.



Gambar 16.6 Identifikasi untuk botol Klein.

⁵plus.maths.org/content/introducing-klein-bottle

Mengidentifikasi Ruang Kuosien

Misalkan X suatu ruang topologi dan Y suatu himpunan, serta misalkan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Kita dapat mendefinisikan relasi $\sim_p$ pada X dengan $x \sim_p y$ jika dan hanya jika $p(x) = p(y)$. Tidak sulit menunjukkan bahwa $\sim_p$ merupakan relasi ekuivalensi; perinciannya diserahkan kepada [Latihan 1](#). Dari sini kita melihat bahwa kedua pendekatan kita untuk mendefinisikan topologi kuosien dan ruang kuosien sebenarnya sama.

Sering kali kita memiliki ruang topologi X dan relasi $\sim$ pada X , lalu ingin memiliki cara efektif untuk mengenali ruang kuosien $X/\sim$ sebagai ruang yang homeomorfik dengan suatu ruang topologi Y yang telah dikenal. Artinya, kita ingin dapat menunjukkan bahwa terdapat homeomorfisme f dari $X/\sim$ ke Y .

Contoh 16.7 Perhatikan keadaan berikut. Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan topologi standar dan definisikan relasi $\sim$ pada $\mathbb{R}$ dengan $x \sim y$ jika $x - y \in \mathbb{Z}$. Tidak sulit menunjukkan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi. Berdasarkan relasi ekuivalensi ini, kita memiliki $x - 1 \sim x$ untuk setiap bilangan real x . Dengan demikian, setiap kelas ekuivalensi dari $\mathbb{R}$ dapat diwakili oleh suatu titik dalam selang $[0, 1]$, dengan 0 dan 1 diidentifikasi oleh relasi tersebut. Karena itu, kita dapat menduga bahwa $\mathbb{R}/\sim$ homeomorfik dengan lingkaran $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ sebagai subruang dari $\mathbb{R}^2$ dengan topologi standar. Sekarang tujuannya ialah mencari homeomorfisme antara S^1 dan $\mathbb{R}/\sim$. Karena setiap titik pada lingkaran satuan berbentuk $(\cos(t), \sin(t))$ untuk suatu bilangan real t , kita dapat mencoba mendefinisikan $f : (\mathbb{R}/\sim) \rightarrow S^1$ dengan $f([t]) = (\cos(t), \sin(t))$. Namun, kita memiliki $0 \sim 1$, yang berarti bahwa $[0] = [1]$, sedangkan $f([0]) \neq f([1])$. Jadi, f tidak terdefinisi dengan baik. Pilihan lain adalah $f([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Dalam hal ini, jika $x \sim y$, maka $2\pi x$ dan $2\pi y$ berbeda sebesar suatu kelipatan 2π , sehingga $f([x]) = f([y])$. Selanjutnya kita dapat menunjukkan bahwa f merupakan homeomorfisme. Kita akan segera melanjutkan contoh ini. $\square$

Teorema berikut merangkum contoh di atas.

Teorema 16.8 Misalkan X dan Y himpunan-himpunan dan misalkan $\sim$ suatu relasi ekuivalensi pada X . Misalkan f suatu fungsi dari X ke Y sedemikian sehingga $f(x_1) = f(x_2)$ setiap kali $x_1 \sim x_2$ dalam X . Misalkan $X/\sim$ himpunan kelas-kelas ekuivalensi dari X menurut relasi $\sim$, dan misalkan $p : X \rightarrow (X/\sim)$ proyeksi kuosien kanonis yang didefinisikan oleh $p(x) = [x]$. Fungsi $\bar{f}$ dari $X/\sim$ ke Y yang didefinisikan oleh $\bar{f}([x]) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan satu-satunya fungsi yang memenuhi

$$f = \bar{f} \circ p.$$

Kegiatan 16.6 [Teorema 16.8](#) merupakan pernyataan tentang himpunan dan fungsi, tanpa melibatkan topologi. Kita membuktikan teorema tersebut dalam aktivitas ini. Gunakan syarat-syarat yang dinyatakan dalam [Teorema 16.8](#).

- Tunjukkan bahwa $\bar{f}$ terdefinisi dengan baik. Artinya, tunjukkan bahwa setiap kali $[x_1] = [x_2]$ dalam $X/\sim$, berlaku $\bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2])$.
- Buktikan bahwa $f = \bar{f} \circ p$.
- Tunjukkan bahwa keunikan $\bar{f}$ berasal dari persamaan $f = \bar{f} \circ p$.

Sekarang kita menyajikan hasil terakhir yang sangat berguna ketika bekerja dengan ruang kuosien.

Teorema 16.9 Misalkan X suatu ruang topologi dan misalkan $\sim$ suatu relasi ekuivalensi pada X . Pandang himpunan $X/\sim$ sebagai ruang topologi dengan topologi kuosien, dan misalkan $p : X \rightarrow (X/\sim)$ proyeksi kuosien kanonis yang didefinisikan oleh $p(x) = [x]$. Misalkan Y suatu ruang topologi dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu sedemikian sehingga $f(x_1) = f(x_2)$ setiap kali $x_1 \sim x_2$ dalam X . Maka $\bar{f} : (X/\sim) \rightarrow Y$ yang

didefinisikan oleh $\bar{f}([x]) = f(x)$ merupakan satu-satunya fungsi kontinu yang memenuhi $f = \bar{f} \circ p$.

Bukti. Keberadaan $\bar{f}$ sebagai satu-satunya fungsi yang memenuhi $f = \bar{f} \circ p$ telah dibuktikan dalam [Teorema 16.8](#). Tinggal menunjukkan bahwa $\bar{f}$ kontinu. Misalkan O suatu himpunan terbuka dalam Y . Karena f kontinu, kita mengetahui bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X . Jika $x_1 \in f^{-1}(O)$ dan $x_1 \sim x_2$, maka $x_2 \in f^{-1}(O)$ juga. Jadi, kita dapat menuliskan $f^{-1}(O)$ sebagai

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} [x].$$

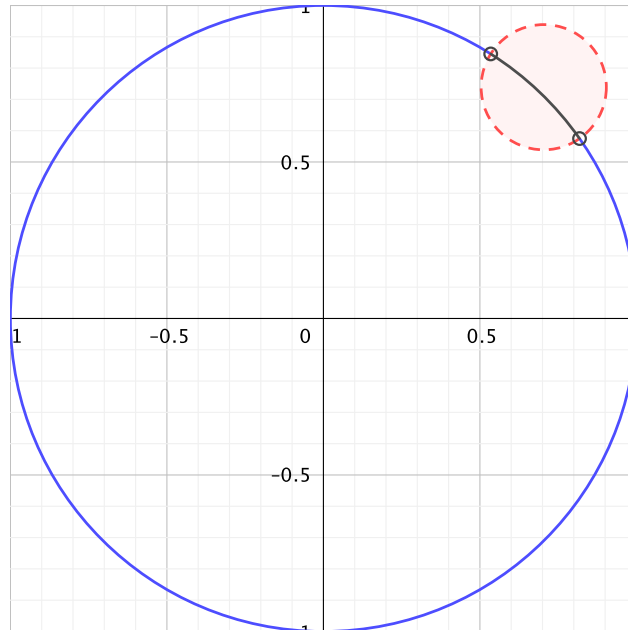
Artinya, $f^{-1}(O)$ merupakan gabungan kelas-kelas ekuivalensi. Karena $\bar{f}([x]) = f(x)$, jika $x \in f^{-1}(O)$, maka $[x] \in \bar{f}^{-1}(O)$. Dengan demikian,

$$f^{-1}(O) = p^{-1}(\bar{f}^{-1}(O)).$$

Dengan demikian, $\bar{f}^{-1}(O)$ terbuka dalam ruang kuosien tersebut: memang, prapetanya di bawah proyeksi kuosien adalah himpunan terbuka dalam X , sesuai definisi topologi kuosien. Jadi, $\bar{f}$ kontinu. ■

Sekarang kita akan melihat cara menggunakan [Teorema 16.9](#) untuk membangun homeomorfisme dari ruang kuosien suatu ruang topologi ke ruang topologi lainnya.

Contoh 16.10 Kita kembali ke keadaan dalam [Contoh 16.7](#), dengan $X = \mathbb{R}$ yang diberi topologi standar dan relasi ekuivalensi $\sim$ yang didefinisikan oleh $x \sim y$ jika $x - y \in \mathbb{Z}$. Kita akan menggunakan [Teorema 16.9](#) untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{R}/\sim$ homeomorfik dengan lingkaran $Y = S^1$.



Gambar 16.11 Suatu elemen basis untuk S^1 .

- Langkah 1** Definisikan suatu surjeksi kontinu $f : X \rightarrow Y$ yang menghormati relasi tersebut. Artinya, kita perlu memastikan bahwa $f(x_1) = f(x_2)$ setiap kali $x_1 \sim x_2$ dalam X . Sebelumnya kita melihat bahwa fungsi f yang didefinisikan oleh $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ menghormati relasi tersebut. Karena setiap titik pada lingkaran satuan berbentuk $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ untuk suatu bilangan real θ , memilih $t = \frac{\theta}{2\pi}$ menghasilkan $f(t) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, sehingga f merupakan surjeksi. Sekarang kita perlu menunjukkan bahwa f kontinu. Suatu koleksi himpunan terbuka basis dalam S^1 dapat diperoleh dengan mengambil irisan S^1 dengan bola-bola terbuka dalam $\mathbb{R}^2$, seperti diperlihatkan dalam [Gambar 16.11](#). Kita melihat bahwa himpunan-himpunan terbuka basis tersebut merupakan busur-busur berbentuk $\widehat{ab}$ untuk a dan b dalam S^1 . Untuk busur yang dipilih, misalkan $a = (\cos(2\pi A), \sin(2\pi A))$ dan $b = (\cos(2\pi B), \sin(2\pi B))$, dengan parameter real A dan B yang dipilih sehingga parameter pertama mendahului parameter kedua sepanjang busur tersebut dan selisihnya kurang dari satu putaran penuh. Maka $f^{-1}(\widehat{ab})$ merupakan gabungan selang $(A + k, B + k)$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Sebagai gabungan selang-selang terbuka, $f^{-1}(\widehat{ab})$ terbuka dalam X . Dengan demikian, kita telah memperoleh surjeksi kontinu dari X ke Y yang menghormati relasi tersebut.
- Langkah 2** Carilah suatu fungsi kontinu dari $X/\sim$ ke Y . [Teorema 16.9](#) memberi tahu kita bahwa fungsi $\bar{f} : (X/\sim) \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $\bar{f}([t]) = f(t)$ bersifat kontinu. Jadi, $\bar{f}$ merupakan kandidat homeomorfisme kita.
- Langkah 3** Tunjukkan bahwa $\bar{f}$ merupakan bijeksi. Misalkan $y \in Y$. Karena f merupakan surjeksi, terdapat $t \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(t) = y$. Akibatnya, $\bar{f}([t]) = f(t) = y$ dan $\bar{f}$ merupakan surjeksi. Untuk menunjukkan bahwa $\bar{f}$ merupakan injeksi, misalkan $\bar{f}([s]) = \bar{f}([t])$ untuk suatu $s, t \in \mathbb{R}$. Maka $(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) = f(s) = f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Karena itu, $2\pi s$ dan $2\pi t$ harus berbeda sebesar suatu kelipatan 2π . Artinya, $2\pi s - 2\pi t = 2\pi k$ untuk suatu bilangan bulat k . Dari sini kita memperoleh $s - t = k \in \mathbb{Z}$, sehingga $s \sim t$. Jadi, $[s] = [t]$ dan kita menyimpulkan bahwa $\bar{f}$ merupakan injeksi.
- Langkah 4** Tunjukkan bahwa $\bar{f}$ merupakan homeomorfisme. Pada tahap ini kita telah mengetahui bahwa $\bar{f}$ merupakan bijeksi kontinu, sehingga tinggal menunjukkan bahwa $\bar{f}(\bar{O})$ terbuka setiap kali $\bar{O}$ terbuka dalam $X/\sim$. Misalkan $p : X \rightarrow (X/\sim)$ proyeksi kuosien kanonis. Misalkan $\bar{O}$ suatu himpunan terbuka tak kosong dalam $X/\sim$. Maka $O = p^{-1}(\bar{O})$ terbuka dalam X . Jadi, O merupakan gabungan selang-selang terbuka. Untuk setiap titik dalam himpunan ini, pilih selang terbuka (a, b) yang memuat titik tersebut, termuat dalam O , dan panjangnya kurang dari satu. Berdasarkan definisi f , himpunan $f(a, b)$ merupakan busur terbuka $\widehat{f(a)f(b)}$, yang terbuka dalam Y . Kumpulan busur tersebut menutupi citra seluruh himpunan terbuka itu. Jadi, $f(O)$ merupakan gabungan busur-busur terbuka dalam Y , sehingga $f(O)$ terbuka dalam Y . Sekarang $f(O) = (\bar{f} \circ p)(O) = \bar{f}(p(O)) = \bar{f}(\bar{O})$, dan $\bar{f}(\bar{O})$ terbuka dalam Y . Kita menyimpulkan bahwa $\bar{f}$ merupakan homeomorfisme dari $X/\sim$ ke S^1 , sehingga S^1 merupakan ruang kuosien dari $\mathbb{R}$.

□

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang telah kita bahas dalam bab ini meliputi hal-hal berikut.

- Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, misalkan Y suatu himpunan, dan misalkan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Topologi kuosien pada Y adalah himpunan

$$\{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}.$$

- Fungsi p dalam konstruksi pada butir sebelumnya disebut pemetaan kuosien, dan ruang Y disebut ruang kuosien.
- Lingkaran, pita Möbius, torus, dan permukaan bola semuanya dapat direalisasikan sebagai ruang kuosien.

Latihan

1. Misalkan X suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Definisikan relasi $\sim_p$ pada X dengan $x \sim_p y$ jika dan hanya jika $p(x) = p(y)$. Buktikan bahwa $\sim_p$ merupakan relasi ekuivalensi.
2. Misalkan X himpunan bilangan real dengan topologi standar dan misalkan $p : X \rightarrow \{a, b, c\}$ didefinisikan oleh

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{jika } x < 0 \\ b & \text{jika } x = 0 \\ c & \text{jika } x > 0. \end{cases}$$

Apakah topologi kuosiennya?

3. Definisikan relasi ekuivalensi $\sim$ pada $\mathbb{R}^2$ dengan $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ jika dan hanya jika $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ dan $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Buktikan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Ruang kuosien ini merupakan ruang yang telah dikenal. Tentukan ruang tersebut dan jelaskan mengapa ruang itu merupakan ruang kuosiennya.
4. Berikan contoh suatu surjeksi kontinu yang bukan pemetaan kuosien.
5. Misalkan X suatu ruang topologi dan misalkan A suatu subruang dari X . Definisikan relasi $\sim$ pada X dengan $x \sim y$ jika dan hanya jika $x = y$ atau $x, y \in A$. Dalam hal ini, ruang kuosien dinotasikan dengan X/A (jika A tak kosong, bayangkan ruang ini diperoleh dengan menciutkan subruang tersebut menjadi satu titik dan membiarkan semua titik lainnya tetap terpisah; jika kosong, tidak ada titik yang dicitutkan). Deskripsikan setiap ruang kuosien berikut.

(a) X adalah selang tertutup $[0, 1]$ dalam $\mathbb{R}$ dan $A = \{0, 1\}$.

(b) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $A = \{(-1, 0), (1, 0)\}$

(c) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ dan $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

6. Misalkan (X, τ) ruang topologi dengan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Misalkan $Y = \{a, b, c\}$.

- (a) Misalkan $p : X \rightarrow Y$ didefinisikan oleh $p(1) = a$, $p(2) = a$, $p(3) = b$, dan $p(4) = c$. Tentukan topologi kuosien τ_p pada Y yang ditentukan oleh fungsi p .
- (b) Misalkan $q : X \rightarrow Y$ didefinisikan oleh $q(1) = c$, $q(2) = c$, $q(3) = b$, dan $q(4) = a$. Tentukan topologi kuosien τ_q pada Y yang ditentukan oleh fungsi q .
- (c) Apakah ruang (Y, τ_p) dan (Y, τ_q) homeomorfik? Jika ya, tuliskan suatu homeomorfisme tertentu dan jelaskan mengapa pemetaan Anda merupakan homeomorfisme. Jika tidak, jelaskan alasannya.

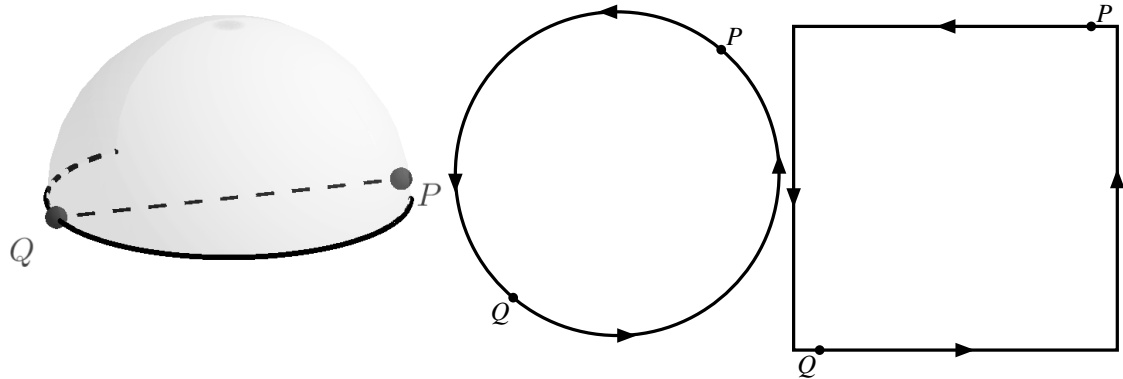
7. Misalkan $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ adalah cakram satuan tertutup dalam $\mathbb{R}^2$ dengan topologi standar, dan misalkan $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ adalah batas D^2 . Deskripsikan ruang kuosien $D^2 / \sim$ untuk setiap relasi ekuivalensi berikut. Untuk setiap butir, misalkan relasi tersebut adalah relasi ekuivalensi yang dibangkitkan oleh identifikasi yang dinyatakan, tanpa identifikasi tambahan. Misalkan $x = (s_1, t_1)$ dan $y = (s_2, t_2)$.
- $x \sim y$ jika $s_1 = s_2$ untuk x, y dalam D^2 .
 - $x \sim y$ jika $s_1 = s_2$ untuk x, y dalam S^1 .
 - Identifikasi pembangkitnya adalah $x \sim y$ apabila $y = -x$, yakni $(s_2, t_2) = (-s_1, -t_1)$, untuk titik x, y dalam D^2 .
8. Misalkan $X = I \times I$, dengan I selang $[0, 1]$ yang diberi topologi metrik standar, dan definisikan relasi ekuivalensi pada X dengan $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ jika dan hanya jika $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$ atau $t_1 = t_2 > 0$; ketentuan pertama menjamin refleksivitas pada seluruh X .
- Deskripsikan ruang kuosien $X / \sim$ beserta topologi kuosienya.
 - Tunjukkan bahwa $X / \sim$ bukan ruang Hausdorff.
9. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dan misalkan p suatu unsur tetap dalam X . Misalkan τ_p topologi titik tertentu dan $\tau_{\overline{p}}$ topologi titik yang dikecualikan pada X . Artinya,
- τ_p adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang memuat p .
 - $\tau_{\overline{p}}$ adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang tidak memuat p .

Pembuktian bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik yang dikecualikan benar-benar merupakan topologi dibahas dalam [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Misalkan $\sim$ relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $x \sim y$ jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{3}$. Deskripsikan ruang kuosien $\mathbb{Z} / \sim$, lalu tentukan, disertai justifikasi, topologi kuosien pada $\mathbb{Z} / \sim$ ketika

- $\mathbb{Z}$ diberi topologi τ_p dengan $p = 1$.
 - $\mathbb{Z}$ diberi topologi $\tau_{\overline{p}}$ dengan $p = 1$.
10. Dalam mengembangkan teknik menggambar perspektif, para seniman Renaisans perlu memperhitungkan satu titik di tak hingga untuk setiap arah garis-garis sejajar. Gagasan ini menghasilkan geometri yang memperluas konsep bidang real. Geometri baru tersebut adalah bidang proyektif real $\mathbb{R}P^2$, yang dapat dipandang sebagai ruang kuosien dari $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ menurut relasi $\sim_P$, dengan $(x_1, x_2, x_3) \sim_P (y_1, y_2, y_3)$ dalam $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ jika dan hanya jika terdapat bilangan real tak nol k sedemikian sehingga $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, dan $y_3 = kx_3$. Dalam bidang proyektif, setiap dua garis proyektif yang berbeda berpotongan di tepat satu titik, dan semua garis sejajar dengan arah yang sama berbagi titik di tak hingga yang sama, sebagaimana garis-garis tersebut tampak bertemu dalam penglihatan kita.
- Tunjukkan bahwa $\sim_P$ merupakan relasi ekuivalensi.
 - Berikan deskripsi geometris tentang unsur-unsur ruang kuosien $\mathbb{R}P^2$.
 - Terdapat cara lain untuk memvisualisasikan $\mathbb{R}P^2$. Sebagai contoh, jelaskan mengapa bidang proyektif real $\mathbb{R}P^2$ homeomorfik dengan ruang kuosien $S^2 / \sim$ dari $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, dengan $\sim$ mengidentifikasi titik-titik berseberangan secara diametral (titik-titik antipodal) pada S^2 . Anda tidak perlu memberikan bukti formal, tetapi harus memberikan

penjelasan yang meyakinkan.

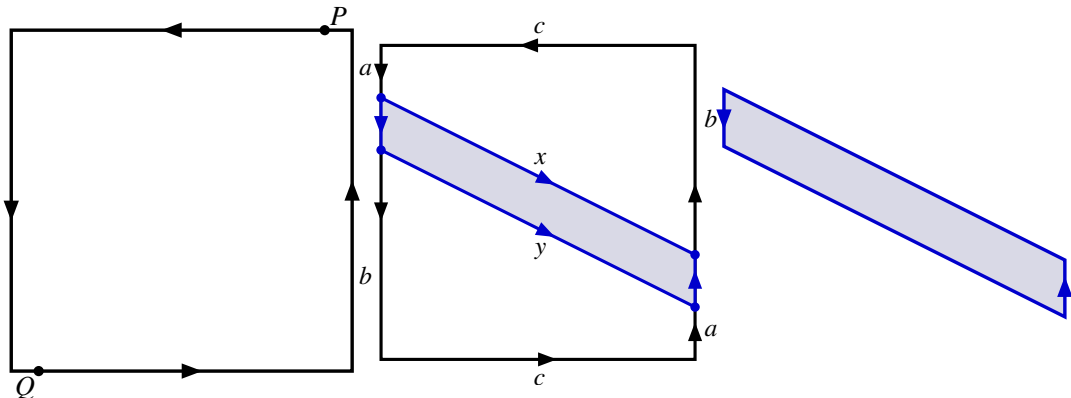
- (d) Karena kita mengidentifikasi titik-titik antipodal pada S^2 dalam ruang $S^2/\sim$, kita dapat memandang ruang ini dengan cara lain. Jika P suatu titik pada S^2 yang tidak terletak pada ekuator, maka titik antipodalnya juga tidak terletak pada ekuator. Jadi, kita dapat memandang $S^2/\sim$ sebagai hemisfer atas beserta ekuatornya, dengan pasangan titik antipodal pada ekuator diidentifikasi, seperti diperlihatkan di sebelah kiri dalam [Gambar 16.12](#).



Gambar 16.12 Tiga gambaran $\mathbb{R}P^2$.

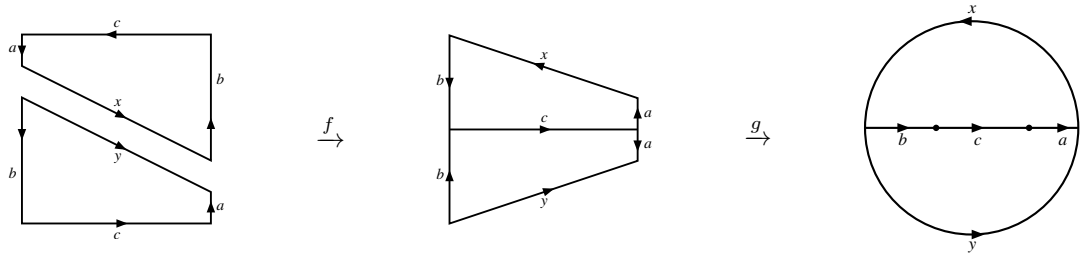
Dengan memproyeksikan titik-titik pada hemisfer ke bidang xy , kita dapat merepresentasikan $S^2/\sim$ sebagai cakram dengan pasangan titik antipodal pada batasnya diidentifikasi, seperti tampak di bagian tengah [Gambar 16.12](#). Gunakan gambaran terakhir ini untuk menjelaskan mengapa $\mathbb{R}P^2$ dapat direalisasikan sebagai persegi dengan pasangan sisi berhadapan diidentifikasi dalam arah berlawanan, seperti tampak di sebelah kanan [Gambar 16.12](#).

- (e) Bidang proyektif $\mathbb{R}P^2$ merupakan objek yang rumit — ruang ini tidak dapat tertanam dalam $\mathbb{R}^3$, sehingga sulit divisualisasikan. Bidang proyektif merupakan permukaan yang tak dapat diorientasikan dan berperan penting dalam klasifikasi permukaan — lebih tepatnya, setiap permukaan tertutup yang terhubung homeomorfik dengan permukaan bola, jumlah terhubung dari sejumlah berhingga torus, atau jumlah terhubung dari sejumlah berhingga bidang proyektif real. Dalam bagian latihan ini, kita melihat bagaimana bidang proyektif itu sendiri diperoleh dengan merekatkan pita Möbius pada sebuah cakram sepanjang batasnya (bayangkan menjahit batas pita Möbius pada keliling cakram).
- (i) Mulailah dengan model $\mathbb{R}P^2$ yang diperlihatkan di sebelah kiri dalam [Gambar 16.13](#). Partisi objek ini menjadi tiga bagian seperti diperlihatkan di sebelah kanan dalam [Gambar 16.13](#). Jelaskan mengapa daerah berarsir pada gambar tengah, yang dipisahkan di sebelah kanan dalam [Gambar 16.13](#), merupakan pita Möbius.



Gambar 16.13 Membagi bidang proyektif real.

- (ii) Ruang S yang tersisa setelah kita membuang pita Möbius dari $\mathbb{R}P^2$ diperlihatkan di sebelah kiri dalam [Gambar 16.14](#). Dua ruang berikutnya homeomorfik dengan S . Deskripsikan homeomorfisme yang menghasilkan kedua ruang tersebut dari S . Lalu jelaskan bagaimana $\mathbb{R}P^2$ diperoleh dengan merekatkan pita Möbius pada sebuah cakram sepanjang batasnya.



Gambar 16.14 Mengenali ruang S .

11. Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dengan topologi standar, dan misalkan $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dengan topologi standar. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ didefinisikan oleh $f((x, y)) = x^2 + y^2$.
- Tunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu dan surjektif.
 - Buktikan bahwa ruang kuosien X^* dari X yang ditentukan oleh f homeomorfik dengan Y .
12. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi. Suatu subruang A dari X disebut **retrak** dari X (atau dikatakan bahwa X beretraksi ke A) jika terdapat fungsi kontinu $r : X \rightarrow A$ sedemikian sehingga $r(a) = a$ untuk semua $a \in A$. Pemetaan r seperti ini disebut **retraksi**. Secara intuitif, suatu subruang A dari X merupakan retrak dari X jika kita dapat menciutkan secara kontinu (atau meretraksikan) X ke A tanpa memindahkan satu pun titik dalam A . Jenis retrak tertentu, yaitu retrak deformasi, berperan penting dalam topologi aljabar.
- Tunjukkan bahwa setiap ruang tak kosong memiliki suatu titik sebagai retrak.
 - Tunjukkan bahwa $\{-1, 1\}$ merupakan retrak dari $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - Tunjukkan bahwa setiap retraksi merupakan pemetaan kuosien.
 - Tunjukkan bahwa jika X Hausdorff dan A merupakan retrak dari X , maka A harus merupakan subhimpunan tertutup dari X .
13. Untuk setiap pernyataan berikut, jawab “benar” jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawab “salah” dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan itu salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- Misalkan p suatu surjeksi dari ruang topologi X ke himpunan tak kosong Y . Topologi kuosien pada Y merupakan topologi terbesar pada Y yang membuat p kontinu.
 - Misalkan $X = [0, 1]$ dengan topologi metrik Euklides dan definisikan relasi $\sim$ pada X dengan $x \sim y$ jika dan hanya jika x dan y keduanya rasional atau keduanya irasional. Maka ruang kuosien $X/\sim$ merupakan ruang dua titik dengan topologi indiskret.
 - Misalkan p suatu surjeksi dari ruang topologi X ke himpunan tak kosong Y . Topologi kuosien pada Y merupakan topologi terbesar pada Y yang membuat p kontinu.
 - Misalkan $X = [0, 1]$ dengan topologi metrik Euklides dan definisikan relasi $\sim$ pada X dengan $x \sim y$ jika dan hanya jika x dan y keduanya rasional atau keduanya irasional. Maka ruang kuosien $X/\sim$ merupakan ruang dua titik dengan topologi indiskret.
 - Jika X suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi, maka $p(U)$ terbuka dalam topologi kuosien setiap kali U terbuka dalam X .

- (f) Jika $\sim$ suatu relasi ekuivalensi pada ruang topologi X , maka ruang kuosien $X/\sim$ adalah himpunan semua kelas ekuivalensi dari X yang diberi topologi kuosien.

Bab 17

Ruang Kompak

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan selimut suatu subhimpunan dari ruang topologi? Apa yang dimaksud dengan selimut buka?
- Apa yang dimaksud dengan subselimut dari suatu selimut?
- Apa yang dimaksud dengan subhimpunan kompak dari ruang topologi?
- Apa salah satu penerapan kekompakan?
- Bagaimana kita mencirikan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$? Teorema apa yang memberikan pencirian tersebut?

Pendahuluan

Interval tertutup dan terbatas memiliki sifat-sifat penting dalam kalkulus. Ingat, misalnya, bahwa setiap fungsi bernilai real yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ mencapai nilai maksimum dan minimum pada interval tersebut. Pertanyaan yang hendak kita bahas dalam bagian ini adalah apakah terdapat pencirian yang bersesuaian bagi subhimpunan ruang topologi yang menjamin bahwa fungsi kontinu bernilai real dengan domain berupa ruang topologi mencapai nilai maksimum dan minimum. Sifat yang akan kita kembangkan disebut kekompakan.

Kata “kompak” mungkin mengingatkan kita pada gagasan tentang ukuran kecil, tetapi kita perlu berhati-hati dengan istilah ini. Kita mungkin menganggap interval $(0, 0.5)$ kecil, tetapi $(0, 0.5)$ homeomorfik dengan $\mathbb{R}$, yang tidak kecil. Demikian pula, kita mungkin menganggap interval $[-10000, 10000]$ besar, tetapi interval ini homeomorfik dengan interval “kecil” $[-0.00001, 0.000001]$. Akibatnya, konsep kekompakan tidak berkaitan dengan ukuran, melainkan, dalam arti tertentu, dengan struktur. Kita akan mengembangkan gagasan ini dalam bagian ini.

Karena suatu topologi mendefinisikan himpunan-himpunan buka, sifat topologi sering didefinisikan dengan menggunakan himpunan buka. Mari kita telaah sebuah contoh untuk menyingkap beberapa perincian yang kita perlukan guna memperoleh gagasan kekompakan yang berguna. Pertimbangkan interval terbuka $(0, 1)$ dalam $\mathbb{R}$. Misalkan kita menuliskan $(0, 1)$ sebagai gabungan bola-bola terbuka. Sebagai contoh, misalkan $O_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \geq 3$. Perhatikan bahwa $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n \geq 3} O_n$. Setiap koleksi himpunan buka yang gabungannya memuat $(0, 1)$ disebut **selimut buka** bagi $(0, 1)$. Bekerja dengan himpunan dalam jumlah besar pada umumnya lebih rumit daripada bekerja dengan himpunan dalam jumlah kecil, sehingga wajar untuk menanyakan apakah kita dapat mengurangi banyaknya himpunan dalam selimut

buka bagi $(0, 1)$ dan tetap menyelimuti $(0, 1)$. Secara khusus, bekerja dengan koleksi himpunan berhingga lebih disukai daripada bekerja dengan himpunan dalam jumlah tak berhingga (jika perlu, dalam keadaan berhingga kita dapat memeriksa semua kemungkinan satu per satu). Perhatikan bahwa $O_n \subset O_{n+1}$ untuk setiap n , sehingga kita dapat menyingkirkan banyak himpunan dari selimut ini. Namun, jika kita menyingkirkan cukup banyak himpunan hingga hanya tersisa sejumlah berhingga, maka akan terdapat nilai maksimum n sedemikian sehingga O_n masih berada dalam koleksi kita. Akan tetapi, $\frac{1}{2n}$ tidak akan berada dalam gabungan koleksi himpunan yang tersisa. Akibatnya, kita tidak dapat menemukan koleksi berhingga dari himpunan-himpunan O_n yang gabungannya memuat $(0, 1)$. Perhatikan bahwa mungkin terdapat koleksi himpunan buka yang menyelimuti $(0, 1)$ dan memiliki subkoleksi berhingga yang juga menyelimuti $(0, 1)$. Sebagai contoh, jika kita menetapkan $U_n = (n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4})$, maka $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$, dan $(0, 1) \subseteq U_0 \cup U_1$. Pokok utamanya adalah bahwa terdapat sekurang-kurangnya satu koleksi himpunan buka yang menyelimuti $(0, 1)$ tetapi tidak memiliki subkoleksi berhingga yang menyelimuti $(0, 1)$.

Sekarang mari kita terapkan gagasan yang sama pada himpunan $[0, 1]$. Misalkan kita memperluas selimut buka $\{O_n\}$ menjadi selimut buka bagi interval tertutup $[0, 1]$ dengan menambahkan dua bola terbuka dalam $\mathbb{R}$: $O_0 = B(0, 0.5)$ dan $O_1 = B(1, 0.5)$. Sekarang himpunan-himpunan O_0 , O_1 , dan O_4 membentuk koleksi berhingga yang menyelimuti $[0, 1]$. Jadi, meskipun interval $[0, 1]$ “lebih besar” daripada $(0, 1)$ dalam arti bahwa $(0, 1) \subset [0, 1]$, kita dapat menyajikan $[0, 1]$ secara lebih efisien (yakni secara berhingga) menggunakan himpunan buka daripada menyajikan interval $(0, 1)$. Inilah gagasan dasar di balik kekompakan.

Definisi 17.1 Suatu subhimpunan A dari ruang topologi X disebut **kompak** jika untuk setiap himpunan I dan setiap keluarga himpunan buka $\{O_\alpha\}$ dengan $\alpha \in I$ sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$, terdapat subkeluarga berhingga $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$.

Jika (X, τ) merupakan ruang topologi dan X merupakan subhimpunan kompak dari X , maka kita mengatakan bahwa X merupakan **ruang topologi kompak**. Ada beberapa istilah yang berkaitan dengan [Definisi 17.1](#).

Definisi 17.2 Suatu **selimut** bagi subhimpunan A dari ruang topologi X adalah koleksi $\{S_\alpha\}$ subhimpunan-subhimpunan X , dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I , sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$. Selain itu, jika setiap himpunan S_α merupakan himpunan buka, maka koleksi $\{S_\alpha\}$ merupakan **selimut buka** bagi A .

Definisi 17.3 Suatu **subselimut** dari selimut $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi subhimpunan A dari ruang topologi X adalah koleksi $\{S_\beta\}$ untuk $\beta \in J$, dengan J suatu subhimpunan dari I sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{\beta \in J} S_\beta$. Selain itu, jika J merupakan himpunan berhingga, subselimut $\{S_\beta\}_{\beta \in J}$ merupakan **subselimut berhingga** dari $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Jadi, himpunan-himpunan O_0 , O_1 , dan O_4 dalam contoh sebelumnya membentuk subselimut berhingga dari perluasan selimut buka $\{O_n\}_{n \geq 3}$ yang dibahas sebelumnya.

Dengan menggunakan istilah yang baru saja kita tetapkan, kita dapat menyatakan kembali definisi kekompakan sebagai berikut: subhimpunan A dari ruang topologi X bersifat kompak jika setiap selimut buka bagi A memiliki subselimut berhingga bagi A .

Aktivitas Persiapan 17.1 Tentukan apakah subhimpunan A dari ruang topologi X bersifat kompak. Buktikan bahwa A kompak dengan memulai dari selimut tak berhingga sebarang dan menunjukkan bahwa terdapat subselimut berhingga, atau temukan suatu selimut tak berhingga tertentu dan buktikan bahwa tidak ada subselimut berhingga.

- (a) $A = \{-2, 3, e, \pi, 456875\}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides. Generalisasikan contoh ini.
- (b) $A = (0, 1]$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides.
- (c) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides.

- (d) $A = \mathbb{Z}^+$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides.
- (e) $A = \mathbb{Z}^+$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga.
- (f) $A = \mathbb{R}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides.

Ada dua sudut pandang yang dapat kita gunakan untuk menelaah kekompakan. Jika (X, τ_X) merupakan ruang topologi dan A merupakan subhimpunan dari X , maka [Definisi 17.1](#) menjelaskan apa artinya A bersifat kompak sebagai subhimpunan dari X . Dari sudut pandang ini, kita menggunakan himpunan buka dalam X untuk membentuk selimut buka bagi A . Kita juga dapat memandang A sebagai subruang dari X dengan menggunakan topologi subruang τ_A . Dari sudut pandang ini, kita dapat menelaah kekompakan A menggunakan himpunan terbuka relatif untuk membentuk selimut buka. [Latihan 14](#) memberi tahu kita bahwa kedua sudut pandang ini ekuivalen, sehingga kita akan menggunakan sudut pandang yang sesuai dengan situasi yang sedang dihadapi.

Kekompakan dan Kekontinuan

Dalam kegiatan pratinjau, kita telah mempelajari kekompakan — padanan interval tertutup dalam $\mathbb{R}$ bagi ruang topologi. Ingat bahwa suatu subhimpunan A dari ruang topologi X bersifat kompak jika setiap selimut buka bagi A memiliki subselimut berhingga. Seperti yang akan kita lihat, definisi kekompakan tepat memenuhi apa yang kita perlukan untuk menjamin hasil sejenis berikut: fungsi kontinu bernilai real dengan domain berupa ruang topologi mencapai nilai maksimum dan minimum pada himpunan kompak.

Kita mungkin menduga bahwa himpunan kompak memiliki sifat-sifat tertentu, tetapi kita harus berhati-hati terhadap sifat yang kita andaikan.

Kegiatan 17.2 Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan lengkapi X dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

- (a) Jelaskan mengapa setiap subhimpunan berhingga dari suatu ruang topologi pasti kompak.
- (b) Jika mungkin, temukan suatu subhimpunan dari X yang kompak dan terbuka. Jika subhimpunan semacam itu tidak ada, jelaskan alasannya.
- (c) Jika A merupakan subhimpunan kompak dari X , haruskah A terbuka? Jelaskan.
- (d) Jika mungkin, temukan suatu subhimpunan dari X yang kompak dan tertutup. Jika subhimpunan semacam itu tidak ada, jelaskan alasannya.
- (e) Jika A merupakan subhimpunan kompak dari X , haruskah A tertutup? Jelaskan.

Pesan dari [Kegiatan 17.2](#) adalah bahwa kekompakan itu sendiri tidak berkaitan dengan himpunan tertutup ataupun terbuka. Namun, kita akan melihat nanti bahwa dalam beberapa keadaan yang wajar, himpunan kompak dan himpunan tertutup saling berkaitan. Untuk saat ini, kita mengambil jalan memutar sejenak dan menanyakan apakah kekompakan merupakan sifat topologi.

Kegiatan 17.3 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, serta misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Andaikan A merupakan subhimpunan kompak dari X . Dalam kegiatan ini, kita ingin menentukan apakah $f(A)$ harus merupakan subhimpunan kompak dari Y .

- (a) Apa yang perlu kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa $f(A)$ merupakan subhimpunan kompak dari Y ? Dari mana kita mulai?
- (b) Jika kita mempunyai selimut buka bagi $f(A)$ dalam Y , bagaimana kita dapat menemukan selimut buka $\{U_\alpha\}$ bagi A ? Pastikan untuk memverifikasi bahwa apa yang Anda nyatakan benar-benar merupakan selimut buka bagi A .

- (c) Apa yang kita ketahui tentang setiap selimut buka bagi A ?
- (d) Lengkapilah bukti teorema berikut.

Teorema 17.4 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, serta misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Jika A merupakan subhimpunan kompak dari X , maka $f(A)$ merupakan subhimpunan kompak dari Y .

Salah satu akibat dari [Kegiatan 17.3](#) adalah bahwa kekompakan merupakan sifat topologi.

Corollary 17.5 Misalkan f suatu homeomorfisme dari (X, τ_X) ke (Y, τ_Y) . Maka suatu subhimpunan A dari X kompak jika dan hanya jika $f(A)$ kompak dalam Y .

Subhimpunan Kompak dari $\mathbb{R}^n$

Ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d_E)$ tidak kompak karena selimut buka $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tidak memiliki subselimut berhingga. Karena sebelumnya kita telah menunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, d_E)$ homeomorfik dengan subruang topologi (a, b) , $(-\infty, b)$, dan (a, ∞) untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, kita menyimpulkan bahwa tidak ada interval terbuka yang kompak. Demikian pula, tidak ada interval setengah tertutup yang kompak. Bahkan, dalam bagian ini kita akan menunjukkan bahwa subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$ tepat merupakan subhimpunan yang tertutup dan terbatas. Langkah pertamanya terdapat dalam aktivitas berikut.

Kegiatan 17.4 Kita telah melihat bahwa himpunan kompak dapat berupa himpunan terbuka maupun tertutup. Namun, dalam keadaan tertentu himpunan kompak harus tertutup. Kita menyelidiki gagasan tersebut dalam aktivitas ini. Misalkan A subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi Hausdorff X . Kita akan menelaah mengapa A harus merupakan himpunan tertutup.

- Untuk membuktikan bahwa A merupakan himpunan tertutup, kita mempertimbangkan himpunan $X \setminus A$. Sifat apa yang harus dimiliki $X \setminus A$ agar A tertutup? Bagaimana kita membuktikan bahwa $X \setminus A$ memiliki sifat tersebut?
- Misalkan $x \in X \setminus A$. Andaikan bahwa A merupakan himpunan tak kosong (mengapa kita boleh membuat pengandaian ini)? Untuk setiap $a \in A$, mengapa harus terdapat himpunan-himpunan terbuka yang saling lepas O_{xa} dan O_a dengan $x \in O_{xa}$ dan $a \in O_a$?
- Mengapa harus terdapat bilangan bulat positif n dan unsur-unsur $a_1, a_2, \dots, a_n$ di A sedemikian sehingga himpunan-himpunan $O_{a_1}, O_{a_2}, \dots, O_{a_n}$ membentuk selimut buka bagi A ?
- Sekarang carilah subhimpunan terbuka dari $X \setminus A$ yang memuat x . Apa yang dapat kita simpulkan mengenai A ?

Hasil dari [Kegiatan 17.4](#) dirangkum dalam [Teorema 17.6](#).

Teorema 17.6 Jika A merupakan subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi Hausdorff, maka A tertutup.

[Teorema 17.6](#) memberi tahu kita sesuatu mengenai subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$. Karena setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff, kita dapat menyimpulkan korolari berikut.

Corollary 17.7 Jika A merupakan subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$, maka A tertutup.

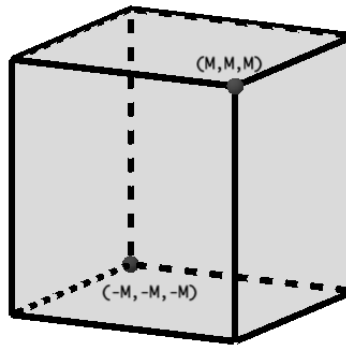
Untuk menggolongkan subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$ sebagai subhimpunan yang tertutup dan

terbatas, kita perlu membahas apa artinya suatu himpunan di $\mathbb{R}^n$ bersifat terbatas. Gagasan dasarnya sederhana — suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}^n$ terbatas jika tidak menjulur menuju tak hingga ke arah mana pun. Dengan kata lain, subhimpunan A dari $\mathbb{R}^n$ terbatas jika kita dapat membuat sebuah kotak di $\mathbb{R}^n$ yang cukup besar untuk memuatnya. Hal ini menghasilkan definisi berikut.

Definisi 17.8 Subhimpunan A dari $\mathbb{R}^n$ disebut **terbatas** jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $A \subseteq Q_M^n$, dengan

$$Q_M^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -M \leq x_i \leq M \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n\}.$$

Himpunan Q_M^n dalam [Definisi 17.8](#) disebut **kubus standar berdimensi n berukuran M** . Kubus standar berdimensi 3 berukuran M ditunjukkan dalam [Gambar 17.9](#).

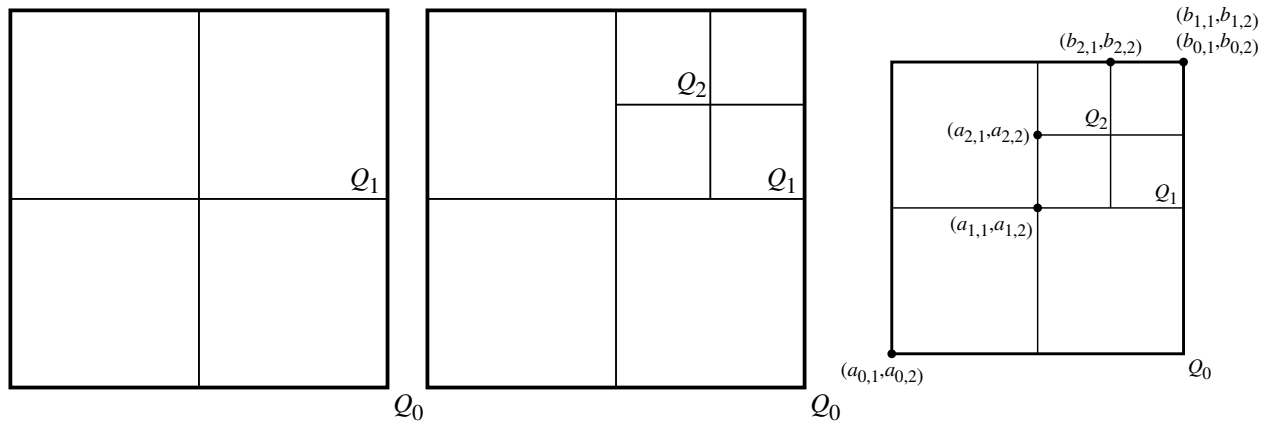


Gambar 17.9 Kubus standar berdimensi 3 Q_M^3 .

Fakta penting mengenai kubus standar berdimensi n adalah bahwa kubus-kubus tersebut merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$. Kekompakan merupakan sifat yang rumit — sulit untuk membuktikan suatu hasil yang berlaku bagi setiap selimut buka. Oleh karena itu, pembuktian [Teorema 17.10](#) cukup teknis, tetapi merupakan langkah penting dalam penggolongan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$.

Teorema 17.10 Misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$. Kubus standar berdimensi n berukuran M merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$ untuk setiap $M > 0$.

Bukti. Kita membuktikannya dengan kontradiksi dan mengandaikan bahwa terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ dan bilangan real positif M sedemikian sehingga Q_M^n tidak kompak. Jadi, terdapat selimut buka $\{O_\alpha\}$, dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I , bagi Q_M^n yang tidak memiliki subselimut berhingga. Ambil $Q_0 = Q_M^n$ sehingga Q_0 merupakan kubus berdimensi n dengan panjang sisi $2M$. Bagi Q_0 menjadi 2^n subkubus seragam dengan panjang sisi $M = \frac{2M}{2}$ (ilustrasi untuk $n = 2$ ditampilkan di sebelah kiri dalam [Gambar 17.11](#)).



Gambar 17.11 Kiri: Q_1 . Tengah: Q_2 . Kanan: Pelabelan titik-titik sudut.

Misalkan Q'_0 salah satu subkubus tersebut. Koleksi $\{O_\alpha \cap Q'_0\}_{\alpha \in I}$ merupakan selimut buka bagi Q'_0 dalam topologi subruang. Jika setiap selimut buka ini memiliki subselimut berhingga, maka kita dapat mengambil gabungan semua O_α yang muncul dalam seluruh subselimut berhingga tersebut untuk memperoleh subselimut berhingga dari $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi Q_0 . Karena selimut $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi Q_0 tidak memiliki subselimut berhingga, kita menyimpulkan bahwa terdapat satu subkubus, Q_1 , yang selimut bukannya $\{O_\alpha \cap Q_1\}_{\alpha \in I}$ tidak memiliki subselimut berhingga. Sekarang kita mengulangi proses tersebut dan membagi Q_1 menjadi 2^n subkubus seragam dengan panjang sisi $\frac{M}{2} = \frac{2M}{2^2}$. Argumen yang sama menunjukkan bahwa terdapat subkubus Q_2 dari Q_1 yang selimut bukannya $\{O_\alpha \cap Q_2\}_{\alpha \in I}$ tidak memiliki subselimut berhingga (ilustrasi untuk kasus $n = 2$ ditampilkan di tengah dalam Gambar 17.11). Dengan melanjutkan proses ini secara induktif, kita memperoleh barisan kubus bersarang tak berhingga

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots \supset Q_k \supset \cdots$$

sedemikian sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, panjang sisi kubus Q_k adalah $\frac{M}{2^{k+1}} = \frac{2M}{2^k}$ dan selimut buka $\{O_\alpha \cap Q_k\}_{\alpha \in I}$ bagi Q_k tidak memiliki subselimut berhingga. Sekarang kita tunjukkan bahwa $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \emptyset$.

Untuk $i \in \mathbb{Z}^+$, tuliskan $Q_i = [a_{i,1}, b_{i,1}] \times [a_{i,2}, b_{i,2}] \times \cdots \times [a_{i,n}, b_{i,n}]$. Artinya, pandang titik $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ sebagai salah satu titik sudut bawah kubus dan titik $(b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n})$ sebagai titik sudut atas kubus berdimensi n Q_i (pelabelan untuk $n = 2$ dan i dari 1 sampai 3 ditampilkan di sebelah kanan dalam Gambar 17.11). Ambil $q = (\sup\{a_{i,1}\}, \sup\{a_{i,2}\}, \dots, \sup\{a_{i,n}\})$. Kita akan menunjukkan bahwa $q \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. Tetapkan $r \in \mathbb{Z}^+$. Kita perlu membuktikan bahwa

$$q \in Q_r = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_{r,s} \leq x_s \leq b_{r,s} \text{ untuk setiap } 1 \leq s \leq n\}.$$

Untuk setiap s antara 1 dan n , berlaku

$$a_{r,s} \leq \sup\{a_{i,s}\} \tag{17.1}$$

karena $\sup\{a_{i,s}\}$ merupakan batas atas bagi semua $a_{i,s}$. Karena kubus-kubus kita bersarang, berlaku

$$\begin{aligned} a_{1,s} &\leq a_{2,s} \leq \cdots, \\ b_{1,s} &\geq b_{2,s} \geq \cdots, \\ a_{i,s} &\leq b_{i,s} \end{aligned} \tag{17.2}$$

untuk setiap i dan s . Karena $\sup\{a_{i,s}\}$ merupakan batas atas terkecil dari semua $a_{i,s}$, sifat (17.2) bersama kebersarangan kubus menunjukkan bahwa setiap ujung kanan kubus juga membatasi seluruh barisan ujung kiri; jadi $\sup\{a_{i,s}\} \leq b_{i,s}$ untuk setiap i . Dengan demikian, $\sup\{a_{i,s}\} \leq b_{r,s}$ dan $a_{r,s} \leq \sup\{a_{i,s}\} \leq b_{r,s}$. Ini menunjukkan bahwa $q \in Q_k$ untuk setiap k . Akibatnya, $q \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ dan $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ tidak kosong. (Fakta bahwa panjang sisi kubus-kubus kita konvergen ke 0 mengakibatkan $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{q\}$, tetapi untuk pembuktian ini kita hanya perlu mengetahui bahwa $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ tidak kosong.)

Karena $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ merupakan selimut bagi Q_0 , harus terdapat $\alpha_q \in I$ sedemikian sehingga $q \in O_{\alpha_q}$. Himpunan O_{α_q} terbuka, sehingga terdapat $\epsilon_q > 0$ sedemikian sehingga $B(q, \epsilon_q) \subseteq O_{\alpha_q}$. Jarak maksimum antara titik-titik di Q_k adalah jarak antara titik-titik sudut $(a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})$ dan $(b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,n})$, dengan setiap panjang $b_{k,s} - a_{k,s}$ bernilai $\frac{M}{2^{k-1}}$. Menurut rumus jarak, jarak maksimum antara titik-titik di Q_k ini adalah

$$D_k = \sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\frac{M}{2^{k-1}}\right)^2} = \sqrt{n \left(\frac{M}{2^{k-1}}\right)^2} = \frac{M}{2^{k-1}} \sqrt{n}.$$

Sekarang pilih $K \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $D_K < \epsilon_q$. Maka, jika $x \in Q_K$, berlaku $d_E(q, x) \leq D_K < \epsilon_q$, sehingga $x \in B(q, \epsilon_q)$. Jadi, $Q_K \subseteq B(q, \epsilon_q)$. Namun, $B(q, \epsilon_q) \subseteq O_{\alpha_q}$. Dengan demikian, koleksi $\{O_{\alpha_q} \cap Q_K\}$ merupakan subselimut dari $\{O_\alpha \cap Q_K\}_{\alpha \in I}$ bagi Q_K . Akan tetapi, hal ini bertentangan dengan fakta bahwa selimut buka tersebut tidak memiliki subselimut berhingga. Pengandaian yang membawa kita pada kontradiksi ini adalah bahwa Q_0 tidak kompak, sehingga kita menyimpulkan bahwa kubus standar berdimensi n berukuran M merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$ untuk setiap $M > 0$. ■

Salah satu konsekuensi [Teorema 17.10](#) adalah bahwa setiap interval tertutup $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ merupakan himpunan kompak. Namun, kita dapat mengatakan lebih banyak lagi — subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$ adalah subhimpunan yang tertutup dan terbatas. Untuk membuktikannya, kita memerlukan satu hasil perantara lagi mengenai subhimpunan tertutup dari ruang topologi kompak.

Kegiatan 17.5 Misalkan X ruang topologi kompak dan C subhimpunan tertutup dari X . Dalam aktivitas ini kita akan membuktikan bahwa C kompak.

- (a) Apa yang perlu dilakukan untuk membuktikan bahwa C kompak?
- (b) Gunakan selimut buka bagi C dan fakta bahwa C tertutup untuk membuat selimut buka bagi X .
- (c) Gunakan fakta bahwa X kompak untuk menyelesaikan pembuktian teorema berikut.

Teorema 17.12 Misalkan X ruang topologi kompak. Maka, setiap subhimpunan tertutup dari X kompak.

Sekarang kita dapat membuktikan suatu hasil utama, yaitu bahwa subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$ adalah subhimpunan yang tertutup dan terbatas. Hasil ini sedemikian penting sehingga diberi nama tersendiri.

Teorema 17.13 Teorema Heine-Borel. Subhimpunan A dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$ kompak jika dan hanya jika A tertutup dan terbatas.

Bukti. Misalkan A subhimpunan dari $(\mathbb{R}^n, d_E)$. Andaikan bahwa A tertutup dan terbatas. Karena A terbatas, terdapat bilangan positif M sedemikian sehingga $A \subseteq Q_M^n$. [Teorema 17.10](#) menunjukkan bahwa Q_M^n kompak, lalu [Teorema 17.12](#) menunjukkan bahwa A kompak.

Untuk arah sebaliknya, andaikan bahwa A merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$. Kita harus menunjukkan bahwa A tertutup dan terbatas. Ruang $(\mathbb{R}^n, d_E)$ merupakan ruang metrik sehingga merupakan ruang Hausdorff. [Teorema 17.6](#) kemudian menunjukkan bahwa A tertutup. Untuk menyelesaikan pembuktian, kita perlu menunjukkan bahwa A terbatas. Untuk setiap $k > 0$, ambil

$$O_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -k < x_i < k \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n\}.$$

Artinya, O_k merupakan kubus terbuka berukuran k di $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya, ambil

$$U_k = O_k \cap A$$

untuk setiap k . Karena $\bigcup_{k>0} O_k = \mathbb{R}^n$, maka $\{U_k\}_{k>0}$ merupakan selimut buka bagi A . Fakta bahwa A kompak berarti terdapat koleksi berhingga $U_{k_1}, U_{k_2}, \dots, U_{k_m}$ dari himpunan-himpunan dalam $\{U_k\}_{k>0}$ yang

menyelimuti A . Ambil $K = \max\{k_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Maka $U_{k_i} \subseteq U_K$ untuk setiap i , sehingga $A \subseteq U_K \subset Q_K^n$. Jadi, A terbatas. Ini menyelesaikan pembuktian bahwa jika A kompak di $\mathbb{R}^n$, maka A tertutup dan terbatas. ■

Anda mungkin bertanya-tanya apakah Teorema Heine-Borel berlaku di setiap ruang metrik.

Kegiatan 17.6 Subhimpunan A dari ruang metrik (X, d) disebut terbatas jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $d(a_1, a_2) \leq M$ untuk semua $a_1, a_2 \in A$. (Definisi ini ekuivalen dengan definisi subhimpunan terbatas dari $\mathbb{R}^n$ yang diberikan sebelumnya, tetapi berlaku di setiap ruang metrik.) Jelaskan mengapa $\mathbb{Z}$, sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d)$, dengan d metrik diskret, tertutup dan terbatas, tetapi tidak kompak.

Penerapan Kekompakan

Seperti disebutkan pada awal bagian ini, kekompakan adalah sifat yang kita perlukan untuk memastikan bahwa fungsi kontinu dari ruang topologi kompak tak kosong ke $\mathbb{R}$ mencapai nilai maksimum dan minimumnya.

Teorema 17.14 *Fungsi kontinu dari ruang topologi kompak tak kosong ke bilangan real mencapai nilai maksimum dan minimum.*

Kegiatan 17.7 Kegiatan berikut membuktikan teorema ini.

- Misalkan X merupakan ruang topologi kompak tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu. Apa yang dapat kita simpulkan dari kekontinuan f mengenai $f(X)$ dalam $\mathbb{R}$?
- Mengapa kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan $f(X)$ memiliki batas atas terkecil M ? Mengapa M harus merupakan unsur $f(X)$?
- Lengkapilah bukti [Teorema 17.14](#).

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Selimut bagi subhimpunan A dari ruang topologi X adalah sebarang koleksi subhimpunan dari X yang gabungannya memuat A . Selimut buka adalah selimut yang terdiri atas himpunan-himpunan buka.
- Subselimut dari suatu selimut bagi himpunan A adalah subkoleksi dari selimut tersebut sedemikian sehingga gabungan himpunan-himpunan dalam subselimut itu juga memuat A .
- Subhimpunan A dari ruang topologi bersifat kompak jika setiap selimut buka bagi A memiliki subselimut berhingga.
- Fungsi kontinu dari ruang topologi kompak tak kosong ke bilangan real harus mencapai nilai maksimum dan minimum.
- Teorema Heine-Borel menyatakan bahwa subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}^n$ tepat merupakan subhimpunan yang tertutup dan terbatas.

Penerapan Kekompakan: Fraktal

Diperkenalkan oleh Felix Hausdorff pada awal abad ke-20 sebagai cara untuk mengukur jarak antara himpunan, metrik Hausdorff (juga disebut metrik Pompeiu-Hausdorff) sejak saat itu telah dipelajari secara luas

dan memiliki banyak penerapan. Sebagai contoh, militer Amerika Serikat telah menggunakan jarak Hausdorff dalam prosedur pengenalan sasaran. Selain itu, metrik Hausdorff telah digunakan dalam pencocokan citra dan pengenalan visual oleh robot, kedokteran, analisis citra, dan astronomi.

Gagasan dasar dalam penerapan-penerapan ini adalah bahwa kita memerlukan suatu cara untuk membandingkan dua bentuk. Sebagai contoh, jika sebuah produsen perlu mengerjakan suatu produk tertentu dengan mesin berdasarkan sebuah templat, biasanya terdapat toleransi tertentu yang diperbolehkan. Jadi, produsen tersebut memerlukan suatu cara untuk membandingkan komponen-komponen hasil pengerjaan mesin dengan templat guna menentukan apakah toleransi tersebut telah dipenuhi atau dilampaui.

Metrik Hausdorff juga dikenal oleh para penggemar fraktal karena digunakan untuk mendeskripsikan kekonvergenan barisan himpunan kompak menuju atraktornya dalam sistem fungsi teriterasi. Beragamnya penerapan metrik ini menjadikannya layak untuk dipelajari.

Untuk mendefinisikan metrik Hausdorff, kita mulai dengan jarak dari sebuah titik x dalam ruang metrik X ke sebuah subhimpunan A dari X , yaitu

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Karena citra akan direpresentasikan sebagai himpunan kompak, kita membatasi pembahasan pada subhimpunan kompak dari suatu ruang metrik. Dalam kasus ini, infimum menjadi minimum dan kita memperoleh

$$d(x, A) = \min\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Sekarang kita memperluas gagasan tersebut untuk mendefinisikan jarak dari satu subhimpunan X ke subhimpunan lainnya. Misalkan A dan B adalah subhimpunan kompak tak kosong dari X . Untuk mencari jarak dari himpunan A ke himpunan B , tampaknya masuk akal untuk mempertimbangkan seberapa jauh setiap titik di A dari himpunan B . Dengan demikian, jarak dari A ke B seharusnya mengukur seberapa jauh kita harus bergerak dari **sebarang** titik di A untuk mencapai B .

Definisi 17.15 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan misalkan A dan B adalah subhimpunan kompak tak kosong dari X . Maka **jarak** $d(A, B)$ **dari** A **ke** B adalah

$$d(A, B) = \max_{a \in A} \left\{ \min_{b \in B} \{d(a, b)\} \right\}.$$

Catatan: karena A dan B kompak, $d(A, B)$ dijamin ada.

Kegiatan 17.8

- (a) Salah satu masalah pada d sebagaimana dalam [Definisi 17.15](#) adalah bahwa d tidak simetris. Carilah contoh subhimpunan kompak A dan B dari $\mathbb{R}^n$ dengan metrik Euklides sedemikian sehingga $d(A, B) \neq d(B, A)$.

Meskipun fungsi d dalam [Definisi 17.15](#) bukan suatu metrik, kita dapat mendefinisikan jarak Hausdorff dalam kaitannya dengan d sebagai berikut.

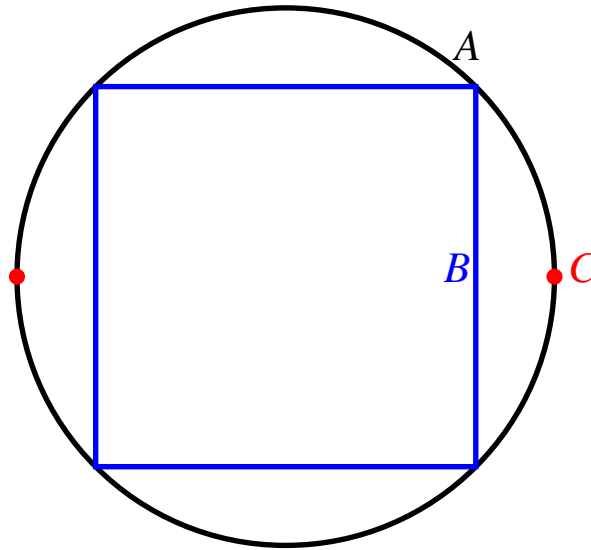
Definisi 17.16 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan A serta B adalah subhimpunan kompak tak kosong dari X . Maka **jarak Hausdorff antara** A **dan** B adalah

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Kegiatan 17.9

- (a) Misalkan A adalah lingkaran di $\mathbb{R}^2$ yang berpusat di titik asal dan berjari-jari 1, misalkan B adalah persegi yang tersisip di dalamnya, dan misalkan $C = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ sebagaimana ditunjukkan dalam

Gambar 17.17.

**Gambar 17.17** Himpunan A , B , dan C .

Tentukan $h(A, B)$, $h(A, C)$, dan $h(B, C)$, serta verifikasi bahwa $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

Mungkin mengejutkan bahwa h sebagaimana dalam Definisi 17.16 ternyata benar-benar merupakan suatu metrik, tetapi memang demikian. Ruang yang mendasarinya adalah koleksi subhimpunan kompak tak kosong dari X yang kita nyatakan dengan $\mathcal{H}(X)$. Teorema berikut merangkum fakta tersebut.

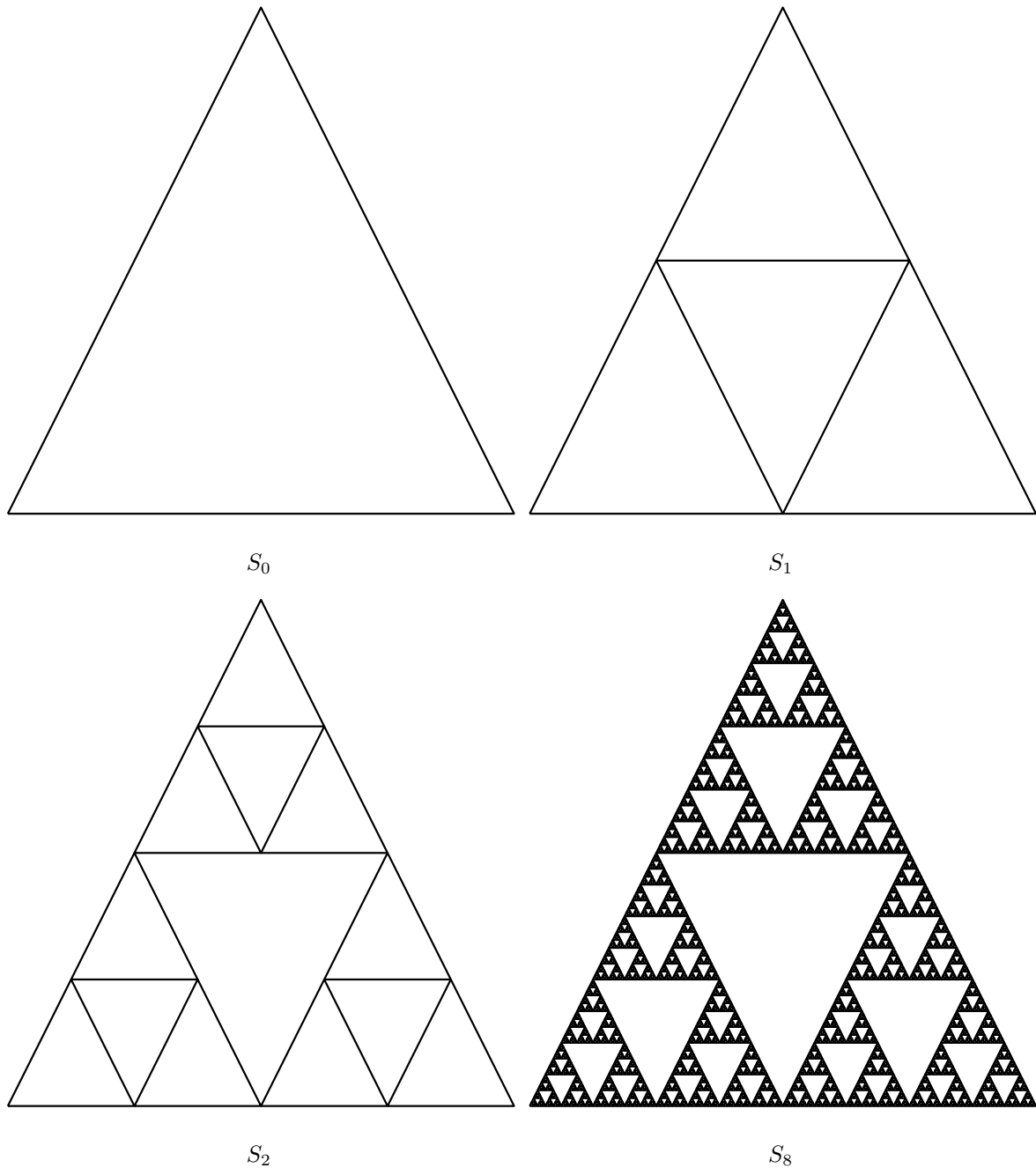
Teorema 17.18 Misalkan X adalah ruang metrik. Fungsi jarak Hausdorff adalah suatu metrik pada $\mathcal{H}(X)$.

Kegiatan 17.10

- (a) Buktikan teorema di atas.
- (b) Salah satu penerapan menarik dari metrik Hausdorff terdapat dalam geometri fraktal. Anda mungkin mengenal objek seperti segitiga Sierpinski atau kurva Koch. Objek-objek ini merupakan limit dari barisan himpunan dalam $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Kita mengilustrasikannya dengan segitiga Sierpinski. Mulailah dengan tiga titik v_1 , v_2 , dan v_3 yang membentuk simpul-simpul sebuah segitiga sama sisi S_0 . Untuk $i=1, 2$, atau 3, misalkan $v_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$. Untuk $i=1, 2$, atau 3, kita mendefinisikan $\omega_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan

$$\omega_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}.$$

Maka ω_i , ketika diterapkan pada S_0 , memperkecil S_0 dengan faktor $1/2$ dan kemudian mentranslasikan citra S_0 sehingga simpul $i^{\text{ke-}}$ dari S_0 berimpit dengan simpul ke- i dari citra S_0 . Pemetaan semacam itu disebut **pemetaan kontraksi** dengan **faktor kontraksi** sebesar $\frac{1}{2}$. Definisikan $S_{1,i}$ sebagai $\omega_i(S_0)$. Maka $S_{1,i}$ adalah himpunan semua titik yang berada di pertengahan antara sebarang titik dalam S_0 dan v_i , atau $S_{1,i}$ adalah sebuah segitiga yang berukuran setengah dari segitiga semula dan ditranslasikan ke simpul $i^{\text{ke-}}$ dari segitiga semula. Misalkan $S_1 = \bigcup_{i=1}^3 S_{1,i}$. Baik S_0 maupun S_1 ditunjukkan dalam Gambar 17.19. Kita dapat melanjutkan prosedur ini dengan mengganti S_0 dengan S_1 . Dengan kata lain, untuk $i = 1, 2$, dan 3, misalkan $S_{2,i} = \omega_i(S_1)$. Kemudian misalkan $S_2 = \bigcup_{i=1}^3 S_{2,i}$. Gambar S_2 ditunjukkan dalam Gambar 17.19. Kita dapat melanjutkan prosedur ini, dengan mengganti S_{j-1} dengan S_j setiap kalinya. Gambar S_8 ditunjukkan dalam Gambar 17.19.



Gambar 17.19 S_i untuk i sama dengan 0, 1, 2, dan 8.

Untuk melanjutkan proses ini, kita perlu mengambil suatu limit. Namun, S_i adalah himpunan dalam $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, sehingga limit tersebut diambil terhadap metrik Hausdorff.

- (i) Asumsikan panjang sisi S_0 adalah 1. Tentukan $h(S_0, S_1)$. Kemudian carilah $h(S_k, S_{k+1})$ untuk sebarang bilangan bulat positif k .
- (ii) Segitiga Sierpinski akan ada jika barisan (S_n) konvergen ke suatu himpunan S (yang akan menjadi segitiga Sierpinski). Pertanyaan mengenai kekonvergenan ini bukanlah pertanyaan yang sederhana.
 - (A) Perhatikan barisan (a_n) , dengan $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Perhatikan bahwa setiap a_n adalah bilangan rasional. Jelaskan mengapa suku-suku dalam barisan ini menjadi sedekat

yang diinginkan satu sama lain, tetapi barisan tersebut tidak konvergen dalam $\mathbb{Q}$. Jelaskan mengapa barisan (a_n) konvergen dalam $\mathbb{R}$.

- (B) Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_m) < \epsilon$ setiap kali $n, m \geq N$. Setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Ruang metrik X dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy dalam X konvergen ke suatu elemen dalam X . Sebagai contoh, $(\mathbb{R}, d_E)$ lengkap, sedangkan $(\mathbb{Q}, d_E)$ tidak lengkap. Meskipun kita tidak akan membuktikannya, ruang metrik $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), h)$ lengkap. Tunjukkan bahwa barisan (S_n) merupakan barisan Cauchy dalam $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Limit barisan ini adalah segitiga Sierpinski yang terkenal. Gambar S_8 dalam [Gambar 17.19](#) merupakan pendekatan yang dekat terhadap segitiga Sierpinski.

Latihan

1.
 - (a) Tentukan semua subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi X dengan topologi indiskret.
 - (b) Tentukan semua subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi X dengan topologi indiskret.
2. Ingat kembali dari [Definisi 12.13](#) bahwa jika τ_1 dan τ_2 adalah dua topologi pada suatu himpunan X sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka τ_1 disebut topologi yang **lebih kasar** (atau **lebih lemah**) daripada τ_2 , atau τ_2 disebut topologi yang **lebih halus** (atau **lebih kuat**) daripada τ_1 . Dalam latihan ini, kita menyelidiki apakah kekompakan merupakan sifat yang diwariskan dari topologi yang lebih lemah ke topologi yang lebih kuat atau dari topologi yang lebih kuat ke topologi yang lebih lemah. Misalkan τ_1 dan τ_2 adalah dua topologi pada suatu himpunan X . Jika $\tau_1 \subseteq \tau_2$, apakah kekompakan terhadap τ_1 atau τ_2 menyiratkan sesuatu, jika memang ada, mengenai kekompakan terhadap topologi yang lain? Berikan alasan untuk jawaban Anda.
3. Misalkan $\mathbb{E}$ adalah himpunan bilangan bulat genap, dan misalkan $\tau = \{\mathbb{Z}\} \cup \{O \subseteq \mathbb{E}\}$. Artinya, τ adalah koleksi semua subhimpunan $\mathbb{E}$ beserta $\mathbb{Z}$.
 - (a) Buktikan bahwa τ adalah suatu topologi pada $\mathbb{Z}$.
 - (b) Tentukan semua subhimpunan kompak dari $(\mathbb{Z}, \tau)$. Verifikasikan jawaban Anda.
 - (c) Buktikan atau sangkal: Jika A dan B adalah subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi X , maka $A \cap B$ juga merupakan subhimpunan kompak dari X .
4. Misalkan (X, τ) adalah suatu ruang topologi
 - (a) Buktikan bahwa gabungan dari sejumlah berhingga subhimpunan kompak dari X merupakan subhimpunan kompak dari X .
 - (b) Dalam [Latihan 3](#) kita semestinya telah melihat bahwa irisan himpunan-himpunan kompak belum tentu kompak. Jika X adalah Hausdorff, buktikan bahwa irisan dari sejumlah berhingga subhimpunan kompak dari X merupakan subhimpunan kompak dari X .
5. Tinjau $\mathbb{Z}$ dengan topologi garis digital (lihat [Latihan 11](#)). Tentukan semua subhimpunan kompak dari $\mathbb{Z}$.
6. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, misalkan $(-n, n)$ adalah himpunan bilangan bulat dalam interval $(-n, n)$ (lihat [Latihan 4](#)).
 - (a) Tunjukkan bahwa $\mathcal{B} = \{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ adalah suatu basis bagi sebuah topologi τ pada $\mathbb{Z}$

- (b) Apakah subhimpunan $(-2, 2)$ kompak dalam topologi ini?
- (c) Tentukan semua subhimpunan kompak dari $\mathbb{Z}$.
7. Misalkan X dan Y adalah ruang-ruang topologi, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ adalah suatu fungsi.
- (a) Andaikan f adalah fungsi kontinu, serta X kompak dan Y Hausdorff. Buktikan bahwa jika C adalah subhimpunan tertutup dari X , maka $f(C)$ adalah subhimpunan tertutup dari Y . (Dengan demikian, f adalah fungsi **tertutup**.)
- Petunjuk.** Gunakan Aktivitas 17.3, Aktivitas 17.4, dan Teorema 17.6.
- (b) Andaikan f adalah bijeksi kontinu. Buktikan bahwa jika X kompak dan Y Hausdorff, maka f adalah suatu homeomorfisme.
- (c) Berikan suatu contoh ketika f adalah bijeksi kontinu dan X kompak, tetapi f bukan suatu homeomorfisme.
- (d) Berikan suatu contoh ketika f adalah bijeksi kontinu dan Y Hausdorff, tetapi f bukan suatu homeomorfisme.
8. Topologi Entah-Atau pada interval $X = [-1, 1]$ memiliki sebagai himpunan-himpunan bukanya semua subhimpunan X yang memuat $(-1, 1)$ dan setiap subhimpunan X yang tidak memuat 0.
- (a) Deskripsikan subhimpunan-subhimpunan tertutup nontrivial dari X .
- (b) Apakah X merupakan ruang topologi Hausdorff? Jelaskan.
- (c) Apakah X kompak? Buktikan jawaban Anda.
- (d) Adakah subhimpunan X yang tidak kompak? Berikan alasan untuk jawaban Anda.
9. Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$. Misalkan $\mathcal{B}$ adalah koleksi semua interval buka berbentuk (a, b) dan semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$ bilangan-bilangan real sebagaimana dalam [Contoh 13.13](#). Misalkan τ_K adalah topologi yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$.
- (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak kompak.
- Petunjuk.** Bagaimana hubungan topologi- K dengan topologi Euklides?
- (b) Tunjukkan bahwa setiap subhimpunan $\mathbb{R}$ yang memuat K bukan merupakan subhimpunan kompak dari $(\mathbb{R}, \tau_K)$. Secara khusus, meskipun $[0, 1]$ merupakan subhimpunan tertutup dan terbatas dari $\mathbb{R}$ dalam $(\mathbb{R}, \tau_K)$, kita mencatat bahwa $[0, 1]$ tidak kompak.
- Petunjuk.** Tinjau himpunan-himpunan $O_k = (\frac{1}{k}, 2) \cup (-1, 1) \setminus K$ untuk $k \in \mathbb{Z}^+$.
10. Misalkan X adalah suatu ruang topologi.
- (a) Buktikan bahwa jika X Hausdorff dan C adalah subhimpunan kompak dari X , maka untuk setiap $x \in X \setminus C$ terdapat himpunan-himpunan buka saling lepas U dan V sedemikian sehingga $x \in U$ dan $C \subseteq V$.
- (b) Buktikan bahwa jika X adalah ruang Hausdorff kompak, maka X normal.
11. Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan misalkan p adalah suatu elemen tetap dalam X . Misalkan τ_p adalah topologi titik tertentu dan $\tau_{\overline{p}}$ adalah topologi titik dikecualikan pada X . Artinya,
- τ_p adalah koleksi subhimpunan X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang memuat p .

- $\tau_{\overline{p}}$ adalah koleksi subhimpunan X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik dikecualikan merupakan topologi dibahas dalam [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Tentukan, disertai bukti, subhimpunan-subhimpunan kompak dari X ketika

- X memiliki topologi titik tertentu τ_p
 - X memiliki topologi titik dikecualikan $\tau_{\overline{p}}$.
- Dalam latihan ini, kita menjumpai suatu ruang topologi non-Hausdorff yang setiap himpunan satu titiknya tertutup, dan yang subhimpunan kompaknya tidak harus tertutup. Tinjau himpunan $\mathbb{Z}$ dengan topologi komplement berhingga τ_{FC} .
 - Tunjukkan bahwa setiap himpunan satu titik tertutup.
 - Jelaskan mengapa $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ bukan ruang Hausdorff.
 - Misalkan U adalah suatu himpunan buka dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ yang memuat 0 dan V suatu himpunan buka dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ yang memuat 1. Jelaskan mengapa U dan V tidak mungkin saling lepas — yaitu, $U \cap V$ harus tak kosong.
 - Tunjukkan bahwa subhimpunan $\mathbb{E}$ yang terdiri atas bilangan-bilangan bulat genap adalah subhimpunan kompak dari $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ yang tidak tertutup. Verifikasikan hasil Anda.
 - Misalkan (X, τ) adalah suatu ruang topologi Hausdorff.
 - Misalkan $x \in X \setminus A$ dan misalkan A adalah subhimpunan kompak dari X . Buktikan bahwa terdapat subhimpunan-subhimpunan buka saling lepas U dan V dari X sedemikian sehingga $x \in U$ dan $A \subseteq V$.
 - Misalkan A dan B adalah subhimpunan-subhimpunan kompak saling lepas dari X . Buktikan bahwa terdapat himpunan-himpunan buka saling lepas U dan V sedemikian sehingga $A \subseteq U$ dan $B \subseteq V$.
 - Misalkan (X, τ_X) adalah suatu ruang topologi dan misalkan A adalah subhimpunan dari X . Misalkan τ_A adalah topologi subruang pada A . Buktikan bahwa A merupakan subhimpunan kompak dari X jika dan hanya jika (A, τ_A) adalah ruang topologi kompak.
 - Misalkan X adalah suatu ruang topologi. Suatu keluarga $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dari subhimpunan-subhimpunan X dikatakan memiliki **sifat irisan berhingga** jika untuk setiap subhimpunan berhingga J dari I , $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset$. Buktikan bahwa X kompak jika dan hanya jika untuk setiap keluarga $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dari subhimpunan-subhimpunan tertutup dari X yang memiliki sifat irisan berhingga, berlaku $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$.
 - Meskipun $\mathbb{R}$ bukan ruang kompak, jika $x \in \mathbb{R}$, maka $x \in [x - 1, x + 1]$ sehingga setiap titik dalam $\mathbb{R}$ termuat dalam suatu subhimpunan kompak dari $\mathbb{R}$. Jadi, jika kita memandang $\mathbb{R}$ dari sudut pandang suatu titik dalam $\mathbb{R}$, ruang $\mathbb{R}$ tampak kompak di sekitar titik tersebut. Inilah gagasan kekompakan lokal. Ruang kompak lokal penting dalam topologi umum ruang fungsi.

Definisi. Suatu ruang topologi X bersifat **kompak lokal** jika untuk setiap $x \in X$ terdapat suatu himpunan buka O sedemikian sehingga $x \in O$ dan $\overline{O}$ kompak.

 - Jelaskan mengapa $\mathbb{R}^n$ kompak lokal untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.
 - Tunjukkan bahwa setiap ruang kompak bersifat kompak lokal.
 - Tinjau garis Sorgenfrey dari [Latihan 5](#). Ingat bahwa garis Sorgenfrey adalah ruang $\mathbb{R}$ dengan basis

$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b \text{ di } \mathbb{R}\}$ bagi topologinya. Tunjukkan bahwa garis Sorgenfrey adalah Hausdorff tetapi tidak kompak lokal.

17. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan tersebut hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan suatu contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika X dan Y adalah ruang-ruang topologi kompak dan $f : X \rightarrow Y$ adalah bijeksi kontinu, maka f adalah suatu homeomorfisme.
 - (b) Jika X adalah suatu ruang topologi kompak, maka setiap subruang tertutup dari X bersifat kompak.
 - (c) Jika X adalah suatu ruang Hausdorff, Y adalah suatu ruang kompak, dan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinu dan bijektif, maka f adalah suatu homeomorfisme.
 - (d) Jika X adalah suatu ruang kompak, Y adalah suatu ruang Hausdorff, dan $f : X \rightarrow Y$ adalah bijeksi kontinu, maka f adalah suatu homeomorfisme.
 - (e) Misalkan C adalah subhimpunan tertutup dari suatu ruang metrik (X, d) dengan topologi metrik. Maka C kompak.
 - (f) Jika A adalah subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi X , maka A adalah subhimpunan tertutup dari X .
 - (g) Misalkan (X, τ) adalah suatu ruang topologi dengan τ topologi diskret. Maka X kompak jika dan hanya jika X berhingga.

Bab 18

Ruang Terhubung

Pertanyaan Pemandu

- Apakah yang dimaksud dengan subhimpunan terhubung dari suatu ruang topologi?
- Apakah yang dimaksud dengan pemisahan suatu subhimpunan dari ruang topologi? Mengapa pemisahan berguna?
- Apa saja subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$?
- Apakah yang dimaksud dengan komponen terhubung dari suatu ruang topologi?
- Apakah salah satu contoh penerapan keterhubungan?
- Apakah yang dimaksud dengan himpunan pemutus dari suatu ruang topologi? Mengapa himpunan pemutus berguna?

Pendahuluan

Istilah “terhubung” semestinya membangkitkan gambaran tentang sesuatu yang terdiri atas satu bagian, bukan sesuatu yang terpisah. Ada lebih dari satu cara untuk menafsirkan gagasan keterhubungan dalam ruang topologi. Sebagai contoh, kita dapat menganggap suatu ruang topologi terhubung jika ruang tersebut tidak dapat dipisahkan menjadi bagian-bagian saling lepas dengan cara taktrivial apa pun. Kemungkinan lainnya, kita dapat menganggap suatu ruang topologi terhubung jika selalu ada lintasan dari satu titik di ruang tersebut ke titik lainnya, asalkan kita mendefinisikan apa yang dimaksud dengan “lintasan”. Keduanya merupakan gagasan keterhubungan yang berbeda, dan dalam bagian ini kita berfokus pada gagasan pertama.

Keterhubungan merupakan sifat yang penting, dan merupakan salah satu sifat yang kita jumpai dalam kalkulus. Sebagai contoh, dalam bagian ini kita akan melihat bahwa Teorema Nilai Antara bergantung pada subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$. Untuk mendefinisikan himpunan terhubung, kita memerlukan cara untuk memahami kapan dan bagaimana suatu himpunan dapat dipisahkan menjadi bagian-bagian yang berbeda. Karena suatu topologi didefinisikan oleh himpunan-himpunan buka, ketika hendak memisahkan objek, kita akan melakukannya dengan himpunan buka. Gagasan ini serupa dengan gagasan yang mendasari ruang Hausdorff, hanya saja sekarang kita ingin mengetahui apakah suatu himpunan dapat dipisahkan dengan suatu cara, bukan memisahkan titik-titik.

Sebagai contoh yang memotivasi definisi, perhatikan himpunan $X = (0, 1) \cup (1, 2)$ dan $Y = [1, 2]$ di $\mathbb{R}$ dengan topologi Euklides. Perhatikan bahwa kita dapat menuliskan X sebagai gabungan dua himpunan buka yang saling lepas, yakni $X_1 = (0, 1)$ dan $X_2 = (1, 2)$. Jadi, kita tidak seharusnya menganggap X terhubung. Akan tetapi, jika kita mencoba menuliskan Y sebagai gabungan dua subhimpunan, misalnya

$Y_1 = [1, 1.5)$ dan $Y_2 = [1.5, 2]$, kedua subhimpunan tersebut tidak mungkin sekaligus buka dan saling lepas. Jadi, Y adalah himpunan yang seharusnya kita anggap terhubung. Inilah gagasan keterhubungan yang ingin kita selidiki.

Definisi 18.1 Suatu ruang topologi (X, τ) disebut **terhubung** jika X tidak dapat dituliskan sebagai gabungan dua subhimpunan buka yang saling lepas dan takkosong. Suatu subhimpunan A dari ruang topologi (X, τ) disebut terhubung jika A terhubung dalam topologi subruang.

Jika suatu himpunan X tidak terhubung, kita mengatakan bahwa X terputus. Jika X merupakan ruang topologi yang terputus, maka terdapat himpunan buka takkosong U dan V yang saling lepas sedemikian sehingga $X = U \cup V$.

Aktivitas Persiapan 18.1 Dapatkan subhimpunan A dari ruang topologi X dituliskan sebagai gabungan dua himpunan buka relatif takkosong yang saling lepas?

(a) Himpunan $A = \{a, b\}$ dalam (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

(b) Himpunan $A = \{a, b, c\}$ dalam (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}.$$

(c) Himpunan $A = X$ dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

(d) Himpunan $A = \{d, f\}$ dalam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan topologi diskret. Generalisasikan temuan Anda.

(e) Himpunan $A = \{a, c, d\}$ dalam $X = \{a, b, c, d, e\}$ dengan topologi indiskret. Generalisasikan temuan Anda.

(f) Himpunan $A = \mathbb{Z}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga. Generalisasikan temuan Anda.

(g) Himpunan $A = X$ dalam $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ atau } 3 < x < 4\}$ dengan topologi metrik subruang dari $(\mathbb{R}, d_E)$.

(h) Himpunan $A = X$ dalam $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x} \text{ atau } y = 0\}$ dengan himpunan-himpunan buka

$$\tau = \{U \cap X \mid U \text{ buka dalam topologi Euklides pada } \mathbb{R}^2\}.$$

Himpunan Terhubung

Seperti yang telah kita pelajari dalam kegiatan pratinjau, himpunan terhubung adalah himpunan yang tidak dapat dipisahkan menjadi gabungan himpunan-himpunan buka yang saling lepas. Karakterisasi lain dari keterhubungan akan ditetapkan dalam kegiatan berikut.

Kegiatan 18.2 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi.

(a) Asumsikan bahwa X merupakan ruang terhubung, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X yang sekaligus buka dan tertutup. Apa yang terjadi jika kita menggabungkan A dan $X \setminus A$? Apa yang dapat kita simpulkan dari fakta bahwa X terhubung mengenai A ?

(b) Sekarang asumsikan bahwa satu-satunya subhimpunan dari X yang sekaligus buka dan tertutup adalah $\emptyset$ dan X . Apakah harus berlaku bahwa X terhubung? Buktikan pernyataan Anda.

- (c) Rangkum hasil kegiatan ini menjadi suatu teorema berbentuk “Suatu ruang topologi (X, τ) terhubung jika dan hanya jika ...”.

Contoh baku ruang topologi terhubung adalah ruang metrik $(\mathbb{R}, d_E)$.

Teorema 18.2 Ruang metrik $(\mathbb{R}, d_E)$ merupakan ruang topologi terhubung.

Bukti. Kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan mengasumsikan bahwa terdapat himpunan buka takkosong U dan V sedemikian sehingga $\mathbb{R} = U \cup V$ dan $U \cap V = \emptyset$. Misalkan $a \in U$ dan $b \in V$. Karena $U \cap V = \emptyset$, kita mengetahui bahwa $a \neq b$. Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat mengasumsikan $a < b$. Misalkan $U' = U \cap [a, b]$ dan $V' = V \cap [a, b]$. Himpunan V' dibatasi dari bawah oleh a , sehingga $x = \inf\{v \mid v \in V'\}$ ada. Karena $\mathbb{R} = U \cup V$, harus berlaku bahwa $x \in U$ atau $x \in V$.

Misalkan $x \in U$. Fakta bahwa U merupakan himpunan buka menyiratkan bahwa terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Namun, dengan demikian $B(x, \epsilon) \cap V = \emptyset$, sehingga $d(x, v) \geq \epsilon$ untuk setiap $v \in V$. Ini berarti bahwa $x + \epsilon < v$ untuk setiap $v \in V'$, bertentangan dengan fakta bahwa x merupakan batas bawah terbesar. Kita menyimpulkan bahwa $x \notin U$.

Dengan demikian, $x \in V$. Karena $a \in U$, kita mengetahui bahwa $x \neq a$. Fakta bahwa V merupakan himpunan buka memberi tahu kita bahwa terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \delta) \subseteq V$. Kita dapat memilih δ agar $\delta < x - a$. Karena $x > a$, interval $(x - \delta, x)$ merupakan subhimpunan dari V' , sehingga x bukan batas bawah untuk V .

Setiap kemungkinan menghasilkan kontradiksi, sehingga kita menyimpulkan bahwa himpunan U dan V tersebut tidak mungkin ada. Oleh karena itu, $(\mathbb{R}, d_E)$ merupakan ruang topologi terhubung. ■

Seperti yang mungkin Anda duga, keterhubungan merupakan sifat topologis.

Kegiatan 18.3 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang-ruang topologi, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu. Asumsikan bahwa X merupakan subhimpunan terhubung dari X . Tujuan kita adalah membuktikan bahwa $f(X)$ merupakan subruang terhubung dari Y .

Misalkan $Z = f(X)$ dan definisikan $g : X \rightarrow Z$ dengan $g(x) = f(x)$. Maka g merupakan fungsi kontinu yang memetakan X pada Z . Jadi, kita meninjau g sebagai pengganti f .

- (a) Untuk memperoleh kontradiksi, asumsikan bahwa Z tidak terhubung. Apa yang kemudian kita asumsikan mengenai Z ?
- (b) Misalkan U dan V himpunan buka takkosong yang saling lepas dalam Z sedemikian sehingga $U \cup V = Z$. Misalkan $R = g^{-1}(U)$ dan $S = g^{-1}(V)$.
 - (i) Jelaskan mengapa R dan S merupakan himpunan buka dalam X .
 - (ii) Tunjukkan bahwa $R \cup S = X$. (Petunjuk: $X = g^{-1}(Z)$.)
 - (iii) Tunjukkan bahwa R dan S merupakan himpunan takkosong.

Petunjuk. Gunakan fakta bahwa g merupakan suatu surjeksi.

- (iv) Sekarang tunjukkan bahwa $R \cap S = \emptyset$. (Petunjuk: $R \cap S = g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$.)
- (c) Jelaskan bagaimana kita telah membuktikan pernyataan berikut.

Teorema 18.3 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang-ruang topologi, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu. Jika X terhubung, maka $f(X)$ terhubung.

Fakta bahwa keterhubungan dipertahankan oleh fungsi kontinu berarti bahwa keterhubungan merupakan sifat yang dimiliki bersama oleh setiap ruang topologi yang homeomorfik, sebagaimana ditunjukkan oleh akibat berikut.

Corollary 18.4 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang topologi yang homeomorfik. Maka X terhubung jika dan hanya jika Y terhubung.

Bukti. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang topologi, serta misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme. Asumsikan bahwa X terhubung. Karena f kontinu, [Teorema 18.3](#) menunjukkan bahwa $f(X) = Y$ terhubung. Implikasi sebaliknya mengikuti dari fakta bahwa f^{-1} merupakan homeomorfisme. ■

Ingatlah bahwa $(\mathbb{R}, d_E)$ homeomorfik dengan subruang topologi (a, b) , $(-\infty, b)$, dan (a, ∞) untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$. Fakta bahwa $(\mathbb{R}, d_E)$ terhubung ([Teorema 18.2](#)) memungkinkan kita menyimpulkan bahwa semua interval buka terhubung. Tampaknya wajar jika semua interval tertutup (atau setengah tertutup) juga terhubung. Selanjutnya kita akan membahas pertanyaan ini. Sebelum sampai pada hasil tersebut, kita meninjau perumusan alternatif untuk subhimpunan terhubung.

Perhatikan himpunan $A = (-1, 0) \cup (4, 5)$ dalam $\mathbb{R}$. Misalkan $U = (-2, 3)$ dan $V = (2, 6)$ dalam $\mathbb{R}$. Perhatikan bahwa $U' = U \cap A = (-1, 0)$ dan $V' = V \cap A = (4, 5)$, sehingga U dan V merupakan himpunan buka dalam $\mathbb{R}$ yang memisahkan himpunan A menjadi dua bagian yang saling lepas. Kita mengetahui bahwa U' dan V' buka dalam A dan $A = U' \cup V'$ dengan $U' \cap V' = \emptyset$. Jadi, untuk menunjukkan bahwa suatu subhimpunan dari ruang topologi X tidak terhubung, contoh ini mengisyaratkan bahwa cukup untuk menemukan himpunan buka takkosong U dan V dalam X dengan $U \cap V \cap A = \emptyset$ dan $A \subseteq (U \cup V)$. Perhatikan bahwa $U \cap V = \emptyset$ tidak perlu berlaku. Fakta bahwa cara ini berlaku secara umum merupakan hasil teorema berikut.

Teorema 18.5 Misalkan X suatu ruang topologi. Suatu subhimpunan A dari X terputus jika dan hanya jika terdapat himpunan buka U dan V dalam X dengan

- $A \subseteq (U \cup V)$,
- $U \cap A \neq \emptyset$,
- $V \cap A \neq \emptyset$, dan
- $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Pertama-tama kita mengasumsikan bahwa A terputus dan menunjukkan bahwa terdapat himpunan buka U dan V dalam X yang memenuhi syarat-syarat yang diberikan. Karena A terputus, terdapat himpunan buka takkosong U' dan V' dalam A sedemikian sehingga $U' \cup V' = A$ dan $U' \cap V' = \emptyset$. Karena U' dan V' buka dalam A , terdapat himpunan buka U dan V dalam X sedemikian sehingga $U' = U \cap A$ dan $V' = V \cap A$. Sekarang

$$A = U' \cup V' = (U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A,$$

sehingga $A \subseteq U \cup V$. Berdasarkan konstruksi, $U \cap A = U'$ dan $V \cap A = V'$ tidak kosong. Terakhir,

$$U \cap V \cap A = (U \cap A) \cap (V \cap A) = U' \cap V' = \emptyset.$$

Jadi, kita telah menemukan himpunan U dan V yang memenuhi syarat-syarat teorema kita.

Pembuktian implikasi sebaliknya diserahkan kepada kegiatan berikut. ■

Kegiatan 18.4 Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Asumsikan bahwa terdapat himpunan buka U dan V dalam X dengan $A \subseteq U \cup V$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, dan $U \cap V \cap A = \emptyset$. Buktikan bahwa A terputus.

Syarat-syarat dalam [Teorema 18.5](#) menyediakan cara yang mudah untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan terputus, sehingga setiap pasangan himpunan U dan V yang memenuhi syarat-syarat [Teorema 18.5](#) diberi nama khusus.

Definisi 18.6 Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Suatu **pemisahan** dari A adalah pasangan subhimpunan buka takkosong U dan V dari X sedemikian sehingga

- $A \subseteq (U \cup V)$,
- $U \cap A \neq \emptyset$,
- $V \cap A \neq \emptyset$, dan
- $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Jika X merupakan ruang topologi yang terputus, maka suatu pemisahan dari X adalah pasangan U, V berupa himpunan buka takkosong yang saling lepas sedemikian sehingga $U \cup V = X$.

Subhimpunan Terhubung dari $\mathbb{R}$

Dengan [Teorema 18.5](#) yang telah kita miliki, kita hampir siap menunjukkan bahwa setiap interval dalam $\mathbb{R}$ terhubung. Mari kita kembali sejenak ke contoh $A = (-1, 0) \cup (4, 5)$ dalam $\mathbb{R}$. Tidak sulit untuk melihat bahwa jika U dan V merupakan suatu pemisahan dari A , maka subhimpunan $(-1, 0)$ harus termuat seluruhnya dalam U atau dalam V . Alasannya adalah bahwa $(-1, 0)$ merupakan subhimpunan terhubung dari A . Hasil ini berlaku secara umum.

Kegiatan 18.5 Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Andaikan U dan V membentuk suatu pemisahan dari A . Misalkan C suatu subhimpunan terhubung dari A . Dalam kegiatan ini kita ingin membuktikan bahwa $C \subseteq U$ atau $C \subseteq V$.

- (a) Gunakan fakta bahwa U dan V membentuk suatu pemisahan dari A untuk menjelaskan mengapa $C \subseteq U \cup V$ dan $C \cap U \cap V = \emptyset$.
- (b) Mengingat bahwa C terhubung, kesimpulan apa yang dapat kita tarik mengenai himpunan $U' = U \cap C$ dan $V' = V \cap C$?
- (c) Lengkapilah bukti lema berikut.

Lema 18.7 Misalkan X suatu ruang topologi, dan misalkan A suatu subhimpunan dari X . Andaikan U dan V membentuk suatu pemisahan dari A . Jika C merupakan subhimpunan terhubung dari A , maka $C \subseteq U$ atau $C \subseteq V$.

Sekarang kita dapat membuktikan bahwa setiap interval dalam $\mathbb{R}$ terhubung. Karena $[a, b]$, $[a, b)$, dan $(a, b]$ semuanya merupakan himpunan yang terletak di antara (a, b) dan (a, b) , kita dapat membahas keterhubungan ketiganya sekaligus melalui hasil berikutnya.

Teorema 18.8 Misalkan X suatu ruang topologi dan C suatu subhimpunan terhubung dari X . Jika A merupakan subhimpunan dari X dan $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$, maka A terhubung dalam X .

Bukti. Misalkan X suatu ruang topologi dan C suatu subhimpunan terhubung dari X . Misalkan A suatu subhimpunan dari X sedemikian sehingga $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$. Untuk menunjukkan bahwa A terhubung, andaikan sebaliknya bahwa A tidak terhubung. Maka terdapat subhimpunan buka tak kosong U dan V dari X yang membentuk suatu pemisahan dari A . [Lema 18.7](#) menunjukkan bahwa $C \subseteq U$ atau $C \subseteq V$. Tanpa mengurangi keumuman, andaikan bahwa $C \subseteq U$. Karena $U \cap V \cap A = \emptyset$, diperoleh

$$C \cap V = (C \cap A) \cap V = C \cap (A \cap V) \subseteq U \cap A \cap V = \emptyset.$$

Karena $A \cap V \neq \emptyset$, terdapat suatu unsur $x \in A \cap V$. Karena $x \notin C$ dan $x \in A \subseteq \overline{C}$, x harus merupakan titik limit dari C . Karena V merupakan lingkungan buka dari x , diperoleh $V \cap C \neq \emptyset$. Kontradiksi ini memungkinkan kita menyimpulkan bahwa A terhubung. ■

Salah satu konsekuensi [Teorema 18.8](#) adalah bahwa setiap interval berbentuk $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b]$, atau $[a, \infty)$ dalam $\mathbb{R}$ terhubung. Hal ini memunculkan pertanyaan: adakah subhimpunan lain dari $\mathbb{R}$ yang terhubung?

Kegiatan 18.6 Misalkan A suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}$.

- (a) Misalkan $A = \{a\}$ suatu subhimpunan satu titik dari $\mathbb{R}$. Apakah A terhubung? Jelaskan.
- (b) Sekarang, andaikan A suatu subhimpunan dari $\mathbb{R}$ yang memuat dua titik atau lebih. Andaikan A bukan suatu interval. Maka harus terdapat titik a dan b dalam A serta suatu titik c dalam $\mathbb{R} \setminus A$ di antara a dan b . Gunakan gagasan ini untuk menemukan suatu pemisahan dari A . Apa yang dapat kita simpulkan mengenai A ?
- (c) Deskripsikan secara eksplisit subhimpunan-subhimpunan terhubung dari $(\mathbb{R}, d_E)$.

Komponen

Sebagaimana ditunjukkan oleh [Kegiatan 18.6](#), ruang seperti $A = (1, 2) \cup (3, 4)$ tidak terhubung. Meskipun demikian, A tersusun atas dua subhimpunan terhubung $(1, 2)$ dan $(3, 4)$. Subhimpunan-subhimpunan terhubung ini disebut **komponen**.

Definisi 18.9 Suatu subruang C dari ruang topologi X disebut **komponen** (atau **komponen terhubung**) dari X jika C terhubung dan tidak ada subruang terhubung yang lebih besar dari X yang memuat C .

Sebagai contoh, jika $X = (1, 2) \cup [4, 10) \cup \{-1, 15\}$, maka komponen-komponen dari X adalah $(1, 2)$, $[4, 10)$, $\{-1\}$, dan $\{15\}$. Sebagaimana ditunjukkan oleh kegiatan berikutnya, kita selalu dapat mempartisi suatu ruang topologi menjadi gabungan saling lepas dari komponen-komponen.

Kegiatan 18.7 Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi tak kosong.

- (a) Tunjukkan bahwa jika $x \in X$, maka $\{x\}$ terhubung.
- (b) Andaikan X suatu ruang topologi dan $\{A_\alpha\}$, untuk α dalam suatu himpunan indeks I , merupakan suatu koleksi subhimpunan terhubung dari X . Misalkan $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Andaikan $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa A merupakan subhimpunan terhubung dari X .

Petunjuk. Andaikan terdapat suatu pemisahan dan gunakan [Lema 18.7](#).

- (c) Bagian (a) menunjukkan bahwa setiap unsur dalam X termasuk dalam suatu subhimpunan terhubung dari X . Jadi, kita dapat menuliskan X sebagai suatu gabungan subhimpunan-subhimpunan terhubung. Namun, mungkin terdapat tumpang tindih. Untuk menghilangkan tumpang tindih tersebut, kita mendefinisikan relasi $\sim$ berikut pada X : Untuk x dan y dalam X , $x \sim y$ jika x dan y termuat dalam subhimpunan terhubung yang sama dari X . Seperti halnya setiap relasi, kita menanyakan apakah $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi.
 - (i) Apakah $\sim$ merupakan relasi refleksif? Mengapa atau mengapa tidak?
 - (ii) Apakah $\sim$ merupakan relasi simetris? Mengapa atau mengapa tidak?
 - (iii) Apakah $\sim$ merupakan relasi transitif? Mengapa atau mengapa tidak?

[Kegiatan 18.7](#) menunjukkan bahwa relasi $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi, sehingga relasi tersebut mempartisi ruang topologi yang mendasarinya, X , menjadi himpunan-himpunan saling lepas. Jika $x \in X$, maka kelas ekuivalensi dari x merupakan subhimpunan terhubung dari X . Tidak mungkin ada subhimpunan terhubung yang lebih besar dari X yang memuat x , karena kelas-kelas ekuivalensi saling lepas atau sama.

Jadi, kelas-kelas ekuivalensi tersebut tepat merupakan komponen-komponen terhubung dari X . Komponen-komponen dari suatu ruang topologi X memenuhi beberapa sifat.

- Setiap $a \in X$ merupakan anggota tepat satu komponen terhubung C_a dari X .
- Suatu komponen C_a memuat semua subhimpunan terhubung dari X yang memuat a . Jadi, C_a merupakan gabungan semua subhimpunan terhubung dari X yang memuat a .
- Jika a dan b berada dalam X , maka $C_a = C_b$ atau $C_a \cap C_b = \emptyset$.
- Setiap subhimpunan terhubung dari X merupakan subhimpunan dari suatu komponen terhubung.
- Setiap komponen terhubung dari X merupakan subhimpunan tertutup dari X .
- Ruang X terhubung jika dan hanya jika X mempunyai tepat satu komponen terhubung.

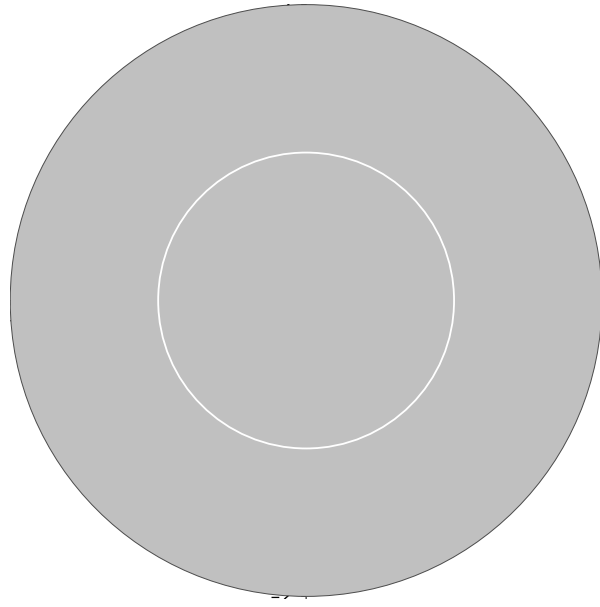
Himpunan Pemutus

Menentukan apakah dua ruang topologi homeomorfik dapat menjadi hal yang sulit. Kadang-kadang kita dapat menggunakan invarian topologi untuk menentukan bahwa ruang-ruang tersebut tidak homeomorfik. Sebagai contoh, jika X terhubung dan Y tidak terhubung, maka X dan Y tidak homeomorfik. Namun, hanya karena dua ruang terhubung, tidak serta-merta berarti bahwa ruang-ruang tersebut homeomorfik. Sebagai contoh, perhatikan ruang $(0, 2)$ dan $[0, 2)$. Keduanya merupakan subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$. Jika kita menghapus suatu titik, misalnya 1, dari himpunan $(0, 2)$, ruang yang dihasilkan, $(0, 1) \cup (1, 2)$, tidak lagi terhubung. Hasil yang sama berlaku jika kita menghapus titik mana pun dari $(0, 2)$. Akan tetapi, jika kita menghapus titik 0 dari $[0, 2)$, ruang yang dihasilkan, $(0, 2)$, terhubung. Jadi, ruang $(0, 2)$ dan $[0, 2)$ secara mendasar berbeda dalam hal ini, dan karenanya tidak homeomorfik. Setiap himpunan yang dapat kita hapus dari suatu himpunan terhubung untuk memperoleh himpunan yang tidak terhubung disebut **himpunan pemutus**.

Definisi 18.10 Suatu subhimpunan S dari ruang topologi terhubung X disebut **himpunan pemutus** dari X jika himpunan $X \setminus S$ tidak terhubung. Suatu titik p dalam ruang topologi terhubung X disebut **titik pemutus** jika $X \setminus \{p\}$ tidak terhubung.

Contoh 18.11

- Titik 1 merupakan titik pemutus dari ruang $(0, 2)$. Bahkan, setiap titik dalam $(0, 2)$ merupakan titik pemutus dari $(0, 2)$.
- Misalkan $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$. Artinya, D merupakan cakram tertutup berjari-jari 2 pada bidang. Himpunan D tidak mempunyai titik pemutus. Akan tetapi, jika $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, maka $D \setminus S$ terdiri atas dua komponen terhubung: bola buka $B((0, 0), 1)$ dan anulus $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$, sebagaimana diilustrasikan dalam [Gambar 18.12](#). Jadi, S merupakan himpunan pemutus dari D .



Gambar 18.12 Cakram D dan himpunan pemutus S .

□

Setelah memperoleh suatu sifat baru, kita kemudian menanyakan apakah sifat tersebut merupakan invarian topologi.

Teorema 18.13 Misalkan X dan Y ruang topologi terhubung dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme. Jika $S \subset X$ merupakan himpunan pemutus, maka $f(S)$ merupakan himpunan pemutus dari Y .

Bukti. Misalkan X dan Y ruang topologi dengan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme. Misalkan S suatu himpunan pemutus dari X . Misalkan U dan V membentuk suatu pemisahan dari $X \setminus S$. Kita akan menunjukkan bahwa $f(U)$ dan $f(V)$ membentuk suatu pemisahan dari $Y \setminus f(S)$, yang akan membuktikan bahwa $f(S)$ merupakan himpunan pemutus dari Y . Karena f^{-1} kontinu, himpunan $f(U)$ dan $f(V)$ merupakan himpunan buka dalam Y . Selanjutnya, kita membuktikan bahwa $(Y \setminus f(S)) \subseteq (f(U) \cup f(V))$. Misalkan $y \in Y \setminus f(S)$. Karena f surjektif, terdapat $x \in X$ dengan $f(x) = y$. Fakta bahwa $y \notin f(S)$ berarti bahwa $x \notin S$. Jadi $x \in (X \setminus S) \subseteq (U \cup V)$. Jika $x \in U$, maka $f(x) = y \in f(U)$, dan jika $x \in V$, maka $x = f(y) \in f(V)$. Jadi $(Y \setminus f(S)) \subseteq (f(U) \cup f(V))$.

Sekarang kita menunjukkan bahwa $f(U) \cap (Y \setminus f(S)) \neq \emptyset$ dan $f(V) \cap (Y \setminus f(S)) \neq \emptyset$. Karena U dan V membentuk suatu pemisahan dari $X \setminus S$, kita mengetahui bahwa $U \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$ dan $V \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$. Misalkan $x \in U \cap (X \setminus S)$. Maka $x \in U$ dan $x \notin S$. Jadi $f(x) \in f(U)$, dan fakta bahwa f injektif mengakibatkan $f(x) \notin f(S)$. Dengan demikian, $f(x) \in f(U) \cap (Y \setminus f(S))$. Argumen yang sama menunjukkan bahwa $x \in V \cap (X \setminus S)$ mengakibatkan $f(x) \in f(V) \cap (Y \setminus f(S))$. Jadi $f(U) \cap (Y \setminus f(S)) \neq \emptyset$ dan $f(V) \cap (Y \setminus f(S)) \neq \emptyset$.

Terakhir, kita menunjukkan bahwa $f(U) \cap f(V) \cap (Y \setminus f(S)) = \emptyset$. Andaikan $y \in f(U) \cap f(V) \cap (Y \setminus f(S))$. Misalkan $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Karena f injektif, kita mengetahui bahwa $f(x) \in f(U)$ berarti $x \in U$. Jadi $x \in U \cap V$. Fakta bahwa $y \in Y \setminus f(S)$ berarti bahwa $y \notin f(S)$. Dengan demikian, $x \notin S$. Jadi $x \in X \setminus S$. Maka kita memperoleh $x \in U \cap V \cap (X \setminus S) = \emptyset$. Diperoleh $f(U) \cap f(V) \cap (Y \setminus f(S)) = \emptyset$. Oleh karena itu, $f(U)$ dan $f(V)$ membentuk suatu pemisahan dari $Y \setminus f(S)$, dan $f(S)$ merupakan himpunan pemutus dari Y . ■

Kegiatan 18.8

- (a) Gunakan gagasan himpunan/titik pemutus untuk menjelaskan mengapa lingkaran satuan dalam $\mathbb{R}^2$ tidak homeomorfik dengan interval $[0, 1]$ dalam $\mathbb{R}$. Catatan: lingkaran satuan adalah himpunan $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Buatlah gambar untuk mengilustrasikan penjelasan Anda. (Bukti formal

tidak diperlukan, tetapi Anda perlu memberikan alasan yang meyakinkan.)

(b) Perhatikan subhimpunan-subhimpunan berikut dari $\mathbb{R}^2$ dengan topologi subruang:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{dan} \quad B = \{(x, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Apakah $A \cup B$ homeomorfik dengan A ? (Bukti formal tidak diperlukan, tetapi Anda perlu memberikan alasan yang meyakinkan.)

Kita telah melihat bahwa ekuivalensi topologi merupakan relasi ekuivalensi, yang mempartisi koleksi semua ruang topologi menjadi kelas-kelas homeomorfisme yang saling lepas. Invarian topologi kemudian dapat membantu kita mengidentifikasi kelas-kelas tempat berbagai ruang berada. Namun, secara umum, membuktikan bahwa dua ruang homeomorfik dapat lebih sulit daripada membuktikan bahwa keduanya tidak homeomorfik.

Kegiatan 18.9 Perhatikan ruang $S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = (0, 1)$ dalam $\mathbb{R}$, $S_3 = [-1, 1]$ dalam $\mathbb{R}$, ruas garis S_4 dalam $\mathbb{R}^2$ di antara titik $(0, 0)$ dan $(2, 2)$, ruang S_5 yang ditentukan oleh huruf $\{X\}$, dan ruang S_6 yang ditentukan oleh huruf $\{Y\}$ dalam $\mathbb{R}^2$. Identifikasilah kelas-kelas homeomorfisme berbeda yang ditentukan oleh keenam ruang ini. Bukti formal tidak diperlukan, tetapi Anda perlu memberikan argumen yang meyakinkan.

Teorema Nilai Antara dan Teorema Titik Tetap

Dalam bagian ini kita menyajikan dua akibat penting dari keterhubungan. Akibat pertama adalah Teorema Nilai Antara. Dalam kalkulus, Teorema Nilai Antara menyatakan bahwa jika f merupakan fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai setiap nilai di antara $f(a)$ dan $f(b)$. Hasil ini tampak jelas jika kita sekadar menggambar grafik fungsi kontinu pada interval tertutup. Namun, gambar bukanlah bukti. Kita akan menyatakan dan kemudian membuktikan versi Teorema Nilai Antara yang lebih umum.

Teorema 18.14 Teorema Nilai Antara. *Misalkan X ruang topologi dan A subhimpunan terhubung dari X . Jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu, maka untuk setiap $a, b \in A$ dan setiap $y \in \mathbb{R}$ di antara $f(a)$ dan $f(b)$, terdapat titik $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$.*

Kegiatan 18.10 Dalam aktivitas ini kita membuktikan Teorema Nilai Antara. Misalkan X ruang topologi dan A subhimpunan terhubung dari X . Andaikan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu, dan misalkan $a, b \in A$.

- (a) Jelaskan mengapa kita dapat mengandaikan bahwa $a \neq b$.
- (b) Jelaskan apa yang terjadi jika $y = f(a)$ atau $y = f(b)$.
- (c) Sekarang andaikan bahwa $f(a) \neq f(b)$. Tanpa mengurangi keumuman, andaikan bahwa $f(a) < f(b)$. Mengapa kita dapat mengatakan bahwa $f(A)$ merupakan suatu interval?
- (d) Bagaimana fakta bahwa $f(A)$ merupakan suatu interval menyelesaikan pembuktian?

Akibat kedua dari keterhubungan berkaitan dengan suatu teorema titik tetap. Teorema-teorema titik tetap penting dalam matematika. Titik tetap dari suatu fungsi f adalah masukan c yang memenuhi $f(c) = c$. Ada banyak teorema titik tetap — salah satu yang paling terkenal adalah Teorema Titik Tetap Brouwer, yang menunjukkan bahwa setiap fungsi kontinu dari bola tertutup B di $\mathbb{R}^n$ ke dirinya sendiri pasti memiliki titik tetap. Kita dapat menggunakan Teorema Nilai Antara untuk membuktikan hasil ini di $\mathbb{R}$.

Teorema 18.15 Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$, dan misalkan $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ merupakan fungsi kontinu. Maka terdapat bilangan $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga $f(c) = c$.

Kegiatan 18.11 Dalam aktivitas ini kita membuktikan teorema berikut.

Jadi, misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$, dan misalkan $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ merupakan fungsi kontinu.

- (a) Jelaskan mengapa kita dapat mengandaikan bahwa $a < f(a)$ dan $f(b) < b$.
- (b) Definisikan $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - f(x)$.
 - (i) Mengapa g merupakan fungsi kontinu?
 - (ii) Apa yang dapat kita katakan tentang $g(a)$ dan $g(b)$? Gunakan Teorema Nilai Antara untuk menyelesaikan pembuktian.
- (c) Misalkan $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x$.
 - (i) Tunjukkan bahwa f memetakan interval $[-1, 2]$ ke dalam interval $[-1, 2]$.
Petunjuk. Gunakan [Teorema 17.14](#), yang menyatakan bahwa fungsi kontinu dari ruang topologi kompak ke $\mathbb{R}$ mencapai nilai maksimum dan minimum.
 - (ii) Tentukan semua nilai c dalam $[-1, 2]$ sedemikian sehingga $f(c) = c$.

Ringkasan

Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Ruang topologi (X, τ) disebut **terhubung** jika X tidak dapat ditulis sebagai gabungan dua subhimpunan buka tak kosong yang saling lepas. Subhimpunan A dari ruang topologi (X, τ) disebut terhubung jika A terhubung dalam topologi subruang.
- Pemisahan suatu subhimpunan A dari ruang topologi X adalah sepasang subhimpunan buka tak kosong U dan V dari X sedemikian sehingga
 - $A \subseteq (U \cup V)$,
 - $U \cap A \neq \emptyset$,
 - $V \cap A \neq \emptyset$, dan
 - $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Menunjukkan bahwa suatu himpunan memiliki pemisahan dapat menjadi cara praktis untuk menunjukkan bahwa himpunan tersebut tidak terhubung.

- Subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ adalah interval dan himpunan satu titik.
- Subruang C dari ruang topologi X merupakan komponen terhubung dari X jika C terhubung dan tidak ada subruang terhubung yang lebih besar di dalam X yang memuat C .
- Salah satu penerapan keterhubungan adalah Teorema Nilai Antara, yang menyatakan bahwa jika A merupakan subhimpunan terhubung dari ruang topologi X dan jika $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu, maka untuk setiap $a, b \in A$ dan setiap $y \in \mathbb{R}$ di antara $f(a)$ dan $f(b)$, terdapat titik $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$.
- Subhimpunan S dari ruang topologi terhubung X merupakan himpunan pemutus dari X jika himpunan $X \setminus S$ tidak terhubung, sedangkan titik p di X merupakan titik pemutus jika $X \setminus \{p\}$ tidak terhubung. Sifat sebagai himpunan pemutus atau titik pemutus merupakan invarian topologi, sehingga kadang-kadang kita dapat menggunakan himpunan pemutus dan titik pemutus untuk menunjukkan bahwa ruang-ruang topologi tidak homeomorfik.

Latihan

- Ingat dari [Definisi 12.13](#) bahwa jika τ_1 dan τ_2 merupakan dua topologi pada himpunan X sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka τ_1 disebut topologi yang **lebih kasar** (atau **lebih lemah**) daripada τ_2 , atau τ_2 disebut topologi yang **lebih halus** (atau **lebih kuat**) daripada τ_1 . Dalam latihan ini kita menyelidiki apakah kekompakan merupakan sifat yang diteruskan dari topologi yang lebih lemah ke topologi yang lebih kuat atau dari yang lebih kuat ke yang lebih lemah. Misalkan τ_1 dan τ_2 merupakan dua topologi pada himpunan X . Jika $\tau_1 \subseteq \tau_2$, apa yang tersirat oleh keterhubungan terhadap τ_1 atau τ_2 , jika ada, tentang kekompakan terhadap topologi yang lain? Berikan alasan untuk jawaban Anda.
- Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu dari interval tertutup ke bilangan real. Misalkan $U = f(u)$ dan $V = f(v)$ sedemikian sehingga $U \leq f(x) \leq V$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Buktikan bahwa terdapat w di antara u dan v sedemikian sehingga $f(w)(b - a) = \int_a^b f(t) dt$.
- Misalkan A subhimpunan terhubung dari ruang topologi X . Buktikan atau sangkal:
 - $\text{Int}(A)$ terhubung
 - $\overline{A}$ terhubung
 - $\text{Bdry}(A)$ terhubung
- Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga. Kita telah menunjukkan bahwa setiap subhimpunan dari ruang topologi mana pun dengan topologi komplemen berhingga bersifat kompak. Sekarang tentukan semua subhimpunan terhubung dari X . Buktikan hasil Anda.
- Berikan contoh, beserta alasannya, berupa subhimpunan A dan B dari suatu ruang topologi untuk menggambarkan setiap keadaan berikut, atau jelaskan mengapa contoh semacam itu tidak ada:
 - A dan B terhubung, tetapi $A \cap B$ tidak terhubung
 - A dan B terhubung, tetapi $A \setminus B$ tidak terhubung
 - A dan B tidak terhubung, tetapi $A \cup B$ terhubung
 - A dan B terhubung dan $A \cap B \neq \emptyset$, tetapi $A \cup B$ tidak terhubung.
 - A dan B terhubung dan $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, tetapi $A \cup B$ tidak terhubung.
- Misalkan $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu. Tunjukkan bahwa terdapat titik $x \in S^1$ yang memenuhi $f(x) = f(-x)$.
- Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Jelaskan mengapa tidak ada dua di antara himpunan (a, b) , $(a, b]$, dan $[a, b]$ yang homeomorfik.
- Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \text{ adalah bilangan bulat positif}\}$. Misalkan $\mathcal{B}$ koleksi semua interval buka berbentuk (a, b) dan semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$ bilangan real sebagaimana dalam [Contoh 13.13](#). Misalkan τ_K topologi yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ merupakan ruang terhubung.
- Meskipun $X = (0, 1) \cup (1, 2)$ bukan ruang terhubung, jika x merupakan sembarang unsur di X , kita dapat mengelilingi x dengan suatu subhimpunan terhubung dari X . Inilah gagasan keterhubungan lokal.

Definisi. Ruang topologi X disebut **terhubung secara lokal di suatu titik** $x \in X$ jika setiap lingkungan U dari x memuat lingkungan buka dan terhubung dari x . Ruang topologi X disebut

terhubung secara lokal jika X terhubung secara lokal di setiap titik dalam X .

- (a) Berikan contoh ruang yang terhubung secara lokal tetapi tidak terhubung.
- (b) Wajar jika kita menduga bahwa ruang terhubung bersifat terhubung secara lokal. Namun, hal itu tidak selalu benar. Tinjau ruang $X = A \cup B$ sebagai subruang dari $\mathbb{R}^2$ dengan topologi metrik Euklides standar, dengan $A = \{(x, y) \mid x \text{ irasional dan } 0 \leq y \leq 1\}$ dan $B = \{(x, y) \mid x \text{ rasional dan } -1 \leq y \leq 0\}$.
 - (i) Jelaskan mengapa X terhubung.
 - (ii) Tunjukkan bahwa X tidak terhubung secara lokal.

Petunjuk. Misalkan x suatu titik yang tidak berada pada sumbu- x , lalu temukan bola buka di sekitar x yang tidak beririsan dengan sumbu- x .

- (c) Buktikan bahwa ruang topologi X terhubung secara lokal jika dan hanya jika, untuk setiap himpunan buka O di X , komponen-komponen terhubung dari O terbuka di X .
10. Misalkan A dan B subhimpunan tak kosong dari ruang topologi X .
- (a) Buktikan bahwa $A \cup B$ tidak terhubung jika $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$.
 - (b) Buktikan bahwa X terhubung jika dan hanya jika, untuk setiap pasangan subhimpunan tak kosong A dan B dari X sedemikian sehingga $X = A \cup B$, berlaku $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$.
11. Berikan contoh untuk setiap hal berikut.
- (a) Ruang topologi dengan tepat satu titik pemutus.
 - (b) Ruang topologi dengan tepat dua titik pemutus.
 - (c) Ruang topologi dengan tak berhingga banyak titik pemutus.
 - (d) Ruang topologi tanpa titik pemutus.
12. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Buktikan bahwa suatu homeomorfisme $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ memetakan titik ujung ke titik ujung.
13. Misalkan X dan Y ruang-ruang topologi.
- (a) Andaikan X dan Y merupakan ruang-ruang yang homeomorfik. Buktikan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara komponen-komponen terhubung dari X dan komponen-komponen terhubung dari Y .
 - (b) Andaikan X dan Y merupakan ruang-ruang yang homeomorfik. Buktikan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik pemutus dari X dan himpunan titik pemutus dari Y .
 - (c) Pandang setiap huruf dalam pernyataan berikut sebagai ruang topologi dengan topologi metrik Euklides standar.
- TOPOLOGY IS NEAT
- Kelompokkan huruf-huruf dalam pernyataan tersebut ke dalam kelas-kelas homeomorfisme yang saling lepas. Jelaskan secara terperinci alasan pengelompokan Anda.
14. Misalkan (X, τ) ruang topologi.
- (a) Buktikan bahwa X tidak terhubung jika dan hanya jika X memiliki subhimpunan sejati yang

sekaligus buka dan tertutup.

- (b) Buktikan bahwa X tidak terhubung jika dan hanya jika terdapat fungsi kontinu surjektif dari X ke suatu ruang topologi diskret dengan dua titik.

15. Misalkan X himpunan bilangan real.

- (a) Tinjau X dengan topologi $\tau_1 = \{\emptyset, [0, 1], X\}$. Buktikan atau sangkal: X terhubung.
 (b) Tinjau X dengan topologi $\tau_2 = \{U \subseteq X \mid 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$.
 (i) Buktikan atau sangkal: X terhubung.
 (ii) Buktikan atau sangkal: $X \setminus \{0\}$ terhubung.

16. Misalkan X himpunan tak kosong dan p suatu unsur tetap di X . Misalkan τ_p topologi titik khusus dan $\tau_{\bar{p}}$ topologi titik yang dikecualikan pada X . Artinya,

- τ_p adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang memuat p .
- $\tau_{\bar{p}}$ adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik khusus dan topologi titik yang dikecualikan benar-benar merupakan topologi dibahas dalam [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Tentukan, beserta bukti, subhimpunan-subhimpunan terhubung dari X ketika

- (a) X memiliki topologi titik khusus τ_p
 (b) X memiliki topologi titik yang dikecualikan $\tau_{\bar{p}}$.

17. Misalkan (X, τ) ruang topologi dan A subhimpunan terhubung dari X .

- (a) Tunjukkan bahwa jika X Hausdorff, maka A' terhubung.
 (b) Misalkan $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \tau_0)$, dengan τ_0 topologi titik khusus pada X . Jelaskan mengapa $A = \mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan terhubung dari X . Tentukan $\mathbb{Z}'$ dalam $(\mathbb{R}, \tau_0)$. Benarkah bahwa dalam setiap ruang topologi, jika A terhubung, maka A' juga terhubung? Jelaskan. (Lihat [Latihan 16](#).)

18. Misalkan X ruang topologi. Buktikan setiap pernyataan berikut.

- (a) Setiap $a \in X$ merupakan unsur dari tepat satu komponen terhubung C_a dari X .
 (b) Komponen C_a memuat semua subhimpunan terhubung dari X yang memuat a . Jadi, C_a merupakan gabungan semua subhimpunan terhubung dari X yang memuat a .
 (c) Jika a dan b berada di X , maka $C_a = C_b$ atau $C_a \cap C_b = \emptyset$.
 (d) Setiap subhimpunan terhubung dari X merupakan subhimpunan dari suatu komponen terhubung.
 (e) Setiap komponen terhubung dari X merupakan subhimpunan tertutup dari X .
 (f) Ruang X terhubung jika dan hanya jika X memiliki tepat satu komponen terhubung.

19. Misalkan X ruang topologi yang hanya memiliki berhingga banyak komponen terhubung. Tunjukkan bahwa setiap komponen dari X terbuka.

20. Misalkan X dan Y ruang-ruang terhubung dengan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi kontinu. Benarkah bahwa jika S merupakan himpunan pemutus dari X , maka $f(S)$ merupakan himpunan pemutus dari Y ? Buktikan jawaban Anda.
21. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$. Terdapat 355 topologi berbeda pada X , tetapi semuanya terbagi ke dalam 33 kelas homeomorfisme berbeda yang tercantum di bawah ini. Daftar tersebut diurutkan berdasarkan banyaknya himpunan satu titik dalam topologi secara menurun, lalu, jika jumlah itu sama, berdasarkan banyaknya subhimpunan dua titik secara menaik dan kemudian banyaknya subhimpunan tiga titik secara menaik. Dalam topologi mana saja X terhubung? Buktikan jawaban Anda.

(1) topologi diskret

(2) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$

(3) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(4) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

(5) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$

(6) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$

(7) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$

(8) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(9) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}$

(10) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X\}$

(11) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(12) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

(13) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(14) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

(15) $\{\emptyset, \{a\}, X\}$

(16) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

(17) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$

(18) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$

(19) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$

(20) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(21) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$

(22) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}$

(23) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

(24) $\{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$

(25) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

(26) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, X\}$

(27) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$

- (28) $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$
 (29) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$
 (30) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$
 (31) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$
 (32) $\{\emptyset, \{a, b, c\}, X\}$
 (33) $\{\emptyset, X\}$

22. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan tersebut selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.

- (a) Jika A merupakan subhimpunan terhubung dari ruang topologi X dengan $|A| \geq 2$, maka setiap titik dari A merupakan titik limit dari A .
 (b) Jika A merupakan subruang kompak dari ruang Hausdorff, maka A terhubung.
 (c) Jika A merupakan subruang terhubung dari ruang Hausdorff, maka A kompak.
 (d) Setiap subhimpunan dari ruang topologi dengan topologi diskret tidak terhubung.
 (e) Himpunan $\{a, b\}$ merupakan komponen terhubung dari ruang topologi $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

- (f) Himpunan $U = \{a, c, d\}$ dan $V = \{a, b, c\}$ membentuk suatu pemisahan bagi himpunan $A = \{c, d\}$ dalam ruang topologi $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

- (g) Ruang topologi terhubung $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$$

tidak memiliki titik pemutus.

Bab 19

Ruang Terhubung Lintasan

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan lintasan dalam ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan subhimpunan terhubung lintasan dari suatu ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan komponen terhubung lintasan dari suatu ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan ruang yang terhubung lintasan secara lokal?
- Apa hubungan antara ruang terhubung dan ruang terhubung lintasan?

Pendahuluan

Kita telah mendefinisikan keterhubungan berdasarkan dapat atau tidaknya suatu ruang dipisahkan oleh himpunan-himpunan buka. Ada cara lain untuk memandang keterhubungan. Sebagai contoh, subhimpunan $(0, 1)$ terhubung dalam $\mathbb{R}$ karena kita dapat menggambar sebuah ruas garis (yang akan kita sebut **lintasan**) di antara sembarang dua titik dalam $(0, 1)$ dan tetap berada di dalam himpunan $(0, 1)$. Jadi, sebagai alternatif, kita dapat menganggap suatu ruang topologi terhubung jika selalu ada lintasan dari satu titik ke titik lain dalam ruang tersebut. Walaupun ini merupakan gagasan keterhubungan yang baru, kita akan melihat bahwa keterhubungan lintasan dan keterhubungan saling berkaitan.

Secara intuitif, suatu ruang terhubung lintasan jika terdapat lintasan di dalam ruang itu di antara sembarang dua titiknya. Untuk memformalkan gagasan ini, kita perlu mendefinisikan apa yang dimaksud dengan lintasan. Secara sederhana, lintasan adalah kurva kontinu di antara dua titik. Oleh karena itu, kita dapat mendefinisikan lintasan sebagai fungsi kontinu.

Definisi 19.1 Misalkan X suatu ruang topologi. Sebuah **lintasan** dari titik a ke titik b dalam X adalah fungsi kontinu $p : [0, 1] \rightarrow X$ sedemikian sehingga $p(0) = a$ dan $p(1) = b$.

Dengan gagasan lintasan, sekarang kita dapat mendefinisikan keterhubungan lintasan.

Definisi 19.2 Subruang A dari ruang topologi X disebut **terhubung lintasan** jika, untuk sembarang $a, b \in A$, terdapat lintasan di dalam A dari a ke b .

Aktivitas Persiapan 19.1

- (a) Apakah $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides terhubung lintasan? Jelaskan.
- (b) Apakah $\mathbb{R}$ dengan topologi komplement berhingga terhubung lintasan? Jelaskan.
- (c) Misalkan $A = \{b, c\}$ dalam (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}.$$

Apakah A terhubung? Apakah A terhubung lintasan? Jelaskan.

Keterhubungan Lintasan

Seperti halnya setiap sifat baru yang kita definisikan, wajar untuk menanyakan apakah keterhubungan lintasan merupakan sifat topologis.

Teorema 19.3 Misalkan X dan Y ruang topologi dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu. Jika A subruang terhubung lintasan dari X , maka $f(A)$ merupakan subruang terhubung lintasan dari Y .

Kegiatan 19.2 Dalam aktivitas ini kita membuktikan [Teorema 19.3](#).

Andaikan X dan Y ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu, dan $A \subseteq X$ terhubung lintasan. Untuk membuktikan bahwa $f(A)$ terhubung lintasan, kita pilih dua elemen u dan v dalam $f(A)$. Dengan demikian, terdapat elemen a dan b dalam A sedemikian sehingga $f(a) = u$ dan $f(b) = v$.

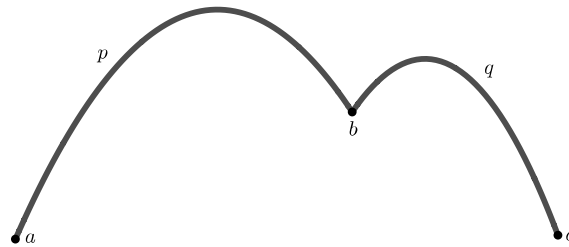
- (a) Jelaskan mengapa terdapat fungsi kontinu $p : [0, 1] \rightarrow A$ sedemikian sehingga $p(0) = a$ dan $p(1) = b$.
- (b) Tentukan bagaimana p dan f dapat digunakan untuk mendefinisikan lintasan $q : [0, 1] \rightarrow f(A)$ dari u ke v . Pastikan untuk menjelaskan mengapa q merupakan lintasan. Simpulkan bahwa $f(A)$ terhubung lintasan.

Salah satu akibat dari [Teorema 19.3](#) adalah hasil berikut.

Corollary 19.4 Keterhubungan lintasan merupakan sifat topologis.

Keterhubungan Lintasan sebagai Relasi Ekuivalensi

Kita telah melihat bahwa kita dapat mendefinisikan relasi ekuivalensi menggunakan subhimpunan-subhimpunan terhubung dari suatu ruang topologi, yang mempartisi ruang tersebut menjadi gabungan saling lepas dari komponen-komponen terhubung. Kita mungkin berharap dapat melakukan hal serupa dengan keterhubungan lintasan. Kesulitan utamanya terletak pada sifat transitif. Seperti diilustrasikan dalam [Gambar 19.5](#), jika kita memiliki lintasan p dari a ke b dan lintasan q dari b ke c , tampaknya kita cukup mengikuti lintasan p dari a ke b , lalu lintasan q dari b ke c untuk memperoleh lintasan dari a ke c . Namun, ada dua masalah yang perlu dipertimbangkan: bagaimana kita mendefinisikan lintasan ini sebagai fungsi dari $[0, 1]$ ke ruang kita, dan bagaimana kita mengetahui bahwa fungsi yang dihasilkan kontinu. Lemma berikut akan membantu.

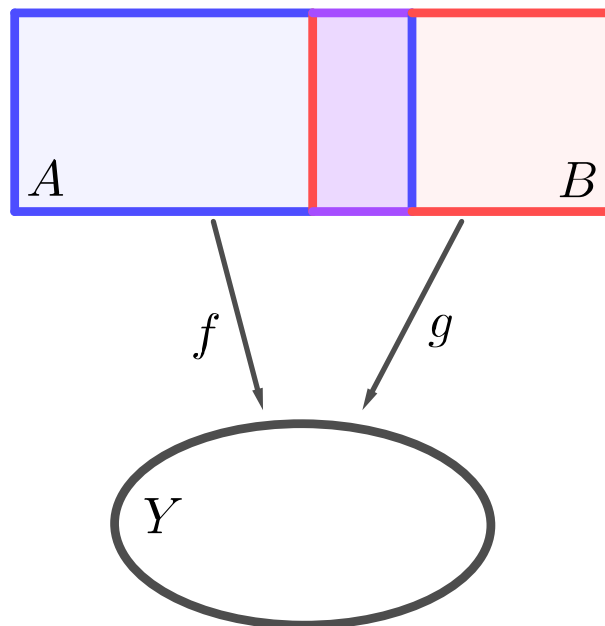


Gambar 19.5 Lintasan dari a ke c .

Lema 19.6 Lemma Penempelan. Misalkan A dan B subhimpunan tertutup dari ruang $X = A \cup B$, dan misalkan $f : A \rightarrow Y$ serta $g : B \rightarrow Y$ fungsi kontinu ke ruang Y sedemikian sehingga $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (A \cap B)$. Maka fungsi $h : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jika } x \in A \\ g(x) & \text{jika } x \in B \end{cases}$$

adalah kontinu.



Gambar 19.7 Lemma Penempelan.

Bukti. Misalkan A dan B subhimpunan tertutup dari ruang $X = A \cup B$, dan misalkan $f : A \rightarrow Y$ serta $g : B \rightarrow Y$ fungsi kontinu ke ruang Y sedemikian sehingga $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (A \cap B)$, seperti

diilustrasikan dalam [Gambar 19.7](#). Definisikan $h : X \rightarrow Y$ dengan

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jika } x \in A \\ g(x) & \text{jika } x \in B. \end{cases}$$

Untuk menunjukkan bahwa h kontinu, misalkan C subhimpunan tertutup dari Y . Maka

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= \{x \in X \mid h(x) \in C\} = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \cup \{x \in B \mid g(x) \in C\} \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Karena f kontinu, $f^{-1}(C)$ tertutup dalam topologi subruang pada A , dan karena g kontinu, $g^{-1}(C)$ tertutup dalam topologi subruang pada B . Jadi, $f^{-1}(C) = A \cap D$ dan $g^{-1}(C) = B \cap E$ untuk suatu himpunan tertutup D dan E dari X . Fakta bahwa A tertutup dalam X mengakibatkan $A \cap D$ tertutup dalam X . Demikian pula, fakta bahwa B tertutup dalam X mengakibatkan $B \cap E$ tertutup dalam X . Jadi,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) = (A \cap D) \cup (B \cap E)$$

merupakan gabungan berhingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam X , sehingga tertutup dalam X . Karena $h^{-1}(C)$ tertutup untuk setiap himpunan tertutup dalam Y , diperoleh bahwa h kontinu. ■

Kita dapat menggunakan Lemma Penempelan untuk membentuk lintasan dari a ke c jika diberikan lintasan dari a ke b dan lintasan dari b ke c .

Kegiatan 19.3 Gunakan Lemma Penempelan untuk menjelaskan mengapa hasil kali lintasan dalam definisi berikut benar-benar merupakan lintasan dari $p(0)$ ke $q(1)$.

Definisi 19.8 Misalkan p lintasan dari a ke b dan q lintasan dari b ke c dalam ruang X . **Hasil kali lintasan** $q * p$ adalah lintasan dalam X yang didefinisikan oleh

$$(q * p)(x) = \begin{cases} p(2x) & \text{untuk } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ q(2x - 1) & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sekarang kita dapat menunjukkan bahwa keterhubungan lintasan mendefinisikan relasi ekuivalensi pada ruang topologi.

Kegiatan 19.4 Misalkan (X, τ) ruang topologi. Definisikan relasi pada X sebagai berikut:

$$a \sim b \text{ jika terdapat lintasan dalam } X \text{ dari } a \text{ ke } b. \quad (19.1)$$

- (a) Jelaskan mengapa $\sim$ merupakan relasi refleksif.
- (b) Jelaskan mengapa $\sim$ merupakan relasi simetris.
- (c) Jelaskan mengapa $\sim$ merupakan relasi transitif.

Karena $\sim$ sebagaimana didefinisikan dalam (19.1) merupakan relasi ekuivalensi, relasi tersebut mempartisi X menjadi gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas. Kelas ekuivalensi suatu elemen $[a]$ disebut **komponen lintasan** dari X , dan merupakan subhimpunan terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a .

Definisi 19.9 Komponen lintasan dari elemen a dalam ruang topologi (X, τ) adalah subhimpunan terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a .

Keterhubungan Lintasan dan Keterhubungan

Keterhubungan lintasan dan keterhubungan merupakan konsep yang berbeda, tetapi keduanya saling berkaitan. Dalam bagian ini kita akan menunjukkan bahwa setiap ruang terhubung lintasan juga harus terhubung. Nanti kita akan melihat bahwa konversnya tidak benar, kecuali pada ruang topologi berhingga.

Teorema 19.10 *Jika ruang topologi X terhubung lintasan, maka X terhubung.*

Bukti. Andaikan X terhubung lintasan. Misalkan $a \in X$ dan, untuk setiap $x \in X$, misalkan p_x suatu lintasan dari a ke x . Misalkan $C_x = p_x([0, 1])$. Himpunan C_x merupakan citra kontinu dari himpunan terhubung $[0, 1]$ dalam $\mathbb{R}$, sehingga C_x terhubung. Selain itu, $p_x(0) = a \in C_x$ dan $p_x(1) = x \in C_x$. Jadi, setiap himpunan C_x memuat a , sehingga $\bigcap_{x \in X} C_x$ tidak kosong. Oleh karena itu,

$$C = \bigcup_{x \in X} C_x$$

merupakan subhimpunan terhubung dari X . Namun, setiap $x \in X$ berada dalam suatu C_x , sehingga $C = X$. Kita menyimpulkan bahwa X terhubung. ■

Dalam bagian-bagian berikutnya kita menyelidiki implikasi sebaliknya dari [Teorema 19.10](#) — yaitu, apakah keterhubungan mengakibatkan keterhubungan lintasan.

Keterhubungan Lintasan dan Keterhubungan dalam Ruang Topologi Berhingga

Dalam bagian ini kita akan menunjukkan bahwa keterhubungan dan keterhubungan lintasan merupakan konsep yang ekuivalen dalam ruang topologi berhingga. Dalam bagian berikutnya, kita membuktikan bahwa keterhubungan lintasan dan keterhubungan tidak ekuivalen dalam ruang topologi tak hingga. Di sepanjang bagian ini, kita mengandaikan bahwa X merupakan ruang topologi berhingga. Kita mulai dengan sebuah contoh untuk memotivasi gagasan-gagasan utama.

Kegiatan 19.5 Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$. Andaikan τ merupakan topologi pada X .

(a) Apakah X terhubung? Jelaskan.

(b) Untuk setiap $x \in X$, misalkan U_x irisan semua himpunan buka yang memuat x (kita menyebut U_x suatu **lingkungan minimal** dari x).

Definisi. Untuk $x \in X$, **lingkungan minimal** U_x dari x adalah irisan semua himpunan buka yang memuat x .

Tentukan U_x untuk setiap $x \in X$.

(c) Kita akan melihat bahwa lingkungan-lingkungan minimal dari X terhubung lintasan. Di sini kita akan mengilustrasikannya dengan U_d .

(i) Misalkan $p : [0, 1] \rightarrow X$ didefinisikan oleh

$$p(t) = \begin{cases} b & \text{jika } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ d & \text{jika } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa p merupakan lintasan dalam U_d dari b ke d .

(ii) Misalkan $p : [0, 1] \rightarrow X$ didefinisikan oleh

$$p(t) = \begin{cases} c & \text{jika } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ d & \text{jika } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa p merupakan lintasan dalam U_d dari c ke d .

(iii) Jelaskan mengapa U_d terhubung lintasan.

Istilah dalam [Paragraph](#) memang tepat. Karena setiap lingkungan N dari titik $x \in X$ harus memuat suatu himpunan buka O dengan $x \in O$, diperoleh $U_x \subseteq O \subseteq N$. Jadi, setiap lingkungan dari $x \in X$ memuat U_x sebagai subhimpunan. Selain itu, ketika X berhingga, himpunan U_x merupakan irisan berhingga dari himpunan-himpunan buka, sehingga setiap U_x merupakan himpunan buka (hal ini secara umum tidak benar dalam ruang topologi tak hingga — Anda diminta mencari contohnya dalam [Latihan 1](#)). Dalam [Kegiatan 19.5](#) kita melihat bahwa U_x terhubung lintasan untuk suatu x tertentu dalam satu contoh. Aktivitas berikut menunjukkan bahwa hasil ini berlaku secara umum dalam ruang topologi berhingga.

Kegiatan 19.6 Misalkan X ruang topologi berhingga, dan misalkan $x \in X$. Dalam aktivitas ini kita menunjukkan bahwa U_x terhubung lintasan. Misalkan $y \in U_x$ dan definisikan $p : [0, 1] \rightarrow X$ dengan

$$p(t) = \begin{cases} y & \text{jika } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ x & \text{jika } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Untuk membuktikan bahwa p kontinu, misalkan O himpunan buka dalam X . Kita mempunyai $x \in O$ atau $x \notin O$.

(a) Andaikan $x \in O$. Mengapa y juga harus berada dalam O ? Lalu, apakah $p^{-1}(O)$?

(b) Sekarang andaikan $x \notin O$. Ada dua kasus yang perlu dipertimbangkan.

(i) Apakah $p^{-1}(O)$ jika $y \in O$?

(ii) Apakah $p^{-1}(O)$ jika $y \notin O$?

(c) Jelaskan mengapa p merupakan lintasan dari y ke x .

(d) Tunjukkan bahwa kita dapat menemukan lintasan di antara sembarang dua titik dalam U_x . Simpulkan bahwa U_x terhubung lintasan.

Himpunan-himpunan U_x secara bersama-sama membentuk ruang X , dan setiap U_x merupakan subruang terhubung lintasan. Jadi, setiap titik dalam X termuat dalam suatu lingkungan yang mempunyai subhimpunan terhubung lintasan yang memuat x . Ruang dengan sifat ini disebut **terhubung lintasan secara lokal**.

Definisi 19.11 Ruang topologi (X, τ) disebut **terhubung lintasan secara lokal di x** jika setiap lingkungan dari x memuat lingkungan buka terhubung lintasan yang memuat x . Ruang (X, τ) disebut **terhubung lintasan secara lokal** jika X terhubung lintasan secara lokal di setiap titik.

Jika X ruang topologi berhingga, untuk setiap $x \in X$, himpunan U_x merupakan himpunan buka terkecil yang memuat x . Ini berarti bahwa setiap lingkungan N dari x akan memuat U_x sebagai subhimpunan. Jadi, ruang topologi berhingga terhubung lintasan secara lokal (hal ini secara umum tidak benar untuk ruang topologi tak hingga; lihat, misalnya, [Latihan 4](#)). Salah satu akibat untuk ruang yang terhubung lintasan secara lokal adalah hasil berikut.

Lema 19.12 Ruang X terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika, untuk setiap himpunan buka O dari X , setiap komponen lintasan dari O terbuka dalam X .

Bukti. Misalkan X ruang topologi yang terhubung lintasan secara lokal. Pertama-tama kita tunjukkan bahwa, untuk setiap himpunan buka O dalam X , setiap komponen lintasan dari O terbuka dalam X . Misalkan O himpunan buka dalam X dan misalkan P komponen lintasan dari O . Misalkan $p \in P$. Karena X terhubung lintasan secara lokal, lingkungan O dari p memuat suatu lingkungan buka terhubung lintasan Q dari p . Fakta bahwa $p \in Q$ dan P merupakan komponen lintasan dari O mengakibatkan $Q \subseteq P$. Jadi, P memuat lingkungan dari p dan P terbuka.

Sekarang kita tunjukkan bahwa jika, untuk setiap himpunan buka O dalam X , komponen-komponen lintasan dari O terbuka dalam X , maka X terhubung lintasan secara lokal. Misalkan $x \in X$ dan misalkan N lingkungan dari x . Maka N memuat himpunan buka U dengan $x \in U$. Misalkan P komponen lintasan dalam U yang memuat x . Himpunan P terhubung lintasan dan, berdasarkan hipotesis, P terbuka dalam X , sehingga merupakan lingkungan buka terhubung lintasan dari x . Jadi, N memuat lingkungan terhubung lintasan dari x dan X terhubung lintasan secara lokal di setiap titik. ■

Karena X terbuka dalam X apabila X merupakan ruang topologi, akibat wajar dari [Lema 19.12](#) adalah hasil berikut.

Corollary 19.13 *Misalkan X ruang topologi yang terhubung lintasan secara lokal. Maka setiap komponen lintasan dari X terbuka dalam X .*

Karena hanya ada berhingga banyak himpunan buka dalam ruang berhingga X , setiap irisan sebarang dari himpunan-himpunan buka dalam X dapat direduksi menjadi irisan berhingga. Jadi, irisan setiap koleksi himpunan buka dalam X kembali merupakan himpunan buka dalam X . Kita akan menunjukkan bahwa X merupakan gabungan komponen-komponen lintasan, yang pada akhirnya memungkinkan kita membuktikan bahwa jika X terhubung, maka X juga terhubung lintasan.

Kegiatan 19.7 Misalkan X ruang topologi yang terhubung lintasan secara lokal. Dalam aktivitas ini kita akan membuktikan bahwa komponen dan komponen lintasan dari X adalah sama.

- (a) Misalkan $x \in X$, misalkan C komponen dari X yang memuat x , dan misalkan P komponen lintasan dari X yang memuat x . Tunjukkan bahwa $P \subseteq C$.
- (b) Untuk melengkapi bukti bahwa $P = C$, gunakan kontradiksi dan andaikan $C \neq P$. Misalkan Q gabungan semua komponen lintasan dari X yang berbeda dari P dan beririsan dengan C . Setiap komponen lintasan tersebut terhubung, sehingga merupakan subhimpunan dari C . Jadi, $C = P \cup Q$. Jelaskan mengapa P dan Q membentuk pemisahan dari C .

Petunjuk. Bagaimana kita menggunakan fakta bahwa X terhubung lintasan secara lokal?

Sekarang kita dapat melengkapi hasil utama bagian ini.

Teorema 19.14 *Misalkan X ruang topologi berhingga. Maka X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan.*

Bukti. Misalkan X ruang topologi berhingga. [Teorema 19.10](#) menunjukkan bahwa jika X terhubung lintasan, maka X terhubung. Untuk implikasi sebaliknya, andaikan X terhubung. Maka X terdiri atas satu komponen, $C = X$. Karena komponen lintasan dan komponen dari X adalah sama, kita menyimpulkan bahwa $C = X$ juga merupakan satu komponen lintasan, sehingga X terhubung lintasan. ■

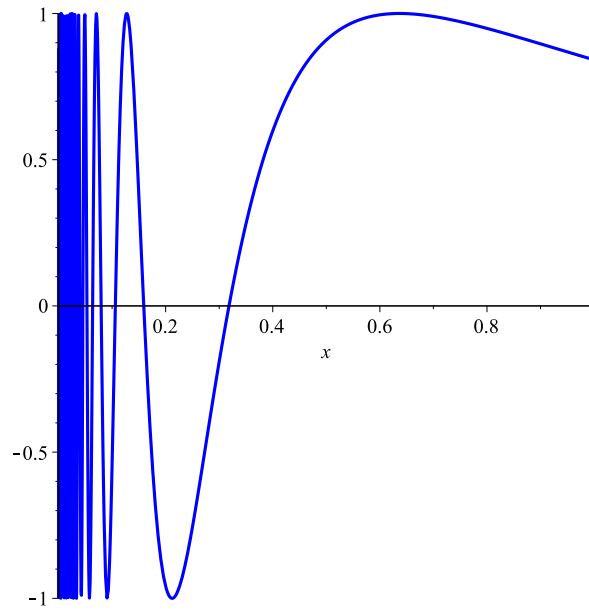
Keterhubungan Lintasan dan Keterhubungan dalam Ruang Topologi Tak Hingga

Karena keterhubungan dan keterhubungan lintasan ekuivalen dalam ruang topologi berhingga, pertanyaan yang wajar sekarang adalah apakah konvers dari [Teorema 19.10](#) benar dalam ruang topologi sebarang.

Seperti yang akan kita lihat, jawabannya tidak. Untuk menemukan contoh penyangkal, kita perlu melihat ruang topologi tak hingga. Ada banyak contoh, tetapi contoh baku yang dapat dipertimbangkan adalah **kurva sinus topolog**. Kurva S ini didefinisikan sebagai gabungan himpunan

$$S_1 = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \text{ dan } S_2 = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Gambar S ditunjukkan dalam [Gambar 19.15](#).



Gambar 19.15 Kurva sinus topolog.

Untuk memahami apakah S terhubung, mari kita pertimbangkan hubungan antara S dan S_2 . [Gambar 19.15](#) tampaknya menunjukkan bahwa $S = \overline{S_2}$. Untuk melihat apakah ini benar, misalkan $q = (0, y) \in S_1$, dan misalkan N lingkungan dari q . Maka terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B = B(q, \epsilon) \subseteq N$. Pilih $K \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\arcsin(y) + 2\pi K} < \epsilon$, dan misalkan $z = \frac{1}{\arcsin(y) + 2\pi K}$. Maka

$$\begin{aligned} d_E \left(q, \left(z, \sin\left(\frac{1}{z}\right) \right) \right) &= d_E((0, y), (z, \sin(\arcsin(y) + 2\pi K))) \\ &= d_E((0, y), (z, \sin(\arcsin(y)))) \\ &= d_E((0, y), (z, y)) \\ &= |z| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

sehingga $(z, \sin(\frac{1}{z})) \in B(q, \epsilon)$, dan setiap lingkungan dari q memuat suatu titik dalam S_2 . Oleh karena itu, $S_1 \subseteq S'_2 \subseteq \overline{S_2}$ dan $\overline{S_2} = S$ dalam S . Fakta bahwa S terhubung mengikuti [Teorema 18.8](#).

Setelah mengetahui bahwa S terhubung, teorema berikut menunjukkan bahwa S merupakan ruang terhubung yang tidak terhubung lintasan.

Teorema 19.16 *Kurva sinus topolog terhubung, tetapi tidak terhubung lintasan.*

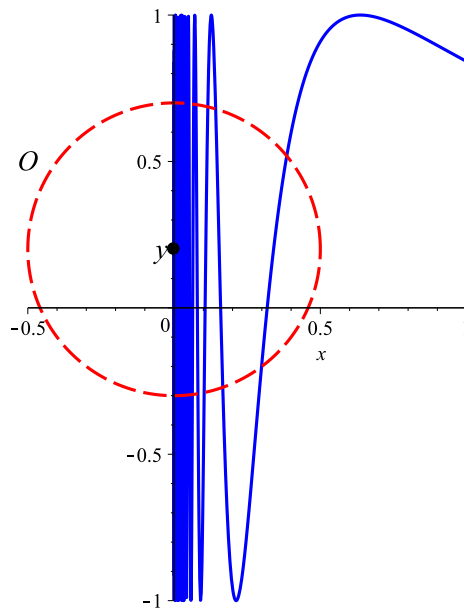
Bukti. Kita mengetahui bahwa S terhubung, sehingga tinggal menunjukkan bahwa S tidak terhubung lintasan. Himpunan S_1 dan S_2 terhubung (masing-masing sebagai citra kontinu dari interval $[0, 1]$ dan $(0, 1]$). Dengan kontradiksi, kita akan membuktikan bahwa tidak ada lintasan p dalam S dari $p(0) = (0, 0)$ ke $p(1) = b$ untuk sembarang titik $b \in S_2$. Andaikan lintasan p seperti itu ada. Misalkan $U = p^{-1}(S_1)$ dan

$V = p^{-1}(S_2)$. Maka

$$[0, 1] = p^{-1}(S) = p^{-1}(S_1 \cup S_2) = p^{-1}(S_1) \cup p^{-1}(S_2) = U \cup V. \quad (19.2)$$

Perhatikan bahwa S_2 merupakan subhimpunan buka dari S , karena $S_2 = \left(\bigcup_{z=(x,y) \in S_2} B\left(z, \frac{x}{2}\right) \right) \cap S$. Jadi, kekontinuan p mengakibatkan V merupakan subhimpunan buka dari $[0, 1]$. Selain itu, fakta bahwa $p(0) \in S_1$ berarti $U \neq \emptyset$, dan fakta bahwa $p(1) \in S_2$ berarti $V \neq \emptyset$. Jika kita menunjukkan bahwa U merupakan subhimpunan buka dari $[0, 1]$, maka Persamaan (19.2) akan mengakibatkan $[0, 1]$ tidak terhubung, suatu kontradiksi. Jadi, kita lanjutkan dengan membuktikan bahwa U terbuka dalam $[0, 1]$.

Misalkan $x \in U$, sehingga $p(x) \in S_1$. Himpunan $O = B_S\left(p(x), \frac{1}{2}\right) \cap S$ terbuka dalam S . Kekontinuan p kemudian memberi tahu kita bahwa $p^{-1}(O)$ terbuka dalam $[0, 1]$. Jadi, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga bola buka $B = B_{[0,1]}(x, \delta)$ merupakan subhimpunan dari $p^{-1}(O)$. Kita akan membuktikan bahwa $p(B) \subseteq S_1$. Ini akan mengakibatkan $B \subseteq U$, sehingga U merupakan lingkungan dari setiap titiknya, dan karenanya U merupakan himpunan buka.



Gambar 19.17 Himpunan O .

Setiap elemen dalam B dipetakan ke dalam O oleh lintasan p . Himpunan O rumit, terdiri atas tak hingga banyak subkurva dari kurva S_2 , bersama dengan titik-titik dalam S_1 , seperti diilustrasikan dalam Gambar 19.17. Untuk menyederhanakan analisis, mari kita pertimbangkan proyeksi ke sumbu x . Fungsi $P_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $P_x(x, y) = x$ merupakan fungsi kontinu. Misalkan $I = P_x(p(B))$. Karena $p(B) \subseteq O$, kita mengetahui bahwa $I \subseteq P_x(O)$. Misalkan $Z = P_x(O)$. Jadi, $I \subseteq Z$. Karena B merupakan himpunan terhubung (B adalah interval), kita mengetahui bahwa $p(B)$ merupakan himpunan terhubung. Fakta bahwa P_x kontinu berarti bahwa $I = P_x(p(B))$ juga terhubung. Selanjutnya, I merupakan subhimpunan terbatas dari $\mathbb{R}$, sehingga I harus berupa interval terbatas. Ingat bahwa $x \in B$, sehingga $p(x) \in p(B)$. Fakta bahwa $p(x) \in S_1$ memberi tahu kita bahwa $0 = P_x(p(x)) \in P_x(p(B)) = I$. Jadi, $I \neq \emptyset$. Ada dua kemungkinan untuk I : $I = \{0\}$, atau I merupakan interval dengan panjang positif. Kita pertimbangkan kedua kasus itu.

Andaikan $I = \{0\}$. Maka proyeksi $p(B)$ ke sumbu x adalah titik tunggal 0 dan $p(B) \subseteq S_1$, seperti yang diinginkan. Andaikan I merupakan interval berbentuk $[0, d]$ atau $[0, d)$ untuk suatu bilangan positif d . Struktur O menunjukkan bahwa harus terdapat beberapa celah dalam himpunan Z , yaitu proyeksi O ke sumbu x . Ini mengakibatkan I tidak mungkin berupa interval terhubung. Kita lanjutkan dengan menunjukkan hal ini. Dengan kata lain, kita akan membuktikan bahwa $I \setminus Z \neq \emptyset$ (yang mustahil karena $I \subseteq Z$). Ingat bahwa $p(x) \in S_1$, jadi misalkan $p(x) = (0, q)$. Kita pertimbangkan apa yang terjadi jika $q < \frac{1}{2}$ dan jika $q \geq \frac{1}{2}$.

Andaikan $q < \frac{1}{2}$. Maka bola $B_S(p(x), \frac{1}{2})$ hanya memuat titik-titik dengan nilai y kurang dari 1. Misalkan $N \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $t = \frac{1}{\pi/2 + 2N\pi} < d$. Maka $t \in I$. Namun, $\sin(\frac{1}{t}) = \sin(\pi/2 + 2N\pi) = \sin(\pi/2) = 1$, sehingga $(t, \sin(\frac{1}{t}))$ tidak berada dalam O . Jadi, $t \notin Z$. Dengan demikian kita telah menemukan titik dalam $I \setminus Z$.

Terakhir, andaikan $q \geq \frac{1}{2}$. Maka bola $B_S(p(x), \frac{1}{2})$ hanya memuat titik-titik dengan nilai y lebih besar dari -1 . Misalkan $N \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $t = \frac{1}{3\pi/2 + 2N\pi} < d$. Maka $t \in I$. Namun, $\sin(\frac{1}{t}) = \sin(3\pi/2 + 2N\pi) = \sin(3\pi/2) = -1$, sehingga $t \notin Z$. Dengan demikian kita telah menemukan titik dalam $I \setminus Z$.

Kita menyimpulkan bahwa tidak mungkin ada lintasan dalam S dari $(0, 0)$ ke sembarang titik dalam S_2 , yang melengkapi bukti bahwa S tidak terhubung lintasan. (Bahkan, argumen yang diberikan menunjukkan bahwa tidak ada lintasan dalam S dari sembarang titik dalam S_1 ke sembarang titik dalam S_2 .) ■

Ringkasan

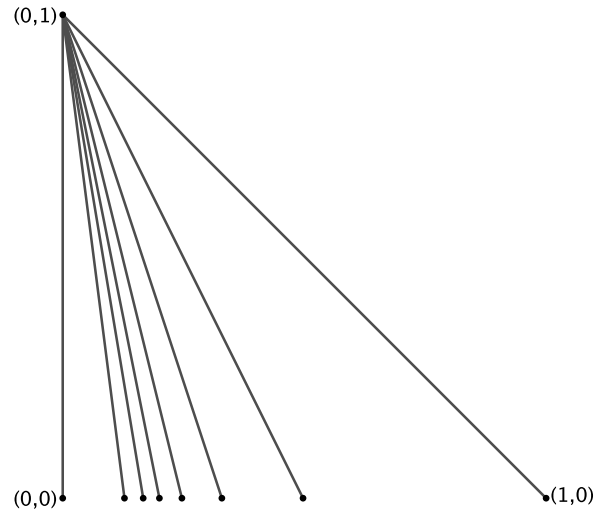
Gagasan-gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut.

- Lintasan dalam ruang topologi X adalah fungsi kontinu p dari interval $[0, 1]$ ke X . Jika $p(0) = a$ dan $p(1) = b$, maka p merupakan lintasan dari a ke b .
- Subruang A dari ruang topologi X terhubung lintasan jika, untuk sembarang $a, b \in A$, terdapat lintasan dalam A dari a ke b .
- Komponen lintasan dari elemen a dalam ruang topologi (X, τ) adalah subhimpunan terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a .
- Ruang topologi (X, τ) terhubung lintasan secara lokal di x jika setiap lingkungan dari x memuat subhimpunan terhubung lintasan yang memuat x . Ruang (X, τ) terhubung lintasan secara lokal jika X terhubung lintasan secara lokal di setiap titik.
- Keterhubungan dan keterhubungan lintasan ekuivalen dalam ruang topologi berhingga, dan keterhubungan lintasan secara umum mengakibatkan keterhubungan. Namun, ada ruang topologi yang terhubung tetapi tidak terhubung lintasan. Salah satu contohnya adalah kurva sinus topolog.

Latihan

1. Temukan ruang topologi X dan titik $x \in X$ sedemikian sehingga lingkungan minimal dari x bukan himpunan buka.
2. Misalkan X ruang topologi dan, untuk setiap $x \in X$, misalkan $PC(x)$ menyatakan komponen lintasan dari x . Buktikan pernyataan-pernyataan berikut.
 - (a) Jika A subhimpunan terhubung lintasan dari X , maka $A \subseteq PC(x)$ untuk suatu $x \in X$.
 - (b) Ruang X terhubung lintasan jika dan hanya jika $X = PC(x)$ untuk suatu $x \in X$.
3. Dalam [Kegiatan 18.7](#) dari [Bab 18](#), kita menunjukkan bahwa gabungan sebarang dari himpunan-himpunan terhubung adalah terhubung asalkan irisan himpunan-himpunan itu tidak kosong. Apakah hasil yang sama benar untuk himpunan-himpunan terhubung lintasan? Yakni, jika X ruang topologi dan $\{A_\alpha\}$, untuk α dalam suatu himpunan indeks I , merupakan koleksi subhimpunan terhubung lintasan dari X dengan $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, haruskah $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ terhubung lintasan? Buktikan jawaban Anda.

4. Misalkan X subruang dari $(\mathbb{R}^2, d_E)$ yang terdiri atas ruas-ruas garis yang menghubungkan titik $(0, 1)$ dengan setiap titik dalam himpunan $\{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, seperti diilustrasikan dalam [Gambar 19.18](#). Ruang ini disebut **sapu harmonik**.



Gambar 19.18 Sapu harmonik.

- (a) Tunjukkan bahwa sapu harmonik terhubung.
 - (b) Tunjukkan bahwa sapu harmonik terhubung lintasan.
 - (c) Tunjukkan bahwa sapu harmonik tidak terhubung secara lokal.
 - (d) Tunjukkan bahwa sapu harmonik tidak terhubung lintasan secara lokal. Jadi, keterhubungan lintasan tidak mengakibatkan keterhubungan lintasan secara lokal.
5. Dalam [Latihan 4](#), kita melihat contoh ruang yang terhubung lintasan tetapi tidak terhubung lintasan secara lokal. Apakah mungkin menemukan ruang yang terhubung lintasan secara lokal tetapi tidak terhubung lintasan? Verifikasi jawaban Anda.
6. Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \text{ bilangan bulat positif}\}$. Misalkan $\mathcal{B}$ koleksi semua interval buka berbentuk (a, b) dan semua himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$ bilangan real seperti dalam [Contoh 13.13](#). Misalkan τ_K topologi yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak terhubung lintasan. (Petunjuk: Andaikan terdapat lintasan antara a dan b dengan $a < 0$ dan $b > 1$.)
7. Kita mengetahui bahwa suatu ruang dapat terhubung tetapi tidak terhubung lintasan. Kita juga mengetahui bahwa keterhubungan lintasan secara lokal tidak mengakibatkan keterhubungan. Namun, jika kedua syarat ini digabungkan, ruang tersebut harus terhubung lintasan. Yakni, tunjukkan bahwa jika ruang topologi X terhubung dan terhubung lintasan secara lokal, maka X terhubung lintasan.
8. Misalkan X himpunan tak kosong dan misalkan p elemen tetap dalam X . Misalkan τ_p topologi titik tertentu dan $\tau_{\overline{p}}$ topologi titik dikecualikan pada X . Yakni,
- τ_p adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang memuat p .
 - $\tau_{\overline{p}}$ adalah koleksi subhimpunan dari X yang terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan dari X yang tidak memuat p .

Fakta bahwa topologi titik tertentu dan topologi titik dikecualikan benar-benar merupakan topologi

dibahas dalam [Latihan 9](#) dan [Latihan 10](#). Tentukan, disertai bukti, subhimpunan-subhimpunan terhubung lintasan dari X ketika

- (a) X mempunyai topologi titik tertentu τ_p .
 - (b) X mempunyai topologi titik dikecualikan $\tau_{\bar{p}}$.
9. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya.
- (a) Jika X ruang topologi terhubung lintasan, maka setiap subruang dari X terhubung lintasan.
 - (b) Jika A dan B subruang terhubung lintasan dari ruang topologi X , maka $A \cap B$ terhubung lintasan.
 - (c) Tidak ada lintasan dari a ke b dalam (X, τ) , dengan τ topologi diskret.
 - (d) Jika X ruang topologi kompak yang terhubung lintasan secara lokal, maka X hanya mempunyai berhingga banyak komponen lintasan.
 - (e) Setiap ruang yang terhubung lintasan secara lokal adalah terhubung secara lokal.

Bab 20

Hasil Kali Ruang Topologi

Pertanyaan Pemandu

- Apa yang dimaksud dengan hasil kali sejumlah berhingga ruang topologi?
- Bagaimana kita mendefinisikan topologi pada hasil kali sejumlah berhingga ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan peta proyeksi dari hasil kali sejumlah berhingga ruang topologi?
- Bagaimana kita dapat menggunakan peta proyeksi untuk menentukan kekontinuan suatu fungsi menuju hasil kali sejumlah berhingga ruang topologi?
- Apa yang dimaksud dengan subbasis suatu ruang topologi?
- Sifat apa saja yang diwarisi ruang hasil kali dari faktor-faktornya?

Pendahuluan

Dalam [Bab 11](#) kita telah melihat cara menjadikan hasil kali Kartesius dua ruang metrik sebagai ruang metrik. Konstruksi inilah yang memungkinkan kita memperlakukan bidang Kartesius $\mathbb{R}^2$ sebagai ruang metrik dengan metrik biasa. Seperti yang telah kita bahas dalam [Bab 12](#), setiap ruang metrik merupakan ruang topologi, tetapi tidak setiap ruang topologi dapat dimetrikkan. Jadi, pengetahuan tentang cara menjadikan hasil kali ruang-ruang metrik sebagai ruang metrik masih menyisakan pertanyaan tentang cara menjadikan hasil kali ruang-ruang topologi sebagai ruang topologi. Jika kita memiliki dua ruang topologi (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) , pendekatan yang wajar terhadap masalah ini mungkin adalah mengambil sebagai himpunan buka dalam $X \times Y$ semua himpunan berbentuk $U \times V$, dengan $U \in \tau_X$ dan $V \in \tau_Y$. Kita menyelidiki gagasan ini dalam [Aktivitas Persiapan 20.1](#).

Aktivitas Persiapan 20.1 Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau_X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, dan misalkan $Y = \{1, 2\}$ dengan $\tau_Y = \{\emptyset, \{1\}, Y\}$.

(a) Misalkan

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \tau_X \text{ dan } V \in \tau_Y\}. \quad (20.1)$$

Tuliskan semua himpunan dalam $\mathcal{B}$ beserta anggota-anggotanya.

(b) Anggaplah semua himpunan dalam $\mathcal{B}$ merupakan himpunan buka dalam $X \times Y$. Apakah himpunan $A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$ seharusnya merupakan himpunan buka dalam $X \times Y$? Apakah himpunan A berbentuk $U \times V$ untuk suatu himpunan buka U dalam X dan V dalam Y ? Jelaskan. Apakah $\mathcal{B}$ merupakan topologi pada $X \times Y$?

- (c) Jika $\mathcal{B}$ bukan topologi pada $X \times Y$, apakah koleksi himpunan terkecil yang perlu kita tambahkan pada $\mathcal{B}$ agar diperoleh suatu topologi pada $X \times Y$? Jelaskan proses Anda.

Topologi pada Hasil Kali Ruang Topologi

Dalam kegiatan pratinjau, kita mengetahui bahwa kita tidak dapat membentuk topologi pada hasil kali $X \times Y$ dari ruang-ruang topologi (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) hanya dengan mengambil himpunan-himpunan berbentuk $U \times V$, dengan $U \in \tau_X$ dan $V \in \tau_Y$, sebagai himpunan buka, sebab koleksi himpunan tersebut tidak tertutup terhadap gabungan sebarang. Sebagai gantinya, kita dapat mempertimbangkan semua gabungan himpunan berbentuk $U \times V$, dengan U buka dalam X dan V buka dalam Y . Dengan kata lain, anggaplah himpunan-himpunan tersebut sebagai basis bagi topologi pada $X \times Y$.

Kegiatan 20.2 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, dan misalkan $\mathcal{B}$ didefinisikan seperti dalam (20.1). Buktikan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis bagi suatu topologi pada $X \times Y$.

Argumen dari Kegiatan 20.2 dapat diperluas ke hasil kali sejumlah berhingga ruang topologi. Misalkan n bilangan bulat positif dan (X_i, τ_i) ruang topologi untuk i dari 1 sampai n . Misalkan

$$\mathcal{B} = \{\Pi_{i=1}^n O_i \mid O_i \text{ buka dalam } X_i\}.$$

Karena $X_i \in \tau_i$ untuk setiap i , setiap titik dalam $\Pi_{i=1}^n X_i$ termuat dalam suatu himpunan di $\mathcal{B}$. Jadi, $\mathcal{B}$ memenuhi syarat pertama bagi suatu basis. Sekarang kita tunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ memenuhi syarat kedua bagi suatu basis. Misalkan $B_1 = \Pi_{i=1}^n U_i$ dan $B_2 = \Pi_{i=1}^n V_i$ untuk suatu himpunan buka U_i dan V_i dalam X_i . Misalkan $(x_i) \in (B_1 \cap B_2)$. Maka, untuk setiap j , kita memiliki $x_j \in U_j \cap V_j$, sehingga

$$(x_i) \in \Pi_{i=1}^n (U_i \cap V_i).$$

Karena $U_i \cap V_i$ merupakan himpunan buka dalam X_i , diperoleh bahwa $\Pi_{i=1}^n (U_i \cap V_i)$ berada dalam $\mathcal{B}$. Jadi, $\mathcal{B}$ merupakan basis bagi suatu topologi pada $X \times Y$.

Topologi yang dibangkitkan oleh hasil kali himpunan-himpunan buka ini disebut **topologi kotak** atau **topologi hasil kali**.

Definisi 20.1 Misalkan (X_α, τ_α) merupakan suatu koleksi ruang topologi untuk α dalam suatu himpunan indeks berhingga I . **Topologi kotak** atau **topologi hasil kali** pada hasil kali $\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$ adalah topologi dengan basis

$$\mathcal{B} = \{\Pi_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ untuk setiap } \alpha \in I\}.$$

Dengan demikian, kita selalu dapat menjadikan hasil kali ruang-ruang topologi sebagai ruang topologi dengan menggunakan topologi kotak.

Tiga Contoh

Dalam bagian ini, kita membahas tiga contoh khusus hasil kali ruang topologi.

Kegiatan 20.3 Misalkan $X = [1, 2]$ dan $Y = [3, 4]$ sebagai subruang dari $\mathbb{R}$.

- Jelaskan secara terperinci seperti apa ruang hasil kali $X \times Y$.
- Jika mungkin, carilah suatu subhimpunan buka dari $X \times Y$ yang tidak berbentuk $U \times V$, dengan U buka dalam X dan V buka dalam Y .

Kegiatan 20.4 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $Y = S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, yaitu lingkaran satuan sebagai subhimpunan dari $\mathbb{R}^2$.

- Gambarlah $\mathbb{R}$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, himpunan $\mathbb{R}_x = \{(x, y) \mid y \in S^1\}$ merupakan subhimpunan dari $\mathbb{R} \times S^1$. Pada gambar $\mathbb{R}$ Anda, gambarlah $\mathbb{R}_x$ untuk x yang sama dengan -1 , 0 , dan 1 . Jelaskan secara terperinci seperti apa ruang hasil kali $\mathbb{R} \times S^1$.
- Perhatikan himpunan-himpunan berbentuk $B \cap S^1$, dengan B bola buka dalam $\mathbb{R}^2$ (himpunan yang relatif buka dalam S^1). Seperti apa himpunan-himpunan tersebut?
- Jelaskan bentuk elemen-elemen basis bagi topologi hasil kali pada $\mathbb{R} \times S^1$ yang diperoleh dari hasil kali berbentuk $U \times V$, dengan U interval buka dalam $\mathbb{R}$ dan V irisan S^1 dengan suatu bola buka dalam $\mathbb{R}^2$.

Kegiatan 20.5 Misalkan $2S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ merupakan lingkaran berjari-jari 2 yang berpusat di titik asal sebagai subhimpunan dari $\mathbb{R}^2$. Dalam kegiatan ini, kita menyelidiki ruang $2S^1 \times S^1$.

- Gambarlah $2S^1$ pada bidang xy . Untuk setiap $p \in 2S^1$, himpunan $S_p^1 = \{(p, y) \mid y \in S^1\}$ merupakan subhimpunan dari $2S^1 \times S^1$. Pada gambar $2S^1$ Anda, gambarlah S_p^1 untuk p yang sama dengan $(2, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dan $(0, 2)$. Arahkan gambar-gambar tersebut sehingga salinan S^1 tegak lurus terhadap $2S^1$. Jelaskan secara terperinci seperti apa ruang hasil kali $2S^1 \times S^1$.
- Perhatikan himpunan-himpunan berbentuk $B \cap S^1$, dengan B bola buka dalam $\mathbb{R}^2$. Seperti apa himpunan-himpunan tersebut?
- Jelaskan bentuk elemen-elemen basis bagi topologi hasil kali pada $2S^1 \times S^1$ yang diperoleh dari hasil kali berbentuk $U \times V$, dengan U irisan $2S^1$ dengan suatu bola buka dalam $\mathbb{R}^2$ dan V irisan lingkaran satuan dengan suatu bola buka dalam bidang yang sama.

Proyeksi dan Fungsi Kontinu pada Ruang Hasil Kali

Diberikan ruang-ruang topologi (X_1, τ_1) dan (X_2, τ_2) , kita mendefinisikan $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ dan $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ dengan $\pi_1((x, y)) = x$ dan $\pi_2((x, y)) = y$. Fungsi π_1 dan π_2 ini merupakan **proyeksi** dari $X_1 \times X_2$ masing-masing ke X_1 dan X_2 . Fungsi-fungsi proyeksi ini dapat membantu kita menentukan kapan suatu fungsi f dari ruang topologi Y ke $X_1 \times X_2$ kontinu.

Kegiatan 20.6 Misalkan (X_1, τ_1) dan (X_2, τ_2) merupakan ruang topologi dan misalkan O_1 himpunan buka dalam X_1 .

- Tentukan himpunan yang sama dengan $\pi_1^{-1}(O_1)$. Periksalah dugaan Anda.
- Jelaskan mengapa π_1 kontinu.

Argumen yang sama seperti dalam [Kegiatan 20.6](#) menunjukkan bahwa π_2 juga merupakan fungsi kontinu. Secara umum, jika $X = \prod_{i=1}^n X_i$ merupakan hasil kali berhingga ruang-ruang topologi, maka proyeksi $\pi_k : X \rightarrow X_k$ merupakan fungsi kontinu untuk setiap k , dengan $\pi_k((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_k$.

Misalkan $O = \prod_{i=1}^n O_i$ merupakan himpunan buka basis dalam $X = \prod_{i=1}^n X_i$, dengan X_i ruang topologi untuk setiap i . Kita dapat memperluas hasil [Kegiatan 20.6](#) untuk memperoleh

$$\pi_i^{-1}(O_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n.$$

Jadi,

$$\Pi_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(O_i).$$

Dengan demikian, setiap himpunan buka basis merupakan irisan berhingga himpunan-himpunan berbentuk $\pi_i^{-1}(O_i)$, dengan O_i buka dalam X_i . Apabila hal ini terjadi, kita menyebut koleksi himpunan berbentuk $\pi_i^{-1}(O_i)$ sebagai **subbasis** topologi tersebut.

Definisi 20.2 Misalkan (X, τ) ruang topologi. Subhimpunan $\mathcal{S}$ dari τ merupakan **subbasis** atau **subbasis** bagi τ jika himpunan semua irisan berhingga elemen-elemen $\mathcal{S}$ merupakan basis bagi τ .

Sebagai contoh, karena irisan berhingga interval berbentuk $(-\infty, b)$ dan (a, ∞) menghasilkan semua interval berbentuk (a, b) , koleksi $\mathcal{S} = \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ merupakan subbasis bagi topologi standar pada $\mathbb{R}$. Perhatikan bahwa koleksi itu sendiri bukan basis bagi topologi standar pada $\mathbb{R}$. Jika $X = \Pi_{i=1}^n X_i$ merupakan hasil kali ruang-ruang topologi, contoh subbasis lainnya adalah koleksi

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^n \{\pi_i^{-1}(O_i) \mid O_i \text{ buka dalam } X_i\}.$$

Himpunan ini merupakan subbasis bagi topologi hasil kali pada X (pemeriksaannya diserahkan kepada [Latihan 1](#)).

Kita mencatat di sini bahwa terdapat topologi lain, yang disebut **topologi hasil kali**, pada X dengan subbasis $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, dengan

$$S_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \text{ buka dalam } X_\alpha\}.$$

Karena alasan yang tidak akan kita bahas, topologi hasil kali lebih disukai daripada topologi kotak untuk hasil kali tak berhingga (banyak teorema penting yang berlaku bagi hasil kali berhingga tidak berlaku bagi hasil kali tak berhingga dengan topologi kotak, tetapi berlaku dengan topologi hasil kali). Namun, topologi hasil kali dan topologi kotak sama untuk hasil kali berhingga. Karena kita tidak akan membahas hasil kali tak berhingga di sini, kita tidak perlu mempersoalkan perbedaannya. Untuk keperluan kita, istilah “topologi kotak” dan “topologi hasil kali” akan digunakan secara bergantian.

Seperti yang telah kita bahas, sering kali lebih mudah mendefinisikan topologi dengan basis atau subbasis daripada menjelaskan semua himpunan dalam topologi tersebut. Sebagaimana dapat kita duga, karena kekontinuan suatu fungsi dapat ditentukan melalui prapeta elemen-elemen basis, kekontinuan fungsi juga dapat ditentukan melalui prapeta elemen-elemen subbasis.

Kegiatan 20.7 Buktikan [Teorema 20.3](#).

Petunjuk. Ingat bahwa f kontinu jika $f^{-1}(B)$ buka dalam X untuk setiap himpunan buka basis B .

Teorema 20.3 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, misalkan $\mathcal{S}$ subbasis bagi τ_Y , dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Jika $f^{-1}(S)$ buka dalam X untuk setiap $S \in \mathcal{S}$, maka f kontinu.

Sekarang misalkan X_1, X_2 , dan Y merupakan ruang topologi, serta $f : Y \rightarrow X_1 \times X_2$ suatu fungsi. Maka $\pi_1 \circ f$ memetakan Y ke X_1 dan $\pi_2 \circ f$ memetakan Y ke X_2 . Karena komposisi fungsi-fungsi kontinu bersifat kontinu, kita melihat bahwa jika f kontinu, maka $\pi_1 \circ f$ dan $\pi_2 \circ f$ juga kontinu. Untuk menentukan apakah f kontinu, akan berguna jika kita mengetahui apakah kebalikannya juga benar. Gagasan utama dalam pembuktiannya adalah hasil [Latihan 9](#): jika R, S , dan T merupakan himpunan, serta $g : R \rightarrow S$ dan $h : S \rightarrow T$ merupakan fungsi, maka $(h \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(h^{-1}(O))$ untuk setiap subhimpunan O dari T .

Sekarang kita dapat menggunakan proyeksi untuk menentukan kapan fungsi menuju ruang hasil kali bersifat kontinu.

Teorema 20.4 Misalkan X_i untuk i dari 1 sampai n dan Y merupakan ruang topologi, serta misalkan $f : Y \rightarrow \prod_{i=1}^n X_i$ suatu fungsi. Maka f kontinu jika dan hanya jika $\pi_i \circ f$ kontinu untuk setiap i .

Bukti. Misalkan X_i untuk i dari 1 sampai n dan Y merupakan ruang topologi, serta misalkan $f : Y \rightarrow \prod X_i$ suatu fungsi. Jika f kontinu, fakta bahwa setiap π_i kontinu dan bahwa komposisi fungsi-fungsi kontinu bersifat kontinu menunjukkan bahwa $\pi_i \circ f$ kontinu untuk setiap i .

Sekarang misalkan $\pi_i \circ f$ kontinu untuk setiap i . Ingat bahwa

$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(O_i) \mid O_i \text{ buka dalam } X_i\}$$

merupakan subbasis bagi topologi hasil kali pada $\prod_{i=1}^n X_i$. Untuk membuktikan bahwa f kontinu, [Teorema 20.3](#) memberi tahu kita bahwa cukup ditunjukkan $f^{-1}(S)$ buka untuk setiap S dalam $\mathcal{S}$. Misalkan O_i himpunan buka dalam X_i . [Latihan 9](#) memberi tahu kita bahwa

$$f^{-1}(\pi_i^{-1}(O_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(O_i),$$

yang buka dalam Y karena $\pi_i \circ f$ kontinu. Oleh karena itu, f kontinu. ■

Sifat-Sifat Hasil Kali Ruang Topologi

Wajar untuk menanyakan sifat topologis apa dari ruang-ruang topologi (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) yang diwarisi oleh hasil kali $X \times Y$. Kita telah mempelajari ruang Hausdorff, ruang terhubung, dan ruang kompak; sekarang kita membahas sifat-sifat tersebut.

Kegiatan 20.8 Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang Hausdorff.

- Apa yang perlu kita tunjukkan untuk membuktikan bahwa ruang $X \times Y$ dengan topologi hasil kali bersifat Hausdorff?
- Misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Apa yang dapat kita simpulkan mengenai x_1 dan x_2 dari fakta bahwa X bersifat Hausdorff? Apa yang dapat kita katakan mengenai y_1 dan y_2 ?
- Lengkapilah pembuktian teorema berikut.

Teorema 20.5 Jika (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang Hausdorff, maka $X \times Y$ dengan topologi hasil kali merupakan ruang Hausdorff.

Pembuktian bahwa hasil kali ruang-ruang terhubung bersifat terhubung, hasil kali ruang-ruang terhubung lintasan bersifat terhubung lintasan, dan hasil kali ruang-ruang kompak bersifat kompak sedikit lebih rumit. Untuk membuktikan bahwa hasil kali dua ruang terhubung bersifat terhubung, kita akan menggunakan hasil [Kegiatan 18.7](#) dalam [Bab 18](#): gabungan subhimpunan-subhimpunan terhubung bersifat terhubung jika irisan subhimpunan-subhimpunan tersebut tidak kosong. Salah satu akibat hasil ini adalah sebagai berikut.

Lema 20.6 Misalkan X ruang topologi, dan misalkan A_α subhimpunan terhubung dari X untuk setiap α dalam suatu himpunan indeks I . Misalkan B subhimpunan terhubung dari X sedemikian sehingga $A_\alpha \cap B \neq \emptyset$ untuk setiap $\alpha \in I$. Maka $B \cup (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$ terhubung.

Bukti. Misalkan X ruang topologi, dan misalkan A_α subhimpunan terhubung dari X untuk setiap α dalam suatu himpunan indeks I . Misalkan B subhimpunan terhubung dari X sedemikian sehingga $A_\alpha \cap B \neq \emptyset$ untuk setiap $\alpha \in I$. Untuk setiap $\alpha \in I$, misalkan $B_\alpha = B \cup A_\alpha$. Misalkan $\beta \in I$. Karena $B \cap A_\beta \neq \emptyset$, hasil [Kegiatan 18.7](#) menunjukkan bahwa B_β terhubung. Karena B tidak kosong dan $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$, kita melihat bahwa $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \neq \emptyset$. Hasil [Kegiatan 18.7](#) memungkinkan kita menyimpulkan bahwa $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ terhubung.

Namun,

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) = B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right),$$

sehingga $B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ terhubung. ■

Kita akan menggunakan [Lema 20.6](#) untuk menunjukkan bahwa hasil kali ruang-ruang terhubung bersifat terhubung.

Teorema 20.7 *Jika (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi terhubung, maka $X \times Y$ dengan topologi hasil kali merupakan ruang topologi terhubung.*

Bukti. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi terhubung. Untuk membuktikan bahwa $X \times Y$ terhubung, kita akan menuliskan $X \times Y$ sebagai gabungan subruang-subruang terhubung yang beririsan tidak kosong. Misalkan $a \in X$. Ruang $X_a = \{a\} \times Y$ homeomorfik dengan Y melalui pemetaan i yang mengirim $(a, t) \in \{a\} \times Y$ ke titik $t \in Y$. Karena Y terhubung, X_a juga terhubung. Misalkan $b \in Y$. Ruang $Y_b = X \times \{b\}$ homeomorfik dengan X melalui pemetaan i yang mengirim $(s, b) \in X \times \{b\}$ ke titik $s \in X$. Karena X terhubung, Y_b juga terhubung. (Pemeriksaan homeomorfisme-homeomorfisme ini diserahkan kepada pembaca.) Titik (a, b) berada dalam $X_a \cap Y_b$, sehingga $X_a \cap Y_b \neq \emptyset$ untuk setiap $b \in Y$. Berdasarkan [Lema 20.6](#), diperoleh bahwa $X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right)$ terhubung. Tinggal dibuktikan bahwa $X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right) = X \times Y$; setelah itu kita telah menunjukkan bahwa $X \times Y$ terhubung. Fakta bahwa $X_a \subseteq X \times Y$ dan $Y_t \subseteq X \times Y$ untuk setiap $t \in Y$ menyiratkan $X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right) \subseteq X \times Y$. Jadi, tinggal ditunjukkan bahwa $X \times Y \subseteq X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right)$. Misalkan $(u, v) \in X \times Y$. Maka $u \in X$, $v \in Y$, dan $(u, v) \in Y_v$. Jadi, $X \times Y \subseteq X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right)$, sehingga $X \times Y = X_a \cup \left(\bigcup_{t \in Y} Y_t \right)$. Oleh karena itu, $X \times Y$ terhubung. ■

Setelah mengetahui bahwa hasil kali ruang-ruang topologi terhubung bersifat terhubung, kita dapat memperluas hasil tersebut melalui induksi ke sembarang banyaknya ruang terhubung yang berhingga.

Corollary 20.8 *Misalkan X_k ruang topologi terhubung untuk k dari 1 sampai n . Maka hasil kali $\prod_{k=1}^n X_k$ terhubung.*

Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 6](#).

Kita mengakhiri bagian ini dengan menunjukkan bahwa hasil kali ruang-ruang topologi kompak bersifat kompak. Hasil kali berhingga ruang-ruang terhubung lintasan dan hasil kali berhingga ruang-ruang kompak juga masing-masing bersifat terhubung lintasan dan kompak. Pembuktiannya diserahkan kepada [Latihan 7](#) dan [Latihan 8](#).

Teorema 20.9 *Jika X dan Y merupakan ruang topologi kompak, maka $X \times Y$ merupakan ruang topologi kompak dengan topologi hasil kali.*

Bukti. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi kompak. Misalkan $\mathcal{C} = \{O_\alpha\}$ selimut buka bagi $X \times Y$, dengan α berada dalam suatu himpunan indeks I . Misalkan $a \in X$ dan misalkan $Y_a = \{a\} \times Y$. Karena Y_a homeomorfik dengan Y , kita mengetahui bahwa Y_a kompak. Koleksi $\{O_\alpha \cap Y_a\}$ merupakan selimut buka bagi Y_a , sehingga memiliki subselimut berhingga $\{O_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n}$. Himpunan $N_a = \bigcup_{1 \leq i \leq n} O_{\alpha_i}$ merupakan himpunan buka yang memuat Y_a . Kita akan menunjukkan bahwa terdapat lingkungan W_a dari a sedemikian sehingga N_a memuat seluruh himpunan $W_a \times Y$.

Selimuti himpunan Y_a dengan himpunan-himpunan buka yang termuat dalam N_a (karena N_a buka, kita dapat mengiris sembarang himpunan buka dengan N_a dan tetap memperoleh himpunan buka). Setiap himpunan buka merupakan gabungan elemen-elemen basis, sehingga kita dapat menyelimuti Y_a dengan elemen-elemen basis $U \times V$ yang termuat dalam N_a . Karena Y_a kompak, terdapat koleksi berhingga elemen basis $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2, \dots, U_m \times V_m$ yang termuat dalam N_a dan menyelimuti Y_a . Anggaplah setiap $U_i \times V_i$ beririsan dengan Y_a (jika tidak, kita dapat membuang himpunan tersebut dan tetap memiliki selimut). Misalkan $W_a = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$. Karena $a \in U_i$ untuk setiap i , kita mengetahui bahwa W_a tidak kosong. Setiap U_i buka dalam X , sehingga W_a buka dalam X . Jadi, W_a merupakan lingkungan a dalam

X . Sekarang kita tunjukkan bahwa $W_a \times Y \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_i \times V_i$. Misalkan $(x, y) \in W_a \times Y$. Karena koleksi $\{U_i \times V_i\}_{1 \leq i \leq m}$ menyelimuti Y_a , titik (a, y) berada dalam $U_k \times V_k$ untuk suatu k di antara 1 dan m . Jadi, $y \in V_k$. Namun, $x \in W_a = \bigcap_{1 \leq i \leq m} U_i$, sehingga $x \in U_k$. Jadi, $(x, y) \in U_k \times V_k$, dan kita menyimpulkan bahwa $W_a \times Y \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_i \times V_i$.

Jadi, untuk setiap $a \in X$, himpunan N_a memuat himpunan berbentuk $W_a \times Y$, dengan W_a suatu lingkungan dari a dalam X . Maka $W_a \times Y$ diselimuti oleh suatu subselimut berhingga dari selimut buka $\mathcal{C}$ bagi $X \times Y$. Koleksi $\{W_a \times Y\}_{a \in X}$ merupakan selimut buka bagi $X \times Y$. Karena X kompak, terdapat subselimut berhingga $W_1, W_2, \dots, W_r$ dari selimut buka $\{W_a\}_{a \in X}$ bagi X . Koleksi tersebut benar-benar menyelimuti X . Dengan demikian, himpunan-himpunan $W_1 \times Y, W_2 \times Y, \dots, W_r \times Y$ menyelimuti $X \times Y$. Untuk setiap i , himpunan $W_i \times Y$ diselimuti oleh berhingga banyaknya himpunan dalam $\mathcal{C}$, sehingga koleksi semua himpunan tersebut membentuk subselimut berhingga bagi $X \times Y$ dari $\mathcal{C}$. Oleh karena itu, $X \times Y$ kompak. ■

Ringkasan

Gagasan penting yang kita bahas dalam bagian ini mencakup hal-hal berikut. Sepanjang bagian ini, misalkan (X_i, τ_i) merupakan ruang topologi untuk i dari 1 sampai suatu bilangan bulat n .

- Hasil kali ruang-ruang X_i adalah hasil kali Kartesius $\Pi_{i=1}^n X_i$.
- Himpunan

$$\mathcal{B} = \{\Pi_{i=1}^n O_i \mid O_i \text{ buka dalam } X_i\}$$
 merupakan basis bagi topologi kotak pada $\Pi_{i=1}^n X_i$.
- Pemetaan $\pi_j : \Pi_{i=1}^n X_i \rightarrow X_j$ yang didefinisikan oleh $\pi_j((x_i)) = x_j$ merupakan peta proyeksi ke X_j untuk j dari 1 sampai n .
- Suatu fungsi f yang memetakan ruang topologi Y ke $\Pi_{i=1}^n X_i$ kontinu jika dan hanya jika $\pi_j \circ f$ kontinu untuk setiap j dari 1 sampai n .
- Misalkan (X, τ) ruang topologi. Subhimpunan $\mathcal{S}$ dari τ merupakan subbasis bagi τ jika koleksi yang dibangun dari $\mathcal{S}$, yaitu himpunan semua irisan berhingga elemen-elemen $\mathcal{S}$, merupakan basis bagi τ .
- Jika setiap X_i (a) terhubung, (b) terhubung lintasan, atau (c) kompak, maka $\Pi_{i=1}^n X_i$ masing-masing (a) terhubung, (b) terhubung lintasan, atau (c) kompak terhadap topologi hasil kali.

Latihan

1.

- (a) Misalkan (Y_1, τ_1) dan (Y_2, τ_2) merupakan ruang topologi, dengan $Y_1 = \{a, b, c\}$ dan $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, Y_1\}$, serta $Y_2 = \{1, 2\}$ dan $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, Y_2\}$. Carilah semua himpunan berbentuk

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(O_1) \mid O_1 \text{ buka dalam } Y_1\} \cup \{\pi_2^{-1}(O_2) \mid O_2 \text{ buka dalam } Y_2\}$$

dan periksalah bahwa himpunan-himpunan tersebut membangkitkan topologi hasil kali pada $Y_1 \times Y_2$.

- (b) Misalkan X_i , untuk i dari 1 sampai n , merupakan ruang topologi dan misalkan $X = \Pi_{i=1}^n X_i$. Tunjukkan bahwa koleksi

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^n \{\pi_i^{-1}(O_i) \mid O_i \text{ buka dalam } X_i\}$$

merupakan subbasis bagi topologi kotak pada X .

2. Misalkan X merupakan himpunan bilangan real dengan topologi metrik Euklides standar dan misalkan Y merupakan bilangan real dengan topologi diskret.

(a) Jelaskan mengapa himpunan semua “interval horizontal” berbentuk

$$I = (a, b) \times \{c\} = \{(x, c) \mid a < x < b\}$$

merupakan basis bagi topologi hasil kali pada $X \times Y$.

(b) Carilah interior dan penutup setiap subhimpunan $X \times Y$ berikut.

(i) $A = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\}$

(ii) $B = \{(0, y) \mid 0 \leq y < 1\}$

(iii) $C = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$

3. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan ruang topologi, misalkan A_1 subhimpunan dari X_1 , dan misalkan A_2 subhimpunan dari X_2 . Gunakan topologi hasil kali pada $X_1 \times X_2$. Buktikan setiap pernyataan berikut.

(a) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$

(b) $\text{Int}(A_1 \times A_2) \subseteq \text{Int}A_1 \times \text{Int}A_2$

4. Misalkan X dan Y merupakan ruang topologi, dan misalkan $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ serta $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ merupakan koleksi himpunan buka masing-masing dalam X dan Y , untuk suatu himpunan indeks I dan J . Tunjukkan bahwa

$$\bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (U_\alpha \times V_\beta) = \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} V_\beta \right).$$

5.

(a) Jika S_1, S_2, T_1 , dan T_2 merupakan himpunan, tunjukkan bahwa

$$(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2).$$

(b) Jika $\mathcal{B}_X$ merupakan basis bagi topologi τ_X pada ruang X dan $\mathcal{B}_Y$ merupakan basis bagi topologi τ_Y pada ruang Y , tunjukkan bahwa $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ merupakan basis bagi topologi hasil kali pada $X \times Y$.

6. Buktikan bahwa hasil kali sembarang banyaknya ruang terhubung yang berhingga bersifat terhubung.

7. Buktikan bahwa hasil kali sembarang banyaknya ruang kompak yang berhingga bersifat kompak.

8.

(a) Buktikan bahwa jika (X_1, τ_1) dan (X_2, τ_2) merupakan ruang topologi terhubung lintasan, maka $X_1 \times X_2$ dengan topologi hasil kali merupakan ruang topologi terhubung lintasan.

(b) Buktikan bahwa hasil kali sembarang banyaknya ruang terhubung lintasan yang berhingga bersifat terhubung lintasan.

9. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan ruang topologi dan $X = X_1 \times X_2$. Benarkah bahwa jika X kompak, maka X_1 dan X_2 keduanya kompak? Buktikan jawaban Anda.

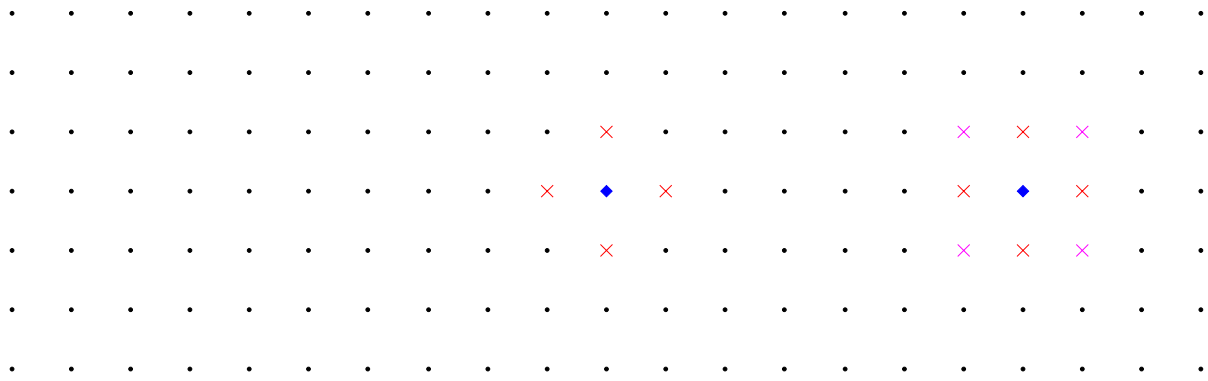
10. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan ruang topologi dan misalkan $\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ pemetaan proyeksi. Kita telah menunjukkan bahwa π_i kontinu. Sekarang tunjukkan bahwa π_i merupakan pemetaan buka

untuk i yang sama dengan 1 dan 2. Gunakan topologi hasil kali standar.

11. Misalkan X_1 dan X_2 merupakan ruang topologi dengan kardinalitas sekurang-kurangnya 2. Misalkan $X = X_1 \times X_2$. Buktikan bahwa topologi ruang hasil kali pada $X = X_1 \times X_2$ merupakan topologi diskret jika dan hanya jika topologi pada X_1 dan X_2 merupakan topologi diskret.
12. Untuk setiap pernyataan berikut, jawablah benar jika pernyataan itu selalu benar. Jika pernyataan itu hanya kadang-kadang benar atau tidak pernah benar, jawablah salah dan berikan contoh konkret yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah. Jika suatu pernyataan benar, jelaskan alasannya. Sepanjang latihan ini, misalkan X_1 dan X_2 merupakan ruang topologi dan $X = X_1 \times X_2$ dengan topologi hasil kali.
 - (a) Jika $A_1 \subseteq X_1$ dan $A_2 \subseteq X_2$, maka $(X_1 \times X_2) \setminus (A_1 \times A_2) = (X_1 \setminus A_1) \times (X_2 \setminus A_2)$.
 - (b) Jika $A_1 \subseteq X_1$ dan $A_2 \subseteq X_2$, maka $\text{Bdry}(A_1 \times A_2) \subseteq \text{Bdry}A_1 \times \text{Bdry}A_2$.
 - (c) Jika $A_1 \subseteq X_1$ dan $A_2 \subseteq X_2$, maka $\text{Bdry}A_1 \times \text{Bdry}A_2 \subseteq \text{Bdry}(A_1 \times A_2)$.
 - (d) Jika O_1 subhimpunan buka dari X_1 dan O_2 subhimpunan buka dari X_2 , maka $O_1 \times O_2$ merupakan subhimpunan buka dari $X_1 \times X_2$.
 - (e) Jika O_1 subhimpunan dari X_1 dan O_2 subhimpunan dari X_2 , serta $O_1 \times O_2$ subhimpunan buka dari $X_1 \times X_2$, maka O_1 merupakan subhimpunan buka dari X_1 dan O_2 merupakan subhimpunan buka dari X_2 .
 - (f) Jika C_1 subhimpunan tertutup dari X_1 dan C_2 subhimpunan tertutup dari X_2 , maka $C_1 \times C_2$ merupakan subhimpunan tertutup dari $X_1 \times X_2$.
 - (g) Jika C_1 subhimpunan dari X_1 dan C_2 subhimpunan dari X_2 , serta $C_1 \times C_2$ subhimpunan tertutup dari $X_1 \times X_2$, maka C_1 merupakan subhimpunan tertutup dari X_1 dan C_2 merupakan subhimpunan tertutup dari X_2 .

Penerapan Hasil Kali Ruang Topologi

Komputer merepresentasikan informasi dari dunia nyata secara digital. Artinya, layar komputer tersusun atas piksel-piksel diskret yang digunakan untuk meniru informasi kontinu dari dunia nyata. Jadi, kita hidup dalam $\mathbb{R}^3$, tetapi layar komputer merepresentasikan informasi dalam $\mathbb{Z}^2$, seperti yang ditunjukkan dalam [Gambar 20.10](#). Kita perlu dapat meniru informasi kontinu secara akurat dari data digital. Salah satu gagasan utamanya adalah memiliki versi digital Teorema Kurva Jordan, yang menyatakan bahwa kurva Jordan (gelung kontinu yang tidak berpotongan dengan dirinya sendiri) pada bidang Euklides memisahkan sisa bidang tersebut menjadi dua komponen terhubung (bagian dalam dan bagian luar kurva). Selain itu, jika satu titik dibuang dari kurva Jordan, sisa bidang tersebut menjadi terhubung. Teorema Kurva Jordan digital penting karena kita hanya perlu menyimpan kurva-kurva Jordan yang menentukan daerah, beserta warna daerah-daerah tersebut, alih-alih harus menyimpan warna setiap piksel dalam sebuah citra.



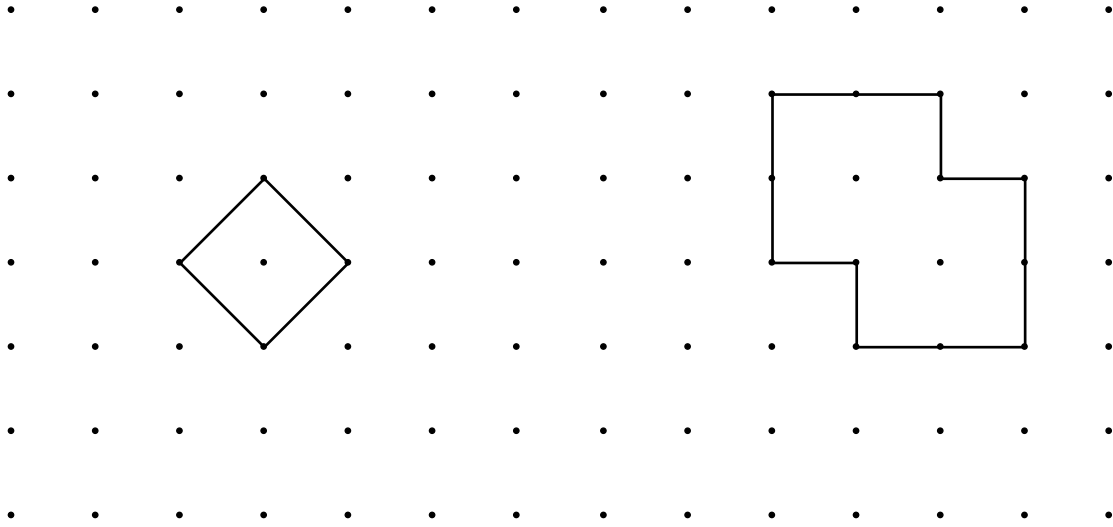
Gambar 20.10 Kiri: bidang digital. Tengah: tetangga-4 dari suatu titik. Kanan: tetangga-8 dari suatu titik.

Langkah awal yang wajar untuk membangun topologi digital adalah mengidentifikasi lingkungan. Gagasan lingkungan adalah mempertimbangkan elemen-elemen yang dekat dengan suatu titik, dan dalam dunia digital terdapat beberapa cara untuk melakukannya. Diberikan titik (x, y) dalam $\mathbb{Z}^2$, tetangga-4 dari (x, y) adalah titik-titik yang bersebelahan secara vertikal atau horizontal dengan (x, y) , yaitu titik-titik $(x \pm 1, y)$ dan $(x, y \pm 1)$. Tetangga-8 dari (x, y) adalah tetangga-4 beserta titik-titik yang bersebelahan secara diagonal dengan (x, y) , yaitu $(x \pm 1, y)$, $(x, y \pm 1)$, dan $(x \pm 1, y \pm 1)$. Tetangga-tetangga ini ditunjukkan dalam [Gambar 20.10](#), dengan tanda silang yang menunjukkan tetangga dari titik yang disorot.

Dalam kasus kontinu, kita mendefinisikan lintasan antara dua titik sebagai fungsi kontinu dari $[0, 1]$ ke ruang tersebut. Namun, kita tidak dapat memiliki kekontinuan dengan cara yang sama dalam dunia digital. Jadi, kita mendefinisikan lintasan dengan bergerak melalui titik-titik tetangga. Artinya, jika k sama dengan 4 atau 8, lintasan- k adalah barisan berhingga $p_0, p_1, \dots, p_m$ dalam $\mathbb{Z}^2$ sedemikian sehingga p_0 merupakan tetangga- k dari p_1 , p_1 merupakan tetangga- k dari p_2 , $\dots$, dan p_{m-1} merupakan tetangga- k dari p_m .

Kegiatan 20.9

- (a) Tunjukkan bahwa terdapat lintasan-4 yang menghubungkan sembarang dua titik dalam $\mathbb{Z}^2$. Kemudian jelaskan mengapa terdapat lintasan-8 yang menghubungkan sembarang dua titik dalam $\mathbb{Z}^2$.
- (b) Dalam kasus kontinu, setiap kurva Jordan memisahkan $\mathbb{R}^2$ menjadi dua daerah terhubung. Untuk memperoleh teorema serupa dalam kasus diskret, kita memerlukan konsep keterhubungan dalam $\mathbb{Z}^2$. Setiap citra tersusun atas sejumlah berhingga piksel, sehingga kita dapat menganggap citra digital berada dalam subruang berhingga dari $\mathbb{Z}^2$. Karena keterhubungan dan keterhubungan lintasan ekuivalen dalam ruang topologi berhingga, kita menggunakan gagasan lintasan- k untuk mendefinisikan keterhubungan dalam $\mathbb{Z}^2$. Kita mengatakan bahwa subhimpunan S dari $\mathbb{Z}^2$ *terhubung- k* jika sembarang dua titiknya dapat dihubungkan oleh lintasan- k dalam S . [Gambar 20.11](#) menunjukkan dua himpunan (kurva) pada bidang digital melalui titik-titik yang menghubungkan ruas-ruas garis (contoh diambil dari *A Topological Approach to Digital Topology*, T. Yung Kong, R. Kopperman, dan P. Meyer, *American Mathematical Monthly*, 98 (1991), no. 10, 901–917). Misalkan S_1 himpunan yang ditunjukkan di sebelah kiri dalam [Gambar 20.11](#) dan S_2 himpunan di sebelah kanan.



Gambar 20.11 Himpunan S_1 (kiri) dan S_2 (kanan) pada bidang digital.

Apakah S_1 terhubung-4? Apakah S_1 terhubung-8? Periksa jawaban Anda. Ulangi untuk S_2 .

- (c) Sekarang kita dapat mendefinisikan kurva Jordan- k sebagai himpunan berhingga terhubung- k yang setiap titiknya memiliki tepat dua tetangga- k di dalam himpunan tersebut. Apakah S_1 merupakan kurva Jordan-4? Apakah S_1 merupakan kurva Jordan-8? Periksa jawaban Anda. Ulangi untuk S_2 .
- (d) Seperti biasa, kita mendefinisikan komponen sebagai himpunan terhubung maksimal. Jelaskan mengapa S_1 merupakan kurva Jordan-8 yang komplementnya terhubung dan mengapa S_2 merupakan kurva Jordan-4 yang komplementnya terdiri atas tiga komponen-4 terhubung. Contoh ini menunjukkan bahwa tidak terdapat Teorema Kurva Jordan dalam topologi digital jika kita menggunakan konsep standar keterhubungan- k dengan k sama dengan 4 atau 8. Jadi, baik ketetanggaan-4 maupun ketetanggaan-8 tidak memberikan analog Teorema Kurva Jordan; kita perlu menggunakan kombinasi keduanya. Tepatnya, kurva Jordan-4 dengan sekurang-kurangnya lima titik memisahkan $\mathbb{Z}^2$ menjadi tepat dua komponen-8, dan kurva Jordan-8 dengan sekurang-kurangnya lima titik memisahkan $\mathbb{Z}^2$ menjadi tepat dua komponen-4.

Dalam [Kegiatan 20.9](#), kita membahas pentingnya Teorema Kurva Jordan digital. Dalam kegiatan berikut, kita menjelaskan topologi tempat teorema semacam itu berlaku.

Sekarang kita ingin mendefinisikan kurva Jordan digital. Langkah pertama kita adalah mendefinisikan **lintasan digital**. Ingat bahwa lintasan dalam ruang topologi adalah daerah hasil suatu fungsi kontinu dari interval $[0, 1]$ ke ruang tersebut. Jadi, kita memerlukan konsep interval digital. Jika $z_1 < z_2$ dalam $(\mathbb{Z}, \tau_1)$, **interval digital** $[z_1, z_2]$ adalah himpunan

$$[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

Bilangan bulat z_1 dan z_2 disebut **titik ujung** interval digital $[z_1, z_2]$.

Definisi 20.12 Misalkan X ruang topologi.

Lintasan digital dalam X adalah daerah hasil suatu fungsi kontinu dari interval digital ke X .

Busur digital dalam X adalah daerah hasil suatu homeomorfisme dari interval digital ke X .

Definisi 20.13 Kurva Jordan digital adalah himpunan terhubung berhingga J dengan $|J| \geq 4$ sedemikian sehingga $J \setminus \{j\}$ merupakan busur digital untuk setiap $j \in J$.

Kegiatan 20.10 Perhatikan $\mathbb{Z}$ dengan topologi τ_1 yang memiliki basis $\{B(n)\}$, dengan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Topologi ini disebut **topologi garis digital** atau **topologi Khalimsky** pada $\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa semua himpunan berbentuk $\{n\}$ buka jika n ganjil.

- (a) Tunjukkan bahwa setiap himpunan berbentuk $\{n\}$, dengan n genap, tertutup dalam topologi garis digital.
- (b) Untuk mendefinisikan **topologi Khalimsky** pada $\mathbb{Z}^2$, kita menggunakan topologi hasil kali. Jelaskan mengapa koleksi himpunan $\{B(m, n)\}$, dengan

$$B(m, n) = \begin{cases} \{(m, n)\} & m \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \{(m-i, n-j) \mid -1 \leq i \leq 1, -1 \leq j \leq 1\} & m \text{ dan } n \text{ genap,} \\ \{(m, n-1), (m, n), (m, n+1)\} & m \text{ ganjil dan } n \text{ genap,} \\ \{(m-1, n), (m, n), (m+1, n)\} & m \text{ genap dan } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

merupakan basis bagi topologi Khalimsky τ_2 pada $\mathbb{Z}^2$. (Topologi ini pertama kali diterbitkan oleh E. Khalimsky dalam *Applications of connected ordered topological spaces in topology*, Conference of math. departments of Povolsia, 1970.)

- (c) Misalkan

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)\}, \\ S_2 &= \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (1, 1)\}, \text{ dan} \\ S_3 &= \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1)\}. \end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa S_1 bukan lintasan digital, tetapi S_2 dan S_3 merupakan lintasan digital.

- (d) Untuk menghasilkan Teorema Kurva Jordan digital, kita menggunakan definisi kurva Jordan digital di atas.

Jadi, setiap kurva Jordan digital merupakan himpunan terhubung. Tunjukkan bahwa setiap lintasan digital berhingga dalam $\mathbb{Z}^2$ merupakan himpunan terhubung.

Petunjuk. Apakah setiap interval digital terhubung?

- (e) Kesimpulan pembahasan ini adalah teorema setelah kegiatan ini (pembuktiannya dapat ditemukan dalam A Topological Approach to Digital Topology, T. Yung Kong, R. Kopperman, dan P. Meyer, *American Mathematical Monthly*, 98 (1991), no. 10, 901–917).

Dua komponen dalam [Teorema 20.14](#) membagi bidang digital menjadi daerah tak berhingga (bagian luar) dan daerah berhingga (bagian dalam).

Tunjukkan bahwa S_2 merupakan kurva Jordan digital (dan karena itu membagi $\mathbb{Z}^2$ menjadi dua komponen terhubung).

Teorema 20.14 Jika J merupakan kurva Jordan digital dalam bidang digital $\mathbb{Z}^2$, maka $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ memiliki tepat dua komponen.

Kurva Jordan digital, seperti yang dijelaskan dalam [Kegiatan 20.10](#), penting agar kita memiliki Teorema Kurva Jordan digital. Christer O. Kiselman menyajikan teorema berikut untuk mengarakterisasi kurva Jordan digital dalam *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer-Verlag, 2000, hlm. 46–56.

Teorema 20.15 *Subhimpunan J dari $\mathbb{Z}^2$ yang dilengkapi topologi Khalimsky merupakan kurva Jordan digital jika dan hanya jika $J = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ untuk suatu bilangan bulat genap $m \geq 4$ dan, untuk setiap j , P_{j-1} dan P_{j+1} , serta tidak ada titik lainnya, bertetangga dengan P_j ; selain itu, setiap lintasan yang terdiri atas tiga titik berurutan P_{i-1} , P_i , P_{i+1} berbelok di P_i sebesar 45° atau 90° , atau tidak berbelok sama sekali jika P_i titik murni, dan bergerak lurus jika P_i titik campuran.*

Kita menyelidiki teorema ini dalam kegiatan berikut.

Kegiatan 20.11

- (a) Pertama-tama, kita perlu mendefinisikan istilah-istilah yang sesuai. Misalkan X ruang topologi. Dua titik x dan y dalam X disebut **bertetangga** jika $x \neq y$ dan himpunan $\{x, y\}$ terhubung. Kemudian misalkan $N(x)$ merupakan irisan semua lingkungan dari x . Tunjukkan bahwa elemen-elemen berbeda x dan y dalam ruang topologi X bertetangga jika dan hanya jika $x \in N(y)$ atau $y \in N(x)$.
- (b) Titik (x_1, x_2) dalam $\mathbb{Z}^2$ disebut **murni** jika x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama. Jika tidak, titik tersebut disebut **campuran**. Carilah $N(P)$ jika P titik murni atau titik campuran.
- (c) Dalam [Kegiatan 20.10](#), kita menunjukkan bahwa himpunan $S_1 = \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ bukan lintasan digital dan karena itu bukan kurva Jordan digital. Bagian mana dari [Teorema 20.15](#) yang dilanggar oleh S_1 ?
- (d) Dalam [Kegiatan 20.10](#), kita menunjukkan bahwa himpunan $S_2 = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (1, 1)\}$ merupakan kurva Jordan digital. Tunjukkan bahwa dalam S_2 , sifat dari [Teorema 20.15](#) bahwa P_{j-1} dan P_{j+1} , serta tidak ada titik lainnya, bertetangga dengan P_j dipenuhi untuk setiap j .

Lampiran

Lampiran A

Pendamping Mandiri Bab 1: Himpunan

Komponen ini mendampingi Bab 1, bukan menggantikannya. Kerjakan setiap aktivitas dan latihan pada bab utama sebelum membuka petunjuk atau pembahasan di sini. Dalam keluaran HTML PreTeXt, unsur **petunjuk**, **jawaban**, dan **pembahasan** dapat dibuka sesudah percobaan mandiri. Komplemen selalu diambil relatif terhadap himpunan semesta yang sedang dinyatakan.

Teks pendamping ini ditulis baru untuk edisi ini dan bukan karya Steven Schlicker atau Grand Valley State University. Komponen pendamping orisinal ini tersedia di bawah CC BY 4.0; bab sumber yang diterjemahkan tetap tunduk pada ketentuan CC BY-NC-SA 3.0 yang dicatat untuk komponen tersebut.

Pemeriksaan aktivitas

Pemeriksaan A.1 Pemeriksaan 1: himpunan, paradoks, dan subhimpunan. Setelah mengerjakan aktivitas berjangkar `pa_sets`, periksa apakah alasan Anda menjelaskan kontradiksi pada $S = \{A : A \text{ himpunan dan } A \notin A\}$, lalu merumuskan $A \subseteq X$ dan kedudukan $\emptyset$ dengan kuantor yang tepat.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Ganti A dengan S dalam syarat pembentuk S .

Petunjuk 2. Untuk subhimpunan, mulailah dengan $x \in A$; untuk himpunan kosong, tanyakan apakah ada contoh yang melanggar implikasi.

Jawaban. Definisi naif menghasilkan $S \in S \iff S \notin S$. Definisi yang dapat dipakai pada bab ini adalah $A \subseteq X$ bila setiap anggota A merupakan anggota X . Karena implikasi tersebut benar secara vakum untuk $\emptyset$, berlaku $\emptyset \subseteq X$ untuk setiap X , dan selalu $A \subseteq A$.

Solusi. Jika $S \in S$, syarat pembentuknya mengatakan $S \notin S$. Jika $S \notin S$, syarat yang sama justru menempatkan S di dalam S . Jadi pemahaman “setiap koleksi yang dapat dideskripsikan adalah himpunan” tidak aman; inilah paradoks Russell. Untuk bagian subhimpunan, rumusan yang dapat diuji adalah $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in X)$. Rumusan ini langsung memberi refleksivitas $A \subseteq A$ dan fakta bahwa himpunan kosong adalah subhimpunan setiap himpunan.

Pemeriksaan A.2 Pemeriksaan 2: deformasi tanpa memotong atau menempel. Bandingkan jawaban Anda pada aktivitas `act_rubber_sheet` dengan invarian sederhana: apakah objek tetap berupa lengkung tertutup, dan berapa banyak terowongan tembus yang dimilikinya?

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Sebuah simpul karet tertutup tidak dapat berubah menjadi lengkung dengan dua ujung tanpa diputus.

Petunjuk 2. Pada benda tiga dimensi, bedakan lekukan biasa dari lubang yang menembus seluruh benda.

Jawaban. Dengan model standar berupa lengkung sederhana tertutup di bidang, persegi dapat dideformasi menjadi lingkaran, garis tepi huruf D, dan bintang berujung lima yang tidak berpotongan sendiri, tetapi bukan huruf S sebagai lengkung terbuka. Dengan model benda padat, persegi padat dan mangkuk tanpa lubang tembus berada dalam kelas tanpa terowongan; donat dan cangkir bergagang masing-masing mempunyai satu terowongan.

Solusi. Jawaban bergantung pada pemodelan gambar. Pernyataan di atas memakai dua asumsi: S adalah goresan terbuka, sedangkan bintang adalah garis tepi sederhana; “mangkuk” adalah gumpalan padat dengan cekungan, bukan permukaan tipis. Deformasi kontinu tidak membuat atau menghilangkan ujung maupun terowongan. Karena itu dua kelompok tersebut dapat dibedakan tanpa memakai ukuran atau sudut. Bila guru bermaksud model lain, nyatakan model itu sebelum memberi klasifikasi.

Pemeriksaan A.3 Pemeriksaan 3: kesamaan himpunan. Periksa empat keputusan pada aktivitas `act_set_equality` dengan uji dua inklusi.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Sederhanakan $x - 1 < 1$ dan tulis syarat keterbagian sebagai kongruensi modulo 4.

Petunjuk 2. Bilangan genap mempunyai residu 0 atau 2 modulo 4; bilangan ganjil mempunyai residu 1 atau 3.

Jawaban. Kesamaan berarti $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Pada contoh riil, kedua himpunan sama-sama $\{x : x < 2\}$. Pada contoh genap, himpunan B adalah bilangan yang kongruen 2 modulo 4, sehingga $B \subsetneq A$; misalnya $0 \in A \setminus B$. Pada contoh ganjil, residu 1 atau 3 modulo 4 tepat mencakup semua bilangan ganjil, jadi $A = B$.

Solusi. Bukti yang dapat diperiksa selalu dimulai dengan anggota sembarang. Untuk contoh terakhir, jika n ganjil maka algoritma pembagian memberi $n = 4q + 1$ atau $n = 4q + 3$; arah sebaliknya segera memberi $n = 2(2q) + 1$ atau $n = 2(2q + 1) + 1$. Jadi kedua inklusi terbukti. Satu contoh 0 cukup menggugurkan arah $A \subseteq B$ pada contoh genap.

Pemeriksaan A.4 Pemeriksaan 4: operasi himpunan dan hukum De Morgan. Untuk aktivitas `act_sets_1`, hitung semua himpunan yang diminta dan cocokkan dua pasangan komplemen dengan hukum De Morgan.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Buat tabel keanggotaan untuk setiap unsur 1 sampai 10.

Petunjuk 2. Negasi kata “atau” menjadi “dan tidak”, sedangkan negasi kata “dan” menjadi “atau tidak”.

Jawaban. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ dan $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. Relatif terhadap U , $(A \cup B)^c = \{7, 9\} = A^c \cap B^c$, sedangkan $(A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} = A^c \cup B^c$.

Solusi. Di sini $A^c = \{7, 8, 9, 10\}$ dan $B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Mengambil irisan dan gabungannya menghasilkan dua himpunan pada jawaban. Untuk bukti umum, misalnya, $x \in (A \cup B)^c$ ekuivalen dengan $x \notin A$ dan $x \notin B$, yang ekuivalen dengan $x \in A^c \cap B^c$. Argumen serupa membuktikan hukum kedua.

Pemeriksaan A.5 Pemeriksaan 5: keluarga terindeks. Periksa contoh hingga dan tak hingga pada aktivitas keluarga terindeks tanpa ID sumber, lalu tulis definisi gabungan dan irisan dengan kuantor.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk $A_\alpha = [0, |\alpha|)$, indeks $\alpha = 0$ menentukan irisan.

Petunjuk 2. Untuk gabungan, setelah memilih $y \geq 0$, pilih indeks dengan $|\alpha| > y$.

Jawaban. Pada keluarga hingga, $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dan terdapat sepuluh himpunan. Pada keluarga berindeks riil, $A_5 = [0, 5)$, $A_\pi = [0, \pi)$, serta $A_{-2/3} = [0, 2/3)$. Selanjutnya $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha = \emptyset$ dan $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha = [0, \infty)$.

Solusi. Definisi umumnya adalah $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ bila dan hanya bila $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$, sedangkan $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ bila dan hanya bila $\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha$. Karena $A_0 = [0, 0) = \emptyset$, irisannya kosong. Setiap anggota setiap A_α tidak negatif; sebaliknya, untuk $y \geq 0$ pilih $\alpha = y + 1$, sehingga $y \in [0, |\alpha|)$. Ini membuktikan hasil gabungan.

Pemeriksaan A.6 Pemeriksaan 6: hukum De Morgan untuk keluarga tak hingga. Untuk aktivitas tanpa ID sesudah teorema De Morgan, verifikasi kedua hukum pada $A_n = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$,

dengan semesta $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Tentukan dahulu $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ dan $\bigcap_{n \geq 1} A_n$.

Petunjuk 2. Keluarga A_n membesar, sehingga keluarga komplementnya mengecil.

Jawaban. $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{Z}^+$ dan $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{1\}$. Maka $(\bigcup A_n)^c = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+ = \bigcap A_n^c$, serta $(\bigcap A_n)^c = \mathbb{Z} \setminus \{1\} = \bigcup A_n^c$.

Solusi. Setiap bilangan bulat positif muncul dalam A_n setelah n cukup besar, sementara hanya 1 yang terdapat dalam semua A_n . Selain itu, $\bigcup A_n^c = A_1^c$ karena komplementnya mengecil. Secara logika, “tidak berada di sedikitnya satu gabungan” berarti “tidak berada di setiap komponennya”; perubahan kuantor inilah yang menukar gabungan dengan irisan.

Pemeriksaan A.7 Pemeriksaan 7: hasil kali Kartesius. Periksa daftar pasangan dan argumen pencacahan pada aktivitas hasil kali Kartesius tanpa ID sumber.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Koordinat pertama mempunyai dua pilihan dan koordinat kedua tiga pilihan.

Petunjuk 2. Untuk tiap satu dari m pilihan pertama, ada n pilihan kedua.

Jawaban. Hasilnya ialah $\{(\text{merah, mobil}), (\text{merah, truk}), (\text{merah, van}), (\text{biru, mobil}), (\text{biru, truk}), (\text{biru, van})\}$. Jika $|A| = m$ dan $|B| = n$, maka $|A \times B| = mn$.

Solusi. Kelompokkan pasangan menurut koordinat pertamanya. Ada m kelompok yang saling lepas, dan masing-masing berisi tepat n pasangan. Karena urutan koordinat bermakna, (a, b) tidak boleh diam-diam diperlakukan sama dengan (b, a) .

Jawaban dan panduan sepuluh latihan

Pemeriksaan A.8 Latihan 1: menerjemahkan kalimat menjadi notasi. Bandingkan keenam ekspresi Anda dengan syarat keanggotaan pada latihan pertama.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Terjemahkan “setidaknya dua” dan “paling banyak satu” dengan menghitung banyaknya himpunan yang memuat sebuah unsur.

Petunjuk 2. Gunakan komplement relatif terhadap X ; gabungkan tiga kemungkinan pasangan.

Jawaban. Berturut-turut: $(A \cap B) \setminus C$; $C \cap (A \cup B)$; $A \setminus (B \cap C)$; $X \setminus (A \cup B \cup C)$; $(A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c)$; dan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Solusi. Pada butir ketiga, “berada di A tetapi tidak sekaligus di B dan C ” berarti meniadakan $B \cap C$, bukan meniadakan kedua himpunan secara terpisah. Pada butir kelima, gagal berada di sedikitnya dua himpunan berarti sedikitnya satu dari tiga pasangan komplement berlaku. Pada butir keenam, gagal berada di paling banyak satu himpunan berarti berada di sedikitnya dua himpunan. Uji tabel delapan pola keanggotaan memberi pemeriksaan langsung.

Pemeriksaan A.9 Latihan 2: komplement pada semesta bersarang. Untuk $X \subset Y \subset Z$, periksa kedua klaim dengan argumen unsur.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Tulis $C_Y(X) = Y \setminus X$ dan $C_Z(X) = Z \setminus X$.

Petunjuk 2. Pisahkan anggota $Z \setminus (Y \setminus X)$ menurut apakah ia berada di Y .

Jawaban. Keduanya benar: $Y \setminus X \subseteq Z \setminus X$ dan $Z \setminus (Y \setminus X) = X \cup (Z \setminus Y)$. Jika simbol $\subset$ pada sumber dimaksudkan ketat dan kedua inklusi awal ketat, inklusi pertama juga ketat karena $Z \setminus Y$ tidak kosong.

Solusi. Jika $u \in Y \setminus X$, maka $u \in Z$ dan $u \notin X$, jadi $u \in Z \setminus X$. Untuk identitas kedua, anggota ruas kiri berada di Z tetapi tidak di $Y \setminus X$. Jika ia tidak di Y , ia berada di $Z \setminus Y$; jika ia di Y , kegagalan berada di $Y \setminus X$ memaksanya berada di X . Arah sebaliknya diperiksa langsung dari dua kasus itu.

Pemeriksaan A.10 Latihan 3: hukum asosiatif dan distributif. Buktikan semua empat identitas yang tercantum pada latihan berjangkar `ex_set_props`.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Ambil unsur sembarang x dan terjemahkan irisan sebagai “dan”, gabungan sebagai “atau”.

Petunjuk 2. Gunakan asosiativitas serta distributivitas logika proposisional, lalu terjemahkan kembali.

Jawaban. Keempat identitas benar: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, dan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Solusi. Sebagai pola, $x \in A \cap (B \cup C)$ ekuivalen dengan $x \in A$ dan $(x \in B \text{ atau } x \in C)$. Distribusikan kata “dan” untuk memperoleh $(x \in A \cap B) \text{ atau } (x \in A \cap C)$, tepat syarat ruas kanan. Tiga identitas lain dibuktikan dengan rantai ekuivalensi yang sama. Sumber menempatkan dua hukum distributif dalam satu task melalui token \item; keduanya tetap harus dibuktikan.

Pemeriksaan A.11 Latihan 4: hukum De Morgan untuk keluarga terindeks. Lengkapi dua bukti pada latihan berjangkar ex_DeMorgan.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Mulai dari keanggotaan sebuah unsur x pada komplemen ruas kiri.

Petunjuk 2. Gunakan negasi kuantor: $\neg \exists$ menjadi $\forall \neg$, dan $\neg \forall$ menjadi $\exists \neg$.

Jawaban. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ dan $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

Solusi. Untuk hukum pertama, $x \in (\bigcup A_\alpha)^c$ jika dan hanya jika tidak ada α dengan $x \in A_\alpha$; ini jika dan hanya jika untuk setiap α , $x \in A_\alpha^c$; dan ini jika dan hanya jika $x \in \bigcap A_\alpha^c$. Untuk hukum kedua, $x \notin \bigcap A_\alpha$ jika dan hanya jika ada α dengan $x \notin A_\alpha$; ini jika dan hanya jika $x \in \bigcup A_\alpha^c$. Dengan konvensi gabungan kosong $\emptyset$ dan irisan kosong U , bukti juga mencakup $I = \emptyset$.

Pemeriksaan A.12 Latihan 5: hasil kali dengan himpunan kosong. Tentukan $\emptyset \times A$ dan jelaskan dari definisi pasangan berurutan.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Anda memerlukan koordinat pertama yang merupakan anggota $\emptyset$.

Petunjuk 2. Apakah pasangan seperti itu dapat ada?

Jawaban. $\emptyset \times A = \emptyset$.

Solusi. Andaikan $(x, a) \in \emptyset \times A$. Definisi hasil kali Kartesius mengharuskan $x \in \emptyset$, yang mustahil. Jadi hasil kali Kartesius itu tidak mempunyai anggota.

Pemeriksaan A.13 Latihan 6: himpunan kuasa. Periksa daftar, pencacahan, dan bukti umum pada latihan berjangkar ex_power_set.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk setiap unsur, ada dua pilihan independen: dimasukkan atau tidak dimasukkan ke subhimpunan.

Petunjuk 2. Untuk bukti induksi, tambahkan satu unsur baru dan pasangkan subhimpunan yang memuatnya dengan yang tidak.

Jawaban. $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Himpunan beranggota tiga mempunyai 8 subhimpunan; secara umum, jika $|A| = n$, maka $|2^A| = 2^n$.

Solusi. Kodekan setiap subhimpunan dengan deret biner sepanjang n : digit ke- i bernilai 1 bila unsur ke- i dipilih. Korespondensi ini bijektif dengan semua 2^n deret biner. Secara induktif, menambahkan satu unsur menggandakan jumlah subhimpunan, sebab setiap subhimpunan lama menghasilkan satu versi tanpa dan satu versi dengan unsur baru.

Pemeriksaan A.14 Latihan 7: membedakan keanggotaan dan inklusi. Nilai keenam pernyataan tentang 2^A dan berikan koreksi bila perlu.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* $B \in 2^A$ tepat ketika $B \subseteq A$.

Petunjuk 2. Uji klaim inklusi ketat pada kasus tepi $A = \emptyset$.

Jawaban. (a) benar; (b) tidak benar secara umum; (c) inklusi tak-ketat selalu benar, tetapi inklusi ketat gagal saat $A = \emptyset$; (d) benar; (e) benar sebagai inklusi ketat karena 2^A tidak pernah kosong; (f) benar.

Solusi. (a) Karena $A \subseteq A$, maka $A \in 2^A$. (b) Anggota A tidak harus berupa subhimpunan A ; misalnya

$A = \{1\}$. Koreksi universalnya adalah $A \in 2^A$. (c) Selalu $\{A\} \subseteq 2^A$; inklusi itu ketat bila $A \neq \emptyset$, tetapi sama saat $A = \emptyset$. (d) Karena $\emptyset \subseteq A$, berlaku $\emptyset \in 2^A$. (e) Himpunan kosong merupakan subhimpunan ketat dari 2^A sebab 2^A memuat sedikitnya $\emptyset$. (f) Jika $C \in 2^A$, maka $C \subseteq A \subseteq B$, sehingga $C \in 2^B$.

Pemeriksaan A.15 Latihan 8: subhimpunan hasil kali Kartesius yang bukan persegi panjang. Bangun $W \subset A \times B$ yang tidak berbentuk $C \times D$.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Pilih $a_1 \neq a_2$ dan $b_1 \neq b_2$.

Petunjuk 2. Ambil dua sudut diagonal; sebuah hasil kali Kartesius yang memuat keduanya harus memuat dua sudut silang.

Jawaban. $W = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ adalah contoh yang diminta.

Solusi. Andaikan $W = C \times D$. Karena dua pasangan diagonal berada di W , kita harus mempunyai $a_1, a_2 \in C$ dan $b_1, b_2 \in D$. Maka (a_1, b_2) dan (a_2, b_1) juga harus berada di $C \times D$, bertentangan dengan definisi W . Karena A dan B masing-masing mempunyai sedikitnya dua anggota, pilihan tersebut selalu tersedia.

Pemeriksaan A.16 Latihan 9: gabungan dan irisan interval terindeks. Buktikan keempat identitas untuk $A_x = (0, x)$ dan $B_x = [0, x]$, $x > 0$.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk menyingkirkan $y > 0$ dari irisan, pilih $x < y$.

Petunjuk 2. Untuk memasukkan $y > 0$ ke gabungan, pilih $x > y$; periksa 0 secara terpisah.

Jawaban. $\bigcap_{x>0}(0, x) = \emptyset$, $\bigcup_{x>0}(0, x) = (0, \infty)$, $\bigcap_{x>0}[0, x] = \{0\}$, dan $\bigcup_{x>0}[0, x] = [0, \infty)$.

Solusi. Tidak ada y dalam semua $(0, x)$: jika $y \leq 0$, ia tidak berada dalam interval mana pun; jika $y > 0$, pilih $x = y/2$. Sebaliknya, setiap $y > 0$ berada dalam $(0, y+1)$, sehingga gabungannya tepat $(0, \infty)$. Untuk interval tertutup, 0 berada dalam semuanya. Argumen $x = y/2$ menyingkirkan setiap $y > 0$ dari irisan dan bilangan negatif tidak pernah masuk; jadi irisannya $\{0\}$. Setiap $y \geq 0$ berada dalam $[0, y+1]$, yang membuktikan hasil gabungan.

Pemeriksaan A.17 Latihan 10: benar, salah, bukti, dan contoh tandingan. Periksa sepuluh keputusan Anda dan pastikan setiap klaim salah mempunyai contoh tandingan konkret.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Inklusi berbalik saat mengambil komplement.

Petunjuk 2. Untuk identitas selisih, ubah $P \setminus Q$ menjadi $P \cap Q^c$; bedakan $\emptyset$ dari $\{\emptyset\}$.

Jawaban. Urutannya adalah: benar, benar, salah, benar, salah, salah, benar, benar, salah, benar.

Solusi. (a) Anggota A berada di B dan C , jadi di irisannya. (b) Anggota $A \cup B$ berasal dari salah satu subhimpunan C . (c) Salah: ambil $X = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, dan $B = X$; arah yang benar adalah $X \setminus B \subseteq X \setminus A$. (d) Benar oleh pembalikan komplement. (e) Salah: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$; ruas kiri $\{1\}$. Identitas yang benar ialah $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$. (f) Salah: $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$; ruas kiri $\{1\}$, bukan B . Identitas umumnya $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. (g) Benar, karena kedua ruas berarti $x \in A \cap B$ dan $x \notin C$. (h) Benar relatif terhadap X . (i) Salah: $\{\emptyset\}$ mempunyai tepat satu anggota, yaitu $\emptyset$. (j) Benar: $\emptyset$ dan $\{\emptyset\}$ adalah dua objek berbeda.

Uji penguasaan

Kerjakan tanpa melihat bab atau pembahasan. Buka petunjuk hanya setelah menulis percobaan pertama.

Pemeriksaan A.18 Untuk $A = \{0, \{0\}\}$, tentukan benar atau salah: $0 \in A$, $\{0\} \in A$, $\{0\} \subseteq A$, dan $A \in 2^A$.

Petunjuk. Bandingkan anggota yang tertulis dengan subhimpunan yang seluruh anggotanya berada di A .

Jawaban. Keempatnya benar.

Solusi. Dua objek yang tercantum adalah 0 dan $\{0\}$. Satu-satunya anggota $\{0\}$ ialah $0 \in A$, sehingga $\{0\} \subseteq A$. Akhirnya $A \subseteq A$, jadi $A \in 2^A$.

Pemeriksaan A.19 Buktikan $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Petunjuk. Ikuti satu unsur dan negasikan syarat “di B atau di C ”.

Jawaban. Identitas benar.

Solusi. x berada di ruas kiri jika dan hanya jika $x \in A$, $x \notin B$, dan $x \notin C$; ini setara dengan $x \in A \setminus B$ dan $x \in A \setminus C$, tepat syarat ruas kanan.

Pemeriksaan A.20 Untuk $A_n = (-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tentukan gabungan dan irisannya.

Petunjuk. Keluarga ini mengecil; interval terbesar terjadi saat $n = 1$. Untuk $x \neq 0$, pilih $n > 1/|x|$.

Jawaban. $\bigcup_{n \geq 1} A_n = (-1, 1)$ dan $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{0\}$.

Solusi. Karena $A_n \subseteq A_1$ dan A_1 sendiri ikut dalam keluarga, gabungannya A_1 . Nol berada di semua interval. Jika $x \neq 0$, ambil $n > 1/|x|$; maka $|x| > 1/n$, sehingga $x \notin A_n$.

Pemeriksaan A.21 Dalam semesta U , sederhanakan $(A^c \cap (B \cup C))^c$.

Petunjuk. Terapkan De Morgan dua kali dan ingat $(A^c)^c = A$.

Jawaban. $A \cup (B^c \cap C^c)$.

Solusi. $(A^c \cap (B \cup C))^c = (A^c)^c \cup (B \cup C)^c = A \cup (B^c \cap C^c)$.

Pemeriksaan A.22 Jika $|A| = 4$ dan $|B| = 3$, hitung $|2^A \times B|$ dan jelaskan.

Petunjuk. Hitung dahulu banyaknya subhimpunan A , lalu gunakan aturan perkalian.

Jawaban. $|2^A \times B| = 2^4 \cdot 3 = 48$.

Solusi. Ada 16 pilihan untuk koordinat pertama dan, untuk masing-masing, 3 pilihan koordinat kedua.

Pemeriksaan A.23 Nilai klaim: jika $A \times B = C \times D$ dan semua empat himpunan tidak kosong, maka $A = C$ dan $B = D$.

Petunjuk. Untuk membuktikan $A \subseteq C$, ambil $a \in A$ dan gunakan satu anggota tetap $b \in B$.

Jawaban. Klaim benar dengan asumsi ketakosongan; tanpa asumsi itu klaim salah.

Solusi. Pilih $b \in B$. Untuk setiap $a \in A$, pasangan (a, b) berada di $C \times D$, sehingga $a \in C$. Jadi $A \subseteq C$; simetri memberi $C \subseteq A$. Argumen yang sama pada koordinat kedua memberi $B = D$. Ketakosongan perlu karena $\emptyset \times B = \emptyset \times D$ untuk sembarang B, D .

Diagnostik kesalahan ringkas

Menukar $\in$ dan $\subseteq$	Ucapkan jenis objeknya: ruas kiri $\in$ adalah satu anggota; ruas kiri $\subseteq$ adalah sebuah himpunan yang semua anggotanya harus diuji.
Membuktikan kesamaan hanya satu arah	Tulis dua sasaran terpisah, $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, sebelum memulai bukti.
Komplemen tanpa semesta	Catat semesta U ; nilai A^c berubah ketika U berubah.
Menukar “untuk semua” dan “ada”	Irisan memakai $\forall$; gabungan memakai $\exists$. Negasi menukar keduanya.

Contoh tandingan tidak memenuhi hipotesis	Periksa semua asumsi terlebih dahulu, baru tunjukkan bahwa kesimpulannya gagal.
Menganggap semua subhimpunan hasil kali Kartesianus berbentuk hasil kali Kartesianus	Hasil kali Kartesianus $C \times D$ harus memuat seluruh kombinasi silang, bukan hanya pasangan yang dipilih.
Mengabaikan kasus kosong	Uji $A = \emptyset$, keluarga indeks kosong, atau faktor hasil kali kosong sebelum menyatakan inklusi ketat atau pembatalan.

Lampiran B

Pendamping Mandiri Bab 2: Fungsi

Komponen ini mendampingi Bab 2, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, aktivitas, dan latihan pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Seluruh uraian pendamping ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini; uraian ini bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0.

Ketika menilai suatu fungsi, selalu tulis domain, kodomain, dan aturannya. Notasi $f^{-1}(B)$ untuk prapeta suatu himpunan berlaku bagi setiap fungsi, sedangkan notasi $f^{-1} : B \rightarrow A$ sebagai fungsi invers hanya berlaku jika $f : A \rightarrow B$ bijektif.

Pemeriksaan eksplorasi dan aktivitas

Pemeriksaan B.1 Pemeriksaan 1: aturan yang sama, fungsi yang berbeda. Setelah menyelesaikan eksplorasi pembuka pada bagian Pendahuluan, klasifikasikan keempat fungsi yang memakai aturan $x \mapsto x^2 + 1$. Nyatakan pula fungsi mana yang merupakan pembatasan dan fungsi mana yang merupakan perluasannya. Rubrik lengkap: domain dan kodomain harus disebutkan; kegagalan injektivitas harus disertai dua masukan; kegagalan surjektivitas harus disertai satu unsur kodomain tanpa prapeta; setiap klaim positif harus dibuktikan.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Bandingkan 2 dan -2 , lalu selesaikan $x^2 + 1 = y$.

Petunjuk 2. Periksa secara terpisah apakah 0 termasuk domain dan apakah 1 termasuk daerah hasil.

Jawaban. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bukan injeksi maupun surjeksi; $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ injektif tetapi bukan surjektif; $F : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ surjektif tetapi bukan injektif; dan $g : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ bijektif. Fungsi h adalah pembatasan f pada $\mathbb{R}^+$, dan f merupakan perluasan h . Selain itu, $g = F|_{[0, \infty)}$, sehingga g merupakan pembatasan F dan F merupakan perluasan g .

Solusi. Karena $f(2) = f(-2) = 5$, fungsi pertama dan F tidak injektif. Daerah hasil aturan tersebut pada $\mathbb{R}$ ialah $[1, \infty)$, sehingga f tidak mencapai, misalnya, 0, sedangkan F mencapai setiap $y \geq 1$ melalui $x = \sqrt{y-1}$. Pada domain positif ketat, $x \mapsto x^2 + 1$ naik tegas dan daerah hasilnya $(1, \infty)$; karena itu h injektif tetapi tidak mencapai 1 ataupun unsur kodomain di bawahnya. Pada domain tak negatif, akar $x = \sqrt{y-1}$ ada dan tunggal untuk setiap $y \geq 1$, sehingga g bijektif. Menurut definisi, kesamaan aturan pada subdomain memberi $h = f|_{\mathbb{R}^+}$, sehingga h pembatasan f dan f perluasan h . Demikian pula, aturan F dan g sama pada subdomain $[0, \infty)$, jadi $g = F|_{[0, \infty)}$; g adalah pembatasan F dan F adalah perluasan g . Klasifikasi berubah karena domain dan kodomain merupakan bagian dari data fungsi, bukan hiasan pada rumus.

Pemeriksaan B.2 Pemeriksaan 2: komposisi pada himpunan berhingga. Periksa seluruh lima tugas pada aktivitas [Kegiatan 2.2](#). Rubrik: tulis tabel nilai kedua komposit, lalu dukung setiap klasifikasi

dengan tabrakan masukan, unsur kodomain yang hilang, atau pemeriksaan menyeluruh.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Terapkan f atau g dahulu, baru h .

Petunjuk 2. Pada himpunan berhingga, bandingkan daftar keluaran dengan seluruh kodomain.

Jawaban. $h \circ f$ memetakan 1, 2, 3 berturut-turut ke α, β, γ ; $h \circ g$ memetakannya ke α, β, α . Fungsi f injektif tetapi tidak surjektif, g bukan keduanya, dan h surjektif tetapi tidak injektif. Komposit pertama bijektif; komposit kedua bukan injektif maupun surjektif.

Solusi. Dari tabel sumber, $h(f(1)) = h(b) = \alpha$, $h(f(2)) = h(c) = \beta$, dan $h(f(3)) = h(a) = \gamma$. Ketiga keluaran berbeda dan memenuhi C . Sebaliknya, $h(g(1)) = h(d) = \alpha$, $h(g(2)) = h(c) = \beta$, dan $h(g(3)) = h(d) = \alpha$; masukan 1 dan 3 bertabrakan dan γ tidak tercapai. Keluaran f ialah $\{a, b, c\}$, keluaran g ialah $\{c, d\}$, dan keluaran h ialah seluruh C , dengan $h(b) = h(d)$. Fakta-fakta ini memberi semua klasifikasi pada jawaban.

Pemeriksaan B.3 Pemeriksaan 3: membangun komposit. Untuk aktivitas [Kegiatan 2.3](#), berikan fungsi konkret pada ketiga bagian dan jelaskan sifat kompositnya. Rubrik: setiap unsur domain harus mempunyai tepat satu citra, kodomain harus benar, dan alasan tidak boleh hanya mengandalkan gambar.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Gunakan korespondensi $a \mapsto p$, $b \mapsto q$, $c \mapsto r$ sebagai fungsi pertama.

Petunjuk 2. Untuk surjeksi ke $D = \{u, v\}$, salah satu nilai boleh dipakai dua kali.

Jawaban. Contoh yang sah: gunakan $f(a) = p$, $f(b) = q$, $f(c) = r$. Untuk kasus injektif, ambil $g(p) = u$, $g(q) = v$, $g(r) = w$. Untuk kasus surjektif ke D , ambil $g(p) = u$, $g(q) = v$, $g(r) = u$. Untuk kasus bijektif ke A , ambil $g(p) = a$, $g(q) = b$, $g(r) = c$. Kompositnya berturut-turut injektif, surjektif, dan bijektif.

Solusi. Fungsi f yang dipilih adalah bijeksi $A \rightarrow B$, jadi khususnya injektif dan surjektif. Pada pilihan pertama, keluaran komposit adalah u, v, w , semuanya berbeda, maka komposit injektif. Pada pilihan kedua, keluaran komposit memuat u dan v , yaitu seluruh D , maka komposit surjektif. Pada pilihan terakhir, komposit memetakan a, b, c masing-masing ke dirinya sendiri; fungsi identitas ini bijektif.

Pemeriksaan B.4 Pemeriksaan 4: teorema komposisi. Lengkapi aktivitas pembuktian sesudah [Teorema 2.5](#). Rubrik: bukti injektivitas dimulai dari kesamaan keluaran, bukti surjektivitas dimulai dari unsur sembarang kodomain, dan bagian bijektif menyebut kedua hasil.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Dari $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, gunakan injektivitas dalam urutan terbalik.

Petunjuk 2. Untuk $c \in C$, pilih dahulu prapeta di B , lalu prapetanya di A .

Jawaban. Komposit dua injeksi adalah injeksi; komposit dua surjeksi adalah surjeksi; karena bijeksi berarti kedua sifat tersebut, komposit dua bijeksi adalah bijeksi.

Solusi. Andaikan $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Injektivitas g memberi $f(a_1) = f(a_2)$, lalu injektivitas f memberi $a_1 = a_2$. Untuk surjektivitas, ambil $c \in C$. Karena g surjektif, ada $b \in B$ dengan $g(b) = c$; karena f surjektif, ada $a \in A$ dengan $f(a) = b$. Maka $(g \circ f)(a) = c$. Jika kedua fungsi bijektif, kedua argumen berlaku, sehingga komposit sekaligus injektif dan surjektif.

Pemeriksaan B.5 Pemeriksaan 5: kapan relasi invers menjadi fungsi. Periksa aktivitas [Kegiatan 2.5](#). Rubrik: tulis setiap relasi invers sebagai pasangan terurut; uji syarat eksistensi bagi setiap unsur domain baru dan syarat ketunggalan keluarannya; simpulkan syarat umum.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Balik urutan setiap pasangan pada tabel fungsi.

Petunjuk 2. Surjektivitas fungsi asal memberi eksistensi pada invers; injektivitas memberi ketunggalan.

Jawaban. $f^{-1} = \{(r, a), (p, b), (q, c)\}$ merupakan fungsi $C \rightarrow A$. $g^{-1} = \{(p, a), (q, b), (p, c)\}$ dan $h^{-1} = \{(p, a), (q, b), (r, c), (q, d)\}$ bukan fungsi dengan domain C . Secara umum, invers $F : S \rightarrow T$ merupakan fungsi $T \rightarrow S$ tepat ketika F bijektif.

Solusi. Pada f^{-1} , setiap unsur C muncul sekali sebagai koordinat pertama, sehingga eksistensi dan ketunggalan terpenuhi. Pada g^{-1} , p mempunyai dua keluaran dan r tidak mempunyai keluaran. Pada h^{-1} , q mempunyai dua keluaran. Untuk relasi invers umum, setiap $t \in T$ muncul sebagai koordinat pertama sedikitnya sekali tepat ketika F surjektif, dan paling banyak sekali tepat ketika F injektif. Kedua syarat

fungsi berlaku tepat ketika F bijektif.

Pemeriksaan B.6 Pemeriksaan 6: bukti bikondisional invers. Lengkapi aktivitas pembuktian sesudah [Teorema 2.7](#). Rubrik: kedua arah bikondisional harus dibuktikan; pada tiap arah, pisahkan eksistensi dan ketunggalan, atau surjektivitas dan injektivitas.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Jika f bijektif, gunakan surjektivitas untuk menemukan a dan injektivitas untuk membuktikan bahwa a tunggal.

Petunjuk 2. Jika $f^{-1} : B \rightarrow A$ fungsi, setiap b harus mempunyai tepat satu pasangan balik.

Jawaban. f^{-1} merupakan fungsi $B \rightarrow A$ jika dan hanya jika $f : A \rightarrow B$ bijektif.

Solusi. Jika f bijektif dan $b \in B$, surjektivitas memberi suatu $a \in A$ dengan $f(a) = b$, sehingga $(b, a) \in f^{-1}$. Jika juga $(b, a') \in f^{-1}$, maka $f(a) = f(a')$; injektivitas memberi $a = a'$. Jadi invers adalah fungsi. Sebaliknya, andaikan invers adalah fungsi pada seluruh B . Untuk setiap $b \in B$, adanya nilai $f^{-1}(b) = a$ memberi $f(a) = b$, jadi f surjektif. Jika $f(a_1) = f(a_2) = b$, relasi invers memuat (b, a_1) dan (b, a_2) ; ketunggalan nilai fungsi invers memberi $a_1 = a_2$. Jadi f injektif dan karenanya bijektif.

Pemeriksaan B.7 Pemeriksaan 7: invers komposit. Selesaikan aktivitas [Kegiatan 2.7](#). Rubrik: periksa tipe setiap komposit, gunakan unsur sembarang $c \in C$, dan buktikan kesamaan fungsi pada seluruh domain, bukan pada satu contoh.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk membatalkan $g \circ f$, tindakan terakhir g harus dibalik lebih dahulu.

Petunjuk 2. Tuliskan $c = g(b)$ dan $b = f(a)$, lalu evaluasi kedua ruas pada c .

Jawaban. $g \circ f$ bijektif dan $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \rightarrow A$.

Solusi. Komposit bijeksi adalah bijeksi, jadi inversnya ada. Ambil $c \in C$. Karena g dan f bijektif, terdapat unsur tunggal $b \in B$ dan $a \in A$ dengan $g(b) = c$ dan $f(a) = b$. Maka $(g \circ f)(a) = c$, sehingga $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Di sisi lain, $g^{-1}(c) = b$ dan $f^{-1}(b) = a$, sehingga $(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = a$. Kesamaan berlaku untuk setiap c , jadi kedua fungsi sama. Urutan sebaliknya umumnya bahkan tidak bertipe benar.

Pemeriksaan B.8 Pemeriksaan 8: prapeta komposit. Untuk aktivitas terakhir pada bagian Fungsi dan Himpunan, tentukan hubungan antara dua prapeta yang diberikan dan buktikan dengan argumen unsur. Rubrik: semua ekuivalensi harus menyebut keanggotaan pada C ; jangan berasumsi bahwa f atau g invertibel.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Mulai dengan $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$.

Petunjuk 2. Buka definisi prapeta dua kali.

Jawaban. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Solusi. Untuk $x \in X$, $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ jika dan hanya jika $g(f(x)) \in C$. Ini setara dengan $f(x) \in g^{-1}(C)$, yang setara dengan $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Rantai ekuivalensi berlaku bagi setiap $x \in X$, sehingga kedua himpunan sama. Simbol invers di sini menyatakan prapeta himpunan dan tidak memerlukan bijektivitas.

Uji penguasaan

Kerjakan tanpa melihat bab atau pembahasannya. Buka petunjuk hanya setelah Anda menuliskan domain, kodomain, dan argumen pertama.

Pemeriksaan B.9 Penguasaan 1: data fungsi. Untuk $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n$, tentukan domain, kodomain, daerah hasil, citra -3 , semua prapeta 5 , dan klasifikasinya.

Petunjuk. Bedakan himpunan yang dinyatakan setelah tanda panah dari himpunan nilai yang benar-benar tercapai.

Jawaban. Domain dan kodomain sama-sama $\mathbb{Z}$; daerah hasilnya $2\mathbb{Z}$; $f(-3) = -6$; 5 tidak mempunyai prapeta; fungsi injektif tetapi tidak surjektif.

Solusi. Dari penulisan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, domain dan kodomainnya sama-sama $\mathbb{Z}$. Substitusi langsung memberi $f(-3) = 2(-3) = -6$. Daerah hasil terdiri tepat atas bilangan genap. Jika $f(n) = f(m)$, maka $2n = 2m$ dan $n = m$, jadi fungsi injektif. Persamaan $2n = 5$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat, sehingga 5 adalah unsur kodomain yang tidak tercapai dan fungsi tidak surjektif.

Pemeriksaan B.10 Penguasaan 2: mengubah kodomain. Pandang aturan yang sama sebagai $g : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, $g(n) = 2n$. Buktikan klasifikasinya dan tulis inversnya.

Petunjuk. Setiap unsur kodomain kini berbentuk $2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Jawaban. g bijektif dan $g^{-1}(2k) = k$.

Solusi. Bukti injektivitas sama seperti pada soal sebelumnya. Untuk setiap $2k \in 2\mathbb{Z}$, berlaku $g(k) = 2k$, sehingga g surjektif ke kodomain barunya. Jadi g bijektif. Persamaan $g(k) = 2k$ menunjukkan langsung bahwa fungsi invers memetakan $2k$ ke k .

Pemeriksaan B.11 Penguasaan 3: tipe dan urutan komposisi. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, dan $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t + 1$. Tentukan tipe dan rumus kedua urutan komposisi, lalu nilai injektivitas dan surjektivitas masing-masing.

Petunjuk. Cocokkan kodomain fungsi yang diterapkan pertama dengan domain fungsi kedua.

Jawaban. $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selalu terdefinisi dan bernilai $x^2 + 1$; fungsi ini bukan injektif dan bukan surjektif. $f \circ g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bernilai $(t + 1)^2$; fungsi ini injektif tetapi tidak surjektif.

Solusi. Karena keluaran f berada dalam domain g , $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$. Nilai x dan $-x$ bertabrakan untuk $x \neq 0$, dan keluaran di bawah 1 tidak tercapai, jadi fungsi bukan injektif maupun surjektif ke $\mathbb{R}$. Karena kodomain g sama dengan domain f , $f \circ g$ juga terdefinisi dan bernilai $(t + 1)^2$. Pada $t \geq 0$ fungsi ini naik tegas, maka injektif; daerah hasilnya $[1, \infty)$, sehingga 0 dalam kodomain tidak tercapai dan fungsi tidak surjektif. Kedua urutan sah di sini, tetapi tipenya tetap harus diperiksa sebelum rumus dievaluasi.

Pemeriksaan B.12 Penguasaan 4: relasi invers dan fungsi invers. Definiskan $q : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 4\}$ dengan $q(x) = x^2$. Tuliskan relasi q^{-1} , putuskan apakah ia fungsi, lalu temukan pembatasan domain terbesar yang membuat aturan kuadrat bijektif ke kodomain yang sama.

Petunjuk. Pilih tepat satu unsur dari setiap pasangan $\{-2, 2\}$ dan $\{-1, 1\}$, serta pertahankan 0.

Jawaban. $q^{-1} = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$ bukan fungsi. Salah satu pembatasan terbesar ialah $q|_{\{0, 1, 2\}} : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 4\}$, yang bijektif.

Solusi. Pada relasi balik, masukan 1 mempunyai keluaran -1 dan 1 , sedangkan masukan 4 mempunyai keluaran -2 dan 2 ; syarat ketunggalan fungsi gagal. Suatu pembatasan bijektif harus memilih satu prapeta bagi masing-masing $0, 1, 4$. Pilihan $\{0, 1, 2\}$ melakukan tepat itu, sehingga pembatasannya injektif dan surjektif. Ukuran 3 maksimal karena kodomain hanya mempunyai tiga unsur.

Pemeriksaan B.13 Penguasaan 5: menghitung citra dan prapeta. Misalkan $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ memenuhi $f(1) = a, f(2) = a, f(3) = b$. Untuk $A = \{1, 3\}$ dan $B = \{a\}$, hitung $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(f(A))$, dan $f(f^{-1}(B))$.

Petunjuk. Prapeta menghimpun semua masukan yang nilainya berada di himpunan sasaran, termasuk masukan yang tidak berada di A .

Jawaban. $f(A) = \{a, b\}$, $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3\}$, dan $f(f^{-1}(B)) = \{a\}$.

Solusi. Citra 1 dan 3 ialah a dan b , jadi $f(A)$ sama dengan seluruh kodomain. Karena 1 dan 2 tepat merupakan masukan yang bernilai a , prapeta B ialah $\{1, 2\}$. Prapeta seluruh kodomain adalah seluruh domain. Menerapkan f pada $\{1, 2\}$ menghasilkan hanya $\{a\}$.

Pemeriksaan B.14 Penguasaan 6: prapeta dan selisih. Untuk $f : X \rightarrow Y$ dan $B, C \subseteq Y$, buktikan $f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C)$. Nyatakan kasus komplemen sebagai akibatnya.

Petunjuk. Buka syarat $f(x) \in B \setminus C$ menjadi satu keanggotaan dan satu ketidakanggotaan.

Jawaban. Identitas berlaku untuk setiap fungsi. Dengan $B = Y$, diperoleh $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$.

Solusi. Untuk $x \in X$, $x \in f^{-1}(B \setminus C)$ setara dengan $f(x) \in B$ dan $f(x) \notin C$. Ini setara dengan $x \in f^{-1}(B)$ dan $x \notin f^{-1}(C)$, yaitu $x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C)$. Jika $B = Y$, maka $f^{-1}(Y) = X$, sehingga rumus komplemen mengikuti.

Pemeriksaan B.15 Penguasaan 7: sama banyak dengan subhimpunan ketat. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan bulat genap $2\mathbb{Z}$ mempunyai kardinalitas sama, walaupun $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

Petunjuk. Bangun bijeksi dengan mengalikan dua dan tulis inversnya pada kodomain $2\mathbb{Z}$.

Jawaban. Bijeksi $b : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, $b(n) = 2n$, membuktikan kedua himpunan ekuinumeros.

Solusi. Jika $2n = 2m$, maka $n = m$, jadi b injektif. Setiap unsur $2\mathbb{Z}$ secara definisi berbentuk $2k$ dan merupakan $b(k)$, jadi b surjektif. Inversnya $b^{-1}(2k) = k$. Inklusi bersifat ketat karena, misalnya, $1 \in \mathbb{Z}$ tetapi $1 \notin 2\mathbb{Z}$. Fenomena ini dapat terjadi pada himpunan tak berhingga.

Pemeriksaan B.16 Penguasaan 8: injeksi versus surjeksi pada himpunan berhingga. Misalkan A dan B berhingga dengan $|A| = |B|$, dan $f : A \rightarrow B$. Buktikan bahwa f injektif jika dan hanya jika f surjektif.

Petunjuk. Pada himpunan berukuran sama, satu tabrakan memaksa satu unsur kodomain hilang, dan satu unsur hilang memaksa satu tabrakan.

Jawaban. Pada domain dan kodomain berhingga yang sama besar, injektivitas dan surjektivitas ekuivalen.

Solusi. Tuliskan $|A| = |B| = n$. Jika f injektif, n unsur domain mempunyai n citra berbeda di dalam kodomain yang hanya berisi n unsur; semua unsur kodomain tercapai, jadi f surjektif. Jika f surjektif, pilih sedikitnya satu prapeta bagi setiap satu dari n unsur kodomain. Pilihan ini sudah memakai seluruh n unsur domain, sehingga tidak ada unsur kodomain yang dapat mempunyai prapeta kedua; jadi f injektif. Argumen gagal tanpa keberhinggaan atau tanpa kesamaan ukuran.

Diagnostik kesalahan ringkas

Mengabaikan kodomain	Dua aturan yang sama dapat mempunyai sifat surjektif berbeda. Tulis tipe lengkap $f : A \rightarrow B$ sebelum menguji.
Menukar daerah hasil dan kodomain	Daerah hasil adalah nilai yang benar-benar tercapai dan selalu merupakan subhimpunan kodomain.
Membaca komposisi dari kiri	Pada $g \circ f$, terapkan f lebih dahulu; periksa bahwa keluarannya dapat menjadi masukan g .
Menganggap simbol f^{-1} selalu fungsi	Relasi balik menjadi fungsi hanya untuk bijeksi; prapeta himpunan $f^{-1}(B)$ tetap terdefinisi tanpa bijektivitas.
Citra dan irisan	Citra mempertahankan gabungan, tetapi untuk irisan hanya satu inklusi yang selalu benar; prapeta mempertahankan keduanya.
Membuktikan surjektivitas dengan satu contoh	Mulai dari unsur sembarang kodomain dan bangun prapetanya.
Mengabaikan kasus kosong atau faktor tak kosong	Periksa asumsi ketakosongan ketika memakai proyeksi, membatalkan hasil kali Kartesius, atau menafsirkan irisan keluarga kosong.

Panduan dan pembahasan tujuh belas latihan

Nomor di bawah mengikuti urutan latihan pada bagian Latihan Bab 2. Jika sebuah latihan sumber mempunyai beberapa tugas, satu panduan di sini menutup semuanya.

Pemeriksaan B.17 Latihan 1: merancang banyaknya prapeta. Periksa kelima contoh Anda pada latihan pertama. Sebuah contoh lengkap harus merupakan fungsi pada seluruh $\mathbb{R}$, mencapai setiap keluaran yang diklaim, dan mempunyai tepat banyak prapeta yang diminta.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Identitas menyelesaikan kasus satu prapeta. Untuk dua prapeta, lipat setiap pasangan interval satuan berurutan ke satu interval satuan.

Petunjuk 2. Grafik $x^3 - x$ mempunyai keluaran dengan tiga prapeta dan keluaran pada titik ekstrem dengan dua prapeta.

Jawaban. Contoh berturut-turut dapat diambil sebagai fungsi identitas; fungsi lipatan interval yang mempunyai tepat dua prapeta bagi setiap keluaran (juga memenuhi “setidaknya dua”); fungsi lipatan yang sama; $x \mapsto x^3 - x$; dan fungsi konstan $x \mapsto 0$.

Solusi. Untuk kasus pertama, $f(x) = x$ memberi satu prapeta bagi setiap y . Untuk kasus kedua dan ketiga, bagi setiap $k \in \mathbb{Z}$ definisikan $f(x) = x - k$ pada $[2k, 2k + 1)$ dan $f(x) = x - k - 1$ pada $[2k + 1, 2k + 2)$. Interval-interval domain saling lepas dan menutupi $\mathbb{R}$. Jika $y \in [k, k + 1)$, dua dan hanya dua prapetanya ialah $y + k$ dan $y + k + 1$. Jadi fungsi ini mempunyai tepat dua prapeta untuk setiap y , dan khususnya sedikitnya dua.

Untuk kasus keempat, ambil $p(x) = x^3 - x$. Keluaran 0 mempunyai tepat tiga prapeta $-1, 0, 1$. Keluaran $2/(3\sqrt{3})$ mempunyai dua prapeta berbeda: akar ganda $-1/\sqrt{3}$ dan akar $2/\sqrt{3}$; faktorisasi setelah memindahkan keluaran ke ruas kiri memverifikasi bahwa tidak ada akar lain. Untuk kasus terakhir, fungsi konstan $f(x) = 0$ memberi tak berhingga banyak prapeta bagi unsur kodomain 0.

Pemeriksaan B.18 Latihan 2: enam klasifikasi fungsi. Klasifikasikan keenam fungsi pada latihan berjangkar [Latihan 2](#) dan dukung setiap keputusan dengan persamaan, tabrakan, atau unsur yang hilang.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk fungsi pecahan, selesaikan $y = 3x/(x - 4)$ terhadap x dan periksa nilai $y = 3$.

Petunjuk 2. Aturan kuadrat menjadi injektif setelah domain dibatasi ke bilangan tak negatif.

Jawaban. Berturut-turut: F bijektif; G injektif tetapi tidak surjektif; f injektif tetapi tidak surjektif; g bijektif; h surjektif tetapi tidak injektif; dan k bijektif.

Solusi. Persamaan $5x + 3 = y$ mempunyai solusi tunggal $x = (y - 3)/5$ di $\mathbb{R}$, jadi F bijektif. Pada $\mathbb{Z}$, kesamaan keluaran masih memaksa kesamaan masukan, tetapi semua keluaran kongruen dengan 3 modulo 5; misalnya 0 tidak tercapai, sehingga G hanya injektif.

Jika $y = 3x/(x - 4)$, maka untuk $y \neq 3$ satu-satunya kandidat ialah $x = 4y/(y - 3)$, yang tidak pernah sama dengan 4. Nilai 3 mustahil karena akan memberi $3x = 3x - 12$. Karena itu aturan pecahan injektif dengan daerah hasil $\mathbb{R} \setminus \{3\}$: fungsi ke $\mathbb{R}$ tidak surjektif, sedangkan fungsi ke $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ bijektif. Akhirnya, x^2 dari $\mathbb{R}$ ke bilangan tak negatif surjektif tetapi x dan $-x$ bertabrakan bila $x \neq 0$. Pada domain tak negatif, akar kuadrat memberi prapeta tunggal bagi setiap keluaran, jadi k bijektif.

Pemeriksaan B.19 Latihan 3: membatasi tabel fungsi. Gunakan tabel pada latihan ketiga untuk menilai fungsi, menemukan pembatasan injektif terbesar, menyesuaikan kodomain agar surjektif, dan menghasilkan bijeksi.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Kelompokkan unsur domain menurut nilai $f(x)$.

Petunjuk 2. Pembatasan injektif boleh memilih paling banyak satu wakil dari setiap serat.

Jawaban. Fungsi asal bukan injeksi dan bukan surjeksi. Salah satu pembatasan injektif terbesar memakai $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$. Kodomain surjektif yang tepat ialah $D = \{a, c, d, e, g\}$. Dengan $X = C$ dan $Y = D$, pembatasan $f|_X : X \rightarrow Y$ merupakan bijeksi.

Solusi. Serat-serat tak kosongnya adalah $f^{-1}(a) = \{3, 5, 10\}$, $f^{-1}(c) = \{1, 6, 9\}$, $f^{-1}(d) = \{2, 8\}$, $f^{-1}(e) = \{7\}$, dan $f^{-1}(g) = \{4\}$. Jadi terdapat tabrakan, sedangkan b tidak tercapai. Suatu pembatasan injektif memilih paling banyak satu unsur dari masing-masing lima serat; pilihan pada jawaban memilih tepat satu dari setiap serat, sehingga ukurannya maksimal, yaitu 5. Daerah hasil fungsi adalah D ; memandang aturan yang sama sebagai fungsi $A \rightarrow D$ membuatnya surjektif. Membatasi sekaligus domain ke C membuat setiap unsur D mempunyai tepat satu prapeta, sehingga diperoleh bijeksi.

Pemeriksaan B.20 Latihan 4: subhimpunan hasil kali Kartesius dan persegi panjang. Berikan satu subhimpunan berbentuk hasil kali Kartesius dan satu subhimpunan yang tidak dapat ditulis sebagai hasil kali Kartesius, dengan memakai dua unsur berbeda dari masing-masing faktor.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Hasil kali Kartesius satu unsur dengan dua unsur memberi contoh positif.

Petunjuk 2. Dua sudut diagonal memaksa dua sudut silang jika himpunannya benar-benar hasil kali Kartesius.

Jawaban. Untuk $a_1 \neq a_2$ dan $b_1 \neq b_2$, ambil $X = \{a_1\} \times \{b_1, b_2\}$. Sebagai contoh negatif, ambil $W = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$.

Solusi. Bentuk X sudah secara eksplisit merupakan hasil kali Kartesius dua subhimpunan. Andaikan $W = C \times D$. Dari dua pasangan di dalam W diperoleh $a_1, a_2 \in C$ dan $b_1, b_2 \in D$. Definisi hasil kali Kartesius lalu memaksa (a_1, b_2) dan (a_2, b_1) berada di W , padahal keduanya tidak tercantum. Kontradiksi ini membuktikan bahwa W bukan hasil kali Kartesius.

Pemeriksaan B.21 Latihan 5: kardinalitas berhingga dan bijeksi. Buktikan kedua arah hubungan antara $|A| = |B|$ dan keberadaan bijeksi $A \rightarrow B$ untuk himpunan berhingga.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Gunakan bijeksi pencacahan $A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ dan $B \rightarrow \{1, \dots, m\}$.

Petunjuk 2. Komposisi dengan bijeksi yang diasumsikan menghasilkan bijeksi antara dua himpunan bilangan bulat awal.

Jawaban. Terdapat bijeksi $A \rightarrow B$ jika dan hanya jika $n = m$.

Solusi. Pilih bijeksi pencacahan $\alpha : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ dan $\beta : B \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Jika $n = m$, maka $\beta^{-1} \circ \alpha : A \rightarrow B$ adalah bijeksi. Sebaliknya, jika $f : A \rightarrow B$ bijektif, maka $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ adalah bijeksi dari $\{1, \dots, n\}$ ke $\{1, \dots, m\}$. Jika $n < m$, fungsi itu tidak mungkin surjektif; jika $n > m$, fungsi itu tidak mungkin injektif, menurut prinsip rumah merpati. Jadi satu-satunya kemungkinan ialah $n = m$.

Pemeriksaan B.22 Latihan 6: citra sesudah prapeta dan sebaliknya. Lengkapi empat bagian latihan tentang $f^{-1}(f(A))$ dan $f(f^{-1}(B))$, termasuk contoh ketat dan dua karakterisasi.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk kegagalan kesamaan pertama gunakan fungsi konstan pada domain dua unsur; untuk kegagalan kedua tambahkan unsur kodomain yang tidak tercapai.

Petunjuk 2. Pada arah balik karakterisasi injeksi, uji himpunan satu unsur.

Jawaban. Selalu $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ dan $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, dan keduanya dapat ketat. Kesamaan kedua berlaku untuk setiap $B \subseteq Y$ tepat ketika f surjektif; kesamaan pertama berlaku untuk setiap $A \subseteq X$ tepat ketika f injektif.

Solusi. Jika $x \in A$, maka $f(x) \in f(A)$, sehingga $x \in f^{-1}(f(A))$. Kesamaan dapat gagal: untuk fungsi konstan $f : \{0, 1\} \rightarrow \{*\}$ dan $A = \{0\}$, prapeta citranya adalah seluruh $\{0, 1\}$. Jika $y \in f(f^{-1}(B))$, ada x dengan $y = f(x)$ dan $f(x) \in B$, jadi $y \in B$. Kesamaan dapat gagal untuk $f : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, dan $B = \{0, 1\}$.

Jika f surjektif dan $y \in B$, pilih x dengan $f(x) = y$; maka $x \in f^{-1}(B)$ dan $y \in f(f^{-1}(B))$, sehingga kesamaan berlaku. Jika kesamaan berlaku untuk semua B , ambil $B = Y$ untuk memperoleh $f(X) = Y$. Jika f injektif dan $x \in f^{-1}(f(A))$, ada $a \in A$ dengan $f(x) = f(a)$, maka $x = a \in A$. Sebaliknya, andaikan kesamaan berlaku untuk semua A . Jika $f(x) = f(x')$, ambil $A = \{x\}$; maka $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$, sehingga $x' = x$ dan f injektif.

Pemeriksaan B.23 Latihan 7: fungsi dan irisan terindeks. Putuskan kedua identitas pada latihan [Latihan 7](#). Jika suatu kesamaan gagal, nyatakan dan buktikan inklusi yang selalu benar serta berikan contoh tandingan terkecil yang jelas.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Fungsi konstan pada dua unsur dapat membuat citra dua himpunan saling beririsan walaupun himpunan asalnya tidak.

Petunjuk 2. Untuk prapeta, buka kuantor “untuk setiap indeks”; tidak diperlukan injektivitas.

Jawaban. Selalu $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, tetapi kesamaan dapat gagal. Sebaliknya, prapeta mempertahankan irisan secara tepat: $f^{-1}(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcap_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$.

Solusi. Jika $y \in f(\bigcap_{\alpha} A_\alpha)$, ada x yang berada di setiap A_α dan memenuhi $f(x) = y$. Maka y berada di setiap $f(A_\alpha)$, sehingga inklusi berlaku. Kesamaan gagal untuk fungsi konstan $f : \{0, 1\} \rightarrow \{*\}$ dengan $A_1 = \{0\}$ dan $A_2 = \{1\}$: citra irisannya kosong, sedangkan irisan citranya $\{*\}$. Untuk prapeta, $x \in f^{-1}(\bigcap_{\beta} B_\beta)$ setara dengan $f(x) \in B_\beta$ bagi setiap β , yang setara dengan $x \in f^{-1}(B_\beta)$ bagi setiap β . Dengan konvensi irisan keluarga kosong sebagai seluruh himpunan semesta yang sesuai, argumen dan inklusi pertama juga mencakup himpunan indeks kosong.

Pemeriksaan B.24 Latihan 8: membatalkan bijeksi dengan inversnya. Buktikan kedua identitas pada latihan [Latihan 8](#) langsung dari definisi invers, dengan memperhatikan domain masing-masing identitas.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Tetapkan $y = f(x)$ dan gunakan ekuivalensi $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.

Petunjuk 2. Untuk arah lain, tetapkan $x = f^{-1}(y)$.

Jawaban. $f^{-1} \circ f = i_A$ dan $f \circ f^{-1} = i_B$.

Solusi. Untuk $x \in A$, ambil $y = f(x) \in B$. Definisi fungsi invers memberi $f^{-1}(y) = x$, sehingga $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. Untuk $y \in B$, bijektivitas memberi unsur tunggal $x = f^{-1}(y) \in A$ dengan $f(x) = y$. Karena itu $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$. Identitas pertama adalah fungsi pada A , sedangkan identitas kedua fungsi pada B .

Pemeriksaan B.25 Latihan 9: prapeta himpunan oleh komposit. Buktikan identitas pada latihan [Latihan 9](#) dengan rantai ekuivalensi keanggotaan; jangan menganggap g atau h bijektif.

Petunjuk. Untuk $r \in R$, terjemahkan berturut-turut $r \in (h \circ g)^{-1}(O)$, $h(g(r)) \in O$, dan $g(r) \in h^{-1}(O)$.

Jawaban. $(h \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(h^{-1}(O))$.

Solusi. Bagi setiap $r \in R$, $r \in (h \circ g)^{-1}(O)$ jika dan hanya jika $h(g(r)) \in O$. Hal terakhir berlaku jika dan hanya jika $g(r) \in h^{-1}(O)$, yang menurut definisi setara dengan $r \in g^{-1}(h^{-1}(O))$. Karena unsur pada kedua ruas sama, himpunannya sama. Ini adalah identitas prapeta, bukan rumus invers fungsi.

Pemeriksaan B.26 Latihan 10: proyeksi dan hasil kali fungsi. Selesaikan keempat tugas tentang proyeksi, fungsi hasil kali, komposisinya, dan inversnya. Rubrik: rumus kandidat harus ditulis, keberadaan dan ketunggalan harus dipisahkan, dan semua kesamaan fungsi dibuktikan per unsur.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Faktor lain yang tak kosong menyediakan koordinat pendamping untuk membuktikan proyeksi surjektif.

Petunjuk 2. Satu-satunya kandidat ialah $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

Jawaban. Setiap π_i surjektif. Fungsi tunggal yang diminta adalah $f_1 \times f_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Hasil kali mempertahankan komposisi secara koordinat, dan jika invers $h_i = f_i^{-1}$ ada, maka $(f_1 \times f_2)^{-1} = h_1 \times h_2$.

Solusi. Untuk $x_1 \in X_1$, pilih satu $x_2 \in X_2$; maka $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Argumen simetris berlaku bagi π_2 . Definiskan $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Proyeksi ke koordinat i memberi $f_i(x_i)$, jadi diagram yang diminta komutatif. Sebaliknya, jika G memenuhi kedua persamaan proyeksi, kedua koordinat $G(x_1, x_2)$ harus sama dengan koordinat $F(x_1, x_2)$; maka $G = F$, membuktikan ketunggalan.

Pada (x_1, x_2) , ruas kiri identitas komposisi bernilai $(g_1(f_1(x_1)), g_2(f_2(x_2)))$, sama dengan ruas kanan. Jika h_i adalah invers f_i , maka komposisi $(h_1 \times h_2) \circ (f_1 \times f_2)$ mengirim (x_1, x_2) ke dirinya sendiri, dan komposisi dalam urutan sebaliknya juga identitas pada $Y_1 \times Y_2$. Jadi $h_1 \times h_2$ memang fungsi inversnya.

Ketacosongan kedua faktor diperlukan pada bukti surjektivitas proyeksi.

Pemeriksaan B.27 Latihan 11: pencacahan bilangan bulat. Tentukan apakah rumus yang diberikan mendefinisikan injeksi dan surjeksi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, lalu beri prapeta eksplisit untuk setiap bilangan bulat.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Tulis $n = 2k$ atau $n = 2k - 1$.

Petunjuk 2. Keluaran cabang genap positif, sedangkan cabang ganjil tidak positif.

Jawaban. Fungsi tersebut bijektif. Secara khusus, $f(2k) = k$ dan $f(2k - 1) = 1 - k$ untuk $k \geq 1$.

Solusi. Substitusi memberi $f(2k) = (1 + (4k - 1))/4 = k$ dan $f(2k - 1) = (1 - (4k - 3))/4 = 1 - k$. Cabang genap memuat setiap bilangan bulat positif tepat sekali; cabang ganjil memuat $0, -1, -2, \dots$ tepat sekali. Kedua daerah hasil cabang saling lepas, jadi fungsi injektif. Untuk $z \geq 1$, prapetanya $2z$; untuk $z \leq 0$, prapetanya $1 - 2z$. Maka setiap $z \in \mathbb{Z}$ tercapai dan fungsi surjektif.

Pemeriksaan B.28 Latihan 12: penjumlahan sebagai fungsi dua peubah. Nilai injektivitas dan surjektivitas fungsi $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = a + b$, dengan saksi konkret.

Petunjuk. Bandingkan $(0, 0)$ dengan $(1, -1)$; untuk mencapai z , gunakan pasangan $(z, 0)$.

Jawaban. Fungsi penjumlahan tidak injektif, tetapi surjektif.

Solusi. Pasangan berbeda $(0, 0)$ dan $(1, -1)$ keduanya dipetakan ke 0 , sehingga fungsi tidak injektif. Untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$, pasangan $(z, 0)$ berada dalam domain dan memenuhi $f(z, 0) = z$; karena itu fungsi surjektif.

Pemeriksaan B.29 Latihan 13: sifat yang dipaksa oleh komposit. Tentukan bagian mana dari injektivitas atau surjektivitas $g \circ f$ yang harus diwarisi oleh faktor-faktornya, dan sangkal klaim yang terlalu kuat dengan fungsi berhingga yang bertipe benar.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Jika $f(a) = f(a')$, terapkan g pada kedua ruas.

Petunjuk 2. Jika setiap $c \in C$ berbentuk $g(f(a))$, maka setiap c tentu berada dalam daerah hasil g .

Jawaban. Jika $g \circ f$ injektif, maka f harus injektif, tetapi g tidak harus injektif. Jika $g \circ f$ surjektif, maka g harus surjektif, tetapi f tidak harus surjektif.

Solusi. Jika $f(a) = f(a')$, maka $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$; injektivitas komposit memberi $a = a'$, jadi f injektif. Namun ambil $A = \{a\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c\}$, $f(a) = b_1$, dan $g(b_1) = g(b_2) = c$. Komposit dari satu unsur ke satu unsur injektif, sedangkan g tidak.

Jika komposit surjektif dan $c \in C$, ada $a \in A$ dengan $g(f(a)) = c$. Jadi c mempunyai prapeta $f(a) \in B$ oleh g , sehingga g surjektif. Untuk menunjukkan bahwa f tidak harus surjektif, gunakan himpunan dan fungsi yang sama: f tidak mencapai b_2 , tetapi komposit mencapai satu-satunya unsur C .

Pemeriksaan B.30 Latihan 14: komutativitas dan asosiativitas komposisi. Putuskan apakah komposisi komutatif dan asosiatif. Untuk klaim positif, buktikan secara titik demi titik; untuk klaim negatif, pastikan kedua urutan komposisi pada contoh Anda sama-sama terdefinisi.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Coba endofungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = 2x$ pada $\mathbb{R}$.

Petunjuk 2. Evaluasi kedua pengelompokan tiga fungsi pada unsur x .

Jawaban. Komposisi tidak komutatif secara umum, tetapi asosiatif ketika semua komposit yang ditulis bertipe benar.

Solusi. Untuk $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = 2x$, diperoleh $(g \circ f)(x) = 2x + 2$, sedangkan $(f \circ g)(x) = 2x + 1$. Jadi komposisi tidak komutatif; pada fungsi dengan domain dan kodomain berbeda, salah satu urutan bahkan mungkin tidak terdefinisi. Jika $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, dan $h : C \rightarrow D$, maka bagi setiap $a \in A$, $(h \circ (g \circ f))(a) = h(g(f(a))) = ((h \circ g) \circ f)(a)$. Kedua fungsi mempunyai domain A , kodomain D , dan nilai yang sama pada setiap unsur, sehingga komposisi asosiatif.

Pemeriksaan B.31 Latihan 15: invers fungsi pada $\mathbb{Z}_5$. Buat tabel lengkap bagi kedua fungsi pada $\mathbb{Z}_5$, balik semua pasangan, tentukan apakah relasi inversnya fungsi, lalu rumuskan akar pangkat tiga dan invers g secara eksplisit.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Hitung pangkat perwakilan 0, 1, 2, 3, 4 modulo 5.

Petunjuk 2. Pada $\mathbb{Z}_5$, pemetaan pangkat tiga adalah invers bagi dirinya sendiri.

Jawaban. Relasi invers f ialah $\{([4], [0]), ([0], [1]), ([3], [2]), ([3], [3]), ([0], [4])\}$ dan bukan fungsi. Relasi invers g ialah $\{([4], [0]), ([0], [1]), ([2], [2]), ([1], [3]), ([3], [4])\}$ dan merupakan fungsi. Akar pangkat tiga dari $[0], [1], [2], [3], [4]$ berturut-turut ialah $[0], [1], [3], [2], [4]$, serta $g^{-1}([y]) = [(y+1)^3]$.

Solusi. Nilai $f([x]) = [x^2 + 4]$ untuk $x = 0, 1, 2, 3, 4$ berturut-turut adalah $[4], [0], [3], [3], [0]$. Membalik tabel memberi relasi pada jawaban; masukan $[0]$ dan $[3]$ pada relasi invers masing-masing mempunyai dua keluaran, sedangkan $[1]$ dan $[2]$ tidak mempunyai keluaran. Jadi relasi itu bukan fungsi $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$.

Nilai $g([x]) = [x^3 + 4]$ berturut-turut ialah $[4], [0], [2], [1], [3]$, suatu permutasi seluruh $\mathbb{Z}_5$. Pembalikan tabel memberi relasi invers pada jawaban dan menunjukkan bahwa ia fungsi. Kubus dari $[0], [1], [2], [3], [4]$ ialah $[0], [1], [3], [2], [4]$; menerapkan kubus sekali lagi mengembalikan unsur semula, jadi akar pangkat tiga $[z]$ adalah $[z^3]$. Dari $[y] = [x^3 + 4]$ diperoleh $[x^3] = [y + 1]$, sehingga $[x] = [(y + 1)^3]$, rumus yang dinyatakan.

Pemeriksaan B.32 Latihan 16: diferensiasi dan integrasi sebagai fungsi. Lengkapi seluruh bagian latihan ruang fungsi: berikan tiga contoh pada $[-1, 1]$, nilai invertibilitas operator turunan, lalu buktikan bahwa operator integral yang diberikan mempunyai invers.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Gunakan $|x|$, fungsi konstan, dan fungsi linear untuk tiga contoh pertama.

Petunjuk 2. Teorema Dasar Kalkulus memberi $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$ dan $\int_a^x c'(t) dt = c(x) - c(a)$.

Jawaban. Pada $[-1, 1]$, contoh berturut-turut ialah $|x|$, fungsi konstan 1, dan $x + 1$. Operator turunan $d : B \rightarrow A$ surjektif tetapi tidak injektif, jadi tidak invertibel. Operator $h : A \rightarrow C$, $(h(f))(x) = \int_a^x f(t) dt$, bijektif dengan invers $g : C \rightarrow A$, $g(c) = c'$.

Solusi. Fungsi $|x|$ kontinu tetapi tidak terdiferensialkan di 0, jadi berada di $A \setminus B$. Fungsi konstan 1 mempunyai turunan kontinu tetapi nilainya di $a = -1$ bukan nol, jadi berada di $B \setminus C$. Fungsi $x + 1$ mempunyai turunan kontinu dan bernilai nol di -1 , jadi berada di C . Setiap fungsi kontinu $q \in A$ adalah turunan fungsi $x \mapsto \int_a^x q(t) dt$ dalam B , maka d surjektif. Namun dua fungsi yang berbeda sebesar konstanta mempunyai turunan sama; misalnya turunan fungsi konstan 0 dan 1 sama-sama nol. Jadi d tidak injektif dan tidak invertibel.

Untuk $f \in A$, Teorema Dasar Kalkulus menyatakan bahwa $h(f)$ mempunyai turunan kontinu f , dan $h(f)(a) = 0$; maka $h(f) \in C$. Definisikan $g(c) = c'$. Bagi $f \in A$, $g(h(f)) = f$. Bagi $c \in C$, $(h(g(c)))(x) = \int_a^x c'(t) dt = c(x) - c(a) = c(x)$, karena $c(a) = 0$. Jadi kedua komposisi adalah identitas dan $g = h^{-1}$.

Pemeriksaan B.33 Latihan 17: tiga belas klaim tentang citra dan prapeta. Periksa ketiga belas klaim terakhir dalam urutan sumber. Setiap klaim salah memerlukan contoh fungsi dan himpunan konkret; setiap klaim benar memerlukan sedikitnya satu rantai keanggotaan.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Fungsi konstan pada domain dua unsur menguji klaim citra yang memerlukan injektivitas.

Petunjuk 2. Fungsi identitas pada dua unsur dan satu unsur kodomain yang tidak tercapai menguji arah inklusi prapeta dan citra.

Jawaban. Urutannya adalah: benar, salah, salah, benar, benar, benar, salah, benar, benar, salah, benar, salah, benar.

Solusi. (a) Benar karena $x \in A$ memberi $f(x) \in f(A)$. (b) Salah: untuk fungsi konstan $f : \{0, 1\} \rightarrow \{*\}$ dan $A = \{0\}$, prapeta citra A adalah seluruh domain. (c) Salah: untuk $f : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, dan $B = \{1\}$, ruas kanan kosong. (d) Benar: setiap unsur citra prapeta B menurut definisi berada di B . (e) Benar: citra anggota $A_1 \subseteq A_2$ juga citra anggota A_2 . (f) Benar: $f(x) \in B_1 \subseteq B_2$ memberi inklusi prapeta.

(g) Salah: untuk fungsi identitas pada $\{0, 1\}$, ambil $B_1 = \{0\}$ dan $B_2 = \{0, 1\}$; prapeta B_2 tidak termuat dalam prapeta B_1 . (h) Benar: sebuah nilai berasal dari gabungan tepat ketika berasal dari sedikitnya satu bagian. (i) Benar karena, untuk setiap $x \in X$, $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ jika dan hanya jika $f(x) \in B_1 \cup B_2$, jika dan hanya jika $f(x) \in B_1$ atau $f(x) \in B_2$, jika dan hanya jika $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. (j) Salah: pada fungsi konstan $\{0, 1\} \rightarrow \{*\}$, ambil $A_1 = \{0\}$ dan $A_2 = \{1\}$; citra irisan kosong, tetapi irisan citra tidak

kosong. (k) Benar: syarat $f(x) \in B_1$ dan $f(x) \in B_2$ setara dengan $f(x) \in B_1 \cap B_2$.

(l) Salah: pada fungsi konstan yang sama, ambil $A_1 = \{0, 1\}$ dan $A_2 = \{1\}$. Ruas kiri $f(A_1 \setminus A_2) = \{*\}$, sedangkan $f(A_1) \setminus f(A_2) = \emptyset$. (m) Benar: x berada pada prapeta $B_1 \setminus B_2$ tepat ketika $f(x) \in B_1$ dan $f(x) \notin B_2$, yaitu tepat ketika $x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Lampiran C

Pendamping Mandiri Bab 3: Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 3, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, aktivitas, dan latihan pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Seluruh uraian pendamping ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini; uraian ini bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0.

Untuk setiap calon metrik, periksa empat sifat secara terpisah: tak negatif, identitas titik, simetri, dan pertidaksamaan segitiga. Sebuah gambar dapat menuntun intuisi, tetapi bukti harus berlaku bagi semua titik dalam domain. Pada latihan bertahap, jawaban ringkas menyatakan hasil akhir, sedangkan pembahasan memberikan alasan lengkap yang dapat dipakai untuk belajar mandiri.

Pemeriksaan eksplorasi dan aktivitas

Pemeriksaan C.1 Pemeriksaan 1: metrik taksi. Audit kelima tugas eksplorasi pembuka: buktikan empat aksioma untuk d_T pada $\mathbb{R}^2$, lalu tentukan lingkaran satuannya dalam koordinat Euklides. Rubrik lengkap: setiap aksioma harus dinyatakan; bukti pertidaksamaan segitiga harus berlaku koordinat demi koordinat; gambar lingkaran harus disertai persamaan atau pertidaksamaan yang menjelaskan keempat sisinya.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Gunakan $|u + v| \leq |u| + |v|$ pada masing-masing selisih koordinat.

Petunjuk 2. Lingkaran satuan memenuhi $|x_1| + |x_2| = 1$.

Jawaban. Fungsi d_T merupakan metrik. Lingkaran satuannya adalah $\{(x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| = 1\}$, yakni persegi yang tampak sebagai belah ketupat dengan titik sudut $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, dan $(0, -1)$ dalam gambar Euklides.

Solusi. Nilai mutlak tak negatif, jadi $d_T(x, y) \geq 0$. Jumlah dua nilai mutlak bernilai nol tepat ketika kedua selisih koordinat nol, yaitu tepat ketika $x = y$. Karena $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, fungsi ini simetris. Untuk titik ketiga z , tulis $x_i - y_i = (x_i - z_i) + (z_i - y_i)$. Pertidaksamaan nilai mutlak memberi $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ untuk $i = 1, 2$. Menjumlahkan kedua pertidaksamaan menghasilkan $d_T(x, y) \leq d_T(x, z) + d_T(z, y)$.

Jarak titik (x_1, x_2) dari asal ialah $|x_1| + |x_2|$. Pada setiap kuadran, persamaan $|x_1| + |x_2| = 1$ menjadi sebuah ruas garis; keempat ruas bertemu pada empat titik sudut yang dinyatakan pada jawaban.

Pemeriksaan C.2 Pemeriksaan 2: empat calon ruang metrik. Periksa seluruh butir pada aktivitas [Kegiatan 3.2](#). Rubrik: untuk calon yang gagal, berikan aksioma dan titik konkret yang gagal; untuk calon yang berhasil, buktikan semua aksioma yang belum langsung; deskripsikan lingkaran satuan relatif terhadap

unsur nol.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Uji $d(1, 1)$ pada calon pertama.

Petunjuk 2. Untuk integral, gunakan pertidaksamaan segitiga titik demi titik dan kekontinuan $|f - g|$.

Jawaban. Calon (a) bukan metrik karena $d(1, 1) = 1$. Calon (b) adalah metrik diskret dan lingkaran satuan berpusat di 0 ialah $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calon (c) adalah metrik maksimum; lingkaran satuannya ialah batas persegi $\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$. Calon (d) adalah metrik pada $C[0, 1]$; lingkaran satuannya terdiri atas fungsi kontinu f dengan $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$.

Solusi. Pada (a), aksioma identitas titik sudah gagal: jarak suatu titik dari dirinya seharusnya nol. Pada (b), nilai hanya 0 atau 1; identitas dan simetri langsung, dan jika $x \neq y$, sedikitnya satu dari $d(x, z)$ dan $d(z, y)$ bernilai 1, sehingga pertidaksamaan segitiga berlaku. Jarak dari nol sama dengan satu tepat bagi semua titik bukan nol.

Pada (c), tak-negatif, identitas, dan simetri mengikuti nilai mutlak. Untuk tiap koordinat, $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_M(x, z) + d_M(z, y)$; mengambil maksimum atas i membuktikan aksioma keempat. Pada (d), integral tak negatif dan simetris. Jika integral $|f - g|$ nol, fungsi kontinu tak negatif $|f - g|$ tidak dapat positif di satu titik tanpa positif pada suatu interval; jadi $f = g$. Pertidaksamaan $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ yang diintegrasikan memberi pertidaksamaan segitiga. Deskripsi lingkaran mengikuti dengan mengambil jarak dari fungsi nol.

Pemeriksaan C.3 Pemeriksaan 3: tiga aksioma pertama metrik Euklides. Lengkapi empat tugas aktivitas pertama pada bagian metrik Euklides di $\mathbb{R}^n$. Rubrik: jelaskan mengapa akar kuadrat terdefinisi, buktikan kedua arah dari syarat jarak nol, dan jangan memakai gambar sebagai bukti.

Petunjuk. *Petunjuk.* Jumlah kuadrat tak negatif, dan jumlah bilangan tak negatif bernilai nol tepat ketika setiap sukunya nol.

Jawaban. Untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^n$, berlaku $d_E(x, y) \geq 0$, $d_E(x, y) = d_E(y, x)$, dan $d_E(x, y) = 0$ tepat ketika $x = y$.

Solusi. Setiap $(x_i - y_i)^2$ tak negatif, sehingga jumlahnya dan akar kuadratnya tak negatif. Karena $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ untuk setiap i , menukar x dan y tidak mengubah jarak. Jika $x = y$, semua selisih nol dan jaraknya nol. Sebaliknya, jika jaraknya nol, maka $\sum_i (x_i - y_i)^2 = 0$. Semua suku tak negatif, jadi setiap suku nol; maka $x_i = y_i$ untuk seluruh i , yakni $x = y$.

Pemeriksaan C.4 Pemeriksaan 4: dua uji numerik Cauchy–Schwarz. Hitung kedua ruas Pertidaksamaan Cauchy–Schwarz pada dua pasangan vektor dalam aktivitas. Rubrik: tampilkan hasil kali titik, kedua norma, dan perbandingan numeriknya.

Petunjuk. *Petunjuk.* Ruas kiri adalah $\sum_i x_i y_i$; ruas kanan adalah $\sqrt{\sum_i x_i^2} \sqrt{\sum_i y_i^2}$.

Jawaban. Untuk $(1, 4)$ dan $(3, 2)$, diperoleh $11 \leq \sqrt{221}$. Untuk $(1, 2, -3)$ dan $(-4, 0, -1)$, diperoleh $-1 \leq \sqrt{238}$.

Solusi. Pada pasangan pertama, hasil kali titiknya $1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 11$. Kuadrat normanya masing-masing 17 dan 13, sehingga ruas kanan $\sqrt{17}\sqrt{13} = \sqrt{221}$; karena $121 \leq 221$, perbandingan berlaku. Pada pasangan kedua, hasil kali titiknya $-4 + 0 + 3 = -1$, sedangkan kuadrat normanya 14 dan 17. Jadi ruas kanan $\sqrt{238}$ positif dan jelas lebih besar daripada -1 . Bentuk standar dengan nilai mutlak juga terpenuhi karena $1 \leq \sqrt{238}$.

Pemeriksaan C.5 Pemeriksaan 5: dua uji numerik pertidaksamaan jumlah. Verifikasikan akibat Cauchy–Schwarz [Corollary 3.10](#) pada dua pasangan vektor yang diberikan. Rubrik: hitung norma jumlah serta jumlah kedua norma tanpa membulatkan akar.

Petunjuk. *Petunjuk.* Hitung $x + y$ terlebih dahulu, lalu kuadratkan kedua ruas jika perlu.

Jawaban. Pasangan pertama memberi $2\sqrt{13} \leq \sqrt{17} + \sqrt{13}$. Pasangan kedua memberi $\sqrt{29} \leq \sqrt{14} + \sqrt{17}$.

Solusi. Untuk $x = (1, 4)$ dan $y = (3, 2)$, jumlahnya $(4, 6)$, sehingga normanya $\sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$; norma masing-masing vektor adalah $\sqrt{17}$ dan $\sqrt{13}$. Setelah mengurangi $\sqrt{13}$, cukup memeriksa $\sqrt{13} \leq \sqrt{17}$. Untuk

pasangan kedua, jumlahnya $(-3, 2, -4)$ dengan norma $\sqrt{29}$, sedangkan jumlah norma awal ialah $\sqrt{14} + \sqrt{17}$. Mengkuadratkan ruas kanan menghasilkan $31 + 2\sqrt{238} > 29$, jadi pertidaksamaan berlaku.

Pemeriksaan C.6 Pemeriksaan 6: pertidaksamaan segitiga Euklides. Lengkapi aktivitas terakhir pada bagian Euklides dengan menurunkan $d_E(x, y) \leq d_E(x, z) + d_E(z, y)$ langsung dari [Corollary 3.10](#). Rubrik: vektor yang dimasukkan ke akibat harus disebutkan dan jumlahnya harus disederhanakan menjadi $x - y$.

Petunjuk. *Petunjuk.* Ambil $u = x - z$ dan $v = z - y$.

Jawaban. Terapkan [Corollary 3.10](#) pada $u = x - z$ dan $v = z - y$; karena $u + v = x - y$, hasilnya tepat pertidaksamaan segitiga bagi d_E .

Solusi. Notasi norma Euklides memberi $d_E(x, y) = \|x - y\|_2$. Dengan $u = x - z$ dan $v = z - y$, akibat Cauchy–Schwarz menyatakan $\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$. Karena $u + v = (x - z) + (z - y) = x - y$, ruas kiri ialah $d_E(x, y)$, sedangkan dua suku ruas kanan ialah $d_E(x, z)$ dan $d_E(z, y)$. Jadi aksioma keempat terbukti untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Uji penguasaan

Delapan butir berikut merupakan materi asli pendamping. Kerjakan tanpa membuka petunjuk terlebih dahulu; gunakan pembahasan untuk mengaudit setiap langkah, bukan hanya hasil akhir.

Pemeriksaan C.7 Penguasaan 1: jarak yang dikuadratkan. Pada $\mathbb{R}$, tentukan apakah $\rho(x, y) = |x - y|^2$ merupakan metrik. Jika tidak, identifikasi aksioma yang gagal dengan contoh terkecil yang wajar.

Petunjuk. *Petunjuk.* Bandingkan jarak dari 0 ke 2 dengan lintasan melalui 1.

Jawaban. Bukan metrik; pertidaksamaan segitiga gagal pada titik 0, 1, 2.

Solusi. Fungsi ini tak negatif, simetris, dan bernilai nol tepat pada diagonal. Namun $\rho(0, 2) = 4$, sedangkan $\rho(0, 1) + \rho(1, 2) = 1 + 1 = 2$. Karena $4 \not\leq 2$, aksioma pertidaksamaan segitiga gagal. Contoh ini juga menunjukkan mengapa memeriksa tiga aksioma pertama saja tidak cukup.

Pemeriksaan C.8 Penguasaan 2: membandingkan tiga metrik pada $\mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_M(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_T(x, y) \leq \sqrt{n} d_E(x, y)$. Nyatakan akibatnya bagi bola terbuka yang berpusat sama dan berjari-jari r .

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Setiap suku maksimum tidak melebihi akar jumlah kuadrat.

Petunjuk 2. Terapkan Cauchy–Schwarz pada vektor $(|x_i - y_i|)$ dan $(1, \dots, 1)$.

Jawaban. Rantai pertidaksamaan berlaku. Karena jarak yang lebih besar menghasilkan bola berjari-jari sama yang lebih kecil, $B_T(a, r) \subseteq B_E(a, r) \subseteq B_M(a, r)$, dan $B_E(a, r/\sqrt{n}) \subseteq B_T(a, r)$.

Solusi. Tuliskan $u_i = |x_i - y_i|$. Karena $\max_i u_i^2 \leq \sum_i u_i^2$, diperoleh $d_M \leq d_E$. Karena $(\sum_i u_i)^2 = \sum_i u_i^2 + 2 \sum_{i < j} u_i u_j \geq \sum_i u_i^2$, diperoleh $d_E \leq d_T$. Cauchy–Schwarz memberi $\sum_i u_i \leq \sqrt{\sum_i u_i^2} \sqrt{\sum_i 1^2} = \sqrt{n} d_E$.

Jika $d_T(a, x) < r$, maka $d_E(a, x) < r$, lalu $d_M(a, x) < r$; ini memberi tiga inklusi pertama. Jika $d_E(a, x) < r/\sqrt{n}$, maka $d_T(a, x) \leq \sqrt{n} d_E(a, x) < r$, memberi inklusi terakhir.

Pemeriksaan C.9 Penguasaan 3: semua bola pada metrik diskret. Misalkan X himpunan tak kosong dengan metrik diskret dan $a \in X$. Tentukan $B(a, r)$ untuk setiap $r > 0$.

Petunjuk. *Petunjuk.* Satu-satunya nilai jarak adalah 0 dan 1; perhatikan ketegasan tanda $<$.

Jawaban. $B(a, r) = \{a\}$ untuk $0 < r \leq 1$, dan $B(a, r) = X$ untuk $r > 1$.

Solusi. Titik pusat selalu masuk karena $d(a, a) = 0 < r$. Setiap $x \neq a$ mempunyai jarak 1 dari a . Jika $r \leq 1$, syarat $1 < r$ gagal, termasuk pada $r = 1$; jadi hanya pusat yang masuk. Jika $r > 1$, kedua nilai jarak lebih kecil dari r , sehingga seluruh X masuk.

Pemeriksaan C.10 Penguasaan 4: metrik lintasan terpendek. Pada graf berbobot Gambar 3.8, hitung $d(a, d)$ dan $d(b, c)$. Berikan satu verifikasi eksplisit pertidaksamaan segitiga yang melibatkan a , d , dan e .

Petunjuk. *Petunjuk.* Daftarkan lintasan pendek melalui e dan bandingkan dengan sisi atau lintasan lain.

Jawaban. $d(a, d) = 6$ dan $d(b, c) = 9$; misalnya $d(a, d) \leq d(a, e) + d(e, d) = 1 + 5$.

Solusi. Lintasan $a - e - d$ berbobot $1 + 5 = 6$. Semua alternatif yang tampak lebih pendek gagal: sisi melalui b memberi sedikitnya $3 + 7 = 10$, dan melalui c memberi $8 + 2 = 10$; jadi $d(a, d) = 6$. Dari b ke c , lintasan $b - e - c$ dan $b - d - c$ masing-masing berbobot $2 + 7 = 9$ dan $7 + 2 = 9$; lintasan melalui a berbobot 11, jadi jarak terpendeknya 9. Untuk ketiga titik yang diminta, $d(a, e) = 1$ dan $d(e, d) = 5$, sehingga $d(a, d) = 6 = d(a, e) + d(e, d)$.

Pemeriksaan C.11 Penguasaan 5: menarik kembali metrik melalui injeksi. Misalkan (Y, d_Y) ruang metrik dan $f : X \rightarrow Y$ injektif. Buktikan bahwa $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ mendefinisikan metrik pada X . Jelaskan tepat di mana injektivitas dipakai.

Petunjuk. *Petunjuk.* Tiga aksioma diwarisi langsung; untuk jarak nol, ubah kesamaan citra menjadi kesamaan masukan.

Jawaban. Fungsi d_X merupakan metrik. Injektivitas diperlukan pada arah $d_X(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'$.

Solusi. Tak-negatif dan simetri mengikuti sifat d_Y . Jika $x = x'$, jelas $d_X(x, x') = 0$. Sebaliknya, jarak nol memberi $f(x) = f(x')$ menurut identitas titik di Y ; injektivitas f lalu memberi $x = x'$. Untuk $x, x', z \in X$, $d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(z)) + d_Y(f(z), f(x'))$, yang tepat merupakan pertidaksamaan segitiga bagi d_X . Tanpa injektivitas, dua masukan berbeda yang mempunyai citra sama akan berjarak nol.

Pemeriksaan C.12 Penguasaan 6: maksimum dua metrik. Jika d_1 dan d_2 adalah metrik pada himpunan yang sama X , buktikan bahwa $D(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ juga metrik.

Petunjuk. *Petunjuk.* Untuk setiap i , batasi $d_i(x, y)$ dengan jumlah yang suku-sukunya masing-masing tidak melebihi D .

Jawaban. D merupakan metrik pada X .

Solusi. Maksimum dua bilangan tak negatif tak negatif dan simetris. Nilai $D(x, y)$ nol tepat ketika kedua $d_i(x, y)$ nol, dan karena keduanya metrik, hal itu tepat ketika $x = y$. Untuk $i = 1, 2$, $d_i(x, y) \leq d_i(x, z) + d_i(z, y) \leq D(x, z) + D(z, y)$. Kedua calon di dalam maksimum dibatasi oleh ruas kanan yang sama; mengambil maksimumnya memberi $D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y)$.

Pemeriksaan C.13 Penguasaan 7: penskalaan tidak mengubah bola secara hakiki. Misalkan d metrik dan $c > 0$. Buktikan bahwa $B_{cd}(a, r) = B_d(a, r/c)$. Simpulkan bahwa kedua metrik menentukan keluarga himpunan terbuka yang sama ketika konsep itu diperkenalkan nanti.

Petunjuk. *Petunjuk.* Bagi pertidaksamaan $cd(a, x) < r$ dengan bilangan positif c .

Jawaban. Kedua bola sama karena $cd(a, x) < r$ tepat ketika $d(a, x) < r/c$. Jadi penskalaan positif hanya mengganti label jari-jari.

Solusi. Untuk titik sembarang x , $x \in B_{cd}(a, r)$ jika dan hanya jika $(cd)(a, x) = cd(a, x) < r$. Karena $c > 0$, pembagian tidak membalik tanda, sehingga syarat ini setara dengan $d(a, x) < r/c$, yakni $x \in B_d(a, r/c)$. Setiap bola bagi satu metrik dengan demikian merupakan bola bagi metrik lain; gabungan bola yang kelak mendefinisikan himpunan terbuka juga sama.

Pemeriksaan C.14 Penguasaan 8: membangun tak berhingga banyak metrik. Misalkan X mempunyai sedikitnya dua unsur. Bangun tak berhingga banyak metrik yang berbeda pada X , dan buktikan bahwa metrik-metrik tersebut memang berbeda sebagai fungsi.

Petunjuk. *Petunjuk.* Kalikan metrik diskret dengan konstanta positif yang berbeda.

Jawaban. Untuk setiap $c > 0$, fungsi $d_c(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d_c(x, y) = c$ jika $x \neq y$ merupakan metrik; nilai c yang berbeda menghasilkan fungsi yang berbeda.

Solusi. Tak-negatif, identitas, dan simetri langsung. Jika $x = y$, pertidaksamaan segitiga seketika. Jika $x \neq y$, tidak mungkin sekaligus $x = z$ dan $z = y$; sedikitnya satu jarak pada ruas kanan bernilai c , sehingga $c \leq d_c(x, z) + d_c(z, y)$. Pilih dua unsur berbeda $p, q \in X$. Untuk $c_1 \neq c_2$, $d_{c_1}(p, q) = c_1 \neq c_2 = d_{c_2}(p, q)$, jadi metriknya berbeda. Karena ada tak berhingga banyak bilangan real positif, diperoleh tak berhingga banyak metrik.

Diagnostik kesalahan ringkas

Memeriksa hanya tiga aksioma	Calon jarak yang tak negatif, simetris, dan nol pada diagonal masih dapat gagal pada pertidaksamaan segitiga.
Mengabaikan domain	Rumus yang sama dapat menjadi metrik pada satu himpunan dan gagal atau bahkan tidak terdefinisi pada himpunan lain.
Menggambarkan bola dengan geometri yang salah	Bola selalu ditentukan oleh metrik yang sedang dipakai; bentuk Euklidesnya dapat berupa lingkaran, belah ketupat, persegi, ruas, atau himpunan lain.
Mengganti “kurang dari” dengan “kurang dari atau sama dengan”	Bola terbuka $B(a, r)$ memakai syarat tegas $d(x, a) < r$; titik pada batas tidak termasuk.
Menganggap representasi rasional tidak penting	Pada metrik pembilang-penyebut, gunakan bentuk paling sederhana dengan penyebut positif sebelum menghitung jarak.
Membagi dengan koefisien yang mungkin nol	Dalam bukti Cauchy–Schwarz, pisahkan kasus vektor nol sebelum memakai rumus kuadrat dengan koefisien utama $\sum y_i^2$.
Membuktikan hasil kali jarak dengan gambar	Untuk metrik maksimum pada ruang hasil kali, buktikan pertidaksamaan koordinat demi koordinat lalu ambil maksimum.
Menggunakan petunjuk pecahan pada kasus nol	Jika petunjuk memakai $a/(a+b)$, tangani $a+b=0$ lebih dahulu.

Panduan dan pembahasan empat belas latihan

Nomor panduan mengikuti urutan empat belas latihan pada bagian akhir Bab 3. Setiap panduan mempertahankan persoalan sumber, tetapi penyelesaiannya merupakan uraian asli pendamping ini.

Pemeriksaan C.15 Latihan 1: metrik diskret. Buktikan latihan [Latihan 1](#) dengan memeriksa keempat aksioma.

Petunjuk. *Petunjuk.* Dalam pertidaksamaan segitiga, pisahkan kasus $x = y$ dan $x \neq y$.

Jawaban. Fungsi nol-satu yang diberikan merupakan metrik pada setiap himpunan X .

Solusi. Nilainya 0 atau 1, jadi tak negatif. Menurut definisi, $d(x, y) = 0$ tepat ketika $x = y$, dan kondisi kesamaan tidak berubah ketika urutan titik dibalik, sehingga simetri berlaku. Jika $x = y$, ruas kiri pertidaksamaan segitiga nol. Jika $x \neq y$, sedikitnya satu dari $x \neq z$ atau $z \neq y$ harus berlaku; maka sedikitnya satu suku ruas kanan bernilai 1. Jadi $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Pemeriksaan C.16 Latihan 2: metrik modular pada tiga titik. Selesaikan kedua nilai n pada [Latihan 2](#). Untuk nilai yang menghasilkan metrik, klasifikasikan semua bola terbuka berpusat di 1 menurut jari-jarinya.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Buat tabel simetris untuk pasangan 1, 3, 5.

Petunjuk 2. Pada $n = 8$, tiga jarak antartitik adalah 2, 4, 6.

Jawaban. Untuk $n = 4$, fungsi bukan metrik karena $d(1, 5) = 0$. Untuk $n = 8$, fungsi merupakan metrik. Dalam kasus ini, $B(1, r) = \{1\}$ untuk $0 < r \leq 2$, $B(1, r) = \{1, 3\}$ untuk $2 < r \leq 4$, dan $B(1, r) = X$ untuk $r > 4$.

Solusi. Modulo 4, nilai diagonal semuanya nol, tetapi $1 \cdot 5 - 1 = 4$ juga bersisa nol; identitas titik gagal. Modulo 8, tabel jaraknya ialah $d(1, 3) = 2$, $d(1, 5) = 4$, $d(3, 5) = 6$, nilai diagonal nol, dan tabel simetris. Ketiga pertidaksamaan tak trivial adalah $2 \leq 4 + 6$, $4 \leq 2 + 6$, dan $6 \leq 2 + 4$; semuanya benar, jadi fungsi merupakan metrik.

Jarak dari pusat 1 ke 1, 3, 5 berturut-turut 0, 2, 4. Karena bola terbuka memakai tanda tegas, titik 3 baru masuk ketika $r > 2$ dan titik 5 baru masuk ketika $r > 4$, yang menghasilkan tiga kasus pada jawaban.

Pemeriksaan C.17 Latihan 3: metrik pembilang–penyebut pada $\mathbb{Q}$. Selesaikan ketiga tugas pada [Latihan 3](#): buktikan metriknya, tentukan bola terbuka berpusat di $2/3$ berjari-jari 1, dan tentukan titik yang berada di antara 0 dan 1.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Petakan pecahan paling sederhana a/b ke pasangan (a, b) dan gunakan metrik maksimum.

Petunjuk 2. Semua jarak yang muncul adalah bilangan bulat tak negatif.

Jawaban. Fungsi d merupakan metrik. Bola $B(2/3, 1)$ hanya memuat $2/3$. Titik-titik yang berada di antara 0 dan 1 hanyalah kedua titik ujung tersebut.

Solusi. Representasi paling sederhana dengan penyebut positif bersifat tunggal, sehingga peta $\phi(a/b) = (a, b)$ injektif. Rumus d adalah pembatasan metrik maksimum pada $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ke citra ϕ ; karena itu keempat aksioma diwarisi. Secara langsung, pertidaksamaan segitiga mengikuti dari $|a - r| \leq |a - c| + |c - r|$ dan pertidaksamaan yang sama bagi penyebut, lalu mengambil maksimum.

Jarak antardua representasi merupakan maksimum dua bilangan bulat. Syarat jarak kurang dari 1 memaksa kedua selisih nol, jadi bola hanya memuat pusat. Selanjutnya $d(0/1, 1/1) = 1$. Jika q berada di antara keduanya, dua jarak bilangan bulat tak negatif harus berjumlah 1; salah satunya nol. Maka q sama dengan salah satu titik ujung. Kedua ujung memang memenuhi definisi betweenness.

Pemeriksaan C.18 Latihan 4: betweenness yang berbeda pada $\mathbb{Q}$. Pada latihan keempat dalam urutan sumber, tentukan semua titik di antara 0 dan 1, bandingkan jarak 1 dan $1/3$ dari 0, lalu tentukan semua titik di antara 0 dan $1/3$.

Petunjuk. *Petunjuk.* Untuk kasus terakhir, jarak total ialah 2; periksa kemungkinan $0 + 2$, $1 + 1$, dan $2 + 0$.

Jawaban. Di antara 0 dan 1 hanya ada 0 dan 1. Titik 1 lebih dekat ke 0 daripada $1/3$. Di antara 0 dan $1/3$ terdapat tepat 0, $1/2$, $1/3$.

Solusi. Bagian pertama sama dengan akhir panduan sebelumnya. Karena representasi $0 = 0/1$ dan $1 = 1/1$, jaraknya 1. Sementara itu $d(0/1, 1/3) = \max\{1, 2\} = 2$; jadi 1 lebih dekat.

Misalkan $q = a/b$ dalam bentuk paling sederhana dan berada di antara $0/1$ dan $1/3$. Jumlah kedua jaraknya harus 2. Kasus $0 + 2$ dan $2 + 0$ memberi titik ujung. Pada kasus $1 + 1$, syarat pertama memberi $|a| \leq 1$ dan $|b - 1| \leq 1$; syarat kedua memberi $|a - 1| \leq 1$ dan $|b - 3| \leq 1$. Dengan $b > 0$, irisan syarat memaksa $b = 2$ dan $a \in \{0, 1\}$. Pecahan $0/2$ bukan bentuk paling sederhana, sedangkan $1/2$ sah dan berjarak 1 dari

kedua ujung. Jadi daftar pada jawaban lengkap.

Pemeriksaan C.19 Latihan 5: metrik taksi pada $\mathbb{R}^n$. Buktikan [Latihan 5](#) untuk dimensi n sembarang dengan memeriksa keempat aksioma metrik, termasuk pertidaksamaan segitiga sebagai jumlah pertidaksamaan koordinat.

Petunjuk. *Petunjuk.* Jumlahkan pertidaksamaan $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ dari $i = 1$ sampai n .

Jawaban. $d_T(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$.

Solusi. Setiap suku tak negatif, jadi jumlahnya tak negatif. Jumlah itu nol tepat ketika setiap $|x_i - y_i| = 0$, yakni ketika $x = y$. Simetri mengikuti $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$. Untuk titik ketiga z , pertidaksamaan nilai mutlak pada setiap koordinat memberi $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$. Menjumlahkan atas semua i menghasilkan $d_T(x, y) \leq d_T(x, z) + d_T(z, y)$.

Pemeriksaan C.20 Latihan 6: metrik maksimum pada $\mathbb{R}^n$. Selesaikan kedua tugas [Latihan 6](#): buktikan pertidaksamaan maksimum bagi dua himpunan berhingga tak kosong di $\mathbb{R}$, lalu gunakan hasilnya atau argumen koordinat untuk membuktikan bahwa d_M merupakan metrik.

Petunjuk. *Petunjuk.* Setiap $a + b \in A + B$ memenuhi $a + b \leq \max A + \max B$.

Jawaban. Berlaku $\max(A + B) \leq \max A + \max B$, dan $d_M(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$.

Solusi. Karena A, B berhingga dan tak kosong, semua maksimum ada. Untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$, $a \leq \max A$ dan $b \leq \max B$, jadi $a + b \leq \max A + \max B$. Mengambil maksimum atas semua jumlah membuktikan pertidaksamaan pertama.

Tak-negatif, identitas, dan simetri bagi d_M mengikuti nilai mutlak. Untuk setiap koordinat, $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_M(x, z) + d_M(z, y)$. Karena semua $|x_i - y_i|$ dibatasi ruas kanan yang sama, maksimum mereka juga dibatasi ruas kanan tersebut. Inilah pertidaksamaan segitiga.

Pemeriksaan C.21 Latihan 7: metrik hub dan bola-bolanya. Selesaikan seluruh tugas [Latihan 7](#): buktikan bahwa d_H metrik, tentukan dua bola yang diminta, lalu deskripsikan $B(a, r)$ untuk pusat dan jari-jari sembarang.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Jika tiga titik berbeda, ruas kanan pertidaksamaan segitiga memuat $2|z|$ tambahan.

Petunjuk 2. Untuk $x \neq a$, syarat bola ialah $|x| < r - |a|$.

Jawaban. Fungsi d_H merupakan metrik. Untuk $a = (1/2, 0)$, $B(a, 1) = \{a\} \cup \{x : |x| < 1/2\}$. Untuk $a = (3, 4)$, $B(a, 1) = \{a\}$. Secara umum, jika $r \leq |a|$, bolanya $\{a\}$; jika $r > |a|$, bolanya $\{a\} \cup \{x : |x| < r - |a|\}$.

Solusi. Tak-negatif, identitas, dan simetri langsung dari definisi kasus. Untuk pertidaksamaan segitiga, jika $x = y$ ruas kiri nol. Jika $x \neq y$ dan $z = x$ atau $z = y$, diperoleh kesamaan. Jika z berbeda dari keduanya, ruas kiri $|x| + |y|$, sedangkan ruas kanan $(|x| + |z|) + (|z| + |y|) = |x| + |y| + 2|z|$, yang tidak lebih kecil.

Pusat a selalu masuk karena jaraknya nol. Untuk $x \neq a$, $d_H(x, a) = |x| + |a| < r$ tepat ketika $|x| < r - |a|$. Jika $r \leq |a|$, tidak ada titik tambahan. Jika $r > |a|$, titik tambahannya membentuk bola Euklides berpusat di asal dengan jari-jari $r - |a|$. Substitusi $|(1/2, 0)| = 1/2$ dan $|(3, 4)| = 5$ memberi dua kasus khusus.

Pemeriksaan C.22 Latihan 8: metrik p -adik pada bilangan bulat. Selesaikan lima tugas latihan kedelapan: dua perhitungan, lema tentang eksponen keterbagian, bukti metrik, dan dua deskripsi himpunan untuk $p = 3$.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Faktorkan $108 = 4 \cdot 3^3$ dan $12005 = 5 \cdot 7^4$.

Petunjuk 2. Jika dua selisih habis dibagi p^r , jumlahnya juga habis dibagi p^r .

Jawaban. $d(62, 170) = 1/27$ untuk $p = 3$ dan $d(14008, 2003) = 1/2401$ untuk $p = 7$. Berlaku $t(a, c) \geq \min\{t(a, b), t(b, c)\}$, sehingga d merupakan metrik, bahkan memenuhi pertidaksamaan ultrametrik. Untuk $p = 3$, syarat $d(x, 0) = 1$ berarti $3 \nmid x$, sedangkan $d(x, 0) < 1/2$ berarti $3 \mid x$, dengan 0 turut termasuk pada himpunan kedua.

Solusi. Selisih pertama $|62 - 170| = 108 = 4 \cdot 3^3$, jadi eksponennya 3 dan jaraknya $3^{-3} = 1/27$. Selisih kedua $14008 - 2003 = 12005 = 5 \cdot 7^4$, jadi jaraknya $7^{-4} = 1/2401$.

Misalkan $r = \min\{t(a, b), t(b, c)\}$. Bilangan p^r membagi $a - b$ dan $b - c$, maka membagi jumlahnya $a - c$; karena itu $t(a, c) \geq r$. Setelah membalik pangkat positif, diperoleh $d(a, c) \leq \max\{d(a, b), d(b, c)\} \leq d(a, b) + d(b, c)$. Tak-negatif, identitas, dan simetri mengikuti definisi serta $|a - b| = |b - a|$; jadi d metrik.

Untuk $p = 3$ dan $x \neq 0$, jarak satu berarti eksponen keterbagian $t = 0$, yakni 3 tidak membagi x . Nilai positif yang kurang dari $1/2$ mulai dari $1/3$, jadi diperlukan $t \geq 1$, tepat ketika $3 \mid x$. Titik 0 mempunyai jarak nol dan karena itu juga memenuhi syarat kedua.

Pemeriksaan C.23 Latihan 9: metrik maksimum pada ruang hasil kali. Hitung jarak pasangan u, v pada tugas pertama latihan kesembilan, lalu deskripsikan dan gambarkan bola $B((0, 1), 1)$ pada ruang hasil kali dengan metrik Euklides dan diskret.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Hitung jarak pada faktor X dan Y secara terpisah, kemudian ambil maksimum.

Petunjuk 2. Syarat maksimum kurang dari 1 memaksa kedua jarak faktor kurang dari 1.

Jawaban. Pada tugas pertama, $d'(u, v) = 3$. Pada tugas kedua, $B((0, 1), 1) = \{(x, 1) : -1 < x < 1\}$, sebuah ruas horizontal terbuka pada tinggi $y = 1$ dalam gambar koordinat biasa.

Solusi. Pada faktor pertama, $d_M((1, 2), (0, 5)) = \max\{1, 3\} = 3$. Pada faktor kedua, $d_T((1, -1), (2, -2)) = 1 + 1 = 2$. Maka jarak pada ruang hasil kali ialah $\max\{3, 2\} = 3$.

Untuk titik (x, y) , syarat berada dalam bola kedua ialah $\max\{|x|, d_{\text{diskret}}(y, 1)\} < 1$. Jarak diskret hanya 0 atau 1; karena pertidaksamaannya tegas, harus $y = 1$. Syarat yang tersisa ialah $|x| < 1$. Jadi kedua titik ujung tidak masuk dan tidak ada titik pada tinggi lain.

Pemeriksaan C.24 Latihan 10: metrik logaritmik. Tentukan apakah $d(x, y) = |\ln(y/x)|$ merupakan metrik pada bilangan real positif dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Petunjuk.* Tulis $d(x, y) = |\ln y - \ln x|$ dan gunakan bahwa $\ln$ injektif pada $\mathbb{R}^+$.

Jawaban. Ya. Metrik tersebut adalah tarikan balik metrik Euklides pada $\mathbb{R}$ melalui bijeksi $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Solusi. Karena $y/x > 0$, logaritma terdefinisi, dan $|\ln(y/x)| = |\ln y - \ln x|$. Nilai ini tak negatif dan simetris. Nilainya nol tepat ketika $\ln y = \ln x$, yang oleh injektivitas logaritma setara dengan $x = y$. Untuk $z > 0$, $|\ln y - \ln x| \leq |\ln z - \ln x| + |\ln y - \ln z|$, yaitu tepat $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Jadi semua aksioma terpenuhi.

Pemeriksaan C.25 Latihan 11: transformasi terbatas suatu metrik. Buktikan [Latihan 11](#). Selain monotonitas, buktikan secara eksplisit bahwa $f(t) = t/(1+t)$ subaditif pada bilangan tak negatif.

Petunjuk. *Petunjuk.* Sederhanakan $f(a) + f(b) - f(a+b)$ menjadi pecahan dengan penyebut positif.

Jawaban. Fungsi $d(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Solusi. Fungsi $f(t) = t/(1+t)$ pada $[0, \infty)$ tak negatif, naik, dan bernilai nol tepat ketika $t = 0$. Selain itu, untuk $a, b \geq 0$, perhitungan langsung memberi

$$f(a) + f(b) - f(a+b) = \frac{ab(a+b+2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0.$$

Jadi $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

Tak-negatif, identitas, dan simetri bagi $d = f \circ d_E$ kini langsung. Untuk pertidaksamaan segitiga, $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Monotonitas lalu subaditivitas memberi $f(|x - y|) \leq f(|x - z| + |z - y|) \leq f(|x - z|) + f(|z - y|)$, yang merupakan aksioma keempat.

Pemeriksaan C.26 Latihan 12: mengalikan metrik dengan konstanta. Tentukan semua syarat pada konstanta k agar kd merupakan metrik. Nyatakan secara terpisah kasus ruang yang mempunyai sedikitnya dua titik dan kasus ruang satu titik.

Petunjuk. *Petunjuk.* Untuk dua titik berbeda, uji tanda dan kemungkinan jarak nol; untuk ruang satu titik, semua nilai d sudah nol.

Jawaban. Jika X mempunyai sedikitnya dua titik, syarat perlu dan cukup adalah $k > 0$. Jika X hanya mempunyai satu titik, setiap konstanta real k menghasilkan fungsi nol yang sama dan tetap metrik.

Solusi. Untuk $k > 0$, mengalikan setiap aksioma metrik dengan k mempertahankan tak-negatif, himpunan nol, simetri, dan arah pertidaksamaan segitiga. Jika ada $x \neq y$, maka $d(x, y) > 0$. Untuk $k = 0$, jarak kedua titik menjadi nol dan identitas gagal; untuk $k < 0$, jaraknya negatif. Jadi $k > 0$ perlu pada ruang dengan sedikitnya dua titik.

Pada ruang satu titik, satu-satunya pasangan adalah (x, x) dan $d(x, x) = 0$. Maka kd adalah fungsi nol untuk setiap k ; semua aksioma tetap terpenuhi. Kasus kosong, jika diizinkan oleh konvensi, juga bersifat vakum.

Pemeriksaan C.27 Latihan 13: fungsi cekung dan transformasi metrik. Selesaikan ketiga tugas latihan fungsi cekung: verifikasi cekungnya $-x^2$, buktikan subaditivitas fungsi cekung pada $[0, \infty)$ yang nilainya di nol tak negatif, lalu buktikan bahwa $f \circ d$ adalah metrik di bawah hipotesis sumber.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Selisih yang relevan untuk $-x^2$ adalah $\alpha(1 - \alpha)(x - y)^2$.

Petunjuk 2. Jika $a + b > 0$, gunakan bobot $a/(a + b)$ dan $b/(a + b)$; tangani $a = b = 0$ lebih dahulu.

Jawaban. Fungsi $-x^2$ cekung pada $[-1, 1]$, bahkan pada seluruh $\mathbb{R}$. Setiap fungsi cekung $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(0) \geq 0$ memenuhi $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$. Dengan tambahan bahwa f naik dan nol tepat di nol, komposit $f \circ d$ merupakan metrik.

Solusi. Untuk $g(x) = -x^2$, pertidaksamaan cekung ekuivalen dengan $((1 - \alpha)x + \alpha y)^2 \leq (1 - \alpha)x^2 + \alpha y^2$. Selisih ruas kanan dan kiri ialah $\alpha(1 - \alpha)(x - y)^2 \geq 0$, jadi klaim berlaku.

Jika $a = b = 0$, maka $f(a) + f(b) = 2f(0) \geq f(0) = f(a + b)$. Jika $a + b > 0$, letakkan $\lambda = a/(a + b)$. Kekonkavan dengan titik $a + b$ dan 0 memberi $f(a) \geq \lambda f(a + b) + (1 - \lambda)f(0) \geq \lambda f(a + b)$. Dengan bobot pelengkap diperoleh $f(b) \geq (1 - \lambda)f(a + b)$. Menjumlahkan memberi subaditivitas.

Untuk $f \circ d$, tak-negatif jelas; nilai nol setara dengan $d(x, y) = 0$, lalu dengan $x = y$. Simetri diwarisi dari d . Akhirnya, monotonitas dan subaditivitas memberi $f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y))$. Jadi semua aksioma metrik terpenuhi.

Pemeriksaan C.28 Latihan 14: lima klaim benar-salah. Putuskan lima klaim pada latihan terakhir dalam urutan sumber. Setiap jawaban salah harus disertai contoh konkret; setiap jawaban benar harus disertai argumen yang berlaku umum.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Titik 0, 1, 2 menguji jarak kuadrat; metrik diskret menguji klaim tentang himpunan dan daerah hasil.

Petunjuk 2. Pada hasil kali jarak, pilih dua titik yang berbeda hanya pada satu koordinat.

Jawaban. Urutannya adalah: salah, benar, benar, salah, salah.

Solusi. (a) Salah: $d(0, 2) = 4$, tetapi $d(0, 1) + d(1, 2) = 2$. (b) Benar: pada setiap himpunan tak kosong, metrik diskret merupakan metrik. (c) Benar: jika himpunan mempunyai dua titik berbeda, metrik d_c yang memberi jarak $c > 0$ pada setiap pasangan berbeda adalah metrik; nilai c yang berbeda memberi tak berhingga banyak fungsi berbeda.

(d) Salah. Ambil $X = Y = \{0, 1\}$ dengan metrik diskret. Titik $(0, 0)$ dan $(0, 1)$ berbeda, tetapi hasil kali jaraknya $d_X(0, 0)d_Y(0, 1) = 0 \cdot 1 = 0$, sehingga identitas titik gagal. (e) Salah: himpunan tak berhingga apa pun dengan metrik diskret mempunyai daerah hasil jarak hanya $\{0, 1\}$, suatu himpunan berhingga.

Lampiran D

Pendamping Mandiri Bab 4: Penerapan Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 4, bukan menggantikannya. Kerjakan tugas tentang metrik Hamming dan metrik Levenshtein pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Seluruh uraian pendamping ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini; uraian ini bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0.

Pada setiap perhitungan jarak, jawaban ringkas menyatakan hasil akhirnya, sedangkan pembahasan memperlihatkan cara memperoleh hasil tersebut dan alasan bahwa tidak ada hasil yang lebih kecil. Untuk tugas pembuktian, rubrik mengharuskan setiap aksioma metrik ditangani secara eksplisit. Penyingkapan bertahap ini mempertahankan sifat inkuiri bab utama sekaligus memberi penutup yang cukup bagi pembelajaran mandiri.

Panduan untuk tugas sumber

Delapan pemeriksaan berikut berkorespondensi, secara berurutan, dengan lima tugas yang diratakan dari bagian [Metrik Hamming](#) dan tiga tugas dari bagian [Metrik Levenshtein](#).

Pemeriksaan D.1 Tugas Hamming 1: membuktikan aksioma metrik. Buktikan bahwa fungsi d_H pada X^n , dengan $X = \{0, 1\}$, benar-benar merupakan metrik. Rubrik: tangani tak-negatif, identitas titik, simetri, dan pertidaksamaan segitiga; jangan mengganti bukti umum dengan satu contoh numerik.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Setiap suku $|x_i - y_i|$ bernilai nol atau satu.

Petunjuk 2. Terapkan pertidaksamaan segitiga nilai mutlak pada setiap koordinat, lalu jumlahkan.

Jawaban. Ya. Keempat aksioma metrik mengikuti sifat nilai mutlak pada setiap koordinat dan fakta bahwa jumlahnya nol tepat ketika semua koordinat sama.

Solusi. Karena setiap $|x_i - y_i| \geq 0$, jumlah $d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ tak negatif. Jumlah ini nol tepat ketika setiap sukunya nol, yakni tepat ketika $x_i = y_i$ untuk semua i ; keadaan itu setara dengan $x = y$. Kesamaan $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ pada setiap koordinat memberi simetri.

Untuk $x, y, z \in X^n$, pertidaksamaan nilai mutlak memberi $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ untuk setiap i . Menjumlahkan dari $i = 1$ sampai n menghasilkan $d_H(x, y) \leq d_H(x, z) + d_H(z, y)$. Jadi d_H memenuhi seluruh aksioma metrik.

Pemeriksaan D.2 Tugas Hamming 2: jarak dua kata kode. Untuk kode C pada bab utama, hitung $d_H(c_2, c_8)$ dan tunjukkan koordinat mana yang menyumbang pada jarak tersebut.

Petunjuk. *Petunjuk.* Bandingkan 000011 dan 001111 dari kiri ke kanan.

Jawaban. $d_H(c_2, c_8) = 2$; kedua kata berbeda tepat pada koordinat ketiga dan keempat.

Solusi. Kita mempunyai $c_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ dan $c_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 1)$. Selisih pada koordinat pertama, kedua, kelima, dan keenam adalah nol, sedangkan selisih pada koordinat ketiga dan keempat bernilai satu. Karena itu, $d_H(c_2, c_8) = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 2$.

Pemeriksaan D.3 Tugas Hamming 3: menyiapkan pesan untuk pendekodean. Namai kelima blok pada pesan yang diterima sebagai $r_1, \dots, r_5$, lalu tentukan blok mana yang sudah merupakan kata kode dalam C . Rubrik: pertahankan urutan blok dan cocokkan blok yang sah dengan indeks kata kodenya.

Petunjuk. *Petunjuk.* Bandingkan setiap blok enam bit dengan daftar $c_1, \dots, c_8$, bukan hanya dengan panjangnya.

Jawaban. Bloknnya adalah $r_1 = 000111$, $r_2 = 001100 = c_7$, $r_3 = 100000$, $r_4 = 000011 = c_2$, dan $r_5 = 001001 = c_4$. Jadi r_2, r_4, r_5 sudah berada dalam C , sedangkan r_1, r_3 tidak.

Solusi. Memisahkan pesan pada setiap spasi menghasilkan, dalam urutan yang diterima,

000111, 001100, 100000, 000011, 001001.

Pencocokan langsung dengan delapan anggota C memberi $001100 = c_7$, $000011 = c_2$, dan $001001 = c_4$. Tidak ada anggota daftar yang sama dengan 000111 atau 100000. Audit ini menyiapkan dua sub-tugas pendekodean berikutnya tanpa menebak kata pengganti terlebih dahulu.

Pemeriksaan D.4 Tugas Hamming 4: mendeteksi galat transmisi. Jelaskan bagaimana pesan yang diterima membuktikan bahwa sedikitnya satu galat transmisi telah terjadi, dengan asumsi setiap blok yang dikirim harus merupakan kata kode dalam C .

Petunjuk. *Petunjuk.* Keanggotaan dalam kode adalah uji validitas blok yang diterima.

Jawaban. Blok pertama 000111 dan blok ketiga 100000 bukan anggota C ; karena blok yang sah harus berada dalam C , pesan tersebut tidak mungkin diterima tanpa galat.

Solusi. Menurut definisi kode yang dipakai, pengirim hanya mengirim anggota C . Pemeriksaan keanggotaan pada tugas sebelumnya menunjukkan $r_1 \notin C$ dan $r_3 \notin C$. Maka kedua blok yang diterima itu tidak mungkin identik dengan blok sah yang dikirim. Sedikitnya satu bit berubah pada masing-masing blok tersebut. Sebaliknya, fakta bahwa $r_2, r_4, r_5 \in C$ tidak membuktikan bahwa bit-bitnya pasti tidak berubah; galat berganda secara prinsip dapat mengubah satu kata kode menjadi kata kode lain. Yang pasti dari data ini ialah adanya galat pada blok pertama dan ketiga.

Pemeriksaan D.5 Tugas Hamming 5: semua hasil pendekodean terdekat. Ganti setiap blok yang diterima dengan setiap kata kode yang berjarak paling dekat. Temukan seluruh pesan hasil, bukan hanya satu pilihan. Rubrik: hitung jarak terhadap kedelapan kata kode untuk setiap blok dan nyatakan semua keadaan seri.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Susun satu baris delapan jarak untuk setiap r_j .

Petunjuk 2. Empat kata kode sama-sama berjarak satu dari blok pertama.

Jawaban. Blok terdekatnya adalah $r_1 \mapsto \{c_2, c_3, c_5, c_8\}$, $r_2 \mapsto c_7$, $r_3 \mapsto c_1$, $r_4 \mapsto c_2$, dan $r_5 \mapsto c_4$. Jadi terdapat tepat empat pesan hasil.

Solusi. Dengan kolom dalam urutan $c_1, \dots, c_8$, seluruh vektor jarak adalah

$$\begin{aligned} (d_H(r_1, c_i))_{i=1}^8 &= (3, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1), \\ (d_H(r_2, c_i))_{i=1}^8 &= (2, 4, 2, 2, 2, 2, 0, 2), \\ (d_H(r_3, c_i))_{i=1}^8 &= (1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5), \\ (d_H(r_4, c_i))_{i=1}^8 &= (2, 0, 2, 2, 2, 2, 4, 2), \\ (d_H(r_5, c_i))_{i=1}^8 &= (2, 2, 2, 0, 4, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

Minimum baris pertama ialah satu dan dicapai pada kolom 2, 3, 5, 8. Minimum baris ketiga ialah satu dan hanya dicapai pada kolom pertama. Tiga blok yang memang sudah berupa kata kode mempunyai minimum nol yang unik pada kolomnya sendiri.

Oleh sebab itu, seluruh kemungkinan pesan terkoreksi, dalam urutan blok, ialah

$$\begin{aligned} &(c_2, c_7, c_1, c_2, c_4), \\ &(c_3, c_7, c_1, c_2, c_4), \\ &(c_5, c_7, c_1, c_2, c_4), \\ &(c_8, c_7, c_1, c_2, c_4). \end{aligned}$$

Dekode tetangga terdekat tidak menyediakan informasi untuk memilih satu di antara empat kemungkinan ini bagi blok pertama.

Pemeriksaan D.6 Tugas Levenshtein 1: dari “green” ke “grease”. Ubah “green” menjadi “grease” dengan operasi penyisipan, penghapusan, dan substitusi yang diizinkan. Berikan urutan terpendek, identifikasi setiap operasi, dan buktikan bahwa lebih sedikit operasi tidak mungkin.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Pertahankan awalan “gre”, lalu ubah dua huruf dan tambahkan satu huruf.

Petunjuk 2. Karena panjang sasaran lebih besar satu, lintasan dengan paling banyak dua operasi harus memakai tepat satu penyisipan dan paling banyak satu substitusi.

Jawaban. Salah satu urutan terpendek adalah “green” $\rightarrow$ “grean” $\rightarrow$ “greas” $\rightarrow$ “grease”. Jadi $d_L(\text{green}, \text{grease}) = 3$.

Solusi. Substitusikan huruf keempat “e” dengan “a” untuk memperoleh “grean”. Substitusikan “n” dengan “s” untuk memperoleh “greas”, lalu sisipkan “e” di ujung. Ini memberi batas atas tiga operasi.

Untuk batas bawah, perubahan panjang dari lima menjadi enam memerlukan sedikitnya satu penyisipan. Jika seluruh perubahan memakai paling banyak dua operasi, hitungan panjang memaksa tepat satu penyisipan, tanpa penghapusan, dan paling banyak satu substitusi. Menghapus calon huruf yang disisipkan dari “grease” menghasilkan salah satu dari “rease”, “gease”, “grase”, “grese”, “greae”, atau “greas”. Jarak Hamming masing-masing dari “green” adalah 5, 4, 3, 2, 2, 2. Tidak satu pun dapat diperoleh dari “green” dengan paling banyak satu substitusi. Jadi dua operasi mustahil, sedangkan tiga operasi sudah dicapai; jaraknya tepat tiga.

Pemeriksaan D.7 Tugas Levenshtein 2: membuktikan metrik pada Σ^* . Misalkan Σ^* adalah himpunan semua untai berhingga atas alfabet Σ . Buktikan bahwa banyak minimum operasi penyisipan, penghapusan, dan substitusi mendefinisikan metrik d_L pada Σ^* . Rubrik: jelaskan bahwa minimum ada, lalu buktikan keempat aksioma.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Semua huruf x dapat dihapus, kemudian semua huruf y disisipkan.

Petunjuk 2. Balik urutan operasi untuk simetri dan sambungkan dua urutan terpendek untuk pertidaksamaan segitiga.

Jawaban. Fungsi d_L merupakan metrik pada Σ^* . Urutan kosong memberi identitas, pembalikan operasi memberi simetri, dan penyambungan urutan edit memberi pertidaksamaan segitiga.

Solusi. Untuk sembarang untai x, y , ada urutan edit berhingga: hapus seluruh $|x|$ huruf x , lalu sisipkan seluruh $|y|$ huruf y . Jadi himpunan panjang urutan edit dari x ke y adalah subhimpunan tak kosong dari bilangan bulat tak negatif; menurut prinsip pengurutan baik, himpunan itu mempunyai minimum. Karena panjang urutan edit tak negatif, $d_L(x, y) \geq 0$.

Jika $x = y$, urutan kosong mempunyai panjang nol, sehingga $d_L(x, y) = 0$. Sebaliknya, jarak nol berarti minimum dicapai oleh urutan tanpa operasi; urutan demikian tidak mengubah untai, jadi $x = y$. Setiap substitusi dapat dibalik dengan substitusi, setiap penyisipan dengan penghapusan, dan setiap penghapusan dengan penyisipan. Membalik urutan terpendek dari x ke y menghasilkan urutan sama panjang dari y ke x . Maka $d_L(y, x) \leq d_L(x, y)$; menukar peran x, y memberi pertidaksamaan sebaliknya, sehingga jaraknya simetris.

Akhirnya, sambungkan urutan terpendek dari x ke z dengan urutan terpendek dari z ke y . Hasilnya adalah suatu urutan dari x ke y sepanjang $d_L(x, z) + d_L(z, y)$. Karena $d_L(x, y)$ adalah panjang minimum, $d_L(x, y) \leq d_L(x, z) + d_L(z, y)$. Keempat aksioma terpenuhi.

Pemeriksaan D.8 Tugas Levenshtein 3: memilih koreksi ejaan terdekat. Hitung secara tepat jarak Levenshtein dari “tupotagry” ke “topography”, “topology”, dan “tautology”. Tentukan pilihan pemeriksaan ejaan dan buktikan bahwa setiap jarak yang dilaporkan memang minimum.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Isi tabel jarak untuk semua pasangan awalan, bukan hanya mencocokkan huruf pada posisi yang sama.

Petunjuk 2. Rekurensi mengambil minimum dari penghapusan, penyisipan, dan substitusi atau pencocokan terakhir.

Jawaban. Jaraknya berturut-turut adalah 5, 4, dan 5. Karena itu, pilihan terdekat yang unik adalah “topology”.

Solusi. Untuk awalan sepanjang i dan j , definisikan $D(i, j)$ sebagai jarak keduanya. Nilai batasnya $D(i, 0) = i$ dan $D(0, j) = j$. Jika huruf terakhir sama, letakkan $\epsilon_{ij} = 0$; jika berbeda, letakkan $\epsilon_{ij} = 1$. Meninjau operasi terakhir memberi rekurensi

$$D(i, j) = \min\{D(i-1, j) + 1, D(i, j-1) + 1, D(i-1, j-1) + \epsilon_{ij}\}.$$

Argumen berdasarkan operasi terakhir menunjukkan bahwa setiap urutan edit masuk ke salah satu dari tiga kasus ini; karena itu, tabel tersebut memberi batas bawah sekaligus batas atas.

Untuk sumber “tupotagry”, baris terakhir tabel, mulai dari awalan sasaran kosong, adalah

$$\begin{aligned} \text{topography} &: (9, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 4, 5, 6, 5), \\ \text{topology} &: (9, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4), \\ \text{tautology} &: (9, 8, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 5). \end{aligned}$$

Unsur terakhir memberi jarak 5, 4, 5. Batas atas itu juga tampak pada urutan edit berikut; setiap anak panah adalah satu operasi:

“tupotagry” $\rightarrow$ “topotagry” $\rightarrow$ “topogtagry” $\rightarrow$ “topogragry” $\rightarrow$ “topograpry” $\rightarrow$ “topography”;

“tupotagry” $\rightarrow$ “topotagry” $\rightarrow$ “topolagry” $\rightarrow$ “topology” $\rightarrow$ “topology”;

“tupotagry” $\rightarrow$ “taupotagry” $\rightarrow$ “tautotagry” $\rightarrow$ “tautolagry” $\rightarrow$ “tautology” $\rightarrow$ “tautology”. Karena nilai minimum terkecil adalah empat dan hanya dimiliki “topology”, itulah koreksi menurut aturan tetangga terdekat.

Uji penguasaan

Empat butir berikut merupakan materi asli pendamping. Kerjakan tanpa membuka petunjuk terlebih dahulu, lalu gunakan pembahasan untuk mengaudit perhitungan dan argumen batas bawah Anda.

Pemeriksaan D.9 Penguasaan 1: lintasan geodesik Hamming. Dalam $\{0, 1\}^7$, ambil $x = 1011010$, $y = 0011111$, dan $z = 0011011$. Hitung ketiga jarak pasangan dan tentukan apakah pertidaksamaan segitiga menjadi kesamaan melalui z .

Petunjuk. *Petunjuk.* Tandai koordinat yang berbeda untuk setiap pasangan secara terpisah.

Jawaban. $d_H(x, y) = 3$, $d_H(x, z) = 2$, dan $d_H(z, y) = 1$; jadi kesamaan segitiga berlaku.

Solusi. Kata x, y berbeda pada koordinat 1, 5, 7, sehingga $d_H(x, y) = 3$. Kata x, z berbeda pada koordinat 1, 7, sehingga jaraknya 2. Kata z, y hanya berbeda pada koordinat kelima, sehingga jaraknya 1. Maka $d_H(x, y) = 3 = 2 + 1 = d_H(x, z) + d_H(z, y)$; z berada pada suatu lintasan terpendek dari x ke y dalam kubus Hamming.

Pemeriksaan D.10 Penguasaan 2: kapan dekode terdekat bersifat unik. Misalkan jarak minimum antara dua kata kode berbeda dalam C adalah δ . Buktikan: jika kata diterima r memenuhi $d_H(r, c) < \delta/2$ untuk suatu $c \in C$, maka c adalah satu-satunya kata kode terdekat dengan r .

Petunjuk. *Petunjuk.* Andaikan ada $c' \neq c$ dengan $d_H(r, c') \leq d_H(r, c)$, lalu gunakan pertidaksamaan segitiga pada c, r, c' .

Jawaban. Benar. Kata kode lain yang setidaknya sama dekat akan memaksa $d_H(c, c') < \delta$, bertentangan dengan definisi jarak minimum kode.

Solusi. Andaikan $c' \in C$, $c' \neq c$, dan $d_H(r, c') \leq d_H(r, c)$. Pertidaksamaan segitiga memberi

$$d_H(c, c') \leq d_H(c, r) + d_H(r, c') \leq 2d_H(r, c) < \delta.$$

Namun dua kata kode berbeda harus berjarak sedikitnya δ . Kontradiksi ini menunjukkan bahwa tidak ada c' yang sama dekat atau lebih dekat daripada c . Jadi dekode terdekatnya unik.

Pemeriksaan D.11 Penguasaan 3: jarak “kitten” dan “sitting”. Hitung jarak Levenshtein antara “kitten” dan “sitting”. Berikan urutan edit yang mencapai nilai tersebut dan sertakan alasan bahwa dua operasi tidak cukup.

Petunjuk. *Petunjuk.* Dua substitusi dan satu penyisipan memberi batas atas; gunakan rekurensi awalan untuk batas bawah.

Jawaban. $d_L(\text{kitten}, \text{sitting}) = 3$.

Solusi. Urutan “kitten” $\rightarrow$ “sitten” $\rightarrow$ “sittin” $\rightarrow$ “sitting” memakai substitusi “k” menjadi “s”, substitusi “e” menjadi “i”, lalu penyisipan “g”. Jadi jaraknya paling besar tiga.

Rekurensi awalan dari pembahasan tugas Levenshtein 3, dengan kolom berlabel awalan “sitting”, menghasilkan baris terakhir untuk “kitten” (6, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 3). Unsur terakhir adalah tiga. Karena rekurensi itu menguji ketiga kemungkinan operasi terakhir dan dimulai dari nilai batas yang tepat, tidak ada urutan sepanjang dua. Maka jaraknya tepat tiga.

Pemeriksaan D.12 Penguasaan 4: membandingkan Hamming dan Levenshtein. Untuk dua untai biner x, y dengan panjang sama, buktikan $d_L(x, y) \leq d_H(x, y)$. Tunjukkan bahwa pertidaksamaan dapat ketat dengan menghitung kedua jarak bagi $x = 0101$ dan $y = 1010$.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Substitusikan tepat koordinat yang berbeda untuk memperoleh batas umum.

Petunjuk 2. Pada contoh, satu penghapusan dan satu penyisipan memindahkan pola bergantian.

Jawaban. Selalu berlaku $d_L \leq d_H$. Pada contoh, $d_H(0101, 1010) = 4$, sedangkan $d_L(0101, 1010) = 2$.

Solusi. Jika x, y berbeda pada $k = d_H(x, y)$ koordinat, substitusikan huruf x pada masing-masing koordinat tersebut dengan huruf y . Urutan ini mengubah x menjadi y dalam k operasi, sehingga minimum Levenshtein memenuhi $d_L(x, y) \leq k$.

Keempat koordinat 0101 dan 1010 berbeda, jadi jarak Hamming-nya empat. Untuk Levenshtein, hapus nol pertama dari “0101” sehingga diperoleh “101”, lalu sisipkan nol di ujung sehingga diperoleh “1010”; jadi $d_L \leq 2$. Jaraknya bukan nol karena untainya berbeda. Jaraknya juga bukan satu: satu penyisipan atau penghapusan akan mengubah panjang, sedangkan satu substitusi hanya dapat mengubah satu dari empat koordinat yang berbeda. Jadi $d_L = 2 < 4 = d_H$.

Lampiran E

Pendamping Mandiri Bab 5: Batas Bawah Terbesar

Komponen ini mendampingi Bab 5, bukan menggantikannya. Kerjakan aktivitas dan latihan pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Panduan sumber mengikuti urutan setiap butir yang benar-benar meminta jawaban; butir pengelompokan yang hanya memuat pengantar tidak dihitung ulang sebagai soal.

Seluruh uraian pendamping ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini; uraian ini bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0. Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung; pembahasan menyatakan hipotesis yang dipakai, alasan setiap langkah, dan contoh tandingan ketika pernyataan salah. Rubrik kegiatan inkuiri menilai jalur pembuktian, bukan hanya hasil. Penyingkapan bertahap ini memberi penutup bagi pembelajar mandiri tanpa menghilangkan kesempatan untuk menemukan argumen lebih dahulu.

Panduan untuk kegiatan pendahuluan

Pemeriksaan E.1 Tugas 1: keberadaan batas bawah. Tentukan apakah setiap himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ mempunyai batas bawah, lalu benarkan jawaban dengan contoh atau argumen umum. Rubrik: gunakan definisi batas bawah dan, jika jawabannya negatif, berikan satu himpunan bagian yang tidak terbatas di bawah.

Petunjuk. Carilah himpunan yang, untuk setiap calon batas bawah b , masih memuat suatu bilangan yang lebih kecil daripada b .

Jawaban. Tidak. Sebagai contoh, $\mathbb{R}$ sendiri tidak mempunyai batas bawah.

Solusi. Andaikan $b \in \mathbb{R}$ merupakan batas bawah untuk $\mathbb{R}$. Menurut definisi, harus berlaku $b \leq x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Akan tetapi, bilangan $b - 1$ juga anggota $\mathbb{R}$ dan memenuhi $b - 1 < b$. Hal ini bertentangan dengan syarat bahwa b adalah batas bawah. Jadi $\mathbb{R}$ tidak mempunyai batas bawah, sehingga tidak setiap himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ terbatas di bawah.

Pemeriksaan E.2 Tugas 2: pertidaksamaan kuadrat. Untuk $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 12x + 3 < 0\}$, tentukan apakah S terbatas di bawah dan, jika demikian, tentukan infimumnya. Rubrik: selesaikan pertidaksamaan, nyatakan himpunannya sebagai interval, dan jelaskan mengapa titik ujung bawah adalah batas bawah terbesarnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Bagilah pertidaksamaan dengan 3 dan tentukan akar-akar $x^2 - 4x + 1$.

Langkah 2. Karena koefisien x^2 positif, polinom bernilai negatif tepat di antara kedua akarnya.

Jawaban. $S = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; himpunan ini terbatas di bawah dan $\inf S = 2 - \sqrt{3}$.

Solusi. Karena $3 > 0$, pertidaksamaan semula setara dengan $x^2 - 4x + 1 < 0$. Akar-akarnya adalah

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Parabola membuka ke atas, sehingga nilainya negatif tepat untuk $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$. Jadi $S = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

Setiap anggota S lebih besar daripada $2 - \sqrt{3}$, maka $2 - \sqrt{3}$ adalah batas bawah. Jika $k > 2 - \sqrt{3}$, pilih x di antara $2 - \sqrt{3}$ dan $\min\{k, 2 + \sqrt{3}\}$; maka $x \in S$ tetapi $x < k$, sehingga k bukan batas bawah. Dengan demikian $\inf S = 2 - \sqrt{3}$, meskipun titik itu tidak termasuk dalam S karena pertidaksamaannya ketat.

Pemeriksaan E.3 Tugas 3: citra fungsi kubik. Untuk $S = \{3x^3 - 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$, tentukan apakah S terbatas di bawah dan apakah S mempunyai infimum di $\mathbb{R}$. Rubrik: tentukan citra fungsi kubik tersebut, bukan hanya beberapa nilainya.

Petunjuk. Untuk sembarang $y \in \mathbb{R}$, coba selesaikan persamaan $3x^3 - 1 = y$ terhadap x .

Jawaban. $S = \mathbb{R}$. Karena itu S tidak terbatas di bawah dan tidak mempunyai infimum yang merupakan bilangan real.

Solusi. Ambil sembarang $y \in \mathbb{R}$ dan tetapkan $x = \sqrt[3]{(y+1)/3}$. Bilangan x ini real dan memenuhi $3x^3 - 1 = y$. Jadi setiap bilangan real merupakan anggota S , sedangkan berdasarkan definisinya $S \subseteq \mathbb{R}$; maka $S = \mathbb{R}$. Untuk setiap calon batas bawah $b \in \mathbb{R}$, bilangan $b - 1 \in S$ lebih kecil daripada b . Jadi S tidak terbatas di bawah dan tidak mempunyai infimum di $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan E.4 Tugas 4: jumlah dua perpangkatan. Dengan konvensi $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, tentukan apakah $S = \{2^r + 3^s \mid r, s \in \mathbb{Z}^+\}$ terbatas di bawah dan tentukan infimumnya. Rubrik: buktikan satu batas bawah berlaku untuk semua pasangan eksponen dan periksa apakah batas itu dicapai.

Petunjuk. Karena eksponen positif terkecil adalah 1, bandingkan 2^r dengan 2^1 dan 3^s dengan 3^1 .

Jawaban. Himpunan S terbatas di bawah dan $\inf S = 5$; bahkan 5 adalah nilai minimumnya.

Solusi. Untuk $r, s \in \mathbb{Z}^+$ menurut konvensi yang dinyatakan, berlaku $r \geq 1$ dan $s \geq 1$. Karena perpangkatan dengan basis lebih besar daripada satu meningkat terhadap eksponennya, $2^r \geq 2$ dan $3^s \geq 3$. Akibatnya $2^r + 3^s \geq 5$ untuk setiap anggota S , sehingga 5 adalah batas bawah.

Dengan memilih $r = s = 1$, kita memperoleh $2^1 + 3^1 = 5 \in S$. Tidak ada batas bawah yang lebih besar daripada suatu anggota himpunan, khususnya daripada 5. Oleh sebab itu 5 adalah batas bawah terbesar, minimum, dan infimum S .

Pemeriksaan E.5 Tugas 5: batas atas terkecil. Rumuskan definisi batas atas terkecil untuk suatu himpunan bagian S dari $\mathbb{R}$. Rubrik: nyatakan baik syarat menjadi batas atas maupun syarat bahwa batas atas tersebut tidak melebihi batas atas lain mana pun.

Petunjuk. Balik arah pertidaksamaan dalam dua butir definisi batas bawah terbesar: anggota S berada di bawah calon batas, dan calon itu berada di bawah setiap batas atas lainnya.

Jawaban. Untuk $S \neq \emptyset$ yang terbatas di atas, bilangan $M \in \mathbb{R}$ adalah batas atas terkecil jika $s \leq M$ untuk setiap $s \in S$ dan $M \leq U$ untuk setiap batas atas U dari S . Bilangan ini disebut supremum S dan ditulis $\sup S$.

Solusi. Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas. Bilangan $M \in \mathbb{R}$ disebut **batas atas terkecil** dari S apabila memenuhi dua syarat berikut.

1. $s \leq M$ untuk setiap $s \in S$, sehingga M adalah batas atas S ;
2. jika U adalah batas atas S , maka $M \leq U$.

Syarat kedua menyatakan bahwa tidak ada batas atas yang lebih kecil daripada M . Bilangan tersebut juga disebut supremum, dan dinotasikan dengan $\sup S$. Aksioma kelengkapan bilangan real menjamin keberadaannya bagi setiap himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas.

Panduan untuk jarak titik ke himpunan

Enam panduan berikut mengikuti urutan tugas pada bagian tentang jarak dari titik ke himpunan. Empat tugas pertama menyusun bukti bahwa batas bawah terbesar itu tunggal; dua tugas terakhir memeriksa keberadaan dan makna $d(x, A)$. Bukalah petunjuk, jawaban, dan pembahasan hanya setelah mencoba tiap tugas secara mandiri.

Pemeriksaan E.6 Tugas 1: memilih bentuk bukti ketunggalan. Tentukan metode untuk membuktikan bahwa himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ mempunyai paling banyak satu batas bawah terbesar. Rubrik: nyatakan dua calon batas bawah terbesar dan jelaskan hubungan apa yang cukup dibuktikan di antara keduanya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Misalkan m dan m' sama-sama memenuhi definisi batas bawah terbesar untuk S .

Langkah 2. Carilah dua pertidaksamaan yang, jika digabungkan, memaksa $m = m'$.

Jawaban. Gunakan bukti langsung: ambil dua calon m dan m' , lalu buktikan $m \leq m'$ dan $m' \leq m$. Antisimetri urutan pada $\mathbb{R}$ kemudian memberi $m = m'$.

Solusi. Pernyataan ketunggalan berbentuk: jika m dan m' keduanya merupakan batas bawah terbesar S , maka keduanya sama. Karena objek-objek ini berada dalam himpunan terurut $\mathbb{R}$, cukup memperoleh kedua arah perbandingan, yaitu $m \leq m'$ dan $m' \leq m$. Sifat antisimetri urutan real menyimpulkan $m = m'$. Langkah-langkah berikut menunjukkan bagaimana definisi batas bawah terbesar menghasilkan kedua pertidaksamaan itu.

Pemeriksaan E.7 Tugas 2: mengenali kedua batas bawah. Andaikan m dan m' sama-sama merupakan batas bawah terbesar untuk S . Mengapa masing-masing merupakan batas bawah S ? Rubrik: gunakan bagian yang tepat dari definisi dan tuliskan pertidaksamaannya untuk setiap $s \in S$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Kata “terbesar” menambahkan suatu sifat pada sebuah objek yang lebih dahulu harus menjadi batas bawah.

Langkah 2. Terapkan syarat batas bawah sekali untuk m dan sekali lagi untuk m' .

Jawaban. Itu merupakan syarat pertama dalam definisi batas bawah terbesar: untuk setiap $s \in S$, berlaku $m \leq s$ dan $m' \leq s$.

Solusi. Sebuah batas bawah terbesar harus, pertama-tama, merupakan batas bawah. Karena m adalah batas bawah terbesar S , definisi memberi $m \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Alasan yang sama untuk m' memberi $m' \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Jadi kedua bilangan itu berada di antara batas-batas bawah yang dapat dibandingkan oleh sifat “terbesar” pada langkah berikutnya.

Pemeriksaan E.8 Tugas 3: memperoleh dua pertidaksamaan. Dengan m dan m' seperti pada tugas sebelumnya, tentukan dua kesimpulan yang diberikan oleh sifat bahwa masing-masing adalah batas bawah terbesar. Rubrik: terapkan kemaksimalan m kepada m' , lalu kemaksimalan m' kepada m .

Petunjuk. *Langkah 1.* Setiap batas bawah b bagi S memenuhi $b \leq m$ apabila m adalah batas bawah terbesar.

Langkah 2. Pada penerapan pertama pilih $b = m'$; pada penerapan kedua tukarkan peran keduanya.

Jawaban. Karena m' adalah batas bawah dan m yang terbesar, $m' \leq m$. Sebaliknya, karena m adalah batas bawah dan m' yang terbesar, $m \leq m'$.

Solusi. Sifat kedua batas bawah terbesar m menyatakan bahwa setiap batas bawah b dari S memenuhi $b \leq m$. Tugas sebelumnya membuktikan bahwa m' merupakan batas bawah, sehingga memilih $b = m'$ menghasilkan $m' \leq m$. Dengan menukar peran keduanya, sifat terbesar dari m' diterapkan kepada batas bawah m dan menghasilkan $m \leq m'$. Kedua arah perbandingan telah diperoleh tanpa mengasumsikan

kesimpulan ketunggalan.

Pemeriksaan E.9 Tugas 4: menutup bukti ketunggalan. Selesaikan bukti bahwa batas bawah terbesar S itu tunggal. Rubrik: sebutkan sifat urutan yang dipakai dan nyatakan dengan jelas bahwa setiap dua calon harus sama.

Petunjuk. *Langkah 1.* Dari tugas sebelumnya diketahui sekaligus $m' \leq m$ dan $m \leq m'$.

Langkah 2. Gunakan antisimetri relasi $\leq$ pada bilangan real.

Jawaban. Antisimetri memberi $m = m'$. Karena dua calon batas bawah terbesar mana pun harus sama, batas bawah terbesar S itu tunggal.

Solusi. Misalkan m dan m' merupakan dua batas bawah terbesar bagi S . Karena masing-masing merupakan batas bawah, sifat terbesar dari m memberi $m' \leq m$, sedangkan sifat terbesar dari m' memberi $m \leq m'$. Relasi $\leq$ pada $\mathbb{R}$ bersifat antisimetris, sehingga dua pertidaksamaan tersebut memaksa $m = m'$. Jadi tidak mungkin ada dua batas bawah terbesar yang berbeda; jika batas bawah terbesar itu ada, nilainya tunggal.

Pemeriksaan E.10 Tugas 5: keberadaan jarak titik ke himpunan. Untuk ruang metrik (X, d) , titik $x \in X$, dan himpunan tak kosong $A \subseteq X$, buktikan bahwa $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ ada. Rubrik: buktikan bahwa himpunan nilai jarak itu tak kosong dan terbatas di bawah sebelum memakai sifat kelengkapan $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Pilih satu $a_0 \in A$ untuk menunjukkan bahwa $D = \{d(x, a) \mid a \in A\}$ bukan himpunan kosong.

Langkah 2. Aksioma metrik memberi satu batas bawah yang sama bagi semua anggota D .

Jawaban. Himpunan $D = \{d(x, a) \mid a \in A\}$ tak kosong karena $A \neq \emptyset$, dan 0 adalah batas bawahnya karena jarak selalu tak negatif. Kelengkapan bilangan real menjamin bahwa $\inf D$, yaitu $d(x, A)$, ada dan tunggal.

Solusi. Karena A tak kosong, ada $a_0 \in A$. Maka bilangan real $d(x, a_0)$ merupakan anggota $D = \{d(x, a) \mid a \in A\}$, sehingga $D \neq \emptyset$. Untuk setiap $a \in A$, aksioma tak-negatif metrik memberi $d(x, a) \geq 0$. Jadi 0 adalah batas bawah D .

Aksioma kelengkapan $\mathbb{R}$ menyatakan bahwa setiap himpunan real tak kosong yang terbatas di bawah mempunyai infimum. Karena kedua hipotesis itu berlaku untuk D , bilangan $\inf D$ ada. Ketunggalan batas bawah terbesar, yang dibuktikan pada empat tugas pertama, memastikan nilainya tunggal. Berdasarkan definisi, $d(x, A) = \inf D$.

Pemeriksaan E.11 Tugas 6: apakah jarak nol berarti keanggotaan? Putuskan apakah $d(x, A) = 0$ selalu mengakibatkan $x \in A$. Rubrik: jika pernyataan salah, berikan ruang metrik, titik, dan himpunan tak kosong yang konkret; hitung infimumnya dan jelaskan hubungan yang benar dengan tutupan $\bar{A}$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Di $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, periksa $x = 0$ dan $A = (0, 1)$.

Langkah 2. Anggota A dapat mendekati 0 sedekat apa pun tanpa pernah sama dengan 0.

Jawaban. Tidak. Dalam $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, ambil $x = 0$ dan $A = (0, 1)$. Maka $d(0, A) = 0$, tetapi $0 \notin A$. Yang selalu benar dalam ruang metrik ialah $d(x, A) = 0$ jika dan hanya jika $x \in \bar{A}$.

Solusi. Gunakan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(u, v) = |u - v|$. Untuk $x = 0$ dan $A = (0, 1)$, himpunan jaraknya ialah $\{|a| \mid 0 < a < 1\} = (0, 1)$. Infimum himpunan ini adalah 0, sehingga $d(0, A) = 0$. Akan tetapi, interval $(0, 1)$ tidak memuat titik ujung 0; jadi $0 \notin A$. Ini merupakan contoh tandingan bagi implikasi yang ditanyakan.

Makna yang tepat adalah keanggotaan dalam tutupan. Jika $d(x, A) = 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $a \in A$ dengan $d(x, a) < \varepsilon$; jika tidak, suatu $\varepsilon > 0$ akan menjadi batas bawah positif bagi semua jarak dan infimumnya tidak mungkin nol. Jadi setiap bola terbuka di sekitar x bertemu A , sehingga $x \in \bar{A}$. Sebaliknya, jika $x \in \bar{A}$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $a \in A$ dengan $d(x, a) < \varepsilon$. Karena $d(x, A) \geq 0$ dan $d(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, haruslah $d(x, A) = 0$. Maka $d(x, A) = 0$ setara dengan $x \in \bar{A}$, bukan dengan $x \in A$ kecuali, misalnya, A tertutup.

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Delapan belas panduan berikut berkorespondensi, dalam urutan sumber, dengan semua tugas yang memuat pernyataan pada enam latihan pertama bagian latihan Bab 5. Buka petunjuk secara bertahap; jawaban menyatakan kesimpulan langsung, sedangkan pembahasan memberikan pembuktian lengkap. Rubrik pada setiap butir menunjukkan unsur yang harus tampak dalam pekerjaan mandiri.

Pemeriksaan E.12 Translasi himpunan dan batas bawah. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di bawah, serta $a \in \mathbb{R}$. Jelaskan mengapa $a + \inf(S)$ merupakan batas bawah bagi $a + S = \{a + s \mid s \in S\}$ dan mengapa $a + S$ mempunyai infimum. Rubrik: buktikan sifat batas bawah, ketak-kosongan, dan syarat untuk memakai aksioma kelengkapan.

Petunjuk. Mulailah dari $\inf(S) \leq s$ untuk setiap $s \in S$, lalu tambahkan a pada kedua ruas.

Jawaban. Setiap $a + s \in a + S$ memenuhi $a + \inf(S) \leq a + s$. Himpunan $a + S$ tidak kosong dan terbatas di bawah, sehingga aksioma kelengkapan menjamin adanya $\inf(a + S)$.

Solusi. Karena $\inf(S)$ adalah batas bawah bagi S , untuk setiap $s \in S$ berlaku $\inf(S) \leq s$. Penjumlahan dengan bilangan real a mempertahankan urutan, sehingga $a + \inf(S) \leq a + s$. Setiap unsur $a + S$ berbentuk $a + s$; jadi $a + \inf(S)$ memang batas bawah bagi $a + S$.

Pilih $s_0 \in S$, yang ada karena S tidak kosong. Maka $a + s_0 \in a + S$, sehingga $a + S$ tidak kosong. Bersama dengan batas bawah yang baru ditemukan, aksioma kelengkapan untuk $\mathbb{R}$ menyatakan bahwa $a + S$ mempunyai batas bawah terbesar, yakni $\inf(a + S)$.

Pemeriksaan E.13 Infimum translasi himpunan. Dengan asumsi yang sama, misalkan b suatu batas bawah bagi $a + S$. Buktikan bahwa $b \leq a + \inf(S)$, lalu simpulkan $\inf(a + S) = a + \inf(S)$. Rubrik: ubah b menjadi batas bawah bagi S dan gunakan sifat terbesar dari infimum.

Petunjuk. Dari $b \leq a + s$ untuk semua $s \in S$, kurangi kedua ruas dengan a .

Jawaban. Bilangan $b - a$ adalah batas bawah bagi S , jadi $b - a \leq \inf(S)$ dan $b \leq a + \inf(S)$. Karena $a + \inf(S)$ sendiri merupakan batas bawah bagi $a + S$, bilangan itu adalah infimumnya.

Solusi. Karena b batas bawah bagi $a + S$, untuk setiap $s \in S$ berlaku $b \leq a + s$. Mengurangi kedua ruas dengan a memberi $b - a \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Jadi $b - a$ merupakan batas bawah bagi S . Infimum adalah batas bawah terbesar, sehingga $b - a \leq \inf(S)$, atau ekuivalen dengan $b \leq a + \inf(S)$.

Butir sebelumnya telah membuktikan bahwa $a + \inf(S)$ adalah batas bawah bagi $a + S$. Argumen di atas membuktikan bahwa setiap batas bawah b bagi $a + S$ tidak melebihi bilangan tersebut. Maka $a + \inf(S)$ adalah batas bawah terbesar bagi $a + S$, sehingga $\inf(a + S) = a + \inf(S)$.

Pemeriksaan E.14 Mendekati supremum dari bawah. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di atas, serta $t = \sup(S)$. Buktikan bahwa untuk setiap $r < t$ terdapat $s \in S$ dengan $r < s \leq t$. Rubrik: gunakan kontraposisi dari sifat batas atas, bukan asumsi bahwa supremum harus berada di dalam S .

Petunjuk. Jika tidak ada $s \in S$ yang lebih besar daripada r , apakah peran r bagi S ?

Jawaban. Jika tidak ada $s \in S$ dengan $s > r$, maka r adalah batas atas bagi S , yang bertentangan dengan $t = \sup(S) > r$. Karena t batas atas, unsur yang diperoleh juga memenuhi $s \leq t$.

Solusi. Ambil sebarang $r < t$. Andaikan tidak terdapat $s \in S$ dengan $r < s$. Maka setiap $s \in S$ memenuhi $s \leq r$, sehingga r adalah batas atas bagi S . Namun, karena $t = \sup(S)$ adalah batas atas terkecil, setiap batas atas bagi S harus memenuhi $t \leq r$. Hal ini bertentangan dengan $r < t$. Jadi ada $s \in S$ dengan $r < s$. Selain itu, t adalah batas atas bagi S , maka $s \leq t$. Dengan demikian $r < s \leq t$.

Pemeriksaan E.15 Mendekati infimum dari atas. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di bawah, serta $t = \inf(S)$. Buktikan bahwa untuk setiap $r > t$ terdapat $s \in S$ dengan $t \leq s < r$. Rubrik: tunjukkan secara eksplisit kontradiksi yang timbul jika r menjadi batas bawah.

Petunjuk. Andaikan tidak ada $s \in S$ dengan $s < r$; bandingkan r dengan batas bawah terbesar t .

Jawaban. Jika semua $s \in S$ memenuhi $r \leq s$, maka r adalah batas bawah bagi S , sehingga $r \leq t$; ini bertentangan dengan $r > t$. Unsur yang diperoleh memenuhi $t \leq s$ karena t batas bawah.

Solusi. Ambil sebarang $r > t$. Jika tidak ada $s \in S$ dengan $s < r$, maka $r \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Dengan demikian r merupakan batas bawah bagi S . Karena $t = \inf(S)$ adalah batas bawah terbesar, setiap batas bawah harus memenuhi $r \leq t$, bertentangan dengan $r > t$. Jadi terdapat $s \in S$ dengan $s < r$. Karena t sendiri batas bawah bagi S , berlaku pula $t \leq s$. Maka $t \leq s < r$.

Pemeriksaan E.16 Batas atas jumlah dua himpunan. Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong serta terbatas di atas dan di bawah. Tetapkan $x = \sup(A)$, $y = \sup(B)$, dan $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Buktikan bahwa $x + y$ merupakan batas atas bagi $A + B$. Rubrik: mulai dari dua pertidaksamaan batas atas dan kuantifikasikan atas setiap unsur $A + B$.

Petunjuk. Untuk $a \in A$ dan $b \in B$, jumlahkan $a \leq x$ dan $b \leq y$.

Jawaban. Setiap $a + b \in A + B$ memenuhi $a + b \leq x + y$; jadi $x + y$ adalah batas atas bagi $A + B$.

Solusi. Supremum x adalah batas atas bagi A , sehingga $a \leq x$ untuk setiap $a \in A$. Demikian pula, $b \leq y$ untuk setiap $b \in B$. Ambil sebarang unsur $c \in A + B$. Berdasarkan definisi jumlah himpunan, terdapat $a \in A$ dan $b \in B$ dengan $c = a + b$. Menjumlahkan kedua pertidaksamaan menghasilkan $c = a + b \leq x + y$. Karena hal ini berlaku bagi setiap $c \in A + B$, $x + y$ adalah batas atas bagi $A + B$.

Pemeriksaan E.17 Membandingkan dua supremum. Dengan notasi pada butir sebelumnya, misalkan $z = \sup(A + B)$. Jelaskan mengapa $z \leq x + y$. Rubrik: sebutkan sifat supremum yang dipakai dan alasan z ada.

Petunjuk. Supremum tidak lebih besar daripada batas atas mana pun bagi himpunan yang sama.

Jawaban. Himpunan $A + B$ tidak kosong dan, menurut butir sebelumnya, terbatas di atas oleh $x + y$. Jadi z ada dan, sebagai batas atas terkecil, memenuhi $z \leq x + y$.

Solusi. Karena A dan B tidak kosong, terdapat $a_0 \in A$ dan $b_0 \in B$, sehingga $a_0 + b_0 \in A + B$; jadi $A + B$ tidak kosong. Butir sebelumnya menunjukkan bahwa $x + y$ merupakan batas atas bagi $A + B$. Aksioma kelengkapan kemudian menjamin adanya $z = \sup(A + B)$. Supremum adalah batas atas terkecil, sehingga ia tidak dapat melebihi batas atas $x + y$. Oleh karena itu $z \leq x + y$.

Pemeriksaan E.18 Kesamaan supremum jumlah himpunan. Dengan $x = \sup(A)$, $y = \sup(B)$, dan $z = \sup(A + B)$, buktikan bahwa $z = x + y$ melalui kontradiksi. Jika $z < x + y$, tetapkan $\epsilon = x + y - z$ dan gunakan sifat pendekatan supremum. Rubrik: pilih unsur dari kedua himpunan dengan galat yang jumlahnya kurang dari ϵ .

Petunjuk. Pilih $a \in A$ dan $b \in B$ sehingga $x - \epsilon/2 < a \leq x$ dan $y - \epsilon/2 < b \leq y$.

Jawaban. Pilihan tersebut memberi $a + b > x + y - \epsilon = z$, padahal $a + b \in A + B$ dan z adalah batas atas. Maka $z \not\leq x + y$; bersama $z \leq x + y$, diperoleh $z = x + y$.

Solusi. Kita sudah mengetahui $z \leq x + y$. Andaikan $z < x + y$ dan definisikan $\epsilon = x + y - z > 0$. Karena $x - \epsilon/2 < x = \sup(A)$, sifat pendekatan supremum menjamin adanya $a \in A$ dengan $x - \epsilon/2 < a \leq x$. Dengan alasan yang sama, ada $b \in B$ dengan $y - \epsilon/2 < b \leq y$.

Menjumlahkan dua pertidaksamaan ketat itu menghasilkan

$$a + b > x + y - \epsilon = x + y - (x + y - z) = z.$$

Akan tetapi, $a + b \in A + B$, sedangkan $z = \sup(A + B)$ adalah batas atas bagi $A + B$; seharusnya $a + b \leq z$. Kontradiksi ini menolak $z < x + y$. Karena sebelumnya telah dibuktikan $z \leq x + y$, satu-satunya kemungkinan ialah $z = x + y$. Jadi $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Pemeriksaan E.19 Infimum jumlah himpunan. Buktikan bahwa $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$. Rubrik: buktikan terlebih dahulu satu batas bawah, lalu gunakan pendekatan infimum dengan pembagian galat yang eksplisit untuk membuktikan arah sebaliknya.

Petunjuk. Jika $p = \inf(A)$, $q = \inf(B)$, dan $w = \inf(A + B) > p + q$, gunakan $\epsilon = w - p - q$ untuk memilih $a < p + \epsilon/2$ serta $b < q + \epsilon/2$.

Jawaban. Bilangan $p + q$ adalah batas bawah bagi $A + B$, jadi $p + q \leq w$. Jika ketat, unsur $a \in A$ dan $b \in B$ dapat dipilih dengan $a + b < w$, bertentangan dengan sifat w sebagai batas bawah. Jadi $w = p + q$.

Solusi. Tetapkan $p = \inf(A)$ dan $q = \inf(B)$. Untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$, berlaku $p \leq a$ dan $q \leq b$, sehingga $p + q \leq a + b$. Jadi $p + q$ adalah batas bawah bagi $A + B$. Himpunan $A + B$ tidak kosong, maka infimumnya $w = \inf(A + B)$ ada, dan sifat terbesar infimum memberi $p + q \leq w$.

Andaikan $w > p + q$ dan tetapkan $\epsilon = w - (p + q) > 0$. Karena $p + \epsilon/2 > p = \inf(A)$, sifat pendekatan infimum memberi $a \in A$ dengan $p \leq a < p + \epsilon/2$. Demikian pula, ada $b \in B$ dengan $q \leq b < q + \epsilon/2$. Maka

$$a + b < p + q + \epsilon = w.$$

Ini mustahil karena $a + b \in A + B$ dan w adalah batas bawah bagi $A + B$, yang mengharuskan $w \leq a + b$. Jadi $w \not> p + q$. Bersama $p + q \leq w$, diperoleh $w = p + q$.

Pemeriksaan E.20 Supremum suatu gabungan. Buktikan atau bantah pernyataan berikut.

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Rubrik: putuskan nilai kebenarannya dan verifikasi dua syarat batas atas terkecil.

Petunjuk. Setiap unsur gabungan berasal dari A atau B ; setiap batas atas bagi gabungan juga membatasi keduanya.

Jawaban. Pernyataan benar. Bilangan $M = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ membatasi $A \cup B$ dari atas, dan setiap batas atas bagi $A \cup B$ sedikitnya sebesar M .

Solusi. Tetapkan $M = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Jika $u \in A \cup B$, maka $u \in A$ atau $u \in B$. Dalam kasus pertama, $u \leq \sup(A) \leq M$; dalam kasus kedua, $u \leq \sup(B) \leq M$. Jadi M adalah batas atas bagi $A \cup B$.

Sekarang misalkan U sebarang batas atas bagi $A \cup B$. Karena $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$, U adalah batas atas bagi A dan bagi B . Maka $\sup(A) \leq U$ dan $\sup(B) \leq U$, sehingga $M \leq U$. Jadi M adalah batas atas terkecil, yang membuktikan kesamaan tersebut.

Pemeriksaan E.21 Infimum suatu gabungan. Buktikan atau bantah pernyataan berikut.

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$$

Rubrik: putuskan nilai kebenarannya dan verifikasi dua syarat batas bawah terbesar.

Petunjuk. Gunakan bahwa setiap unsur gabungan berada dalam salah satu himpunan dan setiap batas bawah bagi gabungan membatasi keduanya.

Jawaban. Pernyataan benar. Bilangan $L = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$ membatasi $A \cup B$ dari bawah, dan setiap batas bawah bagi gabungan tidak melebihi L .

Solusi. Tetapkan $L = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$. Jika $u \in A \cup B$, maka $u \in A$ atau $u \in B$. Jika $u \in A$, maka $L \leq \inf(A) \leq u$; jika $u \in B$, maka $L \leq \inf(B) \leq u$. Jadi L adalah batas bawah bagi $A \cup B$.

Misalkan V sebarang batas bawah bagi $A \cup B$. Karena $A, B \subseteq A \cup B$, V adalah batas bawah bagi A dan bagi B . Maka $V \leq \inf(A)$ dan $V \leq \inf(B)$, sehingga $V \leq L$. Jadi L adalah batas bawah terbesar dan kesamaan yang diminta berlaku.

Pemeriksaan E.22 Menghitung metrik supremum. Pada $C[0, 1]$ dengan $d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$, hitung $d(t^2, 1 - 2t)$. Rubrik: tentukan supremum nilai mutlak pada seluruh interval dan tunjukkan bahwa nilainya dicapai.

Petunjuk. Fungsi $h(t) = t^2 + 2t - 1$ meningkat pada $[0, 1]$; bandingkan nilai mutlak pada kedua ujung rentangnya.

Jawaban. $d(t^2, 1 - 2t) = 2$, dan jarak maksimum itu dicapai pada $t = 1$.

Solusi. Selisih kedua fungsi adalah $h(t) = t^2 - (1 - 2t) = t^2 + 2t - 1$. Untuk $0 \leq u < v \leq 1$,

$$h(v) - h(u) = (v - u)(u + v + 2) > 0,$$

sehingga h meningkat pada $[0, 1]$. Karena $h(0) = -1$ dan $h(1) = 2$, setiap $h(t)$ berada dalam $[-1, 2]$. Maka $|h(t)| \leq 2$ untuk semua $t \in [0, 1]$. Pada $t = 1$, $|h(1)| = 2$, sehingga batas atas ini dicapai dan $\sup_{t \in [0, 1]} |h(t)| = 2$. Jadi $d(t^2, 1 - 2t) = 2$.

Pemeriksaan E.23 Membuktikan metrik seragam pada ruang fungsi. Misalkan $X = C[a, b]$, dengan $a < b$, dan definisikan $d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a, b]\}$. Buktikan bahwa d merupakan metrik dan jelaskan makna geometrisnya. Rubrik: buktikan nilai supremum berhingga serta keempat aksioma metrik, lalu identifikasi jarak vertikal maksimum antara dua graf.

Petunjuk. Gunakan kekompakan $[a, b]$ untuk keberadaan maksimum dan terapkan pertidaksamaan segitiga nilai mutlak secara titik-demi-titik sebelum mengambil supremum.

Jawaban. Fungsi $|f - g|$ kontinu pada interval kompak, sehingga supremumnya berhingga dan dicapai. Fungsi d tak negatif, nol tepat untuk $f = g$, simetris, dan memenuhi pertidaksamaan segitiga. Secara geometris, $d(f, g)$ adalah pemisahan vertikal terbesar antara graf f dan g pada interval tersebut.

Solusi. Untuk $f, g \in C[a, b]$, fungsi $t \mapsto |f(t) - g(t)|$ kontinu. Teorema nilai ekstrem pada interval kompak $[a, b]$ menjamin bahwa fungsi ini mencapai suatu maksimum berhingga. Jadi $d(f, g)$ terdefinisi sebagai bilangan real tak negatif.

Jelas $d(f, g) \geq 0$. Jika $f = g$, maka seluruh selisih bernilai nol, sehingga $d(f, g) = 0$. Sebaliknya, jika $d(f, g) = 0$, maka untuk setiap $t \in [a, b]$, $0 \leq |f(t) - g(t)| \leq d(f, g) = 0$. Jadi $f(t) = g(t)$ untuk setiap t , yakni $f = g$. Selanjutnya, $|f(t) - g(t)| = |g(t) - f(t)|$ pada setiap t , maka $d(f, g) = d(g, f)$.

Untuk $f, g, h \in C[a, b]$ dan setiap $t \in [a, b]$,

$$|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Ruas kanan adalah batas atas yang tidak bergantung pada t . Mengambil supremum atas $t \in [a, b]$ pada ruas kiri memberi $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$. Jadi keempat aksioma metrik terpenuhi. Nilai $|f(t) - g(t)|$ adalah jarak vertikal kedua graf di absis t ; supremum, yang di sini merupakan maksimum, adalah jarak vertikal terbesar pada seluruh interval. Itulah alasan nama **metrik supremum** atau **metrik seragam**.

Pemeriksaan E.24 Asumsi negasi sifat Archimedes. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Andaikan tidak ada bilangan bulat positif N dengan $N > x$. Jelaskan mengapa $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas. Rubrik: terjemahkan negasi kuantor dengan tepat dan berikan batas atas yang eksplisit.

Petunjuk. Negasi “ada $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > x$ ” adalah “untuk setiap $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leq x$ ”.

Jawaban. Asumsi tersebut menyatakan $N \leq x$ bagi setiap $N \in \mathbb{Z}^+$. Jadi x adalah batas atas bagi $\mathbb{Z}^+$, dan $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas.

Solusi. Pernyataan yang diandaikan salah adalah $\exists N \in \mathbb{Z}^+ (N > x)$. Negasinya ialah $\forall N \in \mathbb{Z}^+ (N \leq x)$. Dengan demikian setiap unsur $\mathbb{Z}^+$ tidak melebihi bilangan real x . Menurut definisi, x adalah batas atas bagi $\mathbb{Z}^+$; karena itu $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas.

Pemeriksaan E.25 Supremum bilangan bulat positif. Dengan mengandaikan $\mathbb{Z}^+$ terbatas di atas, jelaskan mengapa terdapat batas atas terkecil M bagi $\mathbb{Z}^+$. Rubrik: verifikasi ketak-kosongan dan terapkan aksioma kelengkapan dengan tepat.

Petunjuk. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ memuat 1 dan, menurut asumsi, mempunyai suatu batas atas real.

Jawaban. Karena $1 \in \mathbb{Z}^+$, himpunan itu tidak kosong; menurut asumsi, himpunan itu terbatas di atas. Aksioma kelengkapan menjamin adanya $M = \sup(\mathbb{Z}^+)$, yaitu batas atas terkecilnya.

Solusi. Aksioma kelengkapan menyatakan bahwa setiap subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas mempunyai supremum. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ merupakan subhimpunan $\mathbb{R}$ dan tidak kosong karena memuat 1. Dalam argumen kontradiksi ini, keterbatasannya di atas sedang diandaikan. Karena semua hipotesis

aksioma kelengkapan terpenuhi, terdapat $M = \sup(\mathbb{Z}^+)$. Berdasarkan definisi supremum, M adalah batas atas terkecil bagi $\mathbb{Z}^+$.

Pemeriksaan E.26 Kontradiksi yang membuktikan sifat Archimedes. Andaikan $M = \sup(\mathbb{Z}^+)$. Buktikan bahwa M tidak mungkin menjadi batas atas terkecil, lalu simpulkan sifat Archimedes. Rubrik: gunakan $M - 1 < M$ untuk memperoleh bilangan bulat positif yang menghasilkan unsur baru di atas M .

Petunjuk. Karena $M - 1$ lebih kecil daripada supremum, ia bukan batas atas; pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > M - 1$ dan perhatikan $N + 1$.

Jawaban. Ada $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > M - 1$, sehingga $N + 1 \in \mathbb{Z}^+$ dan $N + 1 > M$. Ini bertentangan dengan M sebagai batas atas. Jadi $\mathbb{Z}^+$ tidak terbatas di atas, yang persis menyatakan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ ada $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > x$.

Solusi. Karena $M - 1 < M = \sup(\mathbb{Z}^+)$, bilangan $M - 1$ tidak dapat menjadi batas atas bagi $\mathbb{Z}^+$; jika ia batas atas, sifat terkecil supremum akan memberi $M \leq M - 1$. Jadi terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > M - 1$. Penambahan satu memberi $N + 1 > M$. Akan tetapi, $N + 1$ juga bilangan bulat positif, sehingga $N + 1 \in \mathbb{Z}^+$. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa M adalah batas atas bagi $\mathbb{Z}^+$.

Kontradiksi tersebut berasal dari asumsi awal bahwa, untuk suatu $x \in \mathbb{R}$, tidak ada bilangan bulat positif yang lebih besar daripada x . Maka asumsi itu salah untuk setiap x : bagi setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > x$. Inilah sifat Archimedes.

Pemeriksaan E.27 Dari sifat Archimedes menuju bentuk berskala. Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > 0$. Dengan mengandaikan sifat Archimedes, buktikan bahwa ada $N \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $Nx > y$. Rubrik: terapkan sifat Archimedes pada hasil bagi yang tepat dan perhatikan arah pertidaksamaan ketika mengalikan.

Petunjuk. Terapkan sifat Archimedes pada bilangan real y/x .

Jawaban. Pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > y/x$. Karena $x > 0$, perkalian dengan x memberi $Nx > y$.

Solusi. Karena $x > 0$, hasil bagi y/x adalah bilangan real. Sifat Archimedes memberi bilangan bulat positif N dengan $N > y/x$. Mengalikan kedua ruas dengan $x > 0$ tidak membalik arah pertidaksamaan, sehingga $Nx > y$. Argumen ini juga mencakup $y \leq 0$; tidak diperlukan asumsi tambahan pada tanda y .

Pemeriksaan E.28 Dari bentuk berskala kembali ke sifat Archimedes. Andaikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x > 0$ ada $N \in \mathbb{Z}^+$ yang memenuhi $Nx > y$. Buktikan sifat Archimedes dan simpulkan ekuivalensi kedua pernyataan. Rubrik: buat satu substitusi yang berlaku bagi sebarang batas real.

Petunjuk. Dalam bentuk berskala, tetapkan faktor positif sama dengan 1.

Jawaban. Untuk sebarang $u \in \mathbb{R}$, gunakan pernyataan berskala dengan $x = 1$ dan $y = u$. Diperoleh $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > u$, yaitu sifat Archimedes. Bersama butir sebelumnya, kedua pernyataan ekuivalen.

Solusi. Ambil sebarang bilangan real u . Hipotesis bentuk berskala dapat diterapkan pada $x = 1 > 0$ dan $y = u$. Maka terdapat bilangan bulat positif N sehingga $N \cdot 1 > u$, yakni $N > u$. Karena u dipilih sebarang, ini membuktikan sifat Archimedes. Butir sebelumnya membuktikan implikasi dari sifat Archimedes ke bentuk berskala, sedangkan argumen ini membuktikan implikasi balik. Oleh sebab itu kedua pernyataan ekuivalen.

Pemeriksaan E.29 Ekuivalensi bentuk kebalikan sifat Archimedes. Buktikan bahwa pernyataan “untuk setiap $x > 0$ terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1/N < x$ ” ekuivalen dengan sifat Archimedes. Rubrik: buktikan kedua arah, pisahkan kasus batas real tak positif dalam arah balik, dan jaga tanda ketika mengambil kebalikan.

Petunjuk. Untuk arah maju gunakan $1/x$. Untuk arah balik, jika batas y positif, terapkan pernyataan kebalikan pada $1/y$.

Jawaban. Sifat Archimedes pada $1/x$ memberi $N > 1/x$, sehingga $1/N < x$. Sebaliknya, untuk $y > 0$, penerapan pernyataan pada $1/y$ memberi $1/N < 1/y$, sehingga $N > y$; untuk $y \leq 0$, ambil $N = 1$. Jadi sifat Archimedes berlaku.

Solusi. Pertama, andaikan sifat Archimedes dan ambil sebarang $x > 0$. Karena $1/x \in \mathbb{R}$, terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/x$. Semua bilangan ini positif. Mengalikan dengan $x/N > 0$ memberi $x > 1/N$. Jadi bentuk kebalikan mengikuti dari sifat Archimedes.

Sebaliknya, andaikan untuk setiap $x > 0$ terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1/N < x$. Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$. Jika $y \leq 0$, bilangan $N = 1$ memenuhi $N > y$. Jika $y > 0$, terapkan hipotesis pada $x = 1/y > 0$. Terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1/N < 1/y$. Mengalikan dengan $Ny > 0$ menghasilkan $y < N$. Dalam kedua kasus ada bilangan bulat positif $N > y$. Karena y sebarang, sifat Archimedes berlaku. Kedua implikasi telah dibuktikan, maka kedua pernyataan ekuivalen.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Panduan ini mengikuti sembilan belas tugas pada Latihan 7–13 secara berurutan. Setiap pembahasan mempertahankan tujuan pembuktian pada sumber; bukalah petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap setelah mencoba tugas secara mandiri.

Pemeriksaan E.30 Tugas 19: batas bawah bagi himpunan bilangan bulat. Untuk $S = \{k \in \mathbb{Z} \mid k > nx\}$, buktikan bahwa S terbatas di bawah. Rubrik: berikan satu batas bawah real yang berlaku untuk setiap $k \in S$ dan hubungkan langsung dengan syarat pembentuk S .

Petunjuk. *Langkah 1.* Tidak perlu mencari suatu bilangan bulat sebagai batas bawah; batas bawah boleh berupa sebarang bilangan real.

Langkah 2. Setiap $k \in S$ memenuhi $k > nx$.

Jawaban. Bilangan nx adalah batas bawah bagi S , sebab $nx < k$ untuk setiap $k \in S$.

Solusi. Berdasarkan definisi S , jika $k \in S$, maka $k > nx$. Dengan demikian $nx \leq k$ untuk setiap anggota S . Ini tepat merupakan definisi bahwa nx adalah batas bawah bagi S . Karena $nx \in \mathbb{R}$, himpunan S terbatas di bawah dalam $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan E.31 Tugas 20: anggota bulat terkecil. Tunjukkan bahwa S memuat suatu bilangan bulat m sedemikian sehingga setiap $q \in \mathbb{Z}$ dengan $q < m$ memenuhi $q \leq nx$. Rubrik: terapkan Prinsip Pengurutan Baik kepada S , lalu gunakan keminimalan anggota yang diperoleh.

Petunjuk. *Langkah 1.* Himpunan S tak kosong dan, menurut tugas sebelumnya, terbatas di bawah; semua anggotanya bilangan bulat.

Langkah 2. Jika $q < m$ tetapi $q > nx$, di manakah letak q terhadap anggota terkecil m dari S ?

Jawaban. Prinsip Pengurutan Baik memberi anggota terkecil $m = \inf S \in S$. Jika $q \in \mathbb{Z}$ dan $q < m$, maka q tidak mungkin memenuhi $q > nx$; jadi $q \leq nx$.

Solusi. Sifat Archimedes menjamin bahwa S tak kosong, sedangkan Tugas 19 menunjukkan bahwa S terbatas di bawah. Karena $S \subseteq \mathbb{Z}$, Prinsip Pengurutan Baik yang dinyatakan pada latihan sumber memastikan bahwa S memuat infimumnya. Tuliskan anggota terkecil ini sebagai $m = \inf S$; khususnya $m \in S$.

Ambil $q \in \mathbb{Z}$ dengan $q < m$. Andaikan $q > nx$. Syarat ini dan fakta bahwa q bilangan bulat akan memberi $q \in S$, bertentangan dengan keminimalan m karena $q < m$. Jadi pengandaian tersebut salah dan harus berlaku $q \leq nx$.

Pemeriksaan E.32 Tugas 21: bilangan rasional di antara dua bilangan real. Gunakan anggota terkecil $m \in S$ untuk membuktikan $nx < m < ny$, lalu temukan bilangan rasional di antara x dan y . Rubrik: terapkan hasil tugas sebelumnya kepada $m - 1$ dan gunakan $n(y - x) > 1$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Karena $m \in S$, langsung diperoleh satu dari dua pertidaksamaan. Untuk yang lain, masukkan $q = m - 1$ ke hasil Tugas 20.

Langkah 2. Ubah $n(y - x) > 1$ menjadi $nx + 1 < ny$, kemudian bagi rantai pertidaksamaan dengan $n > 0$.

Jawaban. Berlaku $nx < m \leq nx + 1 < ny$. Karena itu $x < m/n < y$, dan $m/n \in \mathbb{Q}$ adalah bilangan rasional yang dicari.

Solusi. Karena $m \in S$, definisi S memberi $m > nx$. Bilangan $m - 1$ adalah bilangan bulat dan memenuhi $m - 1 < m$. Maka Tugas 20, dengan $q = m - 1$, memberi $m - 1 \leq nx$, atau setara dengan $m \leq nx + 1$.

Dari $n(y - x) > 1$ diperoleh $ny - nx > 1$, sehingga $nx + 1 < ny$. Menggabungkan semuanya menghasilkan

$$nx < m \leq nx + 1 < ny.$$

Karena n bilangan bulat positif, pembagian dengan n mempertahankan arah pertidaksamaan dan memberi $x < m/n < y$. Dengan $m \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$, bilangan m/n rasional. Jadi setiap interval terbuka tak kosong di $\mathbb{R}$ memuat suatu bilangan rasional.

Pemeriksaan E.33 Tugas 22: titik rasional dalam bola Euklides. Buktikan bahwa setiap bola terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$ memuat titik yang kedua koordinatnya rasional. Rubrik: mulai dari pusat dan jari-jari bola, pilih satu bilangan rasional dekat dengan tiap koordinat pusat, lalu perkirakan jarak Euklidesnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk bola berpusat $c = (c_1, c_2)$ berjari-jari $\varepsilon > 0$, gunakan kerapatan $\mathbb{Q}$ untuk memilih $q_i \in (c_i - \varepsilon/2, c_i + \varepsilon/2)$.

Langkah 2. Gunakan $\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v|$.

Jawaban. Pilih $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ dengan $|q_i - c_i| < \varepsilon/2$. Untuk $q = (q_1, q_2)$, berlaku $d_E(c, q) < \varepsilon$; jadi q berada dalam bola dan kedua koordinatnya rasional.

Solusi. Misalkan $B_{d_E}(c, \varepsilon)$ suatu bola terbuka dengan $c = (c_1, c_2)$ dan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan kerapatan bilangan rasional dalam bilangan real, terdapat $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $|q_1 - c_1| < \varepsilon/2$ dan $|q_2 - c_2| < \varepsilon/2$. Tetapkan $q = (q_1, q_2)$.

Untuk bilangan real u, v , kedua ruas tak negatif dan $u^2 + v^2 \leq (|u| + |v|)^2$, sehingga $\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v|$. Karena itu

$$d_E(c, q) \leq |q_1 - c_1| + |q_2 - c_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Maka $q \in B_{d_E}(c, \varepsilon)$, dan kedua koordinat q rasional sebagaimana diminta.

Pemeriksaan E.34 Tugas 23: membentuk calon akar kuadrat. Untuk $S = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t^2 > 2\}$, buktikan bahwa S mempunyai batas bawah terbesar m . Rubrik: tunjukkan bahwa S tak kosong dan berikan satu batas bawahnya sebelum memakai kelengkapan $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Periksa bahwa $2 \in S$.

Langkah 2. Jika $0 < t \leq 1$, maka $t^2 \leq 1$; jadi setiap anggota S lebih besar daripada 1.

Jawaban. Himpunan S tak kosong karena $2 \in S$, dan 1 adalah batas bawahnya. Kelengkapan $\mathbb{R}$ memberi $m = \inf S$; selain itu $1 \leq m \leq 2$.

Solusi. Bilangan 2 positif dan $2^2 = 4 > 2$, sehingga $2 \in S$ dan S tak kosong. Jika $t \in S$, maka $t > 0$ dan $t^2 > 2 > 1$. Seandainya $t \leq 1$, akan berlaku $t^2 \leq 1$, suatu kontradiksi. Jadi $t > 1$ untuk setiap $t \in S$, dan 1 adalah batas bawah S .

Aksioma kelengkapan bilangan real menjamin bahwa himpunan real tak kosong yang terbatas di bawah mempunyai infimum. Maka $m = \inf S$ ada. Karena 1 adalah batas bawah, $1 \leq m$; karena $2 \in S$ dan infimum tidak melebihi setiap anggota himpunan, $m \leq 2$.

Pemeriksaan E.35 Tugas 24: menyingkirkan kasus $m^2 < 2$. Andaikan $m^2 < 2$. Pilih $n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $(m + 1/n)^2 < 2$, lalu jelaskan kontradiksinya. Rubrik: buat pilihan kuantitatif untuk n dan buktikan bahwa $m + 1/n$ menjadi batas bawah S yang lebih besar daripada m .

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $\delta = 2 - m^2 > 0$ dan gunakan sifat Archimedes untuk memilih $n > (2m + 1)/\delta$.

Langkah 2. Untuk $n \geq 1$, berlaku $2m/n + 1/n^2 \leq (2m + 1)/n$. Jika kuadrat suatu bilangan positif t kurang daripada 2, bandingkan t dengan semua anggota S .

Jawaban. Dengan $\delta = 2 - m^2$, pilih $n > (2m + 1)/\delta$. Maka $(m + 1/n)^2 < 2$. Bilangan $m + 1/n$ lalu merupakan batas bawah S yang lebih besar daripada $m = \inf S$, suatu kontradiksi.

Solusi. Andaikan $m^2 < 2$ dan tetapkan $\delta = 2 - m^2 > 0$. Sifat Archimedes memberi bilangan bulat positif n dengan $n > (2m + 1)/\delta$. Karena $n \geq 1$, diperoleh

$$\left(m + \frac{1}{n}\right)^2 = m^2 + \frac{2m}{n} + \frac{1}{n^2} \leq m^2 + \frac{2m+1}{n} < m^2 + \delta = 2.$$

Tuliskan $t = m + 1/n$. Bilangan t positif dan $t > m$. Untuk setiap $s \in S$, berlaku $s > 0$ dan $s^2 > 2 > t^2$. Karena keduanya positif, $s > t$. Jadi t adalah batas bawah bagi S . Akan tetapi, $t = m + 1/n > m$, bertentangan dengan fakta bahwa m adalah batas bawah terbesar. Maka kasus $m^2 < 2$ mustahil.

Pemeriksaan E.36 Tugas 25: menyingkirkan kasus $m^2 > 2$. Andaikan $m^2 > 2$. Pilih $n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $(m - 1/n)^2 > 2$, lalu jelaskan kontradiksinya. Rubrik: pastikan $m - 1/n > 0$ serta buktikan bahwa bilangan tersebut menjadi anggota S yang lebih kecil daripada batas bawah m .

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $\delta = m^2 - 2 > 0$ dan pilih n sedemikian besar sehingga sekaligus $2m/n < \delta$ dan $1/n < m$.

Langkah 2. Gunakan $(m - 1/n)^2 > m^2 - 2m/n$.

Jawaban. Pilih $n > \max\{2m/(m^2 - 2), 1/m\}$. Maka $0 < m - 1/n < m$ dan $(m - 1/n)^2 > 2$. Jadi $m - 1/n \in S$, bertentangan dengan m sebagai batas bawah S .

Solusi. Andaikan $m^2 > 2$ dan tetapkan $\delta = m^2 - 2 > 0$. Sifat Archimedes memungkinkan kita memilih $n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $n > \max\{2m/\delta, 1/m\}$. Maka $1/n < m$, sehingga $t = m - 1/n > 0$. Selain itu,

$$t^2 = m^2 - \frac{2m}{n} + \frac{1}{n^2} > m^2 - \frac{2m}{n} > m^2 - \delta = 2.$$

Karena $t > 0$ dan $t^2 > 2$, definisi memberi $t \in S$. Namun $t = m - 1/n < m$, sedangkan m sebagai batas bawah S harus memenuhi $m \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa kasus $m^2 > 2$ juga mustahil.

Pemeriksaan E.37 Tugas 26: keberadaan $\sqrt{2}$. Simpulkan dari dua kasus yang telah disingkirkan bahwa bilangan real positif $\sqrt{2}$ ada. Rubrik: gunakan trikotomi pada m^2 dan, untuk ketepatan notasi, jelaskan ketunggalan akar positif tersebut.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tepat satu dari $m^2 < 2$, $m^2 = 2$, atau $m^2 > 2$ berlaku.

Langkah 2. Jika $u, v > 0$ dan $u^2 = v^2$, faktorkan $u^2 - v^2$.

Jawaban. Karena kedua pertidaksamaan ketat mustahil, $m^2 = 2$. Dari $m \geq 1$, m positif; ia adalah akar kuadrat positif yang tunggal dan karenanya $m = \sqrt{2}$.

Solusi. Trikotomi urutan bilangan real menyatakan bahwa tepat satu dari $m^2 < 2$, $m^2 = 2$, dan $m^2 > 2$ berlaku. Tugas 24 menyingkirkan kemungkinan pertama dan Tugas 25 menyingkirkan kemungkinan ketiga. Oleh sebab itu $m^2 = 2$. Tugas 23 memberi $m \geq 1$, sehingga $m > 0$.

Untuk memeriksa ketunggalan, andaikan $u, v > 0$ dan $u^2 = v^2 = 2$. Maka $0 = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Karena $u + v > 0$, harus berlaku $u - v = 0$, jadi $u = v$. Dengan demikian ada tepat satu bilangan real positif yang kuadratnya 2; bilangan itu dinotasikan dengan $\sqrt{2}$, dan konstruksi di atas membuktikan bahwa $m = \sqrt{2}$ benar-benar ada.

Pemeriksaan E.38 Tugas 27: paritas pembilang. Andaikan demi kontradiksi bahwa $\sqrt{2} = r/s$, dengan $r, s \in \mathbb{Z}^+$ relatif prima. Buktikan $r^2 = 2s^2$ dan simpulkan bahwa 2 membagi r . Rubrik: kuadratkan persamaan dan gunakan bahwa jika bilangan prima membagi suatu kuadrat, bilangan itu membagi dasarnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Gunakan $(\sqrt{2})^2 = 2$ dan kalikan dengan s^2 .

Langkah 2. Persamaan yang diperoleh menunjukkan $2 \mid r^2$; terapkan sifat bilangan prima 2.

Jawaban. Mengkuadratkan $\sqrt{2} = r/s$ memberi $2 = r^2/s^2$, sehingga $r^2 = 2s^2$. Jadi $2 \mid r^2$; karena 2 prima, $2 \mid r$.

Solusi. Dari $\sqrt{2} = r/s$, dengan $s > 0$, kita memperoleh

$$2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{r^2}{s^2}.$$

Mengalikan kedua ruas dengan s^2 menghasilkan $r^2 = 2s^2$. Maka r^2 genap, atau $2 \mid r^2 = r \cdot r$. Berdasarkan lema Euklides, jika bilangan prima membagi suatu hasil kali, ia membagi sekurang-kurangnya satu faktornya. Karena kedua faktor di sini sama-sama r , diperoleh $2 \mid r$. Jadi ada $k \in \mathbb{Z}^+$ dengan $r = 2k$.

Pemeriksaan E.39 Tugas 28: kontradiksi faktor persekutuan. Dengan hasil $2 \mid r$, buktikan bahwa $2 \mid s$ dan selesaikan pembuktian bahwa $\sqrt{2}$ irasional. Rubrik: tuliskan $r = 2k$, substitusikan ke $r^2 = 2s^2$, dan bandingkan dengan asumsi bahwa pecahan telah disederhanakan.

Petunjuk. Langkah 1. Substitusi $r = 2k$ memberi $4k^2 = 2s^2$.

Langkah 2. Setelah membagi dengan 2, gunakan kembali sifat prima yang dipakai pada tugas sebelumnya.

Jawaban. Dari $r = 2k$ diperoleh $s^2 = 2k^2$, sehingga $2 \mid s$. Maka 2 membagi baik r maupun s , bertentangan dengan keduanya relatif prima. Jadi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solusi. Karena $2 \mid r$, tuliskan $r = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$. Substitusi ke persamaan $r^2 = 2s^2$ memberi

$$(2k)^2 = 2s^2, \quad 4k^2 = 2s^2, \quad s^2 = 2k^2.$$

Jadi $2 \mid s^2$. Karena 2 prima, lema Euklides memberi $2 \mid s$.

Dengan demikian 2 adalah faktor persekutuan positif dari r dan s . Ini bertentangan dengan pilihan r/s dalam bentuk paling sederhana, yakni bahwa r dan s tidak mempunyai faktor persekutuan positif selain 1. Pengandaian bahwa $\sqrt{2}$ rasional harus salah; maka $\sqrt{2}$ irasional.

Pemeriksaan E.40 Tugas 29: bilangan irasional di antara dua bilangan real. Untuk dua bilangan real berbeda x dan y , temukan $q \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $z = q\sqrt{2}/2^N$ irasional dan terletak ketat di antara x dan y . Rubrik: buat langkah $h = \sqrt{2}/2^N$ cukup kecil, pilih kelipatan bulat yang tepat, pastikan $q \neq 0$, lalu buktikan irasionalitasnya.

Petunjuk. Langkah 1. Setelah menamai ujung interval sebagai $u < v$, pilih N sehingga $0 < h < v - u$. Jika interval tidak melintasi 0, ambil bilangan bulat terkecil $q > u/h$.

Langkah 2. Jika $u < 0 < v$, buat juga $h < v$ dan ambil $q = 1$. Jika $q \neq 0$ dan qh rasional, selesaikan persamaan itu terhadap $\sqrt{2}$.

Jawaban. Tulis $u = \min\{x, y\}$ dan $v = \max\{x, y\}$. Pilih N sehingga $h = \sqrt{2}/2^N < v - u$. Jika interval tidak melintasi 0, bilangan bulat terkecil $q > u/h$ memenuhi $u < qh < v$ dan $q \neq 0$. Jika $u < 0 < v$, pilih juga $h < v$ dan ambil $q = 1$. Dalam kedua kasus $z = qh = q\sqrt{2}/2^N$ irasional.

Solusi. Tukarkan nama kedua bilangan jika perlu dan tetapkan $u = \min\{x, y\}$ serta $v = \max\{x, y\}$, sehingga $u < v$. Bilangan $h_N = \sqrt{2}/2^N$ dapat dibuat sekecil yang diinginkan: menurut induksi $2^N \geq N + 1$, dan sifat Archimedes memungkinkan $N + 1$ melampaui sebarang batas real yang ditentukan. Jadi pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $0 < h = h_N < v - u$.

Mula-mula andaikan interval tidak melintasi nol, yaitu $u \geq 0$ atau $v \leq 0$. Ambil bilangan bulat terkecil q yang memenuhi $q > u/h$. Keminimalannya memberi $q - 1 \leq u/h$, sehingga

$$u < qh \leq u + h < v.$$

Jika $u \geq 0$, maka $q > u/h \geq 0$, sehingga $q \geq 1$. Jika $v \leq 0$, rantai di atas memberi $qh < v \leq 0$, sehingga $q < 0$. Jadi dalam kedua subkasus $q \neq 0$.

Jika $u < 0 < v$, pilih N lebih besar lagi bila perlu agar juga $h < v$, dan ambil $q = 1$. Maka $u < 0 < h < v$, sehingga kembali diperoleh kelipatan $z = qh$ di dalam interval dengan $q \neq 0$.

Akhirnya, dalam kedua kasus $z = q\sqrt{2}/2^N$. Seandainya z rasional, karena $q \neq 0$ kita akan memperoleh $\sqrt{2} = (2^N/q)z \in \mathbb{Q}$, bertentangan dengan Tugas 28. Jadi z irasional dan terletak ketat di antara x dan y .

Pemeriksaan E.41 Tugas 30: pertidaksamaan jarak titik ke himpunan. Dalam ruang metrik (X, d) , untuk himpunan tak kosong $A \subseteq X$ dan $x, y \in X$, buktikan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Rubrik: gunakan sifat infimum untuk memilih titik A yang hampir meminimumkan jarak dari y , terapkan pertidaksamaan segitiga, lalu hilangkan galat positifnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $a_\varepsilon \in A$ dengan $d(y, a_\varepsilon) < d(y, A) + \varepsilon$.

Langkah 2. Bandingkan $d(x, A)$ dengan $d(x, a_\varepsilon)$, lalu gunakan pertidaksamaan segitiga.

Jawaban. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $a_\varepsilon \in A$ dengan $d(y, a_\varepsilon) < d(y, A) + \varepsilon$. Maka $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon$. Karena ini berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, diperoleh pertidaksamaan yang diminta.

Solusi. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $d(y, A) = \inf\{d(y, a) \mid a \in A\}$, terdapat $a_\varepsilon \in A$ dengan $d(y, a_\varepsilon) < d(y, A) + \varepsilon$. Jika tidak ada titik seperti itu, $d(y, A) + \varepsilon$ akan menjadi batas bawah yang lebih besar daripada infimum, suatu kontradiksi.

Berdasarkan definisi infimum dan pertidaksamaan segitiga,

$$d(x, A) \leq d(x, a_\varepsilon) \leq d(x, y) + d(y, a_\varepsilon) < d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon.$$

Misalkan, sebaliknya, $d(x, A) > d(x, y) + d(y, A)$. Memilih ε lebih kecil daripada selisih positif kedua ruas akan bertentangan dengan pertidaksamaan terakhir. Jadi $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.

Pemeriksaan E.42 Tugas 31: jarak ke gabungan. Untuk subhimpunan tak kosong B, C dari ruang metrik (X, d) dan $a \in X$, buktikan $d(a, B \cup C) = \min\{d(a, B), d(a, C)\}$. Rubrik: buktikan kedua arah pertidaksamaan dengan membandingkan himpunan kandidat jarak.

Petunjuk. *Langkah 1.* Karena $B \subseteq B \cup C$ dan $C \subseteq B \cup C$, mengambil infimum atas gabungan tidak dapat menghasilkan nilai yang lebih besar daripada salah satu infimum.

Langkah 2. Jika $r = \min\{d(a, B), d(a, C)\}$, tunjukkan bahwa r adalah batas bawah bagi semua $d(a, u)$ dengan $u \in B \cup C$.

Jawaban. Jarak ke gabungan tidak melebihi jarak ke masing-masing himpunan, sehingga tidak melebihi minimum keduanya. Sebaliknya, minimum itu adalah batas bawah bagi setiap jarak ke titik dalam $B \cup C$. Kedua pertidaksamaan memberi kesamaan.

Solusi. Tetapkan $\alpha = d(a, B)$, $\beta = d(a, C)$, dan $r = \min\{\alpha, \beta\}$. Karena $B \subseteq B \cup C$, himpunan jarak yang dipakai untuk mendefinisikan $d(a, B \cup C)$ memuat semua jarak ke B . Maka $d(a, B \cup C) \leq \alpha$. Dengan alasan yang sama, $d(a, B \cup C) \leq \beta$. Jadi $d(a, B \cup C) \leq r$.

Sebaliknya, ambil $u \in B \cup C$. Jika $u \in B$, definisi infimum memberi $d(a, u) \geq \alpha \geq r$. Jika $u \in C$, diperoleh $d(a, u) \geq \beta \geq r$. Jadi r adalah batas bawah bagi semua jarak $\{d(a, u) \mid u \in B \cup C\}$. Karena infimum adalah batas bawah terbesar, $r \leq d(a, B \cup C)$. Menggabungkan kedua arah memberi $d(a, B \cup C) = r = \min\{d(a, B), d(a, C)\}$.

Pemeriksaan E.43 Tugas 32: keterbatasan diwarisi subhimpunan. Putuskan benar atau salah: setiap subhimpunan tak kosong dari himpunan terbatas $S \subseteq \mathbb{R}$ juga terbatas. Rubrik: jika benar, gunakan batas bawah dan batas atas yang sama untuk semua anggota subhimpunan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Karena S terbatas, ada $L, U \in \mathbb{R}$ dengan $L \leq s \leq U$ untuk setiap $s \in S$.

Langkah 2. Apa yang berubah jika kuantifikasi dibatasi pada anggota suatu $V \subseteq S$?

Jawaban. Benar. Setiap batas bawah dan batas atas bagi S juga menjadi batas bawah dan batas atas bagi setiap $V \subseteq S$.

Solusi. Karena S terbatas, terdapat $L, U \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $L \leq s \leq U$ untuk setiap $s \in S$. Jika $V \subseteq S$ dan $v \in V$, maka juga $v \in S$, sehingga $L \leq v \leq U$. Jadi L adalah batas bawah dan U adalah batas atas bagi V . Dengan demikian setiap subhimpunan tak kosong dari S terbatas. Syarat tak kosong diperlukan agar pembahasan infimum dan supremum biasa dapat dilanjutkan, tetapi pewarisan kedua batas itu sendiri tetap berlaku bagi himpunan kosong.

Pemeriksaan E.44 Tugas 33: supremum jumlah himpunan. Putuskan benar atau salah: $\sup(S + T) = \max\{\sup S, \sup T\}$. Rubrik: uji dengan himpunan tunggal yang konkret dan bandingkan kedua ruas.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil $S = T = \{1\}$.

Langkah 2. Hitung $S + T$ sebelum mengambil supremumnya.

Jawaban. Salah. Untuk $S = T = \{1\}$, diperoleh $\sup(S + T) = 2$, sedangkan $\max\{\sup S, \sup T\} = 1$.

Solusi. Pilih himpunan tak kosong dan terbatas $S = T = \{1\}$. Maka $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\} = \{2\}$, sehingga $\sup(S + T) = 2$. Di sisi lain, $\sup S = \sup T = 1$, jadi $\max\{\sup S, \sup T\} = 1$. Karena $2 \neq 1$, pernyataan tersebut salah. Rumus yang benar di bawah hipotesis latihan ialah $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$, bukan maksimum kedua supremum.

Pemeriksaan E.45 Tugas 34: infimum jumlah himpunan. Putuskan benar atau salah: $\inf(S + T) = \min\{\inf S, \inf T\}$. Rubrik: berikan contoh konkret yang memenuhi semua hipotesis dan hitung kedua ruas.

Petunjuk. *Langkah 1.* Himpunan tunggal $S = T = \{1\}$ juga cukup di sini.

Langkah 2. Bandingkan infimum $\{2\}$ dengan minimum dari dua salinan bilangan 1.

Jawaban. Salah. Untuk $S = T = \{1\}$, diperoleh $\inf(S + T) = 2$, sedangkan $\min\{\inf S, \inf T\} = 1$.

Solusi. Ambil $S = T = \{1\}$, yang keduanya tak kosong dan terbatas. Karena $S + T = \{2\}$, diperoleh $\inf(S + T) = 2$. Namun $\inf S = \inf T = 1$, sehingga $\min\{\inf S, \inf T\} = 1$. Kedua nilai itu berbeda, jadi pernyataan salah. Rumus yang benar adalah $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$ di bawah hipotesis yang diberikan.

Pemeriksaan E.46 Tugas 35: supremum subhimpunan. Putuskan benar atau salah: jika U subhimpunan tak kosong dari S , maka $\sup U \leq \sup S$. Rubrik: tunjukkan bahwa $\sup S$ adalah batas atas bagi U , lalu gunakan sifat terkecil dari supremum.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk setiap $u \in U \subseteq S$, berlaku $u \leq \sup S$.

Langkah 2. Supremum U tidak melebihi batas atas mana pun bagi U .

Jawaban. Benar. Bilangan $\sup S$ adalah batas atas bagi U , sehingga batas atas terkecil $\sup U$ memenuhi $\sup U \leq \sup S$.

Solusi. Ambil sebarang $u \in U$. Karena $U \subseteq S$, berlaku $u \in S$. Berdasarkan definisi supremum, $u \leq \sup S$. Jadi $\sup S$ adalah batas atas bagi U . Himpunan U tak kosong dan terbatas karena merupakan subhimpunan dari S , sehingga $\sup U$ ada. Sebagai batas atas terkecil, $\sup U$ tidak melebihi setiap batas atas bagi U , khususnya tidak melebihi $\sup S$. Maka $\sup U \leq \sup S$, dan pernyataannya benar.

Pemeriksaan E.47 Tugas 36: infimum subhimpunan. Putuskan benar atau salah: jika U subhimpunan tak kosong dari S , maka $\inf S \leq \inf U$. Rubrik: tunjukkan bahwa $\inf S$ adalah batas bawah bagi U , lalu gunakan sifat terbesar dari infimum.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk setiap $u \in U \subseteq S$, berlaku $\inf S \leq u$.

Langkah 2. Infimum U tidak lebih kecil daripada batas bawah mana pun bagi U .

Jawaban. Benar. Bilangan $\inf S$ adalah batas bawah bagi U , sehingga batas bawah terbesar $\inf U$ memenuhi $\inf S \leq \inf U$.

Solusi. Untuk setiap $u \in U$, inklusi $U \subseteq S$ memberi $u \in S$. Karena $\inf S$ adalah batas bawah bagi S , berlaku $\inf S \leq u$. Jadi $\inf S$ juga merupakan batas bawah bagi U . Himpunan U tak kosong dan terbatas, sehingga $\inf U$ ada. Karena $\inf U$ adalah batas bawah terbesar bagi U , ia sekurang-kurangnya sebesar setiap batas bawah bagi U , khususnya $\inf S$. Dengan demikian $\inf S \leq \inf U$, dan pernyataannya benar.

Pemeriksaan E.48 Tugas 37: jarak nol dan tutupan. Putuskan benar atau salah: jika $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan $d_E(x, A) = 0$, maka $x \in A$. Rubrik: jika salah, berikan contoh konkret dalam metrik Euklides d_E dan nyatakan hubungan yang tepat antara jarak nol, tutupan $\overline{A}$, dan keanggotaan dalam A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil $A = (0, 1)$ dan $x = 0$. Titik-titik $1/n$ berada dalam A untuk $n > 1$ dan mendekati 0.

Langkah 2. Dalam ruang metrik, $d(x, A) = 0$ mencirikan $x \in \overline{A}$, bukan selalu $x \in A$.

Jawaban. Salah. Untuk $A = (0, 1)$ dan $x = 0$, berlaku $d_E(0, A) = 0$, tetapi $0 \notin A$. Yang benar ialah $d_E(x, A) = 0$ jika dan hanya jika $x \in \overline{A}$; keanggotaan dalamutupan tidak sama dengan keanggotaan dalam A kecuali, misalnya, A tertutup.

Solusi. Gunakan metrik Euklides $d_E(u, v) = |u - v|$ pada $\mathbb{R}$. Ambil $A = (0, 1)$ dan $x = 0$. Semua jarak $d_E(0, a) = a$ dengan $a \in A$ positif, tetapi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $a \in A$ dengan $0 < a < \varepsilon$. Oleh karena itu $d_E(0, A) = \inf(0, 1) = 0$. Meskipun demikian, $0 \notin (0, 1) = A$. Ini membantah pernyataan.

Secara umum dalam ruang metrik, $d(x, A) = 0$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $a \in A$ dengan $d(x, a) < \varepsilon$; pernyataan ini setara dengan setiap bola terbuka di sekitar x bertemu A , yakni $x \in \overline{A}$. Sebaliknya, sifatutupan tersebut membuat infimum semua jarak ke A sama dengan nol. Jadi kesetaraan yang tepat adalah $d_E(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$. Dari sini hanya dapat disimpulkan $x \in A$ apabila diketahui tambahan bahwa $A = \overline{A}$, misalnya bila A tertutup.

Pemeriksaan penguasaan dan transfer

Enam latihan asli berikut menguji apakah gagasan Bab 5 dapat dipakai pada situasi baru. Kerjakan pernyataan-pernyataannya terlebih dahulu, nilai pekerjaan Anda dengan rubrik yang diberikan, lalu buka petunjuk secara bertahap sebelum membandingkan jawaban dan pembahasan lengkap.

Pemeriksaan E.49 Infimum, supremum, minimum, dan maksimum. Untuk parameter $t \in \mathbb{R}$, definisikan

$$S_t = (t, t+1) \cup \left\{ t + 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

dengan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Tentukan $\inf S_t$ dan $\sup S_t$, lalu putuskan apakah S_t mempunyai minimum atau maksimum.

Rubrik. Buktikan bahwa setiap nilai yang Anda usulkan memang merupakan batas yang sesuai dan bahwa tidak ada batas bawah yang lebih besar atau batas atas yang lebih kecil. Bedakan dengan tegas antara infimum atau supremum dan anggota himpunan yang menjadi minimum atau maksimum.

Petunjuk. *Langkah 1.* Titik-titik pada interval terbuka dapat mendekati t dari kanan sedekat apa pun.

Langkah 2. Barisan $t + 2 - 1/n$ meningkat menuju $t + 2$, tetapi tidak pernah mencapainya.

Langkah 3. Untuk menguji minimum atau maksimum, periksa apakah infimum atau supremum tersebut merupakan anggota S_t .

Jawaban. $\inf S_t = t$ dan $\sup S_t = t + 2$. Karena kedua nilai itu tidak berada dalam S_t , himpunan tersebut tidak mempunyai minimum dan tidak mempunyai maksimum.

Solusi. Setiap anggota interval $(t, t+1)$ lebih besar daripada t . Selain itu, untuk $n \geq 1$ berlaku $t + 2 - 1/n \geq t + 1 > t$. Jadi t adalah batas bawah S_t . Jika $b > t$, pilih $u = t + \min\{(b - t)/2, 1/2\}$. Kita mempunyai $t < u < t + 1$, sehingga $u \in S_t$, dan sekaligus $u < b$. Maka b bukan batas bawah. Jadi $\inf S_t = t$.

Setiap anggota $(t, t+1)$ lebih kecil daripada $t + 2$, dan $t + 2 - 1/n < t + 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian $t + 2$ adalah batas atas. Jika $U < t + 2$, sifat Archimedes memberi $n \in \mathbb{N}$ dengan $1/n < t + 2 - U$. Akibatnya $t + 2 - 1/n > U$, sehingga U bukan batas atas. Oleh karena itu $\sup S_t = t + 2$.

Interval $(t, t+1)$ tidak memuat t , sedangkan setiap unsur barisan sedikitnya $t + 1$; jadi $t \notin S_t$. Demikian pula, tidak satu pun dari kedua bagian pembentuk S_t memuat $t + 2$. Karena minimum harus sama dengan infimum dan maksimum harus sama dengan supremum, S_t tidak mempunyai minimum maupun maksimum.

Pemeriksaan E.50 Jarak nol danutupan. Misalkan (X, d) ruang metrik, $A \subseteq X$ tak kosong, dan $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Buktikan bahwa

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

Rubrik. Buktikan kedua implikasi dengan definisiutupan melalui bola terbuka; nyatakan secara eksplisit bagaimana sifat infimum menghasilkan titik $a \in A$ pada jarak kurang dari ε .

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \in \overline{A}$, maka $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Langkah 2. Jika infimum himpunan jarak adalah nol tetapi tidak ada jarak yang lebih kecil daripada suatu $\varepsilon > 0$, maka ε akan menjadi batas bawah positif.

Jawaban. Kesetaraan itu benar: $d(x, A) = 0$ tepat ketika setiap bola terbuka berpusat di x bertemu A , dan kondisi terakhir adalah definisi $x \in \overline{A}$.

Solusi. Andaikan $x \in \overline{A}$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $a_\varepsilon \in A$ dengan $d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Karena infimum tidak melebihi setiap anggota himpunan yang diinfimumkan, $0 \leq d(x, A) \leq d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Tidak ada bilangan real positif yang lebih kecil daripada setiap $\varepsilon > 0$; maka $d(x, A) = 0$.

Sebaliknya, andaikan $d(x, A) = 0$. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Jika semua $a \in A$ memenuhi $d(x, a) \geq \varepsilon$, maka ε merupakan batas bawah himpunan $\{d(x, a) \mid a \in A\}$, bertentangan dengan fakta bahwa batas bawah terbesarnya adalah nol. Jadi terdapat $a \in A$ dengan $d(x, a) < \varepsilon$. Artinya $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap radius positif, sehingga $x \in \overline{A}$.

Pemeriksaan E.51 Fungsi jarak bersifat 1-Lipschitz. Dalam keadaan latihan sebelumnya, definisikan $\delta_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $\delta_A(x) = d(x, A)$. Buktikan bahwa untuk semua $x, y \in X$,

$$|\delta_A(x) - \delta_A(y)| \leq d(x, y).$$

Rubrik. Gunakan pertidaksamaan segitiga sebelum mengambil infimum, peroleh dua pertidaksamaan satu arah dengan menukar x dan y , lalu gabungkan keduanya. Jangan mengandaikan bahwa infimum dicapai oleh suatu anggota A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk setiap $a \in A$, berlaku $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$.

Langkah 2. Ambil infimum terhadap a , lalu ulangi dengan menukar x dan y .

Jawaban. Fungsi δ_A bersifat 1-Lipschitz: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Solusi. Tetapkan $x, y \in X$. Untuk setiap $a \in A$, pertidaksamaan segitiga memberi $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Karena $d(x, A)$ adalah infimum nilai-nilai di ruas kiri, kita mempunyai $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$ untuk setiap $a \in A$. Mengambil infimum ruas kanan terhadap a menghasilkan

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

sehingga $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

Dengan menukar x dan y serta memakai simetri metrik, diperoleh $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Jadi baik selisih $d(x, A) - d(y, A)$ maupun kebalikannya tidak melebihi $d(x, y)$. Kedua pertidaksamaan itu setara dengan $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Bukti ini tidak memerlukan titik terdekat dalam A , yang memang belum tentu ada.

Pemeriksaan E.52 Geometri metrik supremum. Pada $\mathbb{R}^3$, gunakan metrik supremum $d_\infty(u, v) = \max_{1 \leq i \leq 3} |u_i - v_i|$. Ambil $p = (1, -2, 0)$, $q = (4, 2, -1)$, dan $m = (5/2, 0, -1/2)$. Hitung $d_\infty(p, q)$, deskripsikan $B_\infty(p, 2)$ sebagai hasil kali interval, dan tentukan apakah m berada pada lintasan yang membuat pertidaksamaan segitiga dari p ke q menjadi kesamaan.

Rubrik. Tampilkan semua selisih koordinat, bedakan bola terbuka dari bola tertutup, dan periksa kedua jarak melalui m sebelum menyimpulkan kesamaan segitiga.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk berada dalam bola terbuka berjari-jari dua, ketiga selisih koordinat harus bernilai mutlak kurang dari dua.

Langkah 2. Hitung maksimum dari $(3, 4, 1)$, lalu maksimum selisih koordinat untuk pasangan (p, m) dan (m, q) .

Jawaban. $d_\infty(p, q) = 4$ dan $B_\infty(p, 2) = (-1, 3) \times (-4, 0) \times (-2, 2)$. Selain itu, $d_\infty(p, m) = d_\infty(m, q) = 2$, sehingga $d_\infty(p, q) = d_\infty(p, m) + d_\infty(m, q)$.

Solusi. Selisih mutlak koordinat p dan q adalah $(|1 - 4|, |-2 - 2|, |0 - (-1)|) = (3, 4, 1)$. Jadi nilai maksimumnya empat dan $d_\infty(p, q) = 4$.

Suatu titik $u = (u_1, u_2, u_3)$ berada dalam $B_\infty(p, 2)$ tepat ketika $|u_1 - 1| < 2$, $|u_2 + 2| < 2$, dan $|u_3| < 2$. Oleh karena itu

$$B_\infty(p, 2) = (-1, 3) \times (-4, 0) \times (-2, 2).$$

Titik pada muka kotak, tempat salah satu selisih bernilai tepat dua, tidak termasuk karena bolanya terbuka.

Selisih mutlak bagi p dan m adalah $(3/2, 2, 1/2)$, sedangkan bagi m dan q juga $(3/2, 2, 1/2)$. Maka kedua jarak tersebut sama dengan dua. Akhirnya, $4 = 2 + 2$, sehingga pertidaksamaan segitiga menjadi kesamaan melalui m . Perhatikan bahwa m terletak pada batas, bukan di dalam, bola terbuka $B_\infty(p, 2)$.

Pemeriksaan E.53 Batas resiprokal yang sekecil apa pun. Gunakan sifat Archimedes—untuk setiap $M \in \mathbb{R}$ terdapat $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > M$ —untuk membuktikan pernyataan yang lebih terarah berikut: bagi setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $N_0 \in \mathbb{N}$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > N_0$ dan

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Rubrik. Berikan satu pilihan ambang Archimedes yang sekaligus menjamin $n > N_0$ dan pertidaksamaan resiprokal; jelaskan mengapa membalik pertidaksamaan sah.

Petunjuk. *Langkah 1.* Terapkan sifat Archimedes pada $M = \max\{N_0, 1/\varepsilon\}$.

Langkah 2. Semua bilangan yang dibalik bersifat positif, jadi $n > 1/\varepsilon$ setara dengan $1/n < \varepsilon$.

Jawaban. Pilih $n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $n > \max\{N_0, 1/\varepsilon\}$. Maka $n > N_0$ dan $0 < 1/n < \varepsilon$.

Solusi. Tetapkan $\varepsilon > 0$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$, lalu definisikan $M = \max\{N_0, 1/\varepsilon\}$. Sifat Archimedes memberi $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > M$. Karena $M \geq N_0$, kita langsung memperoleh $n > N_0$.

Selanjutnya, $n > M \geq 1/\varepsilon > 0$. Membalik dua bilangan positif membalik arah pertidaksamaan, sehingga $0 < 1/n < \varepsilon$. Karena N_0 dapat dipilih sebesar apa pun, bukan hanya ada satu resiprokal kecil: terdapat resiprokal dengan indeks yang melampaui setiap ambang yang ditentukan.

Pemeriksaan E.54 Aproksimasi rasional pada ketelitian yang ditentukan. Untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, berikan konstruksi eksplisit bilangan rasional q yang memenuhi $|x - q| < \varepsilon$. Gunakan hasil latihan sebelumnya dan fungsi lantai. Kemudian jalankan konstruksi tersebut untuk $x = \sqrt{2}$ dan $\varepsilon = 10^{-3}$ dengan memilih $n = 2000$.

Rubrik. Nyatakan pilihan n dan $m = \lfloor nx \rfloor$, turunkan batas galat tanpa mengandalkan desimal, hitung pecahan pada contoh, dan jelaskan mengapa konstruksi membuktikan bahwa $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Pilih $n \in \mathbb{N}$ dengan $1/n < \varepsilon$, lalu gunakan $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$.

Langkah 2. Setelah membagi dengan $n > 0$, jarak dari x ke $\lfloor nx \rfloor / n$ kurang dari $1/n$.

Langkah 3. Untuk contoh, gunakan $2828 < 2000\sqrt{2} < 2829$.

Jawaban. Pilih n dengan $1/n < \varepsilon$, tetapkan $m = \lfloor nx \rfloor$, dan ambil $q = m/n$. Maka $0 \leq x - q < 1/n < \varepsilon$. Untuk contoh, $m = 2828$ dan $q = 2828/2000 = 707/500$.

Solusi. Menurut latihan sebelumnya, pilih $n \in \mathbb{N}$ sehingga $1/n < \varepsilon$. Ambil bilangan bulat $m = \lfloor nx \rfloor$. Definisi fungsi lantai memberi

$$m \leq nx < m + 1.$$

Karena $n > 0$, pembagian dengan n mempertahankan arah pertidaksamaan dan menghasilkan

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Dengan $q = m/n \in \mathbb{Q}$, kita memperoleh $0 \leq x - q < 1/n < \varepsilon$, sehingga $|x - q| < \varepsilon$.

Untuk $x = \sqrt{2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, dan $n = 2000$, berlaku $1/n = 1/2000 < 10^{-3}$. Pertidaksamaan $2828 < 2000\sqrt{2} < 2829$ dapat diperiksa dengan mengkuadratkan semua suku positif: $2828^2 < 8,000,000 < 2829^2$.

Jadi $m = \lfloor 2000\sqrt{2} \rfloor = 2828$ dan

$$q = \frac{2828}{2000} = \frac{707}{500}, \quad 0 < \sqrt{2} - \frac{707}{500} < \frac{1}{2000} < 10^{-3}.$$

Konstruksi ini berlaku untuk setiap pusat real x dan setiap radius $\varepsilon > 0$. Karena itu setiap bola terbuka $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ memuat suatu $q \in \mathbb{Q}$, yang tepat menyatakan bahwa $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$.

Lampiran F

Pendamping Mandiri Bab 6: Fungsi Kontinu pada Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 6, bukan menggantikannya. Kerjakan aktivitas dan latihan pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Tiga belas panduan kegiatan dan dua puluh enam panduan latihan mengikuti semua 39 butir sumber yang benar-benar meminta jawaban; butir pengelompokan tidak dihitung sebagai soal tambahan.

Seluruh uraian pendamping dan enam pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0. Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung; pembahasan menunjukkan pilihan radius, urutan kuantor, dan jalur pembuktian. Bukalah lapisan bantuan secara bertahap agar nilai inkuiri tetap terjaga sekaligus memberi penutup yang lengkap bagi pembelajar mandiri.

Panduan kegiatan sumber

Tiga belas panduan berikut mengikuti semua tugas yang benar-benar meminta jawaban dalam kegiatan Bab 6: empat tugas pendahuluan, lima tugas tentang fungsi antara ruang metrik, dan empat tugas tentang komposisi. Kerjakan pernyataan pada bab utama sebelum membuka petunjuk, jawaban, dan pembahasan.

Pemeriksaan F.1 Toleransi di titik $x = 1$. Untuk $f(x) = x \sin(x)$, tentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(1)| < 0.5$ setiap kali $|x - 1| < \delta$. Jelaskan metode Anda. Rubrik: berikan satu nilai δ yang sah dan buktikan implikasinya; pembacaan graf saja belum merupakan pembuktian.

Petunjuk. Tulis selisih sebagai $(x - 1) \sin(x) + (\sin(x) - \sin(1))$, lalu gunakan $|\sin(x)| \leq 1$ dan $|\sin(x) - \sin(1)| \leq |x - 1|$.

Jawaban. Salah satu pilihan yang sah adalah $\delta = 1/4$.

Solusi. Karena $f(1) = \sin(1)$, pertidaksamaan segitiga dan Teorema Nilai Rata-Rata, yang memberi $|\sin(x) - \sin(1)| \leq |x - 1|$ sebab $|\cos(t)| \leq 1$, menghasilkan

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= |(x - 1) \sin(x) + \sin(x) - \sin(1)| \\ &\leq |x - 1| |\sin(x)| + |\sin(x) - \sin(1)| \\ &\leq 2|x - 1|. \end{aligned}$$

Jika $|x - 1| < \delta = 1/4$, maka $|f(x) - f(1)| < 2(1/4) = 1/2$. Jadi nilai tersebut memenuhi syarat.

Pemeriksaan F.2 Toleransi di titik $x = 2.5$. Untuk $f(x) = x \sin(x)$, tentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(2.5)| < 0.25$ setiap kali $|x - 2.5| < \delta$. Jelaskan metode Anda. Rubrik: hubungkan batas jarak masukan dengan batas jarak keluaran secara eksplisit.

Petunjuk. Tambahkan dan kurangkan $2.5 \sin(x)$. Batas yang dihasilkan adalah $(1 + 2.5)|x - 2.5|$.

Jawaban. Salah satu pilihan yang sah adalah $\delta = 1/14$.

Solusi. Dengan $a = 2.5$, kita mempunyai

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(x - a) \sin(x) + a(\sin(x) - \sin(a))| \\ &\leq |x - a| + a|x - a| \\ &= 3.5|x - a|. \end{aligned}$$

Di sini digunakan $|\sin(x)| \leq 1$ dan, melalui Teorema Nilai Rata-Rata serta $|\cos(t)| \leq 1$, $|\sin(x) - \sin(a)| \leq |x - a|$. Jika $|x - 2.5| < 1/14$, maka $|f(x) - f(2.5)| < 3.5/14 = 1/4$. Jadi $\delta = 1/14$ memenuhi syarat.

Pemeriksaan F.3 Negasi kekontinuan di suatu titik. Nyatakan negasi definisi bahwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di a . Rubrik: balikkan seluruh urutan kuantor dan negasikan pertidaksamaan keluaran dengan tepat.

Petunjuk. Negasi pernyataan “untuk setiap ϵ terdapat δ sehingga untuk setiap x berlaku implikasi” dimulai dengan “terdapat ϵ_0 sehingga untuk setiap δ terdapat x ”.

Jawaban. Fungsi f tidak kontinu di a jika terdapat $\epsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga, untuk setiap $\delta > 0$, terdapat $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x - a| < \delta$ tetapi $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon_0$.

Solusi. Kekontinuan di a menyatakan

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ketika menegasikan, kuantor universal dan eksistensial saling bertukar. Negasi suatu implikasi $P \implies Q$ adalah $P \wedge \neg Q$, dan negasi $|f(x) - f(a)| < \epsilon_0$ adalah $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon_0$. Karena itu negasinya persis pernyataan pada jawaban. Satu toleransi keluaran tetap harus gagal pada setiap skala masukan.

Pemeriksaan F.4 Diskontinuitas fungsi loncatan. Misalkan $f(x) = -1$ untuk $x < 1$ dan $f(x) = 1$ untuk $x \geq 1$. Gunakan negasi definisi untuk membuktikan bahwa f tidak kontinu di $x = 1$. Rubrik: pilih satu ϵ_0 dan, untuk sebarang $\delta > 0$, berikan saksi x yang bergantung pada δ .

Petunjuk. Ambil titik sedikit di sebelah kiri 1, misalnya $x = 1 - \delta/2$, dan bandingkan $f(x)$ dengan $f(1)$.

Jawaban. Ambil $\epsilon_0 = 1$. Untuk setiap $\delta > 0$, titik $x = 1 - \delta/2$ memenuhi $|x - 1| < \delta$, tetapi $|f(x) - f(1)| = 2 \geq \epsilon_0$.

Solusi. Nilai fungsi di titik pangkal adalah $f(1) = 1$. Tetapkan $\epsilon_0 = 1$ dan ambil sebarang $\delta > 0$. Untuk $x = 1 - \delta/2$, berlaku $x < 1$, sehingga $f(x) = -1$, serta $|x - 1| = \delta/2 < \delta$. Akan tetapi,

$$|f(x) - f(1)| = |-1 - 1| = 2 \geq 1 = \epsilon_0.$$

Jadi toleransi keluaran ϵ_0 gagal untuk setiap pilihan δ . Ini tepat negasi kekontinuan di 1.

Pemeriksaan F.5 Fungsi konstan selalu kontinu. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang metrik, $b \in Y$, dan $f : X \rightarrow Y$ didefinisikan oleh $f(x) = b$. Buktikan bahwa f kontinu. Rubrik: periksa definisi di titik sebarang dan berikan pilihan δ yang tidak bergantung pada x .

Petunjuk. Berapa nilai $d_Y(f(x), f(a))$ untuk dua titik masukan mana pun?

Jawaban. Fungsi f kontinu; di setiap titik dapat dipilih, misalnya, $\delta = 1$ untuk setiap $\epsilon > 0$.

Solusi. Ambil sebarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = 1$. Jika $d_X(x, a) < \delta$, maka karena fungsi tersebut konstan,

$$d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(b, b) = 0 < \epsilon.$$

Jadi f kontinu di setiap $a \in X$, dan karenanya kontinu pada X . Jika X kosong, pernyataan itu berlaku secara hampa.

Pemeriksaan F.6 Kekontinuan fungsi identitas. Untuk ruang metrik (X, d) , buktikan bahwa fungsi identitas $i_X : (X, d) \rightarrow (X, d)$, dengan $i_X(x) = x$, kontinu. Rubrik: nyatakan pilihan δ sebagai fungsi dari ϵ dan hitung jarak keluaran.

Petunjuk. Domain dan kodomain memakai metrik yang sama, sehingga $d(i_X(x), i_X(a)) = d(x, a)$.

Jawaban. Fungsi identitas kontinu; untuk setiap a dan $\epsilon > 0$, pilih $\delta = \epsilon$.

Solusi. Ambil sebarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$, lalu tetapkan $\delta = \epsilon$. Jika $d(x, a) < \delta$, maka

$$d(i_X(x), i_X(a)) = d(x, a) < \delta = \epsilon.$$

Jadi i_X kontinu di a . Karena a sebarang, i_X kontinu pada seluruh X .

Pemeriksaan F.7 Dua metrik pada fungsi identitas. Jelaskan mengapa kekontinuan fungsi identitas pada butir sebelumnya tidak bertentangan dengan contoh fungsi identitas dari $\mathbb{R}$ bermetrik Euklides ke $\mathbb{R}$ bermetrik diskret yang tidak kontinu. Rubrik: bedakan fungsi sebagai aturan dari ruang bermetrik yang menjadi domain dan kodomainnya.

Petunjuk. Tanyakan apakah jarak pada domain dan kodomain sama dalam kedua pernyataan tersebut.

Jawaban. Tidak ada pertentangan: butir sebelumnya memakai metrik d yang sama pada domain dan kodomain, sedangkan contoh tersebut memakai metrik Euklides pada domain dan metrik diskret pada kodomain.

Solusi. Rumus kedua fungsi memang sama, yaitu $x \mapsto x$, tetapi kekontinuan bergantung pada metrik. Untuk $i_X : (X, d) \rightarrow (X, d)$, jarak keluaran sama persis dengan jarak masukan. Pada contoh $i : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_D)$, titik berbeda dapat sedekat apa pun menurut d_E , tetapi jarak keluarannya selalu 1 menurut d_D . Jadi untuk, misalnya, $\epsilon = 1/2$, tidak ada $\delta > 0$ yang bekerja. Perbedaan metrik menjelaskan perbedaan kesimpulan.

Pemeriksaan F.8 Dari metrik taksi ke metrik maksimum. Pada $\mathbb{R}^2$, misalkan d_T adalah metrik taksi dan d_M metrik maksimum. Untuk $f(a, b) = (a + b, b)$, buktikan atau sangkal bahwa $f : (\mathbb{R}^2, d_T) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_M)$ kontinu. Rubrik: turunkan satu batas global yang membandingkan jarak keluaran dengan jarak masukan.

Petunjuk. Untuk $u = (x_1, x_2)$ dan $v = (a, b)$, batasi $|(x_1 + x_2) - (a + b)|$ dengan pertidaksamaan segitiga.

Jawaban. Fungsi tersebut kontinu, bahkan $d_M(f(u), f(v)) \leq d_T(u, v)$. Pilihan $\delta = \epsilon$ berlaku di setiap titik.

Solusi. Ambil $u = (x_1, x_2)$ dan $v = (a, b)$. Maka

$$\begin{aligned} d_M(f(u), f(v)) &= \max\{|(x_1 + x_2) - (a + b)|, |x_2 - b|\} \\ &\leq |x_1 - a| + |x_2 - b| \\ &= d_T(u, v). \end{aligned}$$

Sekarang ambil sebarang titik v dan $\epsilon > 0$, serta pilih $\delta = \epsilon$. Jika $d_T(u, v) < \delta$, pertidaksamaan di atas memberi $d_M(f(u), f(v)) < \epsilon$. Jadi f kontinu.

Pemeriksaan F.9 Dari metrik maksimum ke metrik taksi. Dengan fungsi yang sama, buktikan atau sangkal bahwa $f : (\mathbb{R}^2, d_M) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_T)$ kontinu. Rubrik: batasi jumlah dua jarak koordinat keluaran dengan kelipatan jarak maksimum masukan.

Petunjuk. Setelah memakai pertidaksamaan segitiga pada koordinat pertama, masing-masing $|x_1 - a|$ dan $|x_2 - b|$ tidak melebihi $d_M(u, v)$.

Jawaban. Fungsi tersebut kontinu, karena $d_T(f(u), f(v)) \leq 3d_M(u, v)$. Pilihan $\delta = \epsilon/3$ berlaku di setiap titik.

Solusi. Untuk $u = (x_1, x_2)$ dan $v = (a, b)$, berlaku

$$\begin{aligned} d_T(f(u), f(v)) &= |(x_1 - a) + (x_2 - b)| + |x_2 - b| \\ &\leq |x_1 - a| + 2|x_2 - b| \\ &\leq 3 \max\{|x_1 - a|, |x_2 - b|\} \\ &= 3d_M(u, v). \end{aligned}$$

Untuk sebarang titik v dan $\epsilon > 0$, pilih $\delta = \epsilon/3$. Jika $d_M(u, v) < \delta$, maka $d_T(f(u), f(v)) < 3\delta = \epsilon$. Jadi f kontinu.

Pemeriksaan F.10 Memulai bukti kekontinuan komposisi. Misalkan $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ dan $g : (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ kontinu. Nyatakan apa yang harus dibuktikan agar $g \circ f$ kontinu dan sebutkan dua langkah pertama bukti. Rubrik: mulai di titik domain sebarang dan dengan toleransi keluaran sebarang.

Petunjuk. Buka definisi kekontinuan pada seluruh ruang: pertama pilih $a \in X$, kemudian pilih $\epsilon > 0$.

Jawaban. Ambil sebarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Harus ditemukan $\delta > 0$ sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon$.

Solusi. Kekontinuan $g \circ f$ berarti kekontinuan di setiap titik $a \in X$. Karena itu dua langkah pertama adalah menetapkan sebarang $a \in X$ dan kemudian sebarang $\epsilon > 0$. Setelah itu kita harus membangun $\delta > 0$, yang boleh bergantung pada a dan ϵ tetapi tidak pada x , agar

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \epsilon.$$

Butir berikutnya membangun δ melalui ruang antara Y .

Pemeriksaan F.11 Toleransi di ruang antara. Dengan $a \in X$, $b = f(a)$, dan $\epsilon > 0$, jelaskan mengapa terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga $d_Y(y, b) < \delta_1$ mengakibatkan $d_Z(g(y), g(b)) < \epsilon$. Rubrik: sebutkan hipotesis dan titik tempat definisi diterapkan.

Petunjuk. Terapkan kekontinuan g di titik $b = f(a) \in Y$ dengan toleransi keluaran ϵ .

Jawaban. Keberadaan δ_1 adalah persis konsekuensi kekontinuan g di $b = f(a)$.

Solusi. Karena $f : X \rightarrow Y$, titik $b = f(a)$ berada dalam Y . Hipotesis menyatakan bahwa g kontinu pada Y , khususnya di b . Dengan menerapkan definisi kekontinuan g di b pada bilangan $\epsilon > 0$ yang telah dipilih, kita memperoleh $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in Y$,

$$d_Y(y, b) < \delta_1 \implies d_Z(g(y), g(b)) < \epsilon.$$

Pemeriksaan F.12 Mengangkut toleransi ke domain. Jelaskan mengapa terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga $d_X(x, a) < \delta_2$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$. Rubrik: gunakan δ_1 sebagai toleransi keluaran untuk fungsi yang tepat.

Petunjuk. Terapkan kekontinuan f di a dengan ϵ pada definisi diganti oleh δ_1 .

Jawaban. Keberadaan δ_2 adalah persis konsekuensi kekontinuan f di a dengan toleransi keluaran $\delta_1 > 0$.

Solusi. Hipotesis menyatakan bahwa f kontinu pada X , khususnya di titik a . Bilangan δ_1 yang diperoleh pada butir sebelumnya positif, sehingga sah dipakai sebagai toleransi keluaran dalam definisi kekontinuan f . Oleh karena itu ada $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga

$$d_X(x, a) < \delta_2 \implies d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1.$$

Pemeriksaan F.13 Komposisi fungsi kontinu. Lengkapi pembuktian bahwa $g \circ f : (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$ kontinu. Rubrik: rangkai dua implikasi metrik, identifikasi $b = f(a)$, lalu tutup semua kuantor.

Petunjuk. Pilih $\delta = \delta_2$. Kedekatan di X mula-mula memberi kedekatan $f(x)$ dengan $f(a) = b$ di Y , lalu memberi kedekatan setelah menerapkan g .

Jawaban. Dengan $\delta = \delta_2$, berlaku $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon$. Jadi $g \circ f$ kontinu.

Solusi. Ambil sebarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$, lalu tetapkan $b = f(a)$. Kekontinuan g di b menghasilkan $\delta_1 > 0$ sehingga $d_Y(y, b) < \delta_1$ mengakibatkan $d_Z(g(y), g(b)) < \epsilon$. Kekontinuan f di a , dengan toleransi keluaran δ_1 , menghasilkan $\delta_2 > 0$ sehingga $d_X(x, a) < \delta_2$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$.

Pilih $\delta = \delta_2$. Jika $d_X(x, a) < \delta$, maka $d_Y(f(x), b) < \delta_1$, dan karenanya $d_Z(g(f(x)), g(b)) < \epsilon$. Karena $b = f(a)$, ini adalah $d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \epsilon$. Jadi komposisi kontinu di a ; karena a sebarang, komposisi kontinu pada X .

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Tiga belas panduan berikut berkorespondensi dengan tiga belas perintah pertama pada bagian latihan Bab 6 menurut urutan kedalaman sumber. Latihan yang hanya mempunyai pernyataan dihitung sekali; pada latihan bertingkat, hanya tugas daun yang meminta jawaban yang dihitung.

Pemeriksaan F.14 Kekontinuan fungsi nilai mutlak di nol. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = |x|$, dengan metrik Euklides pada domain dan kodomain. Tentukan apakah f kontinu di 0 dan buktikan jawaban Anda. Rubrik: mulai dari sebarang $\epsilon > 0$, nyatakan δ , dan periksa implikasi definisi.

Petunjuk. Karena $f(0) = 0$, sederhanakan $|f(x) - f(0)|$ sebelum memilih δ .

Jawaban. Ya. Untuk setiap $\epsilon > 0$, pilihan $\delta = \epsilon$ memenuhi definisi kekontinuan di 0.

Solusi. Ambil sebarang $\epsilon > 0$ dan pilih $\delta = \epsilon$. Jika $|x - 0| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(0)| = ||x| - 0| = |x| < \delta = \epsilon.$$

Jadi syarat epsilon-delta terpenuhi dan f kontinu di 0.

Pemeriksaan F.15 Diskontinuitas fungsi tanda di nol. Misalkan $f(x) = x/|x|$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 1$, dengan metrik Euklides. Tentukan apakah f kontinu di 0 dan buktikan jawaban Anda. Rubrik: jika jawabannya negatif, nyatakan negasi definisi beserta satu saksi untuk setiap $\delta > 0$.

Petunjuk. Ambil titik negatif yang berjarak kurang daripada δ dari 0, misalnya $x = -\delta/2$.

Jawaban. Tidak. Dengan $\epsilon_0 = 1$, untuk setiap $\delta > 0$ titik $x = -\delta/2$ memenuhi $|x| < \delta$, tetapi $|f(x) - f(0)| = 2$.

Solusi. Tetapkan $\epsilon_0 = 1$ dan ambil sebarang $\delta > 0$. Pilih $x = -\delta/2$. Maka $|x - 0| = \delta/2 < \delta$, sedangkan $x < 0$ sehingga $f(x) = -1$. Karena $f(0) = 1$,

$$|f(x) - f(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \epsilon_0.$$

Satu toleransi keluaran gagal pada setiap skala masukan. Menurut negasi definisi, f tidak kontinu di 0.

Pemeriksaan F.16 Penjumlahan koordinat dengan metrik Euklides. Dengan metrik Euklides pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}$, buktikan atau sangkal bahwa $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ kontinu. Rubrik: bandingkan nilai mutlak selisih keluaran dengan jarak Euklides dua titik masukan.

Petunjuk. Gunakan pertidaksamaan Cauchy pada vektor $(1, 1)$ dan $(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$.

Jawaban. Fungsi tersebut kontinu, bahkan $|f(x) - f(a)| \leq \sqrt{2} d_E(x, a)$. Pilih $\delta = \epsilon/\sqrt{2}$.

Solusi. Untuk $x = (x_1, x_2)$ dan $a = (a_1, a_2)$, pertidaksamaan Cauchy memberikan

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2)| \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \\ &= \sqrt{2} d_E(x, a). \end{aligned}$$

Ambil sebarang a dan $\epsilon > 0$, lalu pilih $\delta = \epsilon/\sqrt{2}$. Jika $d_E(x, a) < \delta$, batas di atas memberi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Jadi f kontinu.

Pemeriksaan F.17 Penjumlahan koordinat dengan metrik maksimum. Dengan metrik maksimum pada domain $\mathbb{R}^2$ dan metrik Euklides pada kodomain $\mathbb{R}$, buktikan atau sangkal bahwa $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ kontinu. Rubrik: turunkan batas yang berlaku bagi semua pasangan titik dan berikan pilihan δ .

Petunjuk. Masing-masing selisih koordinat tidak melebihi jarak maksimum.

Jawaban. Fungsi tersebut kontinu, karena $|f(x) - f(a)| \leq 2d_M(x, a)$. Pilih $\delta = \epsilon/2$.

Solusi. Untuk $x = (x_1, x_2)$ dan $a = (a_1, a_2)$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \\ &\leq 2 \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} \\ &= 2d_M(x, a). \end{aligned}$$

Ambil sebarang a dan $\epsilon > 0$, serta pilih $\delta = \epsilon/2$. Jika $d_M(x, a) < \delta$, maka $|f(x) - f(a)| < 2\delta = \epsilon$. Jadi f kontinu.

Pemeriksaan F.18 Semua fungsi dari ruang diskret. Misalkan (X, d_X) memakai metrik diskret dan (Y, d_Y) sebarang ruang metrik. Tentukan semua fungsi kontinu $f : X \rightarrow Y$. Rubrik: buktikan klasifikasi Anda langsung dari definisi; jangan mengasumsikan sifat khusus kodomain.

Petunjuk. Jika $d_X(x, a) < 1$, apa yang dapat disimpulkan tentang x dan a ?

Jawaban. Setiap fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu ketika domain memakai metrik diskret.

Solusi. Ambil fungsi sebarang $f : X \rightarrow Y$, titik sebarang $a \in X$, dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = 1$. Jika $d_X(x, a) < 1$, definisi metrik diskret memaksa $x = a$. Karena itu

$$d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon.$$

Jadi setiap fungsi kontinu di setiap titik domain. Tidak ada syarat tambahan pada f atau pada metrik d_Y .

Pemeriksaan F.19 Kelipatan skalar fungsi kontinu. Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ kontinu dan $k \neq 0$. Buktikan bahwa fungsi kf , yang didefinisikan oleh $(kf)(x) = kf(x)$, kontinu. Rubrik: gunakan kekontinuan f dengan toleransi keluaran yang disesuaikan oleh $|k|$.

Petunjuk. Karena $|(kf)(x) - (kf)(a)| = |k||f(x) - f(a)|$, mintalah $|f(x) - f(a)| < \epsilon/|k|$.

Jawaban. Fungsi kf kontinu. Untuk toleransi ϵ , pakai $\epsilon/|k|$ dalam definisi kekontinuan f .

Solusi. Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. Karena $k \neq 0$, bilangan $\epsilon/|k|$ positif. Kekontinuan f di a memberikan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - a| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon/|k|$. Maka

$$|(kf)(x) - (kf)(a)| = |k||f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Jadi kf kontinu di setiap a , sehingga kontinu pada $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan F.20 Jumlah dua fungsi kontinu. Misalkan $f, g : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ kontinu. Buktikan bahwa $f + g$, yang didefinisikan oleh $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, kontinu. Rubrik: alokasikan toleransi keluaran di antara dua suku dan gabungkan dua skala masukan.

Petunjuk. Gunakan toleransi $\epsilon/2$ untuk masing-masing fungsi dan pilih nilai minimum dari dua δ yang dihasilkan.

Jawaban. Fungsi $f + g$ kontinu; jika δ_f dan δ_g bekerja untuk toleransi $\epsilon/2$, pilih $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$.

Solusi. Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. Kekontinuan f dan g di a memberikan $\delta_f, \delta_g > 0$ sehingga, berturut-turut, $|x - a| < \delta_f$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$ dan $|x - a| < \delta_g$ mengakibatkan $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Jika $|x - a| < \delta$, kedua batas berlaku dan

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

Jadi $f + g$ kontinu.

Pemeriksaan F.21 Menguraikan selisih hasil kali. Untuk fungsi f dan g serta titik a , buktikan identitas

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(a)g(a) &= f(a)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)) \\ &\quad + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

Rubrik: perluas kedua faktor setelah menambahkan dan mengurangkan nilai di a , lalu sederhanakan seluruh suku.

Petunjuk. Substitusikan $f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$ dan $g(x) = g(a) + (g(x) - g(a))$ ke dalam $f(x)g(x)$.

Jawaban. Identitas tersebut benar; ia diperoleh dengan memperluas hasil kali dua jumlah dan membuat suku $f(a)g(a)$.

Solusi. Tuliskan $\Delta f = f(x) - f(a)$ dan $\Delta g = g(x) - g(a)$. Maka

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(a)g(a) &= (f(a) + \Delta f)(g(a) + \Delta g) - f(a)g(a) \\ &= f(a)\Delta g + g(a)\Delta f + \Delta f\Delta g. \end{aligned}$$

Mengembalikan definisi Δf dan Δg menghasilkan tepat identitas yang diminta. Bentuk ini memisahkan dua suku linear dan satu suku hasil kali yang masing-masing dapat dikendalikan oleh kekontinuan f dan g .

Pemeriksaan F.22 Empat skala untuk bukti hasil kali. Misalkan f dan g kontinu di a dan $\epsilon > 0$. Jelaskan mengapa ada $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 > 0$ yang masing-masing menjamin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< \sqrt{\epsilon/3}, \quad |g(x) - g(a)| < \sqrt{\epsilon/3}, \\ |f(x) - f(a)| &< \frac{\epsilon}{3(1 + |g(a)|)}, \quad |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{3(1 + |f(a)|)}. \end{aligned}$$

Rubrik: pasangkan setiap toleransi positif dengan fungsi yang sesuai.

Petunjuk. Keempat ruas kanan positif. Terapkan definisi kekontinuan f dua kali dan definisi kekontinuan g dua kali.

Jawaban. Kekontinuan f menghasilkan δ_1 dan δ_3 ; kekontinuan g menghasilkan δ_2 dan δ_4 , dengan toleransi keluaran sesuai urutan yang ditampilkan.

Solusi. Karena $\epsilon > 0$, semua bilangan $\sqrt{\epsilon/3}$, $\epsilon/[3(1 + |g(a)|)]$, dan $\epsilon/[3(1 + |f(a)|)]$ positif. Kekontinuan f di a , berturut-turut dengan toleransi $\sqrt{\epsilon/3}$ dan $\epsilon/[3(1 + |g(a)|)]$, memberikan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_3 > 0$. Kekontinuan g di a , berturut-turut dengan toleransi $\sqrt{\epsilon/3}$ dan $\epsilon/[3(1 + |f(a)|)]$, memberikan $\delta_2 > 0$ dan $\delta_4 > 0$. Masing-masing definisi tepat menghasilkan implikasi yang diminta ketika $|x - a|$ lebih kecil daripada δ_i terkait.

Pemeriksaan F.23 Hasil kali dua fungsi kontinu. Gunakan penguraian selisih dan empat skala pada dua butir sebelumnya untuk membuktikan bahwa fg kontinu di a . Rubrik: pilih satu δ yang mengaktifkan keempat batas dan tunjukkan bahwa masing-masing dari tiga suku bernilai kurang daripada $\epsilon/3$.

Petunjuk. Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Gunakan $|f(a)|/(1 + |f(a)|) < 1$ dan analoginya untuk $g(a)$.

Jawaban. Dengan δ sebagai minimum keempat skala, tiga suku dalam batas segitiga masing-masing kurang daripada $\epsilon/3$; karena itu $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \epsilon$.

Solusi. Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Jika $|x - a| < \delta$, penguraian pada butir pertama dan pertidaksamaan segitiga memberikan

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(a)| |g(x) - g(a)|$$

$$\begin{aligned}
&+ |g(a)| |f(x) - f(a)| \\
&+ |f(x) - f(a)| |g(x) - g(a)|.
\end{aligned}$$

Batas dari δ_4 menjadikan suku pertama kurang daripada $\epsilon |f(a)| / [3(1 + |f(a)|)] < \epsilon/3$. Batas dari δ_3 menjadikan suku kedua kurang daripada $\epsilon |g(a)| / [3(1 + |g(a)|)] < \epsilon/3$. Batas dari δ_1 dan δ_2 menjadikan suku ketiga kurang daripada $\sqrt{\epsilon/3} \sqrt{\epsilon/3} = \epsilon/3$. Jadi seluruh jumlah kurang daripada ϵ , sehingga fg kontinu di a .

Pemeriksaan F.24 Kebalikan pernyataan tentang jumlah. Tentukan apakah kekontinuan $f + g$ memaksa f dan g masing-masing kontinu. Buktikan jawaban Anda. Rubrik: jika pernyataan salah, berikan fungsi konkret, periksa jumlahnya, dan buktikan diskontinuitas kedua suku yang diperlukan.

Petunjuk. Ambil suatu fungsi tak kontinu h , lalu pertimbangkan $f = h$ dan $g = -h$.

Jawaban. Tidak. Jika $h(x) = 1$ untuk $x \geq 0$ dan $h(x) = 0$ untuk $x < 0$, maka $f = h$ dan $g = -h$ tidak kontinu di 0, tetapi $f + g = 0$ kontinu.

Solusi. Definisikan $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $h(x) = 1$ jika $x \geq 0$ dan $h(x) = 0$ jika $x < 0$. Fungsi h tidak kontinu di 0: untuk $\epsilon_0 = 1/2$ dan setiap $\delta > 0$, titik $x = -\delta/2$ memenuhi $|x| < \delta$, tetapi $|h(x) - h(0)| = 1 \geq \epsilon_0$. Fungsi $-h$ juga tidak kontinu di 0 dengan argumen yang sama.

Ambil $f = h$ dan $g = -h$. Untuk setiap x , $(f + g)(x) = h(x) - h(x) = 0$, sehingga $f + g$ adalah fungsi konstan dan kontinu. Jadi kekontinuan jumlah tidak memaksa kekontinuan kedua sukunya.

Pemeriksaan F.25 Kebalikan pernyataan tentang hasil kali. Tentukan apakah kekontinuan fg memaksa f dan g masing-masing kontinu. Buktikan jawaban Anda. Rubrik: berikan contoh tandingan konkret dan verifikasi baik hasil kali maupun diskontinuitas faktor-faktornya.

Petunjuk. Carilah fungsi tak kontinu yang hanya bernilai -1 dan 1 , lalu kalikan fungsi itu dengan dirinya sendiri.

Jawaban. Tidak. Jika $s(x) = 1$ untuk $x \geq 0$ dan $s(x) = -1$ untuk $x < 0$, maka $f = g = s$ tidak kontinu di 0, tetapi $fg = s^2 = 1$ kontinu.

Solusi. Definisikan $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $s(x) = 1$ untuk $x \geq 0$ dan $s(x) = -1$ untuk $x < 0$. Fungsi ini tidak kontinu di 0: tetapkan $\epsilon_0 = 1$; untuk setiap $\delta > 0$, titik $x = -\delta/2$ memenuhi $|x| < \delta$, tetapi $|s(x) - s(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \epsilon_0$.

Ambil $f = g = s$. Kedua faktor tidak kontinu di 0, sedangkan untuk setiap x , $(fg)(x) = s(x)^2 = 1$. Hasil kali tersebut adalah fungsi konstan, sehingga kontinu. Jadi pernyataannya salah.

Pemeriksaan F.26 Skala eksplisit untuk fungsi kuadrat. Misalkan $f(x) = 2x^2 + 1$. Untuk $\epsilon = 1/4$, carilah $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - 1| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(1)| < \epsilon$. Rubrik: berikan satu nilai sah dan buktikan batasnya secara aljabar.

Petunjuk. Faktorkan $|f(x) - f(1)| = 2|x - 1||x + 1|$. Jika $|x - 1| < 1$, maka $|x + 1| < 3$.

Jawaban. Salah satu pilihan yang sah adalah $\delta = 1/24$.

Solusi. Pilih $\delta = 1/24$; khususnya $\delta < 1$. Jika $|x - 1| < \delta$, maka $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + 2 < 3$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= |2x^2 + 1 - (2 \cdot 1^2 + 1)| \\
&= 2|x^2 - 1| \\
&= 2|x - 1||x + 1| \\
&< 6|x - 1| < 6\delta = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Jadi $\delta = 1/24$ memenuhi implikasi yang diminta.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Panduan ini mengikuti Tugas 14–26 pada latihan sumber secara berurutan. Kerjakan pernyataannya terlebih dahulu, lalu gunakan rubrik untuk menilai kelengkapan argumen Anda. Bukalah petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap hanya setelah Anda mencoba tugas secara mandiri.

Pemeriksaan F.27 Tugas 14: kekontinuan fungsi kuadrat di titik 1. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x^2 + 1$, dengan metrik Euklides pada domain dan kodomain. Buktikan bahwa f kontinu di $x = 1$. *Rubrik.* Mulailah dengan sembarang $\epsilon > 0$, berikan pilihan δ yang hanya bergantung pada ϵ , dan turunkan pertidaksamaan yang diperlukan tanpa mengandaikan kesimpulan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Faktorkan $|f(x) - f(1)| = 2|x - 1||x + 1|$.

Langkah 2. Jika $|x - 1| < 1$, maka $|x + 1| < 3$. Pilih δ yang sekaligus menjamin syarat ini dan membuat $6|x - 1| < \epsilon$.

Jawaban. Fungsi f kontinu di 1. Untuk $\epsilon > 0$, pilihan $\delta = \min\{1, \epsilon/6\}$ memenuhi definisi kekontinuan.

Solusi. Ambil sembarang $\epsilon > 0$ dan tetapkan $\delta = \min\{1, \epsilon/6\}$. Andaikan $|x - 1| < \delta$. Karena $\delta \leq 1$, berlaku $|x - 1| < 1$. Pertidaksamaan segitiga kemudian memberi $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + 2 < 3$.

Oleh karena itu,

$$|f(x) - f(1)| = |2x^2 + 1 - 3| = 2|x - 1||x + 1| < 6|x - 1| < 6\delta \leq \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap toleransi positif telah ditemukan radius positif yang memenuhi implikasi definisi. Maka f kontinu di $x = 1$.

Pemeriksaan F.28 Tugas 15: metrik yang dipangkas pada 1. Definisikan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. Buktikan bahwa d merupakan metrik. *Rubrik.* Verifikasi keempat aksioma metrik. Untuk pertidaksamaan segitiga, jelaskan mengapa pemangkasan pada 1 mempertahankan pertidaksamaan, bukan sekadar menyatakan bahwa hasilnya jelas.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ketaknegatifan, simetri, dan pemisahan titik diwarisi dari nilai mutlak.

Langkah 2. Untuk $a, b \geq 0$, buktikan $\min\{a + b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ dengan memisahkan kasus ketika salah satu dari a, b sedikitnya 1 dan ketika keduanya kurang dari 1.

Jawaban. Benar, d merupakan metrik. Aksioma pertama hingga ketiga mengikuti sifat nilai mutlak, sedangkan pertidaksamaan segitiga mengikuti $\min\{a + b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ untuk $a, b \geq 0$.

Solusi. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, kedua bilangan $|x - y|$ dan 1 tak negatif, sehingga $d(x, y) \geq 0$. Selanjutnya, $d(x, y) = 0$ tepat ketika $|x - y| = 0$, yakni tepat ketika $x = y$. Simetri nilai mutlak juga memberi $d(x, y) = d(y, x)$.

Tinggal membuktikan pertidaksamaan segitiga. Untuk bilangan tak negatif a, b , berlaku

$$\min\{a + b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}.$$

Memang, jika $a \geq 1$ atau $b \geq 1$, ruas kanan sedikitnya 1, sedangkan ruas kiri paling besar 1. Jika $a < 1$ dan $b < 1$, ruas kanan sama dengan $a + b$, yang tidak lebih kecil daripada ruas kiri.

Sekarang tetapkan $a = |x - y|$ dan $b = |y - z|$. Dari $|x - z| \leq a + b$ dan sifat naik fungsi $t \mapsto \min\{t, 1\}$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \min\{|x - z|, 1\} \\ &\leq \min\{a + b, 1\} \\ &\leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\} \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Keempat aksioma terpenuhi, jadi d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan F.29 Tugas 16: nilai pada himpunan rapat menentukan fungsi kontinu. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dalam metrik Euklides dan $f(q) = 0$ untuk setiap $q \in \mathbb{Q}$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. *Rubrik.* Gunakan kerapatan $\mathbb{Q}$ secara kuantitatif di dalam lingkungan δ ; jangan mengandaikan hasil tentang limit barisan yang belum diperlukan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $a \in \mathbb{R}$. Kekontinuan di a menyediakan δ untuk setiap $\epsilon > 0$.

Langkah 2. Pilih $q \in \mathbb{Q}$ dengan $|q - a| < \delta$. Kemudian bandingkan $|f(a)|$ dengan $|f(q) - f(a)|$.

Jawaban. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dan setiap $\epsilon > 0$, kekontinuan dan kerapatan $\mathbb{Q}$ memberi $|f(a)| < \epsilon$. Karena ini berlaku untuk setiap toleransi positif, $f(a) = 0$. Jadi f identik nol.

Solusi. Ambil sembarang $a \in \mathbb{R}$. Untuk membuktikan $f(a) = 0$, tetapkan sembarang $\epsilon > 0$. Karena f kontinu di a , ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - a| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Kerapatan bilangan rasional dalam bilangan real memberi $q \in \mathbb{Q}$ dengan $|q - a| < \delta$. Oleh hipotesis, $f(q) = 0$, sehingga

$$|f(a)| = |0 - f(a)| = |f(q) - f(a)| < \epsilon.$$

Jika $|f(a)|$ positif, kita dapat memilih $\epsilon = |f(a)|$ dan memperoleh kontradiksi. Jadi $f(a) = 0$. Karena a dipilih sembarang, kesimpulan ini berlaku pada seluruh $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan F.30 Tugas 17: fungsi Dirichlet tidak kontinu di mana pun. Definiskan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 0$ untuk x irasional dan $f(x) = 1$ untuk x rasional. Dengan metrik Euklides pada domain dan kodomain, tunjukkan bahwa f tidak kontinu di titik mana pun. *Rubrik.* Untuk setiap titik pusat, berikan satu toleransi tetap yang menggagalkan setiap pilihan δ , dan gunakan kerapatan bilangan rasional serta irasional dengan urutan kuantor yang benar.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $a \in \mathbb{R}$ dan pilih $\epsilon = 1/2$.

Langkah 2. Di setiap interval terbuka di sekitar a terdapat titik yang jenisnya—rasional atau irasional—berlawanan dengan jenis a .

Jawaban. Fungsi f tidak kontinu di setiap $a \in \mathbb{R}$. Untuk $\epsilon = 1/2$ dan setiap $\delta > 0$, ada x dengan $|x - a| < \delta$ tetapi $|f(x) - f(a)| = 1$.

Solusi. Tetapkan sembarang $a \in \mathbb{R}$ dan ambil $\epsilon = 1/2$. Misalkan $\delta > 0$ diberikan. Jika a rasional, kerapatan bilangan irasional memberi titik irasional x dengan $|x - a| < \delta$. Maka $f(a) = 1$, $f(x) = 0$, dan $|f(x) - f(a)| = 1 \geq \epsilon$.

Jika a irasional, kerapatan bilangan rasional memberi titik rasional x dengan $|x - a| < \delta$. Kini $f(a) = 0$, $f(x) = 1$, dan kembali $|f(x) - f(a)| = 1 \geq \epsilon$. Jadi, pada kedua kasus, toleransi $1/2$ menggagalkan setiap radius positif. Ini tepat merupakan negasi definisi kekontinuan di a . Karena a sembarang, f tidak kontinu di mana pun.

Pemeriksaan F.31 Tugas 18: fungsi yang kontinu hanya di titik asal. Definiskan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 0$ jika x irasional dan $g(x) = x$ jika x rasional. Dengan metrik Euklides pada domain dan kodomain, buktikan bahwa g kontinu tepat di 0. *Rubrik.* Berikan pembuktian langsung epsilon-delta di 0, lalu gunakan negasi definisi dan kerapatan untuk setiap titik tak nol.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk semua x , berlaku $|g(x)| \leq |x|$.

Langkah 2. Jika $a \neq 0$, ambil $\epsilon = |a|/2$. Pilih titik yang jenis rasionalitasnya berlawanan dengan a dan juga cukup dekat agar nilai mutlaknya lebih besar daripada $|a|/2$ bila diperlukan.

Jawaban. Di 0, pilihan $\delta = \epsilon$ bekerja karena $|g(x) - g(0)| \leq |x|$. Pada setiap $a \neq 0$, toleransi $|a|/2$ digagalkan oleh titik-titik rasional atau irasional yang sedekat apa pun dengan a . Jadi himpunan titik kekontinuan g adalah $\{0\}$.

Solusi. Karena 0 rasional, $g(0) = 0$. Ambil $\epsilon > 0$ dan pilih $\delta = \epsilon$. Jika $|x| < \delta$, maka untuk x irasional berlaku $|g(x) - g(0)| = 0$, sedangkan untuk x rasional berlaku $|g(x) - g(0)| = |x| < \delta = \epsilon$. Jadi g kontinu di 0.

Sekarang tetapkan $a \neq 0$ dan ambil $\epsilon = |a|/2 > 0$. Jika a rasional, maka $g(a) = a$. Untuk setiap $\delta > 0$, pilih titik irasional x dengan $|x - a| < \delta$. Karena $g(x) = 0$, diperoleh $|g(x) - g(a)| = |a| \geq \epsilon$.

Jika a irasional, maka $g(a) = 0$. Untuk radius $\delta > 0$, kerapatan bilangan rasional memungkinkan kita memilih $x \in \mathbb{Q}$ dengan $|x - a| < \min\{\delta, |a|/2\}$. Pertidaksamaan segitiga terbalik memberi $|x| > |a| - |x - a| > |a|/2 = \epsilon$. Jadi $|g(x) - g(a)| = |x| > \epsilon$. Dalam kedua kasus, negasi kekontinuan terpenuhi di a . Dengan demikian hanya 0 merupakan titik kekontinuan g .

Pemeriksaan F.32 Tugas 19: menghitung jarak integral. Pada $X = C[-3, 3]$, gunakan $d^*(f, g) = \int_{-3}^3 |f(t) - g(t)| dt$. Hitung $d^*(f, g)$ untuk $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 3 - 2x$. *Rubrik.* Temukan semua titik tempat selisih berubah tanda, pecah integral mutlak pada titik-titik tersebut, dan berikan nilai eksak.

Petunjuk. *Langkah 1.* Faktorkan $f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

Langkah 2. Ekspresi itu tidak positif pada $[-3, 1]$ dan tidak negatif pada $[1, 3]$.

Jawaban. Nilainya adalah $d^*(f, g) = 32/3 + 32/3 = 64/3$.

Solusi. Selisih kedua fungsi adalah $h(x) = x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$. Pada interval $[-3, 1]$, berlaku $h(x) \leq 0$, sedangkan pada $[1, 3]$, berlaku $h(x) \geq 0$. Dengan antiturunan $H(x) = x^3/3 + x^2 - 3x$, kita peroleh

$$\begin{aligned} d^*(f, g) &= - \int_{-3}^1 h(x) dx + \int_1^3 h(x) dx \\ &= -(H(1) - H(-3)) + (H(3) - H(1)). \end{aligned}$$

Nilai-nilainya adalah $H(-3) = 9$, $H(1) = -5/3$, dan $H(3) = 9$. Jadi setiap integral bertanda positif bernilai $32/3$, dan

$$d^*(f, g) = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{64}{3}.$$

Pemeriksaan F.33 Tugas 20: nilai fungsional integral. Untuk $I(f) = \int_a^b f(t) dt$, hitung $I(f)$ ketika $f(x) = 2x$ dan $[a, b] = [0, 2]$. *Rubrik.* Tampilkan antiturunan dan evaluasi pada kedua ujung interval.

Petunjuk. Suatu antiturunan $2x$ adalah x^2 .

Jawaban. $I(f) = \int_0^2 2x dx = 4$.

Solusi. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus,

$$I(f) = \int_0^2 2x dx = [x^2]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4.$$

Pemeriksaan F.34 Tugas 21: kekontinuan fungsional integral. Misalkan $a < b$, $X = C[a, b]$, $d^*(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$, dan $I(f) = \int_a^b f(t) dt$. Buktikan bahwa $I : (X, d^*) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ kontinu. *Rubrik.* Tuliskan definisi kekontinuan dalam kedua metrik, gunakan pertidaksamaan nilai mutlak integral, dan berikan pilihan δ yang eksplisit.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $f, g \in X$, tuliskan $I(f) - I(g) = \int_a^b (f(t) - g(t)) dt$.

Langkah 2. Gunakan $|\int h| \leq \int |h|$; fungsi I bahkan memenuhi pertidaksamaan Lipschitz dengan konstanta 1.

Jawaban. Untuk semua $f, g \in X$, berlaku $|I(f) - I(g)| \leq d^*(f, g)$. Karena itu pilihan $\delta = \epsilon$ membuktikan bahwa I kontinu di setiap $f \in X$.

Solusi. Tetapkan sembarang $f \in X$ dan $\epsilon > 0$. Ambil $\delta = \epsilon$. Jika $g \in X$ memenuhi $d^*(f, g) < \delta$, maka sifat linear integral dan pertidaksamaan nilai mutlak memberi

$$\begin{aligned} d_E(I(f), I(g)) &= |I(f) - I(g)| \\ &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \\ &= d^*(f, g) < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi I kontinu di f . Karena f sembarang, I kontinu pada seluruh X . Pertidaksamaan yang sama juga menunjukkan bahwa I bersifat 1-Lipschitz.

Pemeriksaan F.35 Tugas 22: domain bermetrik diskret. Putuskan benar atau salah: jika $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, d_X metrik diskret, dan d_Y sebarang metrik, maka f kontinu. *Rubrik.* Jika benar, berikan pembuktian epsilon-delta yang berlaku untuk sebarang fungsi dan sebarang titik tanpa memakai sifat khusus kodomain.

Petunjuk. Pada metrik diskret, $d_X(x, a) < 1$ memaksa $x = a$.

Jawaban. Benar. Untuk setiap titik dan setiap $\epsilon > 0$, pilih $\delta = 1$. Syarat $d_X(x, a) < 1$ memaksa $x = a$, sehingga jarak keluarannya nol.

Solusi. Tetapkan $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Ambil $\delta = 1$. Karena d_X diskret, nilainya hanya 0 atau 1. Maka $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_X(x, a) = 0$, sehingga $x = a$. Akibatnya $d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon$. Jadi f kontinu di setiap $a \in X$, apa pun fungsi f dan metrik d_Y .

Pemeriksaan F.36 Tugas 23: kodomain bermetrik diskret. Putuskan benar atau salah: jika $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi, d_Y metrik diskret, dan d_X sebarang metrik, maka f kontinu. *Rubrik.* Jika salah, tentukan domain, kodomain, fungsi, titik, dan satu toleransi yang menggagalkan setiap radius positif.

Petunjuk. Gunakan fungsi identitas dari $\mathbb{R}$ bermetrik Euklides menuju $\mathbb{R}$ bermetrik diskret dan ambil $\epsilon = 1/2$.

Jawaban. Salah. Fungsi identitas $i : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_D)$ tidak kontinu di titik mana pun, dengan d_D metrik diskret.

Solusi. Ambil $X = Y = \mathbb{R}$, gunakan metrik Euklides $d_E(x, y) = |x - y|$ pada domain dan metrik diskret d_D pada kodomain, lalu definisikan $i(x) = x$. Tetapkan sembarang $a \in \mathbb{R}$ dan ambil $\epsilon = 1/2$. Untuk setiap $\delta > 0$, pilih $x = a + \delta/2$. Maka $d_E(x, a) = \delta/2 < \delta$, tetapi $x \neq a$, sehingga $d_D(i(x), i(a)) = 1 \geq \epsilon$. Jadi i tidak kontinu di a . Contoh ini membantah pernyataan universal.

Pemeriksaan F.37 Tugas 24: identitas di antara dua metrik. Putuskan benar atau salah: untuk sebarang dua metrik d_1 dan d_2 pada himpunan X , fungsi identitas $i_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ selalu kontinu. *Rubrik.* Jika salah, berikan dua metrik konkret pada himpunan yang sama dan tunjukkan kegagalan definisi kekontinuan.

Petunjuk. Pilih $X = \mathbb{R}$, $d_1 = d_E$, dan $d_2 = d_D$, dengan d_D metrik diskret.

Jawaban. Salah. Identitas $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_D)$ tidak kontinu, sebab titik-titik yang berbeda dapat sedekat apa pun dalam d_E tetapi selalu berjarak 1 dalam d_D .

Solusi. Pada $X = \mathbb{R}$, ambil $d_1(x, y) = |x - y|$ dan metrik diskret $d_2 = d_D$. Tetapkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon = 1/2$. Apa pun $\delta > 0$, titik $x = a + \delta/2$ memenuhi $d_1(x, a) = \delta/2 < \delta$. Namun $x \neq a$, sehingga $d_2(i_X(x), i_X(a)) = d_D(x, a) = 1 \geq \epsilon$. Jadi identitas ini tidak kontinu. Kekontinuan identitas bergantung pada hubungan antara kedua metrik, bukan hanya pada fakta bahwa keduanya didefinisikan pada himpunan yang sama.

Pemeriksaan F.38 Tugas 25: jumlah fungsi pada domain bermetrik taksi. Misalkan $f, g : (\mathbb{R}^2, d_T) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ kontinu. Buktikan bahwa fungsi $f + g$, yang didefinisikan oleh $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, juga kontinu. *Rubrik.* Buktikan kekontinuan di titik sembarang, bagikan toleransi keluaran di antara kedua fungsi, dan gabungkan radius dengan minimum.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk toleransi ϵ , terapkan kekontinuan f dan g masing-masing dengan toleransi $\epsilon/2$.

Langkah 2. Ambil $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ dan gunakan pertidaksamaan segitiga dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Benar. Kekontinuan kedua fungsi dengan toleransi $\epsilon/2$ menghasilkan radius δ_f, δ_g ; radius minimumnya membuat selisih nilai $f + g$ kurang dari ϵ .

Solusi. Tetapkan $a \in \mathbb{R}^2$ dan $\epsilon > 0$. Karena f kontinu di a , terdapat $\delta_f > 0$ sedemikian sehingga $d_T(x, a) < \delta_f$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$. Demikian pula, terdapat $\delta_g > 0$ sedemikian sehingga $d_T(x, a) < \delta_g$ mengakibatkan $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$.

Ambil $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Jika $d_T(x, a) < \delta$, kedua taksiran di atas berlaku, sehingga

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi $f + g$ kontinu di a , dan karena a sembarang, fungsi itu kontinu pada seluruh $\mathbb{R}^2$.

Pemeriksaan F.39 Tugas 26: fungsi konstan di antara ruang metrik. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik serta $y_0 \in Y$. Buktikan bahwa fungsi konstan $f : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan oleh $f(x) = y_0$ untuk setiap $x \in X$ kontinu. *Rubrik.* Berikan pembuktian epsilon-delta yang berlaku sekalipun domain kosong atau tidak terbatas dan jangan memberlakukan syarat yang tidak diperlukan pada metrik.

Petunjuk. Jarak antara dua keluaran fungsi konstan selalu nol. Bila perlu pilih radius tetap, misalnya $\delta = 1$.

Jawaban. Fungsi konstan selalu kontinu. Untuk setiap titik domain dan setiap $\epsilon > 0$, pilihan $\delta = 1$ bekerja karena $d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(y_0, y_0) = 0$.

Solusi. Jika X kosong, pernyataan bahwa f kontinu di setiap titik domain benar secara hampa. Jika X tidak kosong, tetapkan sembarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = 1$. Untuk setiap $x \in X$ yang memenuhi $d_X(x, a) < \delta$, kita mempunyai

$$d_Y(f(x), f(a)) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \epsilon.$$

Dengan demikian f kontinu di setiap titik $a \in X$, sehingga f kontinu.

Pemeriksaan penguasaan dan transfer

Enam latihan asli berikut menguji penguasaan definisi epsilon-delta, kekontinuan di antara ruang metrik, serta operasi pada fungsi kontinu. Kerjakan setiap pernyataan sebelum membuka petunjuk. Gunakan rubrik untuk memeriksa urutan kuantor, ketepatan pilihan radius, dan kelengkapan contoh tandingan Anda.

Pemeriksaan F.40 Definisi kekontinuan dan negasinya. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik, $f : X \rightarrow Y$, dan $a \in X$.

1. Tuliskan definisi lengkap bahwa f kontinu di a dengan semua kuantornya.
2. Negasikan definisi tersebut untuk memperoleh pernyataan lengkap bahwa f tidak kontinu di a .

Rubrik. Urutan $\forall\epsilon, \exists\delta$, dan $\forall x$ harus tepat; pada negasi, balik setiap kuantor dan negasikan implikasi menjadi dua syarat serentak. Nyatakan dengan tegas variabel mana yang boleh bergantung pada variabel sebelumnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Kekontinuan dimulai dengan “untuk setiap $\epsilon > 0$ ” dan baru sesudah itu memilih $\delta > 0$.

Langkah 2. Negasi pernyataan $P \Rightarrow Q$ adalah P dan bukan Q .

Langkah 3. Negasi $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon_0$ adalah $d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon_0$.

Jawaban. Kekontinuan di a berarti

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Ketidakkontinuan di a berarti

$$\exists \epsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \text{ dan } d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Solusi. Fungsi f kontinu di a jika

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dengan urutan ini, δ boleh bergantung pada ϵ dan titik tetap a , tetapi tidak boleh dipilih sesudah melihat x . Titik x harus memenuhi implikasi yang sama untuk semua titik di dalam bola $B_X(a, \delta)$.

Untuk menegaskan pernyataan tersebut, kuantor universal menjadi eksistensial dan sebaliknya. Selain itu, $P \Rightarrow Q$ gagal tepat ketika P benar dan Q salah. Jadi f tidak kontinu di a tepat ketika

$$\exists \epsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \text{ dan } d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Di sini satu toleransi keluaran ϵ_0 dipilih lebih dahulu dan harus menggagalkan setiap radius masukan, meskipun titik saksi x boleh bergantung pada radius tersebut.

Pemeriksaan F.41 Pemetaan Lipschitz bersifat kontinu. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) ruang-ruang metrik. Andaikan $f : X \rightarrow Y$ dan terdapat konstanta $L > 0$ sedemikian sehingga

$$d_Y(f(x), f(z)) \leq L d_X(x, z)$$

untuk semua $x, z \in X$. Buktikan langsung dari definisi bahwa f kontinu.

Rubrik. Tetapkan titik dan toleransi sembarang, berikan pilihan δ yang eksplisit, dan tunjukkan rantai pertidaksamaan lengkap. Jangan hanya menyebut teorema tentang fungsi Lipschitz.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk membuat $L d_X(x, a) < \epsilon$, cukup minta $d_X(x, a) < \epsilon/L$.

Langkah 2. Pilihan radius yang sama bekerja di setiap titik a .

Jawaban. Untuk setiap $a \in X$ dan $\epsilon > 0$, ambil $\delta = \epsilon/L$. Jika $d_X(x, a) < \delta$, maka $d_Y(f(x), f(a)) \leq L d_X(x, a) < \epsilon$. Jadi f kontinu.

Solusi. Tetapkan sembarang $a \in X$ dan $\epsilon > 0$. Karena $L > 0$, bilangan $\delta = \epsilon/L$ positif. Jika $x \in X$ memenuhi $d_X(x, a) < \delta$, hipotesis Lipschitz memberi

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq L d_X(x, a) < L \delta = L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon.$$

Maka f kontinu di a . Karena a dipilih sembarang, f kontinu pada X . Bahkan radius tersebut tidak bergantung pada titik pusat; hipotesis memberi kendali yang lebih kuat daripada kekontinuan biasa.

Pemeriksaan F.42 Metrik Euklides, metrik pangkas, dan metrik diskret. Pada $\mathbb{R}$, definisikan $d_E(x, y) = |x - y|$, $d_c(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$, dan metrik diskret $d_D(x, y) = 0$ jika $x = y$ serta $d_D(x, y) = 1$ jika $x \neq y$. Selidiki kekontinuan keempat fungsi identitas berikut:

1. $i_1 : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_c)$;
2. $i_2 : (\mathbb{R}, d_c) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$;
3. $i_3 : (\mathbb{R}, d_D) \rightarrow (\mathbb{R}, d_c)$;
4. $i_4 : (\mathbb{R}, d_c) \rightarrow (\mathbb{R}, d_D)$.

Rubrik. Untuk setiap fungsi yang kontinu, berikan pilihan radius. Untuk fungsi yang tidak kontinu, berikan satu toleransi dan saksi untuk setiap radius. Jelaskan apa yang ditunjukkan dua arah pertama tentang pengaruh pemangkasan jarak besar.

Petunjuk. *Langkah 1.* Selalu berlaku $d_c \leq d_E$. Sebaliknya, jika $d_c(x, a) < 1/2$, maka $d_c(x, a) = d_E(x, a)$.

Langkah 2. Bola diskret berjari-jari 1 hanya memuat pusatnya.

Langkah 3. Untuk menggagalkan i_4 , pilih $\epsilon = 1/2$ pada kodomain diskret dan titik berbeda yang sedekat apa pun dalam d_c .

Jawaban. Fungsi i_1 , i_2 , dan i_3 kontinu, sedangkan i_4 tidak kontinu di titik mana pun. Jadi metrik Euklides dan metrik pangkas mempunyai perilaku kekontinuan lokal yang sama, tetapi metrik diskret pada kodomain menuntut pemisahan yang lebih kuat.

Solusi. Untuk i_1 , tetapkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$, lalu pilih $\delta = \epsilon$. Jika $d_E(x, a) < \delta$, maka $d_c(i_1(x), i_1(a)) \leq d_E(x, a) < \epsilon$. Jadi i_1 kontinu.

Untuk i_2 , pilih $\delta = \min\{\epsilon, 1/2\}$. Jika $d_c(x, a) < \delta \leq 1/2$, nilai minimum $\min\{|x - a|, 1\}$ tidak mungkin berasal dari cabang 1. Maka $|x - a| = d_c(x, a) < \delta \leq \epsilon$. Jadi i_2 juga kontinu. Kedua hasil ini menunjukkan bahwa pemangkasan semua jarak besar pada 1 tidak mengubah perilaku lokal yang dideteksi oleh kekontinuan.

Untuk i_3 , ambil $\delta = 1$ untuk setiap toleransi positif. Syarat $d_D(x, a) < 1$ memaksa $x = a$, sehingga jarak keluarannya nol. Jadi i_3 kontinu.

Sebaliknya, tetapkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon = 1/2$ untuk i_4 . Untuk setiap $\delta > 0$, ambil $r = \min\{\delta/2, 1/2\} > 0$ dan $x = a + r$. Maka $d_c(x, a) = r < \delta$, tetapi $x \neq a$, sehingga $d_D(i_4(x), i_4(a)) = 1 \geq \epsilon$. Dengan demikian i_4 tidak kontinu di a , dan a sembarang.

Pemeriksaan F.43 Jumlah dua fungsi kontinu pada ruang metrik. Misalkan (X, d_X) ruang metrik, $a \in X$, dan $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di a , dengan metrik Euklides pada $\mathbb{R}$. Buktikan langsung bahwa $h = f + g$ kontinu di a .

Rubrik. Jangan mengandaikan radius yang sama tersedia untuk kedua fungsi. Bagikan toleransi, peroleh dua radius, ambil minimumnya, dan gunakan pertidaksamaan segitiga.

Petunjuk. *Langkah 1.* Terapkan kekontinuan f dan g masing-masing dengan toleransi $\epsilon/2$.

Langkah 2. Gunakan $|h(x) - h(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$.

Jawaban. Jika δ_f dan δ_g bekerja untuk toleransi $\epsilon/2$, maka $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ bekerja untuk $h = f + g$ dan toleransi ϵ .

Solusi. Ambil sembarang $\epsilon > 0$. Kekontinuan f di a memberi $\delta_f > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta_f$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$. Kekontinuan g memberi $\delta_g > 0$ dengan implikasi serupa untuk $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Jika $d_X(x, a) < \delta$, kedua taksiran berlaku dan

$$\begin{aligned} |h(x) - h(a)| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa h kontinu di a .

Pemeriksaan F.44 Komposisi fungsi kontinu. Misalkan (X, d_X) , (Y, d_Y) , dan (Z, d_Z) ruang-ruang metrik. Jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $a \in X$ dan $g : Y \rightarrow Z$ kontinu di $f(a)$, buktikan bahwa $g \circ f$ kontinu di a .

Rubrik. Mulailah dari toleransi di Z . Radius yang dihasilkan oleh kekontinuan g harus dipakai sebagai toleransi keluaran ketika menerapkan kekontinuan f .

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $\epsilon > 0$, kekontinuan g di $f(a)$ memberi suatu $\eta > 0$ pada ruang Y .

Langkah 2. Terapkan kekontinuan f di a dengan toleransi η untuk memperoleh δ pada ruang X .

Jawaban. Pilih η dari kekontinuan g untuk toleransi ϵ , lalu pilih δ dari kekontinuan f untuk toleransi η . Rantai kedua implikasi membuktikan kekontinuan $g \circ f$ di a .

Solusi. Tetapkan $\epsilon > 0$. Karena g kontinu di $f(a)$, ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga

$$d_Y(y, f(a)) < \eta \Rightarrow d_Z(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

Karena f kontinu di a , untuk toleransi η ini ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \eta.$$

Jadi, jika $d_X(x, a) < \delta$, implikasi kedua menempatkan $f(x)$ di dalam bola berjari-jari η di sekitar $f(a)$. Dengan mengambil $y = f(x)$ pada implikasi pertama, diperoleh

$$d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon.$$

Maka $g \circ f$ kontinu di a .

Pemeriksaan F.45 Contoh tandingan bagi kebalikan aturan jumlah. Bangun dua fungsi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang masing-masing tidak kontinu di titik mana pun, tetapi jumlah $f + g$ kontinu di setiap titik. Buktikan kedua klaim menggunakan metrik Euklides.

Rubrik. Berikan rumus eksplisit bagi kedua fungsi. Untuk ketidakkontinuan, gunakan satu toleransi tetap dan kerapatan bilangan rasional serta irasional. Untuk kekontinuan jumlah, hitung jumlahnya tepat, bukan hanya menyatakan bahwa diskontinuitas “saling meniadakan.”

Petunjuk. *Langkah 1.* Definisikan $D(x) = 1$ pada bilangan rasional dan $D(x) = 0$ pada bilangan irasional.

Langkah 2. Ambil $f = D$ dan $g = -D$. Gunakan $\epsilon = 1/2$ untuk membuktikan ketidakkontinuan masing-masing.

Jawaban. Ambil $f = D$ dan $g = -D$, dengan $D = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$. Fungsi D dan $-D$ tidak kontinu di titik mana pun, tetapi $(f + g)(x) = D(x) - D(x) = 0$ untuk semua x , sehingga jumlahnya kontinu.

Solusi. Definisikan

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jika } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ambil $f = D$ dan $g = -D$. Tetapkan sembarang $a \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon = 1/2$. Jika a rasional, setiap lingkungan δ di sekitar a memuat titik irasional x , dan $|D(x) - D(a)| = |0 - 1| = 1 \geq \epsilon$. Jika a irasional, setiap lingkungan memuat titik rasional x , dan kembali $|D(x) - D(a)| = 1 \geq \epsilon$. Jadi D tidak kontinu di a . Karena $|(-D)(x) - (-D)(a)| = |D(x) - D(a)|$, argumen yang sama membuktikan bahwa $-D$ juga tidak kontinu di a . Titik a sembarang, sehingga keduanya tidak kontinu di mana pun.

Namun, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$,

$$(f + g)(x) = D(x) + (-D(x)) = 0.$$

Jadi $f + g$ adalah fungsi konstan nol dan kontinu di setiap titik. Contoh ini menunjukkan bahwa kekontinuan jumlah tidak memaksa kekontinuan masing-masing suku.

Lampiran G

Pendamping Mandiri Bab 7: Bola Terbuka dan Lingkungan

Komponen ini mendampingi Bab 7, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, aktivitas, dan latihan pada bab utama sebelum membuka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **pembahasan** di sini. Enam belas panduan kegiatan dan dua puluh empat panduan latihan mengikuti seluruh 40 butir sumber menurut urutan kedalamannya setelah satu selubung tugas sumber yang rusak dipisahkan tanpa mengubah pertanyaannya.

Seluruh uraian pendamping dan enam pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0. Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung, sedangkan pembahasan menunjukkan pemilihan jari-jari, urutan kuantor, contoh penyangkal, dan jalur bukti. Bukalah lapisan bantuan secara bertahap agar nilai inkuiri tetap terjaga sekaligus memberi penutup yang lengkap bagi pembelajar mandiri.

Panduan kegiatan sumber

Enam belas panduan berikut mendampingi seluruh tugas kegiatan dalam Bab 7: lima tugas tentang bentuk bola terbuka, tiga tugas tentang lingkungan, tiga tugas tentang prapeta bola terbuka, dan lima langkah pembuktian kekontinuan melalui lingkungan. Kerjakan lebih dahulu tugas pada bab utama. Sesudah itu, buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Rubrik pada setiap pernyataan menjelaskan bukti yang diperlukan tanpa menggantikan proses penyelidikan.

Pemeriksaan G.1 Bola terbuka pada garis bilangan. Jelaskan dan buat sketsa bola terbuka $B(2, 1)$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, dengan $d_E(x, y) = |x - y|$. Rubrik: ubah syarat jarak menjadi pertidaksamaan rangkap, tuliskan himpunannya, dan tunjukkan apakah titik batas termasuk.

Petunjuk. Mulailah dari $|x - 2| < 1$, lalu hilangkan nilai mutlak.

Jawaban. Bola tersebut adalah interval terbuka $(1, 3)$.

Solusi. Menurut definisi,

$$B(2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid d_E(x, 2) < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}.$$

Pertidaksamaan $|x - 2| < 1$ ekuivalen dengan $-1 < x - 2 < 1$, atau $1 < x < 3$. Jadi $B(2, 1) = (1, 3)$. Sketsanya adalah ruas garis di antara 1 dan 3 dengan lingkaran kosong pada kedua ujung karena pertidaksamaannya ketat.

Pemeriksaan G.2 Bola untuk metrik Euklides pada bidang. Jelaskan dan buat sketsa $B((3, 2), 1)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$. Rubrik: berikan deskripsi koordinat yang tepat, identifikasi pusat dan jari-jari, serta bedakan bola dari lingkaran batasnya.

Petunjuk. Kuadratkan pertidaksamaan jarak; kedua ruasnya tidak negatif.

Jawaban. Hasilnya adalah cakram Euklides terbuka berpusat di $(3, 2)$ dan berjari-jari 1.

Solusi. Titik (x_1, x_2) berada dalam bola tepat ketika

$$\sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2} < 1,$$

yang ekuivalen dengan $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 < 1$. Jadi

$$B((3, 2), 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 < 1\}.$$

Sketsanya memuat seluruh bagian dalam lingkaran berpusat di $(3, 2)$ dan berjari-jari 1, tetapi tidak memuat lingkaran batas karena jaraknya di sana sama dengan 1.

Pemeriksaan G.3 Bola untuk metrik maksimum. Jelaskan dan buat sketsa $B((3, 2), 1)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$, dengan $d_M(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. Rubrik: uraikan pertidaksamaan maksimum menjadi dua syarat koordinat dan nyatakan status batasnya.

Petunjuk. Nilai maksimum dua bilangan lebih kecil daripada 1 tepat ketika keduanya lebih kecil daripada 1.

Jawaban. Bola tersebut adalah persegi terbuka $(2, 4) \times (1, 3)$ dengan sisi-sisi sejajar sumbu koordinat.

Solusi. Syarat keanggotaan adalah

$$\max\{|x_1 - 3|, |x_2 - 2|\} < 1.$$

Ini ekuivalen dengan dua syarat $|x_1 - 3| < 1$ dan $|x_2 - 2| < 1$, yakni $2 < x_1 < 4$ dan $1 < x_2 < 3$. Oleh karena itu $B((3, 2), 1) = (2, 4) \times (1, 3)$. Sketsanya berupa bagian dalam persegi dengan sudut batas $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, dan $(4, 3)$; seluruh sisi dan sudut tidak termasuk.

Pemeriksaan G.4 Bola untuk metrik taksi. Jelaskan dan buat sketsa $B((3, 2), 1)$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$, dengan $d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Rubrik: tuliskan pertidaksamaan yang menentukan bola, berikan bentuk geometrisnya, dan identifikasi titik-titik sudut pada batas.

Petunjuk. Periksa perpotongan batas $|x_1 - 3| + |x_2 - 2| = 1$ dengan garis horizontal dan vertikal melalui pusat.

Jawaban. Bola tersebut adalah bagian dalam belah ketupat $|x_1 - 3| + |x_2 - 2| < 1$, dengan batas melalui $(2, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$, dan $(3, 3)$.

Solusi. Dari definisi metrik taksi,

$$B((3, 2), 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - 3| + |x_2 - 2| < 1\}.$$

Himpunan batas diperoleh dengan mengganti $<$ oleh $=$. Pada garis $x_2 = 2$, batasnya berada di $x_1 = 2$ dan $x_1 = 4$; pada garis $x_1 = 3$, batasnya berada di $x_2 = 1$ dan $x_2 = 3$. Keempat ruas batas membentuk belah ketupat. Karena bola memakai pertidaksamaan ketat, hanya bagian dalam belah ketupat yang termasuk.

Pemeriksaan G.5 Bola untuk metrik diskret. Tentukan $B((3, 2), 1)$ dalam $\mathbb{R}^2$ dengan metrik diskret. Bandingkan hasilnya dengan $B((3, 2), r)$ ketika $r > 1$ dan ketika $0 < r < 1$. Rubrik: gunakan semua kemungkinan nilai jarak diskret dan ingat bahwa definisi bola memakai pertidaksamaan ketat.

Petunjuk. Dalam metrik diskret, jarak dari pusat hanya dapat bernilai 0 atau 1. Bandingkan kedua nilai itu dengan jari-jari.

Jawaban. Untuk $0 < r \leq 1$, bolanya hanya $\{(3, 2)\}$; untuk $r > 1$, bolanya adalah seluruh $\mathbb{R}^2$.

Solusi. Pusat $c = (3, 2)$ mempunyai $d(c, c) = 0$, sedangkan setiap titik $x \neq c$ mempunyai $d(x, c) = 1$. Untuk jari-jari $r = 1$, hanya pusat yang memenuhi $d(x, c) < 1$, sehingga $B(c, 1) = \{c\}$. Argumen yang sama berlaku jika $0 < r < 1$: jarak 0 masih lebih kecil daripada r , tetapi jarak 1 tidak. Jika $r > 1$, baik jarak 0 maupun 1 lebih kecil daripada r . Karena itu setiap titik termasuk dan $B(c, r) = \mathbb{R}^2$.

Pemeriksaan G.6 Target pembuktian lingkungan. Misalkan $b \in B(a, \delta)$. Nyatakan dengan tepat apa yang harus ditemukan untuk membuktikan bahwa $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi b . Rubrik: buka definisi lingkungan pada titik b dan nyatakan baik kepositifan jari-jari maupun inklusi himpunannya.

Petunjuk. Ganti N oleh $B(a, \delta)$ dan titik pangkal oleh b dalam definisi lingkungan.

Jawaban. Kita harus menemukan $s > 0$ sedemikian sehingga $B(b, s) \subseteq B(a, \delta)$.

Solusi. Sebuah himpunan N merupakan lingkungan bagi b tepat ketika ada bola terbuka berpusat di b yang termuat dalam N . Di sini $N = B(a, \delta)$. Jadi target lengkapnya adalah membangun suatu bilangan $s > 0$ dan membuktikan

$$B(b, s) \subseteq B(a, \delta).$$

Syarat $b \in B(a, \delta)$ akan menjamin adanya ruang positif antara b dan batas berjari-jari δ ; butir berikutnya menghitung ruang itu.

Pemeriksaan G.7 Bola kecil di dalam bola besar. Buktikan bahwa jika $b \in B(a, \delta)$, maka $B(a, \delta)$ merupakan lingkungan bagi b . Gunakan $s = \delta - d(a, b)$. Rubrik: buktikan bahwa s positif, ambil titik sebarang dalam $B(b, s)$, lalu gunakan pertidaksamaan segitiga untuk memperoleh inklusi.

Petunjuk. Untuk $x \in B(b, s)$, bandingkan $d(x, a)$ dengan $d(x, b) + d(b, a)$, kemudian substitusikan definisi s .

Jawaban. Nilai $s = \delta - d(a, b)$ positif dan memenuhi $B(b, s) \subseteq B(a, \delta)$.

Solusi. Karena $b \in B(a, \delta)$, berlaku $d(a, b) < \delta$. Maka $s = \delta - d(a, b) > 0$. Ambil sebarang $x \in B(b, s)$. Pertidaksamaan segitiga dan kesimetrian metrik memberikan

$$\begin{aligned} d(x, a) &\leq d(x, b) + d(b, a) \\ &< s + d(a, b) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Jadi $x \in B(a, \delta)$. Karena x sebarang, $B(b, s) \subseteq B(a, \delta)$. Jadi $B(a, \delta)$ memuat bola terbuka berpusat di b dan merupakan lingkungan bagi b .

Pemeriksaan G.8 Lingkungan setiap titik tidak harus sebuah bola. Tentukan apakah setiap himpunan yang merupakan lingkungan bagi semua titiknya harus berupa satu bola terbuka. Berikan contoh tandingan terbuka dan alasan yang meyakinkan. Rubrik: verifikasi sifat lingkungan pada setiap titik dan buktikan bahwa himpunan contoh bukan satu bola.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$ bermetrik Euklides, pertimbangkan gabungan dua interval terbuka yang saling terpisah.

Jawaban. Tidak. Sebagai contoh, $N = (0, 1) \cup (2, 3)$ merupakan lingkungan bagi setiap titiknya, tetapi bukan sebuah bola terbuka dalam $\mathbb{R}$ bermetrik Euklides.

Solusi. Ambil $N = (0, 1) \cup (2, 3)$. Jika $x \in (0, 1)$, pilih $s = \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\} > 0$; maka $B(x, s) \subseteq (0, 1) \subseteq N$. Jika $x \in (2, 3)$, pilih $s = \frac{1}{2} \min\{x - 2, 3 - x\} > 0$; lagi-lagi $B(x, s) \subseteq (2, 3) \subseteq N$. Jadi N merupakan lingkungan bagi setiap titiknya.

Setiap bola terbuka dalam $\mathbb{R}$ bermetrik Euklides adalah satu interval $(c - r, c + r)$, sehingga memuat setiap titik di antara dua titik anggotanya. Himpunan N memuat, misalnya, $1/2$ dan $5/2$, tetapi tidak memuat $3/2$ yang berada di antaranya. Karena itu N bukan satu bola terbuka. Pernyataan sebaliknya salah.

Pemeriksaan G.9 Bola di sekitar nilai fungsi. Untuk $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, dengan metrik Euklides, tentukan $B(f(2), 1)$. Rubrik: hitung dahulu nilai pusatnya, lalu ubah syarat jarak menjadi interval terbuka.

Petunjuk. Nilai $f(2)$ adalah 4; selesaikan $|y - 4| < 1$.

Jawaban. $B(f(2), 1) = B(4, 1) = (3, 5)$.

Solusi. Karena $f(2) = 2^2 = 4$, definisi bola Euklides memberi

$$B(f(2), 1) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - 4| < 1\}.$$

Pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan $3 < y < 5$. Maka bolanya adalah interval terbuka $(3, 5)$.

Pemeriksaan G.10 Prapeta bola di bawah fungsi kuadrat. Dengan fungsi dan metrik yang sama, tentukan $f^{-1}(B(f(2), 1))$. Rubrik: tuliskan pertidaksamaan ganda untuk x^2 , selesaikan pada bagian negatif dan positif, dan perhatikan bahwa semua titik batas dikecualikan.

Petunjuk. Dari butir sebelumnya, syaratnya adalah $3 < x^2 < 5$. Gunakan $\sqrt{3} < |x| < \sqrt{5}$.

Jawaban. $f^{-1}(B(f(2), 1)) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Solusi. Suatu bilangan x berada dalam prapeta tepat ketika $f(x) \in (3, 5)$, yaitu ketika $3 < x^2 < 5$. Syarat ini ekuivalen dengan $\sqrt{3} < |x| < \sqrt{5}$. Pada sumbu negatif, diperoleh $-\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}$; pada sumbu positif, diperoleh $\sqrt{3} < x < \sqrt{5}$. Oleh karena itu

$$f^{-1}(B(f(2), 1)) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

Keempat titik batas tidak termasuk karena bola asal memakai pertidaksamaan ketat.

Pemeriksaan G.11 Prapeta bukan bola berpusat di titik pangkal. Tentukan apakah $f^{-1}(B(f(2), 1))$ merupakan bola terbuka yang berpusat di 2, dan jelaskan. Rubrik: bandingkan bentuk prapeta dengan bentuk setiap bola Euklides berpusat di 2; satu pengamatan struktural yang menentukan harus dinyatakan.

Petunjuk. Bola $B(2, r)$ selalu satu interval $(2 - r, 2 + r)$. Berapa banyak komponen interval yang dimiliki prapeta pada butir sebelumnya?

Jawaban. Tidak. Prapeta itu adalah gabungan dua interval terpisah, sedangkan setiap bola Euklides berpusat di 2 merupakan satu interval yang simetris terhadap 2.

Solusi. Dari butir sebelumnya,

$$f^{-1}(B(f(2), 1)) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

Himpunan ini mempunyai dua bagian yang terpisah. Sebaliknya, untuk setiap $r > 0$, bola Euklides berpusat di 2 adalah $B(2, r) = (2 - r, 2 + r)$, yaitu satu interval. Bahkan prapeta memuat titik-titik dekat -2 tetapi tidak memuat 0, meskipun 0 lebih dekat ke 2 daripada titik-titik tersebut. Ini mustahil bagi bola berpusat di 2. Jadi prapeta itu bukan bola terbuka berpusat di 2.

Pemeriksaan G.12 Target inklusi untuk kekontinuan. Misalkan prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a . Nyatakan target yang, menurut pencirian bola terbuka, cukup untuk membuktikan bahwa f kontinu di a . Rubrik: mulai dengan $\epsilon > 0$ sebarang dan nyatakan kuantor untuk δ beserta inklusi yang tepat.

Petunjuk. Pencirian itu membandingkan $B(a, \delta)$ dengan prapeta $B(f(a), \epsilon)$.

Jawaban. Untuk setiap $\epsilon > 0$, kita harus menemukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$.

Solusi. Pencirian kekontinuan melalui bola terbuka menyatakan bahwa f kontinu di a jika dan hanya jika

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \quad B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Jadi setelah memilih $\epsilon > 0$ sebarang, seluruh pekerjaan yang tersisa adalah menghasilkan $\delta > 0$ dengan inklusi tersebut. Empat butir berikut membangunnya dari hipotesis lingkungan.

Pemeriksaan G.13 Bola sebagai lingkungan titik pusatnya. Untuk $\epsilon > 0$, jelaskan mengapa $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi $f(a)$. Rubrik: tunjukkan secara eksplisit sebuah bola terbuka ber-

pusat di $f(a)$ yang termuat dalam himpunan tersebut.

Petunjuk. Himpunan yang hendak diuji sudah merupakan bola terbuka. Ia dapat memuat dirinya sendiri.

Jawaban. Pilih jari-jari ϵ ; berlaku $B(f(a), \epsilon) \subseteq B(f(a), \epsilon)$, sehingga himpunan itu merupakan lingkungan bagi $f(a)$.

Solusi. Menurut definisi, suatu himpunan N merupakan lingkungan bagi $f(a)$ jika terdapat $r > 0$ dengan $B(f(a), r) \subseteq N$. Ambil $N = B(f(a), \epsilon)$ dan $r = \epsilon$. Jari-jari ini positif dan

$$B(f(a), r) = B(f(a), \epsilon) \subseteq N.$$

Jadi bola tersebut memang merupakan lingkungan bagi titik pusatnya.

Pemeriksaan G.14 Menerapkan hipotesis prapeta. Gunakan hipotesis bahwa prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a untuk menentukan sifat $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Rubrik: identifikasi himpunan yang memainkan peran sebagai lingkungan dalam kodomain dan terapkan hipotesis tepat satu kali.

Petunjuk. Butir sebelumnya telah memverifikasi bahwa $B(f(a), \epsilon)$ memenuhi premis hipotesis.

Jawaban. Himpunan $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ merupakan lingkungan bagi a .

Solusi. Tetapkan $N = B(f(a), \epsilon)$. Dari butir sebelumnya, N merupakan lingkungan bagi $f(a)$. Hipotesis mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan N bagi $f(a)$, prapetanya $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a . Dengan mensubstitusikan pilihan N , kita memperoleh bahwa

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

merupakan lingkungan bagi a .

Pemeriksaan G.15 Membuka definisi lingkungan prapeta. Uraikan kesimpulan bahwa $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ merupakan lingkungan bagi a . Rubrik: tuliskan jari-jari positif yang dijamin ada dan inklusi bola yang dihasilkan; jangan berhenti pada kata “lingkungan”.

Petunjuk. Terapkan definisi lingkungan dengan $N = f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$.

Jawaban. Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$.

Solusi. Definisi lingkungan menyatakan bahwa N merupakan lingkungan bagi a tepat ketika ada $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq N$. Butir sebelumnya memberi $N = f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Oleh karena itu terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Inilah inklusi yang ditetapkan sebagai target pada butir pertama.

Pemeriksaan G.16 Menutup pembuktian kekontinuan. Rangkai bagian (a)-(d) untuk membuktikan bahwa f kontinu di a . Rubrik: mulai dengan ϵ sebarang, jelaskan rantai lingkungan dan prapeta, hasilkan inklusi untuk suatu $\delta > 0$, lalu sebutkan pencirian kekontinuan yang menutup bukti.

Petunjuk. Rantainya adalah: bola di kodomain merupakan lingkungan; hipotesis membawa lingkungan itu melalui prapeta; definisi lingkungan memberi bola di domain; pencirian bola memberi kekontinuan.

Jawaban. Untuk setiap $\epsilon > 0$, hipotesis menghasilkan $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Menurut pencirian bola terbuka, f kontinu di a .

Solusi. Ambil sebarang $\epsilon > 0$. Bola $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi $f(a)$ karena ia memuat bola itu sendiri. Berdasarkan hipotesis, prapetanya $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ merupakan lingkungan bagi a . Dengan membuka definisi lingkungan, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Karena konstruksi ini berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$, pencirian kekontinuan melalui bola terbuka menyatakan bahwa f kontinu di a . Semua kuantor yang diperlukan untuk arah pembuktian ini telah tertutup.

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Dua belas panduan berikut berkorespondensi dengan dua belas perintah pertama pada bagian latihan Bab 7 menurut urutan kedalaman sumber. Materi pendamping ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri, bukan jawaban yang disediakan oleh penulis karya sumber.

Pemeriksaan G.17 Cakram satuan sebagai lingkungan. Dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$, misalkan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ dan $a = (0.5, 0.5)$. Tentukan, disertai bukti, apakah A merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Nyatakan sebuah radius positif dan buktikan bahwa seluruh bola terbuka dengan pusat a dan radius tersebut termuat dalam A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Jarak Euklides a dari titik asal adalah $\|a\| = 1/\sqrt{2}$.

Langkah 2. Gunakan pertidaksamaan segitiga untuk titik $z \in B(a, 1 - 1/\sqrt{2})$.

Jawaban. Ya. Radius $\delta = 1 - 1/\sqrt{2}$ positif dan memenuhi $B(a, \delta) \subseteq A$.

Solusi. Tuliskan $\|z\|$ untuk norma Euklides titik $z \in \mathbb{R}^2$. Karena

$$\|a\| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

bilangan $\delta = 1 - 1/\sqrt{2}$ positif. Jika $z \in B(a, \delta)$, maka pertidaksamaan segitiga memberi

$$\|z\| \leq \|z - a\| + \|a\| < \delta + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

Jadi jumlah kuadrat koordinat z kurang daripada 1, sehingga $z \in A$. Dengan demikian $B(a, \delta) \subseteq A$, dan menurut definisi A merupakan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.18 Sumbu horizontal dalam metrik taksi. Dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$, misalkan A adalah sumbu x dan $a = (0, 0)$. Tentukan, disertai bukti, apakah A merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Jika jawabannya negatif, untuk setiap radius positif berikan titik di dalam bola yang tidak berada pada sumbu x .

Petunjuk. Untuk $\delta > 0$, periksa titik $z = (0, \delta/2)$ dan hitung $d_T(z, a)$.

Jawaban. Tidak. Setiap bola $B(a, \delta)$ memuat titik $(0, \delta/2)$, yang tidak berada pada sumbu x .

Solusi. Ambil sebarang $\delta > 0$ dan tetapkan $z = (0, \delta/2)$. Jarak taksi dari z ke a adalah

$$d_T(z, a) = |0 - 0| + |\delta/2 - 0| = \delta/2 < \delta.$$

Maka $z \in B(a, \delta)$. Akan tetapi, koordinat kedua z tidak nol, sehingga $z \notin A$. Jadi tidak ada $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq A$. Oleh karena itu, A bukan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.19 Bilangan rasional bukan lingkungan di garis real. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, misalkan $A = \mathbb{Q}$ dan $a = 0$. Tentukan, disertai bukti, apakah A merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Gunakan urutan kuantor dalam definisi lingkungan dan sifat kerapatan bilangan irasional.

Petunjuk. Setiap interval terbuka $(-\delta, \delta)$ memuat bilangan irasional.

Jawaban. Tidak. Untuk setiap $\delta > 0$, bola $B(0, \delta)$ memuat suatu bilangan irasional dan karenanya tidak termuat dalam $\mathbb{Q}$.

Solusi. Misalkan $\delta > 0$ diberikan. Kerapatan bilangan irasional dalam $\mathbb{R}$ menjamin adanya $u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dengan $-\delta < u < \delta$. Dengan demikian $|u - 0| < \delta$, sehingga $u \in B(0, \delta)$, tetapi $u \notin A$. Argumen ini berlaku untuk setiap radius positif, sehingga tidak ada bola terbuka berpusat di 0 yang termuat dalam A . Jadi $\mathbb{Q}$ bukan lingkungan dari 0 dalam metrik Euklides.

Pemeriksaan G.20 Bilangan bulat positif dalam metrik pecahan tereduksi. Misalkan Q adalah himpunan bilangan rasional dalam bentuk paling sederhana dan $d(a/b, c/d) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$. Dalam (Q, d) , tentukan apakah himpunan A semua bilangan bulat positif merupakan lingkungan dari $1 = 1/1$. *Rubrik.* Tentukan bola terbuka berjari-jari 1 di sekitar $1/1$ dan jelaskan peran koordinat pembilang serta penyebut yang bulat.

Petunjuk. Jika dua pecahan tereduksi berbeda, setidaknya salah satu dari selisih pembilang dan selisih penyebutnya adalah bilangan bulat tak nol.

Jawaban. Ya. Bola $B(1/1, 1)$ hanya berisi $1/1$, sehingga bola itu termuat dalam himpunan bilangan bulat positif.

Solusi. Ambil $c/d \in Q$ dalam bentuk paling sederhana. Jika $c/d \neq 1/1$, pasangan bilangan bulat (c, d) berbeda dari $(1, 1)$. Maka paling sedikit satu dari $|c - 1|$ dan $|d - 1|$ merupakan bilangan bulat positif, sehingga

$$d(c/d, 1/1) = \max\{|c - 1|, |d - 1|\} \geq 1.$$

Akibatnya, syarat $d(c/d, 1/1) < 1$ hanya dipenuhi oleh $c/d = 1/1$. Jadi $B(1/1, 1) = \{1/1\} \subseteq A$. Karena A memuat bola terbuka berpusat di 1, A merupakan lingkungan dari 1.

Pemeriksaan G.21 Semua fungsi dari ruang metrik berhingga ini kontinu. Misalkan $X = \{1, 3, 5\}$ dan $d_X(x, y) = xy - 1 \pmod{8}$, yakni sisa pembagian $xy - 1$ oleh 8. Untuk sebarang ruang metrik (Y, d_Y) , tentukan apakah mungkin mendefinisikan fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang tidak kontinu. *Rubrik.* Hitung jarak antar-titik berbeda dan berikan satu radius yang mengisolasi setiap titik domain.

Petunjuk. Jarak antartitik berbeda adalah $d_X(1, 3) = 2$, $d_X(1, 5) = 4$, dan $d_X(3, 5) = 6$. Apa isi $B(p, 2)$ untuk $p \in X$?

Jawaban. Tidak mungkin. Setiap fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu; radius $\delta = 2$ mengisolasi setiap titik $p \in X$.

Solusi. Perhitungan modulo 8 memberikan $d_X(1, 3) = 2$, $d_X(1, 5) = 4$, dan $d_X(3, 5) = 6$. Jadi untuk setiap $p \in X$, tidak ada titik lain yang berjarak kurang daripada 2 dari p ; dengan kata lain, $B(p, 2) = \{p\}$.

Sekarang ambil fungsi sebarang $f : X \rightarrow Y$, titik $p \in X$, dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = 2$. Jika $d_X(x, p) < \delta$, maka $x = p$, sehingga

$$d_Y(f(x), f(p)) = d_Y(f(p), f(p)) = 0 < \epsilon.$$

Jadi f kontinu di setiap titik dalam X . Tidak ada fungsi tak kontinu dari domain ini ke ruang metrik mana pun.

Pemeriksaan G.22 Dua fungsi pada ruang bermetrik pusat. Pada $X = (\mathbb{R}^2, d_H)$, dengan $d_H(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d_H(x, y) = |x| + |y|$ jika $x \neq y$, definisikan $f, g : X \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ oleh $f(0, 0) = 0$, $f(x) = 1$ untuk $x \neq (0, 0)$, serta $g(x) = 0$ jika $|x| < 1$ dan $g(x) = 1$ selain itu. Tentukan fungsi mana yang kontinu dan buktikan kedua klaim. *Rubrik.* Periksa titik asal secara terpisah; untuk titik tak nol, tunjukkan bahwa terdapat bola terbuka yang hanya memuat pusatnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk setiap $p \neq 0$, berlaku $B(p, |p|) = \{p\}$.

Langkah 2. Di titik asal, bandingkan perilaku f dan g pada titik-titik tak nol yang normanya menuju nol.

Jawaban. Fungsi f tidak kontinu di 0, sedangkan g kontinu pada seluruh X . Untuk g di 0, radius 1 bekerja; semua titik tak nol terisolasi.

Solusi. Untuk menunjukkan bahwa f tidak kontinu di $0 = (0, 0)$, tetapkan $\epsilon_0 = 1/2$. Diberikan sebarang $\delta > 0$, pilih $x = (\delta/2, 0)$. Maka $x \neq 0$ dan

$$d_H(x, 0) = |x| = \delta/2 < \delta, \quad |f(x) - f(0)| = 1 \geq \epsilon_0.$$

Ini adalah negasi definisi kekontinuan, sehingga f tidak kontinu.

Untuk g di titik asal, pilih $\delta = 1$ bagi sebarang $\epsilon > 0$. Jika $d_H(x, 0) < 1$, maka $|x| < 1$, sehingga $g(x) = 0 = g(0)$ dan jarak keluarannya nol. Jadi g kontinu di 0.

Terakhir, jika $p \neq 0$, maka untuk setiap $x \neq p$ berlaku $d_H(x, p) = |x| + |p| \geq |p|$. Karena itu $B(p, |p|) = \{p\}$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, pilihan $\delta = |p|$ memaksa $x = p$ dan karenanya $|g(x) - g(p)| = 0 < \epsilon$. Maka g kontinu di setiap titik tak nol juga, sehingga kontinu pada seluruh X .

Pemeriksaan G.23 Semua bola terbuka pada graf berbobot. Pada ruang metrik graf berbobot dengan sisi $ab = 3$, $ac = 8$, $ae = 1$, $ce = 7$, $cd = 2$, $de = 5$, $db = 7$, dan $eb = 2$, tentukan $B(a, \delta)$ untuk setiap $\delta > 0$. *Rubrik.* Hitung dahulu jarak lintasan terpendek dari a ke kelima simpul, lalu pisahkan semua rentang radius pada nilai jarak kritis.

Petunjuk. Jarak dari a ke a, e, b, d, c , berturut-turut, adalah $0, 1, 3, 6, 8$. Ingat bahwa bola terbuka memakai pertidaksamaan ketat $d(a, x) < \delta$.

Jawaban. Bola-bolanya adalah $\{a\}$ untuk $0 < \delta \leq 1$; $\{a, e\}$ untuk $1 < \delta \leq 3$; $\{a, e, b\}$ untuk $3 < \delta \leq 6$; $\{a, e, b, d\}$ untuk $6 < \delta \leq 8$; dan $\{a, e, b, d, c\}$ untuk $\delta > 8$.

Solusi. Jalankan langkah jarak terpendek dari a . Mula-mula diperoleh jarak tentatif $d(a, e) = 1$, $d(a, b) = 3$, dan $d(a, c) = 8$ dari sisi-sisi yang bersisian dengan a . Melalui e , jarak ke b tetap 3, jarak ke d menjadi $1 + 5 = 6$, dan jarak ke c tetap $1 + 7 = 8$. Melalui b , kandidat jarak ke d adalah $3 + 7 = 10$, sehingga tidak memperbaiki 6. Melalui d , kandidat jarak ke c adalah $6 + 2 = 8$, sama dengan jarak yang sudah diperoleh. Karena semua bobot sisi positif, langkah-langkah ini menyelesaikan pemeriksaan lintasan terpendek. Jadi jarak dari a ke a, e, b, d, c , berturut-turut, adalah $0, 1, 3, 6, 8$.

Sebuah simpul masuk ke $B(a, \delta)$ tepat ketika jaraknya kurang daripada δ . Karena pertidaksamaan ini ketat, simpul pada jarak $1, 3, 6, 8$ baru masuk setelah radius melewati nilai tersebut. Dengan demikian

$$\begin{aligned} B(a, \delta) &= \{a\} && \text{jika } 0 < \delta \leq 1, \\ B(a, \delta) &= \{a, e\} && \text{jika } 1 < \delta \leq 3, \\ B(a, \delta) &= \{a, e, b\} && \text{jika } 3 < \delta \leq 6, \\ B(a, \delta) &= \{a, e, b, d\} && \text{jika } 6 < \delta \leq 8, \\ B(a, \delta) &= \{a, e, b, d, c\} && \text{jika } \delta > 8. \end{aligned}$$

Pemeriksaan G.24 Semua lingkungan dari simpul a . Untuk ruang metrik graf berbobot pada tugas sebelumnya, tentukan semua lingkungan dari a . *Rubrik.* Gunakan bola terbuka terkecil yang ditemukan dan buktikan kedua arah klasifikasi.

Petunjuk. Karena $B(a, 1) = \{a\}$, setiap subhimpunan yang memuat a otomatis memuat sebuah bola terbuka berpusat di a .

Jawaban. Lingkungan dari a tepat merupakan semua subhimpunan $N \subseteq X$ yang memuat a .

Solusi. Jika N merupakan lingkungan dari a , maka ada $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq N$. Setiap bola berpusat di a memuat pusatnya, sehingga $a \in N$.

Sebaliknya, andaikan $a \in N \subseteq X$. Dari perhitungan tugas sebelumnya, $B(a, 1) = \{a\}$. Maka $B(a, 1) \subseteq N$, sehingga menurut definisi N merupakan lingkungan dari a . Kedua arah ini membuktikan klasifikasi tersebut.

Pemeriksaan G.25 Prapeta bola di bawah fungsi linear. Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ didefinisikan oleh $f(x) = ax + b$, dengan $a \neq 0$. Untuk $p \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$, tunjukkan bahwa $f^{-1}(B(f(p), r))$ memuat bola terbuka berpusat di p , lalu simpulkan kekontinuan fungsi linear. *Rubrik.* Hitung selisih $f(x) - f(p)$ dan berikan radius eksplisit dalam r dan $|a|$.

Petunjuk. Gunakan $|f(x) - f(p)| = |a||x - p|$ dan pilih $\delta = r/|a|$.

Jawaban. Berlaku $f^{-1}(B(f(p), r)) = B(p, r/|a|)$. Maka pilihan $\delta = r/|a|$ membuktikan kekontinuan di setiap p .

Solusi. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(p)| = |ax + b - (ap + b)| = |a||x - p|.$$

Karena $a \neq 0$, radius $\delta = r/|a|$ positif. Kita mempunyai rangkaian kesetaraan

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B(f(p), r)) \\ \iff |f(x) - f(p)| < r \\ \iff |x - p| < r/|a| \\ \iff x \in B(p, r/|a|). \end{aligned}$$

Jadi prapeta tersebut bukan hanya memuat, melainkan sama dengan bola yang dinyatakan. Karena konstruksi ini berlaku bagi setiap p dan $r > 0$, f kontinu. Jika istilah fungsi linear juga mencakup kasus $a = 0$, kasus itu adalah fungsi konstan dan juga kontinu.

Pemeriksaan G.26 Prapeta bola di bawah fungsi kuadrat. Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ didefinisikan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. Untuk $p \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$, tunjukkan bahwa $f^{-1}(B(f(p), r))$ memuat bola terbuka berpusat di p , lalu simpulkan bahwa setiap fungsi kuadrat kontinu. *Rubrik.* Faktorkan selisih nilai fungsi, batasi $|x + p|$ di sekitar p , dan berikan radius eksplisit.

Petunjuk. *Langkah 1.* Gunakan $f(x) - f(p) = (x - p)(a(x + p) + b)$.

Langkah 2. Tetapkan $C = |a|(2|p| + 1) + |b|$ dan pilih $\delta = \min\{1, r/C\}$.

Jawaban. Dengan $C = |a|(2|p| + 1) + |b|$, radius $\delta = \min\{1, r/C\}$ memenuhi $B(p, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(p), r))$. Jadi f kontinu di setiap p .

Solusi. Karena $a \neq 0$, bilangan $C = |a|(2|p| + 1) + |b|$ positif. Tetapkan $\delta = \min\{1, r/C\}$. Jika $|x - p| < \delta$, maka $|x - p| < 1$, sehingga $|x| \leq |p| + |x - p| < |p| + 1$ dan $|x + p| < 2|p| + 1$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &= |(x - p)(a(x + p) + b)| \\ &\leq |x - p|(|a||x + p| + |b|) \\ &< |x - p|C < \delta C \leq r. \end{aligned}$$

Jadi $f(x) \in B(f(p), r)$ setiap kali $x \in B(p, \delta)$. Ini membuktikan $B(p, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(p), r))$. Karena p dan r dipilih sembarang, f kontinu pada $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan G.27 Fungsi jarak ke suatu himpunan. Misalkan (X, d) ruang metrik dan $A \subseteq X$ tak kosong. Definisikan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = d(x, A)$. Gunakan $d(b, A) \leq d(b, c) + d(c, A)$ untuk menunjukkan bahwa, bagi setiap $b \in X$ dan $\epsilon > 0$, terdapat lingkungan N dari b dengan $x \in N \implies f(x) \in B(f(b), \epsilon)$. Simpulkan bahwa f kontinu. *Rubrik.* Turunkan batas simetris untuk selisih mutlak dua jarak ke A , lalu pilih lingkungan secara eksplisit.

Petunjuk. Tukarkan b dan c dalam pertidaksamaan yang diberikan, lalu gabungkan kedua hasil untuk memperoleh pertidaksamaan 1-Lipschitz.

Jawaban. Berlaku $|d(b, A) - d(c, A)| \leq d(b, c)$. Karena itu $N = B(b, \epsilon)$ memenuhi syarat, dan f bahkan 1-Lipschitz.

Solusi. Pertidaksamaan yang diberikan menyatakan $d(b, A) - d(c, A) \leq d(b, c)$. Setelah b dan c ditukar, simetri metrik memberi $d(c, A) - d(b, A) \leq d(c, b) = d(b, c)$. Kedua pertidaksamaan itu setara dengan

$$|d(b, A) - d(c, A)| \leq d(b, c).$$

Tetapkan $b \in X$ dan $\epsilon > 0$, lalu ambil $N = B(b, \epsilon)$. Jika $x \in N$, maka

$$\begin{aligned} |f(x) - f(b)| &= |d(x, A) - d(b, A)| \\ &\leq d(x, b) < \epsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian $f(x) \in B(f(b), \epsilon)$. Karena ini berlaku untuk setiap b dan ϵ , fungsi f kontinu; batas pertama juga menunjukkan bahwa konstanta Lipschitz-nya paling besar 1.

Pemeriksaan G.28 Lingkungan terpisah bagi dua titik berbeda. Misalkan a dan b dua titik berbeda dalam ruang metrik X . Buktikan bahwa terdapat lingkungan N_a dan N_b , masing-masing dari a dan b , dengan $N_a \cap N_b = \emptyset$. *Rubrik.* Pilih radius berdasarkan $d(a, b)$ dan gunakan pertidaksamaan segitiga untuk membuktikan ketakteririsan.

Petunjuk. Karena $a \neq b$, bilangan $r = d(a, b)/2$ positif. Cobalah $N_a = B(a, r)$ dan $N_b = B(b, r)$.

Jawaban. Ambil $r = d(a, b)/2$, $N_a = B(a, r)$, dan $N_b = B(b, r)$. Kedua bola terbuka itu merupakan lingkungan dan tidak beririsan.

Solusi. Karena $a \neq b$, sifat definit positif metrik memberi $d(a, b) > 0$. Tetapkan $r = d(a, b)/2$ dan ambil $N_a = B(a, r)$ serta $N_b = B(b, r)$. Masing-masing jelas merupakan lingkungan dari pusatnya.

Andaikan, untuk memperoleh kontradiksi, ada $x \in N_a \cap N_b$. Maka $d(a, x) < r$ dan $d(x, b) < r$. Pertidaksamaan segitiga memberikan

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = d(a, b),$$

suatu kontradiksi. Jadi $N_a \cap N_b = \emptyset$, sebagaimana diminta.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Dua belas panduan berikut berkorespondensi dengan perintah ke-13 sampai ke-24 pada bagian latihan Bab 7 menurut urutan kedalaman sumber. Materi pendamping ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri, bukan jawaban yang disediakan oleh penulis karya sumber.

Pemeriksaan G.29 Keberadaan lingkungan yang memuat pusatnya. Misalkan (X, d) ruang metrik dan $a \in X$. Buktikan bahwa terdapat suatu lingkungan yang memuat a . *Rubrik.* Berikan satu himpunan konkret, tunjukkan bahwa himpunan itu memuat bola terbuka berpusat di a , dan periksa bahwa a sendiri berada di dalamnya.

Petunjuk. Bola terbuka $B(a, 1)$ memuat dirinya sendiri dan selalu memuat pusat a .

Jawaban. Himpunan $B(a, 1)$ adalah lingkungan dari a yang memuat a .

Solusi. Ambil $N = B(a, 1)$. Karena $B(a, 1) \subseteq N$, definisi lingkungan langsung menunjukkan bahwa N merupakan lingkungan dari a . Selain itu, $d(a, a) = 0 < 1$, sehingga $a \in B(a, 1) = N$. Jadi lingkungan yang diminta selalu ada.

Pemeriksaan G.30 Himpunan yang lebih besar tetap merupakan lingkungan. Misalkan N merupakan lingkungan dari a dan $N \subseteq M$. Buktikan bahwa M juga merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Mulailah dari bola yang dijamin oleh definisi lingkungan bagi N , lalu gunakan transitivitas inklusi.

Petunjuk. Ada $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq N$. Gabungkan inklusi ini dengan $N \subseteq M$.

Jawaban. Benar. Bola yang membuktikan bahwa N merupakan lingkungan juga termuat dalam M .

Solusi. Karena N merupakan lingkungan dari a , terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B(a, \delta) \subseteq N$. Hipotesis $N \subseteq M$ kemudian memberi

$$B(a, \delta) \subseteq N \subseteq M.$$

Jadi M memuat sebuah bola terbuka berpusat di a . Menurut definisi, M merupakan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.31 Irisan dua lingkungan. Misalkan M dan N merupakan lingkungan dari a . Buktikan bahwa $M \cap N$ juga merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Nyatakan radius yang disediakan oleh masing-masing lingkungan dan gabungkan keduanya dengan operasi minimum.

Petunjuk. Jika $B(a, r_M) \subseteq M$ dan $B(a, r_N) \subseteq N$, pilih $r = \min\{r_M, r_N\}$.

Jawaban. Benar. Bola $B(a, \min\{r_M, r_N\})$ termuat dalam $M \cap N$.

Solusi. Karena M dan N merupakan lingkungan dari a , terdapat $r_M, r_N > 0$ dengan $B(a, r_M) \subseteq M$ dan $B(a, r_N) \subseteq N$. Tetapkan $r = \min\{r_M, r_N\}$, yang tetap positif. Jika $x \in B(a, r)$, maka $d(x, a) < r \leq r_M$ dan $d(x, a) < r \leq r_N$. Jadi $x \in M$ dan $x \in N$, sehingga $B(a, r) \subseteq M \cap N$. Maka irisan tersebut merupakan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.32 Kepositifan bertahan di sekitar suatu titik. Misalkan $f : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ kontinu dan $f(a) > 0$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa terdapat lingkungan N dari a sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk semua $x \in N$. *Rubrik.* Pilih toleransi keluaran sebagai fraksi eksplisit dari $f(a)$ dan turunkan batas bawah positif bagi $f(x)$.

Petunjuk. Terapkan kekontinuan di a dengan $\epsilon = f(a)/2$.

Jawaban. Ambil $\epsilon = f(a)/2$. Radius kekontinuan yang sesuai menghasilkan lingkungan $N = B(a, \delta)$ dengan $f(x) > f(a)/2 > 0$ bagi semua $x \in N$.

Solusi. Karena $f(a) > 0$, bilangan $\epsilon = f(a)/2$ positif. Kekontinuan f di a memberikan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - a| < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$. Tetapkan $N = B(a, \delta)$, yang merupakan lingkungan dari a . Untuk setiap $x \in N$,

$$f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Jadi f tetap positif di seluruh lingkungan N .

Pemeriksaan G.33 Subhimpunan ruang diskret. Misalkan (X, d) ruang metrik dengan d sebagai metrik diskret. Buktikan bahwa setiap subhimpunan $A \subseteq X$ merupakan lingkungan dari setiap titiknya. *Rubrik.* Tetapkan titik sebarang $a \in A$, tentukan sebuah bola yang hanya memuat a , dan bahas kasus $A = \emptyset$.

Petunjuk. Dalam metrik diskret, $B(a, 1) = \{a\}$.

Jawaban. Benar. Untuk setiap $a \in A$, berlaku $B(a, 1) = \{a\} \subseteq A$. Jika A kosong, pernyataannya benar secara hampa.

Solusi. Jika $A = \emptyset$, tidak ada titik $a \in A$ yang perlu diperiksa. Jika A tidak kosong, tetapkan sebarang $a \in A$. Pada metrik diskret, $d(x, a)$ bernilai 0 ketika $x = a$ dan 1 ketika $x \neq a$. Karena bola terbuka memakai pertidaksamaan ketat, $B(a, 1) = \{a\}$. Maka $B(a, 1) \subseteq A$, sehingga A merupakan lingkungan dari a . Karena a sebarang, klaim berlaku bagi setiap titik dalam A .

Pemeriksaan G.34 Bola di dalam lingkungan belum tentu berpusat tepat. Putuskan benar atau salah: jika N merupakan lingkungan dari a dalam ruang metrik X , maka setiap bola terbuka yang termuat dalam N juga merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Jika salah, berikan ruang, titik, lingkungan, dan bola terbuka konkret; verifikasi inklusi serta kegagalan sifat lingkungan.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$, sebuah lingkungan dari 0 dapat memuat bola kecil yang berpusat jauh dari 0 dan bahkan tidak memuat 0.

Jawaban. Salah. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, ambil $a = 0$, $N = (-2, 2)$, dan bola $B(1, 1/4) = (3/4, 5/4)$. Bola itu termuat dalam N , tetapi bukan lingkungan dari 0.

Solusi. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, himpunan $N = (-2, 2)$ merupakan lingkungan dari $a = 0$, misalnya karena $B(0, 1) \subseteq N$. Bola terbuka $U = B(1, 1/4) = (3/4, 5/4)$ memenuhi $U \subseteq N$.

Akan tetapi, $0 \notin U$. Setiap lingkungan dari 0 harus memuat 0, sebab setiap bola terbuka berpusat di 0 memuat pusatnya. Jadi U bukan lingkungan dari 0. Contoh ini membantah pernyataan universal tersebut.

Pemeriksaan G.35 Lingkungan dari satu titik belum tentu terbuka. Putuskan benar atau salah: jika N merupakan lingkungan dari a dalam ruang metrik X , maka N merupakan lingkungan dari setiap titiknya. *Rubrik.* Jika salah, buat himpunan yang memuat satu interval terbuka di sekitar a dan satu titik tambahan yang tidak mempunyai ruang terbuka di dalam himpunan itu.

Petunjuk. Pertimbangkan $N = (-1, 1) \cup \{2\}$ dalam $\mathbb{R}$, dengan $a = 0$.

Jawaban. Salah. Himpunan $N = (-1, 1) \cup \{2\}$ merupakan lingkungan dari 0, tetapi bukan lingkungan dari titiknya 2.

Solusi. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, ambil $N = (-1, 1) \cup \{2\}$. Karena $B(0, 1) = (-1, 1) \subseteq N$, himpunan N merupakan lingkungan dari $a = 0$. Selain itu, $2 \in N$.

Untuk sebarang $\delta > 0$, tetapkan $t = \min\{\delta/2, 1/2\}$ dan $x = 2 + t$. Maka $0 < |x - 2| = t < \delta$, tetapi $x \notin (-1, 1)$ dan $x \neq 2$, sehingga $x \notin N$. Jadi tidak ada bola terbuka berpusat di 2 yang termuat dalam N . Dengan demikian N bukan lingkungan dari 2.

Pemeriksaan G.36 Citra lingkungan di bawah fungsi kontinu. Putuskan benar atau salah: jika X, Y ruang-ruang metrik, $f : X \rightarrow Y$ kontinu, dan N merupakan lingkungan dari $a \in X$, maka $f(N)$ merupakan lingkungan dari $f(a)$ dalam Y . *Rubrik.* Jika salah, pilih fungsi kontinu yang meruntuhkan seluruh lingkungan menjadi sebuah himpunan yang terlalu kecil.

Petunjuk. Gunakan fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan sebuah interval terbuka sebagai N .

Jawaban. Salah. Untuk fungsi konstan $f(x) = 0$ dan $N = (-1, 1)$, berlaku $f(N) = \{0\}$, yang bukan lingkungan dari $f(0) = 0$ dalam garis real bermetrik Euklides.

Solusi. Ambil $X = Y = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides, definisikan fungsi konstan $f(x) = 0$, dan pilih $a = 0$ serta $N = (-1, 1)$. Fungsi konstan kontinu, dan N merupakan lingkungan dari a .

Namun $f(N) = \{0\}$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, bola $B(0, \epsilon)$ memuat titik $\epsilon/2 \neq 0$, sehingga tidak termuat dalam $\{0\}$. Jadi $\{0\}$ bukan lingkungan dari $0 = f(a)$. Kekontinuan tidak menjamin bahwa citra lingkungan merupakan lingkungan.

Pemeriksaan G.37 Prapeta lingkungan di bawah fungsi yang kontinu di titik. Putuskan benar atau salah: jika X, Y ruang-ruang metrik, $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $a \in X$, dan N merupakan lingkungan dari $f(a)$, maka $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Mulailah dari bola yang termuat dalam N dan terapkan definisi kekontinuan dengan radius bola tersebut sebagai toleransi keluaran.

Petunjuk. Pilih $\epsilon > 0$ dengan $B_Y(f(a), \epsilon) \subseteq N$, lalu gunakan kekontinuan untuk memperoleh $\delta > 0$.

Jawaban. Benar. Kekontinuan menghasilkan $B_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(N)$.

Solusi. Karena N merupakan lingkungan dari $f(a)$, ada $\epsilon > 0$ dengan $B_Y(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Kekontinuan f di a memberikan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_X(x, a) < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Jadi, jika $x \in B_X(a, \delta)$, maka $f(x) \in B_Y(f(a), \epsilon) \subseteq N$, sehingga $x \in f^{-1}(N)$. Dengan demikian $B_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(N)$. Prapeta tersebut memuat bola terbuka berpusat di a , sehingga merupakan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.38 Bola terbuka belum tentu memuat tak berhingga banyak titik. Putuskan benar atau salah: jika a suatu titik dalam ruang metrik X dan $\delta > 0$, maka bola terbuka $B(a, \delta)$ memuat tak berhingga banyak titik dari X . *Rubrik.* Jika salah, berikan ruang metrik eksplisit, pusat, dan radius positif, lalu hitung bolanya.

Petunjuk. Gunakan himpunan berhingga dengan metrik diskret dan radius 1.

Jawaban. Salah. Dalam $X = \{0, 1\}$ dengan metrik diskret, $B(0, 1) = \{0\}$, yang hanya memuat satu titik.

Solusi. Ambil $X = \{0, 1\}$ dan metrik diskret $d(x, y) = 0$ jika $x = y$, serta $d(x, y) = 1$ jika $x \neq y$. Untuk $a = 0$ dan $\delta = 1$, titik x berada dalam $B(0, 1)$ tepat ketika $d(x, 0) < 1$. Hanya $x = 0$ yang memenuhi syarat ini; $d(1, 0) = 1$ tidak kurang dari 1. Jadi $B(0, 1) = \{0\}$, suatu himpunan berhingga. Contoh ini membantah pernyataan tersebut.

Pemeriksaan G.39 Irisan berhingga lingkungan. Putuskan benar atau salah: jika $N_1, N_2, \dots, N_k$ merupakan lingkungan dari a dalam ruang metrik X untuk suatu bilangan bulat positif k , maka $\bigcap_{i=1}^k N_i$ merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Pilih satu radius positif untuk setiap lingkungan, lalu gunakan minimum dari himpunan radius yang berhingga.

Petunjuk. Jika $B(a, r_i) \subseteq N_i$ untuk $i = 1, \dots, k$, tetapkan $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$.

Jawaban. Benar. Radius minimum $r > 0$ memenuhi $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^k N_i$.

Solusi. Untuk setiap $i \in \{1, \dots, k\}$, karena N_i merupakan lingkungan dari a , pilih $r_i > 0$ sehingga $B(a, r_i) \subseteq N_i$. Himpunan $\{r_1, \dots, r_k\}$ berhingga dan tak kosong, sehingga $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ ada dan positif.

Jika $x \in B(a, r)$, maka untuk setiap i berlaku $d(x, a) < r \leq r_i$. Jadi $x \in B(a, r_i) \subseteq N_i$ bagi semua i . Karena itu $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^k N_i$, yang membuktikan bahwa irisan tersebut merupakan lingkungan dari a .

Pemeriksaan G.40 Irisan sebarang keluarga lingkungan. Putuskan benar atau salah: jika N_α merupakan lingkungan dari a dalam ruang metrik X untuk setiap α dalam suatu himpunan indeks I , maka $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha$ merupakan lingkungan dari a . *Rubrik.* Jika salah, gunakan keluarga terhitung lingkungan yang radiusnya menuju nol, hitung irisannya, dan buktikan bahwa irisan itu tidak memuat bola terbuka beradius positif.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$, ambil $N_n = (-1/n, 1/n)$ untuk setiap bilangan bulat positif n .

Jawaban. Salah. Setiap $N_n = (-1/n, 1/n)$ merupakan lingkungan dari 0, tetapi $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n = \{0\}$, yang bukan lingkungan dari 0 dalam metrik Euklides.

Solusi. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, untuk setiap bilangan bulat positif n , himpunan $N_n = (-1/n, 1/n) = B(0, 1/n)$ merupakan lingkungan dari 0. Titik 0 berada dalam semua N_n . Sebaliknya, jika $x \neq 0$, sifat Archimedes memberi bilangan bulat positif n dengan $n > 1/|x|$. Maka $1/n < |x|$, sehingga $x \notin N_n$. Jadi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n = \{0\}.$$

Himpunan $\{0\}$ bukan lingkungan dari 0: untuk setiap $\delta > 0$, titik $\delta/2$ berada dalam $B(0, \delta)$ tetapi tidak berada dalam $\{0\}$. Jadi irisan tak berhingga dari lingkungan-lingkungan tidak harus merupakan lingkungan.

Pemeriksaan penguasaan Bab 7

Enam soal berikut menggabungkan geometri bola, lingkungan, kekontinuan, dan contoh penyangkal. Setiap soal merupakan materi asli pendamping. Cobalah menyusun bukti lengkap sebelum membuka bantuan bertahap.

Pemeriksaan G.41 Empat metrik dan empat bentuk bola. Pada $\mathbb{R}^2$, gambarkan dan nyatakan dengan pertidaksamaan bola berjari-jari 1 yang berpusat di $0 = (0, 0)$ untuk metrik Euklides d_E , metrik maksimum d_M , metrik taksi d_T , dan metrik diskret d_D . Buktikan bahwa

$$B_D(0, 1) \subsetneq B_T(0, 1) \subsetneq B_E(0, 1) \subsetneq B_M(0, 1).$$

Petunjuk. Tuliskan syarat jarak kurang dari 1 untuk setiap metrik. Untuk inklusi, gunakan $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Untuk ketatnya inklusi, uji titik pada sumbu, lalu titik $(0.6, 0.6)$ dan $(0.9, 0.9)$.

Jawaban. Untuk d_E bolanya ialah cakram $x^2 + y^2 < 1$; untuk d_M , persegi terbuka $\max\{|x|, |y|\} < 1$; untuk d_T , belah ketupat $|x| + |y| < 1$; dan untuk d_D , singleton $\{0\}$. Semua inklusi yang ditampilkan bersifat ketat.

Solusi. Dari definisi masing-masing metrik diperoleh

$$\begin{aligned} B_D(0, 1) &= \{(0, 0)\}, \\ B_T(0, 1) &= \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}, \\ B_E(0, 1) &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ B_M(0, 1) &= \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} < 1\}. \end{aligned}$$

Untuk setiap $z \in \mathbb{R}^2$, berlaku $\|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \leq \|z\|_1$. Karena itu, syarat norma satu kurang dari 1 mengakibatkan syarat norma dua, dan syarat norma dua mengakibatkan syarat norma maksimum. Bola diskret jelas termuat dalam semuanya.

Inklusinya ketat: $(1/2, 0)$ berada dalam bola taksi tetapi bukan dalam bola diskret; $(0.6, 0.6)$ berada dalam bola Euklides karena $0.6^2 + 0.6^2 = 0.72 < 1$, tetapi tidak dalam bola taksi karena $1.2 \not\leq 1$; dan $(0.9, 0.9)$ berada dalam bola maksimum, tetapi tidak dalam bola Euklides karena $0.9^2 + 0.9^2 = 1.62 > 1$.

Pemeriksaan G.42 Ruang yang tersisa di dalam bola terbuka. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, $r > 0$, dan $b \in B(a, r)$. Nyatakan jari-jari residu alami yang berpusat di b , buktikan bahwa jari-jari tersebut positif, lalu buktikan bahwa bola yang dihasilkannya termuat dalam $B(a, r)$.

Petunjuk. Ukur bagian jari-jari r yang belum dipakai oleh jarak $d(a, b)$. Untuk titik x dalam bola baru, terapkan pertidaksamaan segitiga pada $d(x, a)$ dan pertahankan pertidaksamaan ketatnya.

Jawaban. Ambil $s = r - d(a, b)$. Karena $b \in B(a, r)$, berlaku $s > 0$, dan $B(b, s) \subseteq B(a, r)$.

Solusi. Keanggotaan $b \in B(a, r)$ berarti $d(a, b) < r$, sehingga $s = r - d(a, b) > 0$. Jika $x \in B(b, s)$, maka

$$\begin{aligned} d(x, a) &\leq d(x, b) + d(b, a) \\ &< s + d(a, b) \\ &= r. \end{aligned}$$

Jadi $x \in B(a, r)$. Karena x dipilih sebarang, $B(b, s) \subseteq B(a, r)$. Inilah alasan setiap bola terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya.

Pemeriksaan G.43 Tiga bentuk yang setara untuk kekontinuan. Untuk fungsi $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ dan $a \in X$, buktikan kesetaraan ketiga syarat berikut: definisi epsilon-delta; untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dengan $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$; dan prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a . Kemudian gunakan $f(x) = x^2$ di $a = 2$ untuk menjelaskan mengapa prapeta bola tidak harus menjadi bola yang berpusat di a .

Petunjuk. Kesetaraan dua syarat pertama hanyalah penerjemahan keanggotaan bola. Untuk lingkungan umum, sisipkan sebuah bola di dalam lingkungan. Untuk arah sebaliknya, gunakan fakta bahwa $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi pusatnya. Pada contoh konkret, selesaikan $3 < x^2 < 5$.

Jawaban. Ketiga syarat setara. Untuk $f(x) = x^2$, $f^{-1}(B(4, 1)) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5})$, yang bukan satu interval dan karena itu bukan bola Euklides yang berpusat di 2.

Solusi. Untuk $x \in X$, keanggotaan $x \in B(a, \delta)$ tepat berarti $d_X(x, a) < \delta$, sedangkan $x \in f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ tepat berarti $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Jadi implikasi epsilon-delta untuk semua x setara tepat dengan inklusi kedua bola tersebut.

Andaikan syarat inklusi bola berlaku dan N suatu lingkungan bagi $f(a)$. Ada $\epsilon > 0$ dengan $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Pilih $\delta > 0$ dari syarat inklusi. Maka

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(N),$$

sehingga $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a .

Sebaliknya, andaikan sifat prapeta lingkungan berlaku. Untuk $\epsilon > 0$, bola $B(f(a), \epsilon)$ merupakan lingkungan bagi $f(a)$. Prapetanya karena itu merupakan lingkungan bagi a , sehingga memuat $B(a, \delta)$ untuk suatu $\delta > 0$. Ini menghasilkan syarat inklusi bola dan menutup siklus kesetaraan.

Pada contoh $f(x) = x^2$, bola sasaran ialah $B(f(2), 1) = (3, 5)$. Menyelesaikan $3 < x^2 < 5$ memberi dua interval terpisah $(-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5})$. Prapeta ini memuat bola kecil di sekitar 2, tetapi bukan dirinya sendiri sebuah bola yang berpusat di 2.

Pemeriksaan G.44 Metrik graf berhingga yang lengkap. Ambil lintasan berbobot $a - b - c - d$ dengan bobot sisi berturut-turut 1, 2, 1, dan definisikan jarak sebagai panjang lintasan terpendek. Daftarkan semua bola berbeda $B(a, r)$ untuk $r > 0$, cirikan semua lingkungan bagi a , lalu buktikan bahwa setiap fungsi dari ruang ini ke sembarang ruang metrik bersifat kontinu.

Petunjuk. Hitung dahulu $d(a, a)$, $d(a, b)$, $d(a, c)$, $d(a, d)$ dan ingat bahwa syarat bola adalah jarak *kurang dari* jari-jari. Untuk kekontinuan, cari bola singleton di setiap simpul.

Jawaban. Jarak dari a ialah $0, 1, 3, 4$. Bola-bolanya adalah $\{a\}$ untuk $0 < r \leq 1$, $\{a, b\}$ untuk $1 < r \leq 3$, $\{a, b, c\}$ untuk $3 < r \leq 4$, dan seluruh ruang untuk $r > 4$. Semua subhimpunan yang memuat a merupakan lingkungan bagi a , dan setiap fungsi dari ruang tersebut kontinu.

Solusi. Karena graf adalah lintasan, satu-satunya lintasan sederhana dari a ke setiap simpul memberi $d(a, a) = 0$, $d(a, b) = 1$, $d(a, c) = 1 + 2 = 3$, dan $d(a, d) = 1 + 2 + 1 = 4$. Membandingkan angka-angka ini dengan syarat $d(a, x) < r$ menghasilkan tepat empat rezim bola yang dinyatakan pada jawaban.

Karena $B(a, 1) = \{a\}$, setiap himpunan N yang memuat a juga memuat bola tersebut dan merupakan lingkungan bagi a . Sebaliknya, setiap lingkungan bagi a harus memuat pusatnya, jadi pencirian itu tepat.

Di setiap simpul p , jarak minimum dari p ke simpul lain bernilai positif. Pilih jari-jari sebesar jarak minimum tersebut; karena pertidaksamaan bola ketat, bola yang dihasilkan adalah $\{p\}$. Untuk fungsi sebarang f dan toleransi keluaran sebarang, gunakan bola singleton ini sebagai lingkungan masukan. Setiap x di dalamnya sama dengan p , sehingga jarak keluarannya nol. Jadi setiap fungsi kontinu di setiap simpul.

Pemeriksaan G.45 Irisan berhingga dan irisan tak berhingga. Buktikan bahwa irisan setiap keluarga berhingga yang tak kosong dari lingkungan bagi titik a kembali merupakan lingkungan bagi a . Kemudian berikan contoh yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut dapat gagal untuk keluarga tak berhingga.

Petunjuk. Untuk banyak lingkungan berhingga, ambil minimum dari jari-jari saksi. Untuk menyangkal versi tak berhingga, gunakan interval terbuka yang menyusut ke 0 dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Jika $B(a, r_i) \subseteq N_i$ untuk $i = 1, \dots, k$, maka jari-jari $r = \min_i r_i > 0$ menyaksikan bahwa $\bigcap_i N_i$ merupakan lingkungan. Untuk keluarga tak berhingga, setiap $N_n = (-1/n, 1/n)$ merupakan lingkungan bagi 0 , tetapi irisannya adalah $\{0\}$, yang bukan lingkungan bagi 0 dalam metrik Euklides.

Solusi. Misalkan $k \geq 1$ dan $N_1, \dots, N_k$ lingkungan bagi a . Untuk setiap i , pilih $r_i > 0$ dengan $B(a, r_i) \subseteq N_i$. Karena hanya ada berhingga banyak jari-jari positif, $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ tetap positif. Maka $B(a, r) \subseteq B(a, r_i) \subseteq N_i$ untuk setiap i , sehingga $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^k N_i$.

Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, tetapkan $N_n = (-1/n, 1/n)$. Setiap N_n adalah bola terbuka dan karena itu lingkungan bagi 0 . Namun, satu-satunya bilangan real yang berada dalam semua interval tersebut ialah 0 , jadi $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n = \{0\}$. Setiap bola Euklides berjari-jari positif di sekitar 0 memuat titik selain 0 , sehingga tidak ada bola demikian yang termuat dalam $\{0\}$. Irisan itu bukan lingkungan.

Pemeriksaan G.46 Arah prapeta dan citra lingkungan. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu di a . Buktikan bahwa prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a . Sangkal pernyataan serupa bahwa citra setiap lingkungan bagi a harus merupakan lingkungan bagi $f(a)$. Terakhir, nyatakan satu hipotesis tambahan yang cukup agar pernyataan tentang citra menjadi benar.

Petunjuk. Gunakan pencirian kekontinuan dengan lingkungan untuk prapeta. Untuk citra, uji fungsi konstan dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Hipotesis tambahan yang berguna ialah bahwa f merupakan pemetaan terbuka: citra setiap himpunan terbuka harus terbuka.

Jawaban. Pernyataan prapeta benar menurut pencirian kekontinuan. Pernyataan citra salah: fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, memetakan setiap lingkungan ke singleton $\{0\}$, yang bukan lingkungan bagi 0 dalam metrik Euklides. Jika f kontinu dan juga merupakan pemetaan terbuka, maka citra setiap lingkungan bagi a merupakan lingkungan bagi $f(a)$.

Solusi. Karena f kontinu di a , teorema lingkungan menyatakan langsung bahwa untuk setiap lingkungan V bagi $f(a)$, himpunan $f^{-1}(V)$ merupakan lingkungan bagi a . Arah prapeta ini sesuai dengan urutan kuantor dalam definisi kekontinuan.

Untuk arah citra, ambil fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 0$. Fungsi ini kontinu. Jika $N = (-1, 1)$, maka N merupakan lingkungan bagi 0 , tetapi $f(N) = \{0\}$. Singleton tersebut tidak memuat bola Euklides berjari-jari positif di sekitar 0 , jadi bukan lingkungan.

Sekarang andaikan, sebagai tambahan, bahwa f merupakan pemetaan terbuka. Jika N lingkungan bagi a , pilih $r > 0$ dengan $B(a, r) \subseteq N$. Himpunan $B(a, r)$ terbuka, sehingga $f(B(a, r))$ terbuka karena f pemetaan terbuka. Himpunan itu memuat $f(a)$ dan termuat dalam $f(N)$. Jadi $f(N)$ memuat suatu lingkungan terbuka bagi $f(a)$ dan karenanya merupakan lingkungan bagi $f(a)$.

Lampiran H

Pendamping Mandiri Bab 8: Himpunan Terbuka dalam Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 8, bukan menggantikannya. Kerjakan dahulu eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama, kemudian buka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **solusi** secara bertahap. Tiga puluh panduan kegiatan dan dua puluh lima panduan latihan mengikuti seluruh 55 butir sumber dalam urutan sumbernya; enam pemeriksaan penguasaan tambahan menguji pemindahan gagasan ke situasi baru.

Seluruh uraian pendamping dan pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini disediakan secara terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0. Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung, sedangkan solusi menunjukkan penggunaan definisi bola terbuka, urutan kuantor, kedua arah inklusi, serta contoh penyangkal yang diperlukan. Untuk tugas penyelidikan terbuka, solusi berfungsi sebagai rubrik lengkap tanpa menghilangkan nilai inkuiri dari upaya pertama pembelajar.

Panduan kegiatan sumber

Tiga puluh panduan berikut mendampingi seluruh tugas daun dalam eksplorasi dan aktivitas Bab 8, sesuai urutan sumbernya. Kerjakan dahulu pertanyaan pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan menunjukkan letak tugas sumber dan memparafrasakan sasaran kerjanya. Teks panduan asli ini tersedia di bawah lisensi Creative Commons Atribusi 4.0 Internasional (CC BY 4.0).

Pemeriksaan H.1 Keterbukaan interval setengah tertutup dalam garis. Pada kasus pertama eksplorasi di bagian Pendahuluan, putuskan apakah $A = [0, 0.5)$ terbuka ketika ruang sekitarnya adalah $(\mathbb{R}, d_E)$, lalu pertanggungjawabkan keputusan itu dari definisi. Rubrik: nyatakan titik penguji yang menentukan dan jelaskan mengapa tidak ada bola berpusat di titik itu yang memenuhi syarat.

Petunjuk. Tahap 1: uji titik ujung 0. Tahap 2: untuk jari-jari $r > 0$ sebarang, cari titik negatif di $B(0, r)$.

Jawaban. Tidak. Himpunan $[0, 0.5)$ tidak terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ karena bukan lingkungan bagi titik anggotanya 0.

Solusi. Titik 0 termasuk dalam A . Ambil sembarang $r > 0$. Titik $-r/2$ memenuhi $d_E(-r/2, 0) = r/2 < r$, sehingga $-r/2 \in B(0, r)$, tetapi $-r/2 \notin A$. Jadi tidak ada $r > 0$ dengan $B(0, r) \subseteq A$. Dengan demikian A bukan lingkungan bagi setiap titiknya dan bukan himpunan terbuka. Bukti lengkap harus memuat titik penguji, kuantor $r > 0$ sebarang, dan saksi yang keluar dari A .

Pemeriksaan H.2 Peran ruang sekitar pada keterbukaan. Pada kasus kedua eksplorasi Pendahuluan, periksa himpunan yang sama, $A = [0, 0.5)$, tetapi sekarang sebagai subhimpunan dari $X = [0, 1]$ dengan metrik Euklides yang dibatasi ke X . Rubrik: gunakan bola yang anggotanya wajib berada di X , dan berikan jari-jari positif untuk setiap $x \in A$.

Petunjuk. Tahap 1: titik negatif bukan anggota ruang X . Tahap 2: untuk $x \in [0, 0.5)$, bandingkan jarak $0.5 - x$ dengan jarak ke ujung kanan A .

Jawaban. Ya. Himpunan $[0, 0.5)$ terbuka relatif terhadap ruang metrik $X = [0, 1]$.

Solusi. Ambil sembarang $x \in A$ dan tetapkan $r = 0.5 - x > 0$. Jika $y \in B_X(x, r)$, maka $y \in X$ dan $|y - x| < 0.5 - x$. Akibatnya $y < 0.5$; sementara itu, keanggotaan $y \in X = [0, 1]$ memberi $y \geq 0$. Jadi $y \in [0, 0.5) = A$, sehingga $B_X(x, r) \subseteq A$. Hal ini berlaku untuk setiap $x \in A$, termasuk $x = 0$. Maka A terbuka dalam X . Rubrik lengkap menuntut jari-jari positif, pemakaian ruang relatif, dan inklusi bola.

Pemeriksaan H.3 Subhimpunan dalam metrik diskret. Pada kasus ketiga eksplorasi Pendahuluan, tentukan keterbukaan $A = \{a, b\}$ di ruang $X = \{a, b, c, d\}$ dengan metrik diskret. Rubrik: pilih satu jari-jari yang bekerja di setiap titik A dan hitung bola yang dihasilkannya.

Petunjuk. Tahap 1: jarak antara dua titik berbeda adalah 1. Tahap 2: pilih jari-jari yang lebih kecil daripada 1.

Jawaban. Ya. Himpunan $\{a, b\}$ terbuka dalam ruang bermetrik diskret tersebut.

Solusi. Untuk setiap $x \in A$, ambil $r = 1/2$. Dalam metrik diskret, $d(x, x) = 0 < 1/2$, sedangkan untuk setiap $y \neq x$ berlaku $d(x, y) = 1$, yang tidak lebih kecil dari $1/2$. Jadi $B(x, 1/2) = \{x\} \subseteq A$. Karena setiap titik A mempunyai bola demikian, A merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan bersifat terbuka. Argumen yang sama sebenarnya menunjukkan bahwa setiap subhimpunan ruang diskret terbuka.

Pemeriksaan H.4 Titik interior empat interval. Pada butir pertama kelompok kedua eksplorasi Pendahuluan, tentukan semua titik interior dari $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$, dan $[0, 1]$ di $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: buktikan bahwa titik di antara kedua ujung bersifat interior dan uji setiap ujung yang termasuk dalam himpunannya.

Petunjuk. Tahap 1: untuk $0 < x < 1$, gunakan radius yang lebih kecil daripada jarak ke 0 dan ke 1. Tahap 2: bola sekecil apa pun di sekitar 0 atau 1 melintasi salah satu ujung.

Jawaban. Keempat himpunan mempunyai himpunan titik interior yang sama, yaitu $(0, 1)$.

Solusi. Jika $0 < x < 1$, pilih $r = \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\} > 0$. Maka $B(x, r) \subseteq (0, 1)$, sehingga x merupakan titik interior dari masing-masing empat himpunan. Titik 0, bila termasuk, bukan titik interior: untuk setiap $r > 0$, titik $-r/2$ berada dalam $B(0, r)$ tetapi di luar himpunan. Demikian pula titik 1, bila termasuk, gagal karena $1 + r/2 \in B(1, r)$ tetapi berada di luar himpunan. Tidak ada titik anggota lainnya. Jadi interior keempatnya adalah $(0, 1)$.

Pemeriksaan H.5 Interior himpunan berhingga di garis. Pada butir kedua kelompok titik interior di Pendahuluan, cari semua titik interior $A = \{0, 1, 2\}$ sebagai subhimpunan $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: uji setiap kandidat dengan jari-jari sebarang dan temukan titik bola yang tidak berada dalam himpunan berhingga itu.

Petunjuk. Tahap 1: pusatkan bola di salah satu $a \in A$. Tahap 2: pilih perpindahan positif yang lebih kecil daripada jari-jari dan juga lebih kecil daripada 1.

Jawaban. Himpunan A tidak mempunyai titik interior; jadi $\text{Int}(A) = \emptyset$.

Solusi. Ambil $a \in \{0, 1, 2\}$ dan $r > 0$ sebarang. Tetapkan $t = \min\{r/2, 1/2\} > 0$. Maka $a + t \in B(a, r)$. Karena $0 < t \leq 1/2$, bilangan $a + t$ tidak sama dengan 0, 1, atau 2; jadi $a + t \notin A$. Dengan demikian tidak ada bola berpusat di a yang termuat dalam A . Argumen berlaku untuk ketiga titik, sehingga tidak satu pun

merupakan titik interior.

Pemeriksaan H.6 Interior bilangan rasional. Pada butir terakhir eksplorasi Pendahuluan, tentukan titik interior $\mathbb{Q}$ ketika dipandang sebagai subhimpunan $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: mulai dari bilangan rasional dan radius sebarang, lalu hasilkan bilangan irasional di dalam bola tersebut.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $q \in \mathbb{Q}$ dan $r > 0$. Tahap 2: pilih $n \in \mathbb{Z}^+$ cukup besar sehingga $\sqrt{2}/n < r$, lalu periksa $q + \sqrt{2}/n$.

Jawaban. Tidak ada bilangan rasional yang menjadi titik interior $\mathbb{Q}$; dengan kata lain, $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Solusi. Ambil sebarang $q \in \mathbb{Q}$ dan $r > 0$. Menurut sifat Archimedes, ada $n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $\sqrt{2}/n < r$. Bilangan $y = q + \sqrt{2}/n$ bersifat irasional, sebab jika y rasional maka $\sqrt{2} = n(y - q)$ juga rasional, suatu kontradiksi. Namun $d_E(y, q) = \sqrt{2}/n < r$, jadi $y \in B(q, r) \setminus \mathbb{Q}$. Setiap bola di sekitar setiap $q \in \mathbb{Q}$ keluar dari $\mathbb{Q}$; karena itu interiornya kosong.

Pemeriksaan H.7 Himpunan kosong sebagai himpunan terbuka. Pada pertanyaan pertama aktivitas pembuka bagian Himpunan Terbuka, tentukan apakah $\emptyset$ terbuka dalam ruang metrik sebarang X . Rubrik: terapkan pernyataan berkuantor “untuk setiap titik anggotanya” dengan cermat.

Petunjuk. Tahap 1: tuliskan kemungkinan cara menggagalkan definisi keterbukaan. Tahap 2: tanyakan apakah $\emptyset$ mempunyai sebuah titik yang dapat menjadi contoh kegagalan itu.

Jawaban. Ya. Himpunan kosong terbuka dalam setiap ruang metrik.

Solusi. Suatu himpunan O terbuka jika untuk setiap $x \in O$ terdapat $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq O$. Himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai titik anggota. Karena itu tidak ada $x \in \emptyset$ yang melanggar syarat tersebut; pernyataan universalnya benar secara vakum. Maka $\emptyset$ terbuka. Jawaban lengkap harus menjelaskan kebenaran vakum, bukan mencoba membangun bola berpusat di titik yang tidak ada.

Pemeriksaan H.8 Seluruh ruang sebagai himpunan terbuka. Pada pertanyaan kedua aktivitas pembuka bagian Himpunan Terbuka, putuskan apakah ruang metrik X terbuka sebagai subhimpunan dirinya sendiri. Rubrik: untuk titik sebarang, berikan satu radius positif dan verifikasi inklusi bolanya.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $x \in X$. Tahap 2: ingat bahwa, apa pun radius positifnya, definisi $B(x, r)$ hanya memilih titik-titik dari X .

Jawaban. Ya. Seluruh ruang X selalu merupakan himpunan terbuka dalam dirinya sendiri.

Solusi. Ambil sembarang $x \in X$ dan, misalnya, pilih $r = 1$. Berdasarkan definisi bola dalam ruang metrik X , berlaku $B(x, 1) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$, sehingga otomatis $B(x, 1) \subseteq X$. Jadi X merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan karena itu terbuka. Radius lain yang positif juga dapat digunakan.

Pemeriksaan H.9 Target arah balik teorema gabungan bola. Pada langkah pertama aktivitas pembuktian di bagian Himpunan Terbuka, dengan asumsi O adalah gabungan bola-bola terbuka, rumuskan sasaran yang harus dicapai agar O terbukti terbuka. Rubrik: nyatakan titik sebarang, keberadaan radius positif, dan inklusi bola yang tepat.

Petunjuk. Tahap 1: buka definisi “ O terbuka”. Tahap 2: jangan mengganti pusat bola oleh pusat salah satu bola penyusun; sasaran akhirnya harus berpusat di titik $x \in O$ yang sedang diuji.

Jawaban. Kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in O$ terdapat $r_x > 0$ sehingga $B(x, r_x) \subseteq O$.

Solusi. Menurut definisi, O terbuka tepat ketika O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Jadi ambil $x \in O$ sebarang. Target lokalnya adalah menemukan $r_x > 0$ dengan $B(x, r_x) \subseteq O$. Setelah target ini dibuktikan untuk setiap x , keterbukaan O langsung mengikuti. Rubrik lengkap harus memuat kedua kuantor dan arah inklusi yang benar.

Pemeriksaan H.10 Memilih bola penyusun yang memuat titik. Pada langkah kedua aktivitas pembuktian yang sama, jelaskan mengapa setiap $x \in O$ terletak dalam suatu bola terbuka penyusun B yang juga memenuhi $B \subseteq O$. Rubrik: gunakan arti keanggotaan dalam suatu gabungan terindeks.

Petunjuk. Tahap 1: tuliskan $O = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Tahap 2: terjemahkan $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ menjadi pernyataan keberadaan sebuah indeks.

Jawaban. Ada $\alpha_0 \in I$ dengan $x \in B_{\alpha_0}$, dan setiap bola penyusun memenuhi $B_{\alpha_0} \subseteq O$.

Solusi. Karena O merupakan gabungan bola-bola terbuka, kita dapat menulis $O = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Keanggotaan $x \in O$ berarti terdapat sekurang-kurangnya satu $\alpha_0 \in I$ sedemikian sehingga $x \in B_{\alpha_0}$. Di sisi lain, setiap anggota keluarga yang digabungkan merupakan subhimpunan gabungannya, sehingga $B_{\alpha_0} \subseteq O$. Jadi $x \in B_{\alpha_0} \subseteq O$, tepat seperti yang diperlukan.

Pemeriksaan H.11 Menuntaskan arah balik teorema gabungan bola. Pada langkah terakhir aktivitas pembuktian bagian Himpunan Terbuka, selesaikan argumen bahwa gabungan bola-bola terbuka O memang terbuka. Rubrik: mulai dari titik sebarang, pakai bola penyusun yang memuatnya, bangun bola berpusat di titik itu, lalu tutup semua kuantor.

Petunjuk. Tahap 1: tulis bola penyusun sebagai $B(c, R)$ dan gunakan $x \in B(c, R)$. Tahap 2: radius $s = R - d(c, x)$ positif dan menghasilkan $B(x, s) \subseteq B(c, R)$ melalui pertidaksamaan segitiga.

Jawaban. Setiap $x \in O$ mempunyai bola terbuka berpusat di x yang termuat dalam O ; oleh sebab itu O terbuka.

Solusi. Ambil sebarang $x \in O$. Karena O adalah gabungan bola-bola terbuka, ada bola penyusun $B(c, R)$ dengan $x \in B(c, R) \subseteq O$. Maka $s = R - d(c, x) > 0$. Jika $y \in B(x, s)$, pertidaksamaan segitiga memberi

$$d(c, y) \leq d(c, x) + d(x, y) < d(c, x) + s = R.$$

Jadi $y \in B(c, R)$, sehingga $B(x, s) \subseteq B(c, R) \subseteq O$. Karena $x \in O$ dipilih sebarang, O merupakan lingkungan bagi setiap titiknya dan dengan demikian terbuka. Ini melengkapi implikasi yang tertunda.

Pemeriksaan H.12 Gabungan dua interval yang bertumpang tindih. Pada kasus pertama aktivitas Gabungan dan Irisan Himpunan Terbuka, dengan $A = (-2, 1)$ dan $B = (-1, 2)$ di garis Euklides, tentukan apakah $A \cup B$ terbuka dan jelaskan. Rubrik: hitung gabungannya dengan tepat dan hubungkan bentuk hasilnya dengan keterbukaan.

Petunjuk. Tahap 1: kedua interval bertumpang tindih pada $(-1, 1)$. Tahap 2: telusuri semua titik dari ujung kiri -2 hingga ujung kanan 2 , dengan kedua ujung dikecualikan.

Jawaban. $A \cup B = (-2, 2)$, sehingga gabungan tersebut terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Solusi. Interval A mencakup titik-titik dari -2 sampai 1 , sedangkan B mencakup titik-titik dari -1 sampai 2 . Karena keduanya bertumpang tindih, gabungannya tidak mempunyai celah dan sama dengan $(-2, 2)$. Interval terbuka ini adalah bola $B(0, 2)$ dalam metrik Euklides, sehingga terbuka. Rubrik lengkap memerlukan perhitungan gabungan dan alasan keterbukaannya, bukan hanya jawaban ya.

Pemeriksaan H.13 Irisan dua interval yang bertumpang tindih. Pada kasus kedua aktivitas Gabungan dan Irisan Himpunan Terbuka, tentukan keterbukaan $A \cap B$ untuk $A = (-2, 1)$ dan $B = (-1, 2)$. Rubrik: hitung irisan melalui syarat keanggotaan bersama dan jelaskan status hasilnya.

Petunjuk. Tahap 1: suatu titik harus lebih besar daripada kedua batas kiri dan lebih kecil daripada kedua batas kanan. Tahap 2: gunakan batas kiri yang lebih besar dan batas kanan yang lebih kecil.

Jawaban. $A \cap B = (-1, 1)$, dan himpunan ini terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Solusi. Syarat $x \in A \cap B$ berarti sekaligus $-2 < x < 1$ dan $-1 < x < 2$. Kedua syarat bersama-sama ekuivalen dengan $-1 < x < 1$. Jadi $A \cap B = (-1, 1) = B(0, 1)$. Sebagai bola terbuka, irisan itu terbuka. Ini juga merupakan contoh irisan berhingga dari himpunan terbuka yang tetap terbuka.

Pemeriksaan H.14 Gabungan keluarga interval menyusut. Pada butir pertama kasus keluarga $A_n = (1 - 1/n, 1 + 1/n)$ dalam aktivitas Gabungan dan Irisan, tentukan $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ tanpa tuntutan bukti dari sumber. Rubrik panduan: kenali interval terbesar dalam keluarga dan cek bahwa semua interval lain termuat di dalamnya.

Petunjuk. Tahap 1: hitung A_1 . Tahap 2: untuk $n \geq 1$, bandingkan $1/n$ dengan 1.

Jawaban. $\bigcup_{n \geq 1} A_n = (0, 2)$.

Solusi. Untuk $n = 1$, diperoleh $A_1 = (0, 2)$. Jika $n \geq 1$, maka $1/n \leq 1$, sehingga $1 - 1/n \geq 0$ dan $1 + 1/n \leq 2$. Jadi $A_n \subseteq A_1$ untuk setiap n . Karena A_1 sendiri termasuk dalam keluarga yang digabungkan, gabungan seluruh keluarga tepat sama dengan $A_1 = (0, 2)$. Penjelasan ini memverifikasi jawaban meskipun tugas sumber tidak mewajibkan bukti.

Pemeriksaan H.15 Keterbukaan gabungan keluarga interval. Pada butir kedua kasus $A_n = (1 - 1/n, 1 + 1/n)$, putuskan apakah $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ terbuka di $\mathbb{R}$ dan beri alasan. Rubrik: gunakan hasil gabungan yang telah dihitung atau teorema gabungan sebarang himpunan terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: ingat hasil butir sebelumnya. Tahap 2: kenali $(0, 2)$ sebagai sebuah interval terbuka atau bola Euklides.

Jawaban. Ya. Gabungan itu adalah $(0, 2)$, yang terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Solusi. Dari perhitungan sebelumnya, $\bigcup_{n \geq 1} A_n = (0, 2)$. Himpunan ini sama dengan bola $B(1, 1)$ dalam metrik Euklides, sehingga terbuka. Secara alternatif, setiap A_n adalah interval terbuka dan teorema gabungan sebarang menyatakan bahwa gabungan keluarga himpunan terbuka juga terbuka. Salah satu alasan yang dinyatakan dengan lengkap sudah memenuhi rubrik.

Pemeriksaan H.16 Irisan keluarga interval menyusut. Pada butir ketiga kasus $A_n = (1 - 1/n, 1 + 1/n)$, tentukan $\bigcap_{n \geq 1} A_n$; sumber tidak menuntut bukti. Rubrik panduan: tunjukkan titik yang berada di semua interval dan jelaskan bagaimana suatu titik lain akhirnya dikeluarkan oleh interval yang cukup sempit.

Petunjuk. Tahap 1: titik pusat 1 selalu memenuhi syarat. Tahap 2: jika $x \neq 1$, pilih n sehingga $1/n \leq |x - 1|$.

Jawaban. $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{1\}$.

Solusi. Untuk setiap $n \geq 1$, berlaku $1 - 1/n < 1 < 1 + 1/n$; jadi $1 \in A_n$ untuk semua n . Sebaliknya, ambil $x \neq 1$ dan tetapkan $\delta = |x - 1| > 0$. Pilih n cukup besar sehingga $1/n \leq \delta$. Keanggotaan dalam A_n mensyaratkan $|x - 1| < 1/n$, yang gagal. Jadi setiap $x \neq 1$ terbuang dari setidaknya satu interval. Hanya 1 yang berada dalam irisan seluruhnya.

Pemeriksaan H.17 Keterbukaan irisan tak berhingga. Pada butir terakhir kasus keluarga A_n , tentukan apakah $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ terbuka dalam garis Euklides. Rubrik: gunakan hasil irisan dan uji satu-satunya titiknya dengan bola berjari-jari sebarang.

Petunjuk. Tahap 1: irisan itu adalah $\{1\}$. Tahap 2: setiap $B(1, r)$ dengan $r > 0$ juga memuat titik selain 1.

Jawaban. Tidak. Irisan $\{1\}$ bukan himpunan terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Solusi. Hasil butir sebelumnya memberi $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{1\}$. Ambil sembarang $r > 0$. Titik $1 + r/2$ berada dalam $B(1, r)$, tetapi tidak sama dengan 1; jadi $B(1, r) \not\subseteq \{1\}$. Tidak ada bola berpusat di 1 yang termuat dalam irisan, sehingga irisan itu tidak terbuka. Contoh ini menunjukkan mengapa teorema hanya menjamin keterbukaan untuk irisan berhingga, bukan irisan sebarang.

Pemeriksaan H.18 Hipotesis dan target arah balik kekontinuan. Pada langkah pertama aktivitas Kekontinuan dan Himpunan Terbuka, orientasikan implikasi yang belum dibuktikan: nyatakan asumsi tentang prapeta himpunan terbuka dan sasaran kekontinuan yang harus dicapai. Rubrik: berikan kuantor untuk himpunan terbuka, titik domain, dan lingkungan nilai fungsi.

Petunjuk. Tahap 1: arah maju telah dimulai dari f kontinu. Tahap 2: untuk arah balik, gunakan pencirian: prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ harus menjadi lingkungan bagi a .

Jawaban. Asumsinya: untuk setiap himpunan terbuka $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X . Targetnya: untuk setiap $a \in X$ dan setiap lingkungan N bagi $f(a)$, $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a , sehingga f kontinu.

Solusi. Teorema berbentuk bikondisional. Implikasi dari kekontinuan menuju keterbukaan semua prapeta sudah dibuktikan, jadi arah tersisa dimulai dengan hipotesis

$$O \text{ terbuka dalam } Y \implies f^{-1}(O) \text{ terbuka dalam } X.$$

Untuk menyimpulkan kekontinuan melalui lingkungan, ambil sebarang $a \in X$ dan sebarang lingkungan N bagi $f(a)$, lalu buktikan bahwa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a . Karena pilihan a dan N harus sebarang, kedua kuantor itu merupakan bagian wajib dari target.

Pemeriksaan H.19 Bola di dalam lingkungan nilai fungsi. Pada langkah kedua aktivitas kekontinuan, untuk $a \in X$ dan lingkungan N bagi $f(a)$, jelaskan asal keberadaan $\epsilon > 0$ dengan $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Rubrik: sebutkan definisi yang diterapkan dan cocokkan pusat bolanya.

Petunjuk. Tahap 1: jangan gunakan kekontinuan, karena itulah yang sedang dibuktikan. Tahap 2: buka langsung definisi “ N merupakan lingkungan bagi $f(a)$ ”.

Jawaban. Keberadaan $\epsilon > 0$ tersebut adalah tepat isi definisi lingkungan N pada titik $f(a)$.

Solusi. Definisi lingkungan menyatakan bahwa suatu himpunan $N \subseteq Y$ merupakan lingkungan bagi titik $y \in Y$ jika terdapat $r > 0$ sehingga $B_Y(y, r) \subseteq N$. Terapkan definisi ini dengan $y = f(a)$. Karena N diasumsikan sebagai lingkungan bagi $f(a)$, langsung diperoleh suatu $\epsilon > 0$ dengan $B_Y(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Tidak ada asumsi tambahan yang diperlukan.

Pemeriksaan H.20 Prapeta bola menurut hipotesis keterbukaan. Pada langkah ketiga aktivitas kekontinuan, terapkan hipotesis arah balik pada $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Rubrik: verifikasi dahulu jenis himpunan $B(f(a), \epsilon)$ di kodomain, lalu nyatakan keterbukaan prapetanya dan relevansi titik a .

Petunjuk. Tahap 1: setiap bola terbuka memang merupakan himpunan terbuka. Tahap 2: periksa $f(a) \in B(f(a), \epsilon)$ untuk mengetahui apakah a berada dalam prapetanya.

Jawaban. Hipotesis memberi bahwa $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ terbuka dalam X ; himpunan ini juga memuat a , sehingga merupakan lingkungan bagi a .

Solusi. Bola $B(f(a), \epsilon)$ adalah himpunan terbuka dalam Y . Hipotesis bahwa prapeta setiap himpunan terbuka di Y terbuka di X karenanya menghasilkan

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \text{ terbuka dalam } X.$$

Selain itu, $d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon$, jadi $f(a) \in B(f(a), \epsilon)$ dan $a \in f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$. Setiap himpunan terbuka merupakan lingkungan bagi setiap titiknya; maka prapeta tersebut merupakan lingkungan bagi a .

Pemeriksaan H.21 Menutup bukti kekontinuan melalui lingkungan. Pada langkah keempat aktivitas kekontinuan, buktikan bahwa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a , lalu jelaskan mengapa hal itu menyelesaikan arah balik teorema. Rubrik: gunakan inklusi bola di dalam N , sifat prapeta yang mempertahankan inklusi, dan pencirian kekontinuan melalui lingkungan.

Petunjuk. Tahap 1: dari $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$, ambil prapeta kedua ruas. Tahap 2: setiap himpunan yang memuat suatu lingkungan bagi a juga merupakan lingkungan bagi a .

Jawaban. Karena $f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(N)$ dan himpunan di kiri merupakan lingkungan bagi a , maka $f^{-1}(N)$ juga lingkungan bagi a . Hal ini berlaku untuk setiap a dan N , sehingga f kontinu.

Solusi. Dari definisi lingkungan, pilih $\epsilon > 0$ sehingga $B(f(a), \epsilon) \subseteq N$. Prapeta mempertahankan inklusi, jadi

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(N).$$

Langkah sebelumnya menunjukkan bahwa himpunan di kiri merupakan lingkungan bagi a ; maka ia memuat suatu $B_X(a, \delta)$. Rantai inklusi memberi $B_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(N)$, sehingga $f^{-1}(N)$ juga lingkungan bagi a .

Karena $a \in X$ dan lingkungan N bagi $f(a)$ dipilih sebarang, pencirian melalui lingkungan menyimpulkan bahwa f kontinu.

Pemeriksaan H.22 Arah maju pencirian melalui bola. Pada langkah pertama aktivitas akibat tentang bola terbuka, mulai dengan f kontinu dan jelaskan mengapa prapeta setiap bola terbuka $B \subseteq Y$ terbuka dalam X . Rubrik: sebutkan fakta bahwa bola terbuka adalah himpunan terbuka dan terapkan teorema pencirian melalui himpunan terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: klasifikasikan B sebagai himpunan terbuka di Y . Tahap 2: substitusikan $O = B$ ke implikasi teorema untuk fungsi kontinu.

Jawaban. Setiap bola terbuka B terbuka dalam Y ; karena f kontinu, teorema pencirian memberi bahwa $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X .

Solusi. Ambil sembarang bola terbuka B di Y . Berdasarkan sifat dasar bola, B merupakan himpunan terbuka dalam Y . Teorema pencirian kekontinuan menyatakan bahwa jika f kontinu, maka prapeta setiap himpunan terbuka di kodomain terbuka di domain. Dengan memilih himpunan terbuka itu sebagai B , diperoleh $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X . Karena B sebarang, implikasi pertama akibat terbukti.

Pemeriksaan H.23 Menguraikan himpunan terbuka menjadi bola. Pada sublangkah pertama arah balik aktivitas akibat tentang bola, untuk himpunan terbuka sebarang $O \subseteq Y$, nyatakan bentuk O yang dijamin oleh teorema basis bola. Rubrik: berikan keluarga terindeks bola-bola terbuka dan persamaan gabungannya.

Petunjuk. Tahap 1: teorema yang dirujuk mencirikan himpunan terbuka sebagai gabungan bola-bola terbuka. Tahap 2: namai keluarga itu $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$.

Jawaban. Ada keluarga bola terbuka $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$ dalam Y sedemikian sehingga $O = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$.

Solusi. Teorema basis bola menyatakan bahwa suatu subhimpunan ruang metrik terbuka jika dan hanya jika ia merupakan gabungan bola-bola terbuka. Karena O terbuka dalam Y , terdapat himpunan indeks J dan bola-bola terbuka $B_\beta \subseteq Y$ untuk $\beta \in J$ dengan

$$O = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta.$$

Bentuk ini dipilih karena hipotesis arah balik sudah mengendalikan prapeta masing-masing bola.

Pemeriksaan H.24 Menutup pencirian kekontinuan melalui bola. Pada sublangkah terakhir aktivitas akibat tentang bola, gunakan identitas prapeta gabungan untuk membuktikan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka bagi setiap himpunan terbuka $O \subseteq Y$, lalu simpulkan kekontinuan f . Rubrik: tulis persamaan prapeta, terapkan hipotesis pada setiap bola, gunakan keterbukaan gabungan sebarang, dan sebutkan teorema penutup.

Petunjuk. Tahap 1: substitusikan $O = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$. Tahap 2: ubah prapeta gabungan menjadi gabungan prapeta dan klasifikasikan setiap sukunya.

Jawaban. $f^{-1}(O) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$ adalah gabungan himpunan-himpunan terbuka, sehingga terbuka. Karena ini berlaku untuk setiap O terbuka, teorema pencirian menyatakan bahwa f kontinu.

Solusi. Asumsikan bahwa $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X untuk setiap bola terbuka $B \subseteq Y$. Ambil himpunan terbuka sebarang $O \subseteq Y$. Dari langkah sebelumnya, tulis $O = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$, dengan setiap B_β bola terbuka. Identitas prapeta gabungan memberi

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta).$$

Menurut hipotesis, setiap $f^{-1}(B_\beta)$ terbuka dalam X ; gabungan sebarang dari himpunan terbuka juga terbuka. Jadi $f^{-1}(O)$ terbuka untuk setiap O terbuka dalam Y . Teorema pencirian melalui himpunan terbuka kemudian memberi bahwa f kontinu.

Pemeriksaan H.25 Interior interval setengah tertutup kanan. Pada kasus pertama aktivitas Interior Suatu Himpunan, tentukan $\text{Int}(A)$ untuk $A = (0, 1]$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: buktikan bahwa semua titik di antara ujung adalah interior dan uji titik ujung 1 yang termasuk dalam A .

Petunjuk. Tahap 1: untuk $0 < x < 1$, gunakan radius lebih kecil daripada x dan $1 - x$. Tahap 2: setiap bola di sekitar 1 memuat bilangan yang lebih besar daripada 1.

Jawaban. $\text{Int}((0, 1]) = (0, 1)$.

Solusi. Jika $0 < x < 1$, pilih $r = \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\} > 0$. Maka $B(x, r) \subseteq (0, 1) \subseteq A$, sehingga x titik interior. Satu-satunya anggota A yang tersisa untuk diuji adalah 1. Untuk setiap $r > 0$, titik $1 + r/2 \in B(1, r)$ tetapi tidak berada dalam A . Jadi 1 bukan titik interior. Titik 0 bukan anggota A , sehingga bukan kandidat. Maka interiornya tepat $(0, 1)$.

Pemeriksaan H.26 Interior interval tertutup. Pada kasus kedua aktivitas Interior Suatu Himpunan, hitung $\text{Int}([0, 1])$ dalam garis Euklides. Rubrik: berikan bola yang bekerja untuk titik antara dan saksi kegagalan untuk kedua titik ujung.

Petunjuk. Tahap 1: argumen untuk $0 < x < 1$ sama seperti pada kasus sebelumnya. Tahap 2: gerakkan sedikit ke kiri dari 0 dan sedikit ke kanan dari 1.

Jawaban. $\text{Int}([0, 1]) = (0, 1)$.

Solusi. Untuk $0 < x < 1$, radius $r = \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\}$ positif dan memenuhi $B(x, r) \subseteq [0, 1]$. Jadi semua titik $(0, 1)$ interior. Untuk setiap $r > 0$, bola $B(0, r)$ memuat $-r/2 \notin [0, 1]$, sehingga 0 bukan interior. Bola $B(1, r)$ memuat $1 + r/2 \notin [0, 1]$, sehingga 1 juga bukan interior. Tidak ada titik anggota lain; jadi interiornya adalah $(0, 1)$.

Pemeriksaan H.27 Interior gabungan interval dan titik-titik terisolasi. Pada kasus ketiga aktivitas Interior Suatu Himpunan, tentukan interior $A = \{-2\} \cup [0, 5] \cup \{7, 8, 9\}$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: pisahkan titik-titik di bagian dalam interval, kedua ujung interval, dan seluruh titik terisolasi.

Petunjuk. Tahap 1: titik $0 < x < 5$ mempunyai jarak positif ke kedua ujung interval. Tahap 2: setiap bola di sekitar salah satu dari $-2, 0, 5, 7, 8, 9$ memuat bilangan di luar A jika perpindahannya dipilih cukup kecil.

Jawaban. $\text{Int}(A) = (0, 5)$.

Solusi. Jika $0 < x < 5$, ambil $r = \frac{1}{2} \min\{x, 5 - x\} > 0$; maka $B(x, r) \subseteq (0, 5) \subseteq A$. Jadi $(0, 5) \subseteq \text{Int}(A)$. Titik 0 dan 5 bukan interior karena setiap bola di sekitarnya melintasi ujung interval menuju celah di luar A . Titik $-2, 7, 8, 9$ juga bukan interior: masing-masing terisolasi dalam A , sedangkan setiap bola Euklides beradius positif memuat bilangan lain yang cukup dekat dan tidak berada dalam A . Karena daftar ini mencakup semua anggota di luar $(0, 5)$, diperoleh $\text{Int}(A) = (0, 5)$.

Pemeriksaan H.28 Target sifat interior sebagai himpunan terbuka terbesar. Pada langkah pertama aktivitas penutup bagian Interior Suatu Himpunan, rumuskan apa yang masih harus dibuktikan agar $\text{Int}(A)$ menjadi subhimpunan terbuka terbesar dari X yang termuat dalam A . Rubrik: sertakan sifat terbuka dan inklusi dasar, lalu nyatakan sifat universal terhadap setiap himpunan terbuka lain di dalam A .

Petunjuk. Tahap 1: bagian awal bukti teorema telah menangani keterbukaan $\text{Int}(A)$; definisi memberi $\text{Int}(A) \subseteq A$. Tahap 2: arti “terbesar” adalah memuat setiap kandidat terbuka $O \subseteq A$.

Jawaban. Selain mengetahui bahwa $\text{Int}(A)$ terbuka dan $\text{Int}(A) \subseteq A$, kita harus membuktikan: untuk setiap O terbuka dalam X dengan $O \subseteq A$, berlaku $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Solusi. Sebuah “subhimpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A ” harus memenuhi tiga hal: ia terbuka dalam X , ia merupakan subhimpunan A , dan ia memuat setiap subhimpunan terbuka lain dari X yang termuat dalam A . Bagian awal pembuktian sudah menunjukkan bahwa $\text{Int}(A)$ terbuka, sedangkan definisinya langsung memberi $\text{Int}(A) \subseteq A$. Jadi pekerjaan yang tersisa tepatlah mengambil O terbuka sebarang dengan $O \subseteq A$ dan membuktikan $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Pemeriksaan H.29 Konsekuensi lokal dari keterbukaan kandidat. Pada langkah kedua aktivitas penutup Interior Suatu Himpunan, misalkan O terbuka, $O \subseteq A$, dan $x \in O$. Uraikan kesimpulan lokal yang berasal dari keterbukaan O dan kaitkan kesimpulan itu dengan A . Rubrik: hasilkan radius positif, rantai inklusi, dan status x sebagai titik interior.

Petunjuk. Tahap 1: karena O terbuka dan $x \in O$, ada bola berpusat di x yang termuat dalam O . Tahap 2: gabungkan dengan $O \subseteq A$ dan baca kembali definisi titik interior.

Jawaban. Ada $\epsilon > 0$ dengan $B(x, \epsilon) \subseteq O \subseteq A$; jadi A merupakan lingkungan bagi x , sehingga $x \in \text{Int}(A)$.

Solusi. Karena O terbuka, ia merupakan lingkungan bagi setiap titiknya. Khusus untuk $x \in O$, terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \epsilon) \subseteq O$. Hipotesis $O \subseteq A$ memperpanjang inklusi itu menjadi

$$B(x, \epsilon) \subseteq O \subseteq A.$$

Jadi A memuat sebuah bola terbuka berpusat di x dan merupakan lingkungan bagi x . Menurut definisi, x adalah titik interior A , yakni $x \in \text{Int}(A)$.

Pemeriksaan H.30 Menuntaskan sifat maksimal interior. Pada langkah terakhir aktivitas Interior Suatu Himpunan, lengkapilah bukti $O \subseteq \text{Int}(A)$ dan jelaskan bagaimana inklusi itu menutup klaim maksimalitas. Rubrik: gunakan titik $x \in O$ sebarang, simpulkan keanggotaan dalam interior, lalu kembalikan kuantor pada semua kandidat terbuka $O \subseteq A$.

Petunjuk. Tahap 1: langkah sebelumnya berlaku untuk setiap $x \in O$. Tahap 2: setelah memperoleh inklusi himpunan, gabungkan dengan fakta yang sudah terbukti bahwa $\text{Int}(A)$ terbuka dan termuat dalam A .

Jawaban. Setiap $x \in O$ adalah titik interior A , sehingga $O \subseteq \text{Int}(A)$. Karena ini berlaku bagi setiap subhimpunan terbuka $O \subseteq A$, interior A adalah kandidat terbuka terbesar yang termuat dalam A .

Solusi. Ambil sebarang himpunan terbuka $O \subseteq X$ dengan $O \subseteq A$, lalu ambil sebarang $x \in O$. Karena O terbuka, terdapat $\epsilon > 0$ dengan $B(x, \epsilon) \subseteq O$. Maka $B(x, \epsilon) \subseteq A$, sehingga x adalah titik interior A dan $x \in \text{Int}(A)$. Kesimpulan ini berlaku untuk setiap $x \in O$; jadi $O \subseteq \text{Int}(A)$. Karena O adalah kandidat terbuka sebarang di dalam A , sementara $\text{Int}(A)$ sendiri sudah terbukti terbuka dan termuat dalam A , interior itu memang subhimpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A .

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Tiga belas panduan berikut berkorespondensi, dalam urutan sumber, dengan tiga belas perintah pertama pada bagian latihan penutup Bab 8. ID panduan berlanjut dari o003-c90-ch08-guide-31 sampai o003-c90-ch08-guide-43. Materi pendamping ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri, bukan jawaban yang disediakan oleh penulis karya sumber.

Pemeriksaan H.31 Setiap subhimpunan ruang diskret terbuka. Pada perintah pertama latihan penutup, (X, d) memakai metrik diskret. Buktikan bahwa setiap subhimpunan $A \subseteq X$ terbuka. *Rubrik.* Periksa kasus $A = \emptyset$; untuk $A \neq \emptyset$, mulai dari titik sebarang $x \in A$ dan berikan satu bola berpusat di x yang termuat dalam A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Dalam metrik diskret, hitung $B(x, 1)$ dengan mengingat bahwa syarat bola memakai pertidaksamaan ketat.

Langkah 2. Jika $x \in A$, bandingkan bola itu dengan A ; keterbukaan himpunan kosong berlaku secara hampa.

Jawaban. Benar. Untuk setiap $x \in A$, berlaku $B(x, 1) = \{x\} \subseteq A$; jadi setiap titik A adalah titik interior.

Solusi. Jika $A = \emptyset$, syarat bahwa setiap titiknya mempunyai bola yang termuat dalam A benar secara hampa, sehingga A terbuka. Sekarang andaikan $A \neq \emptyset$ dan ambil sebarang $x \in A$. Pada metrik diskret,

$d(x, y) = 0$ jika $y = x$ dan $d(x, y) = 1$ jika $y \neq x$. Karena itu

$$B(x, 1) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\} = \{x\}.$$

Maka $B(x, 1) = \{x\} \subseteq A$. Titik x sebarang, jadi setiap titik A merupakan titik interior. Dengan demikian A terbuka.

Pemeriksaan H.32 Setiap fungsi dari ruang diskret kontinu. Pada perintah kedua latihan penutup, domain (X, d) bermetrik diskret dan (Y, d_Y) adalah ruang metrik sebarang. Buktikan bahwa setiap fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu. *Rubrik.* Terapkan karakterisasi kekontinuan melalui prapeta himpunan terbuka dan gunakan hasil perintah sebelumnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil himpunan terbuka sebarang $O \subseteq Y$ dan amati bahwa $f^{-1}(O)$ hanyalah suatu subhimpunan dari X .

Langkah 2. Semua subhimpunan dari ruang diskret terbuka; masukkan fakta ini ke kriteria prapeta-terbuka.

Jawaban. Ya. Untuk setiap himpunan terbuka $O \subseteq Y$, prapetanya $f^{-1}(O)$ merupakan subhimpunan ruang diskret X , maka terbuka. Jadi f kontinu.

Solusi. Misalkan O suatu himpunan terbuka dalam Y . Apa pun nilai-nilai fungsi f , himpunan $f^{-1}(O)$ adalah suatu subhimpunan dari X . Menurut hasil perintah pertama, setiap subhimpunan dari X terbuka karena X memakai metrik diskret. Jadi $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X untuk setiap himpunan terbuka $O \subseteq Y$. Karakterisasi kekontinuan melalui prapeta himpunan terbuka sekarang memberi bahwa $f : X \rightarrow Y$ kontinu.

Pemeriksaan H.33 Fungsi menuju ruang diskret tidak selalu kontinu. Pada perintah ketiga latihan penutup, tentukan apakah setiap fungsi $f : Y \rightarrow X$ menuju ruang diskret X juga harus kontinu. Jika tidak, berikan ruang metrik Y , fungsi konkret, dan himpunan terbuka di kodomain yang prapetanya tidak terbuka. *Rubrik.* Sebuah ruang diskret dua titik dan satu fungsi yang membedakan satu titik garis real dari semua titik lain sudah cukup.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil $Y = (\mathbb{R}, d_E)$ dan $X = \{0, 1\}$ dengan metrik diskret.

Langkah 2. Definisikan $f(0) = 0$ dan $f(t) = 1$ untuk $t \neq 0$, lalu hitung $f^{-1}(\{0\})$.

Jawaban. Tidak. Untuk fungsi di atas, $\{0\}$ terbuka dalam X , sedangkan $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ tidak terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Solusi. Ambil $Y = (\mathbb{R}, d_E)$ dan $X = \{0, 1\}$ dengan metrik diskret. Definisikan

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \neq 0. \end{cases}$$

Karena X diskret, himpunan satu titik $\{0\}$ terbuka dalam X . Akan tetapi, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Himpunan ini tidak terbuka dalam garis real bermetrik Euklides: untuk setiap $r > 0$, titik $r/2$ berada dalam $B(0, r)$ tetapi tidak dalam $\{0\}$. Jadi prapeta suatu himpunan terbuka tidak terbuka, sehingga f tidak kontinu. Dengan demikian pernyataan universal pada sumber salah.

Pemeriksaan H.34 Himpunan terbuka sama dengan interiornya. Pada perintah keempat latihan penutup, buktikan pernyataan bikondisional: suatu subhimpunan O dari ruang metrik X terbuka jika dan hanya jika $O = \text{Int}(O)$. *Rubrik.* Buktikan kedua arah secara terpisah dan jangan lupa bahwa $\text{Int}(O) \subseteq O$ selalu berlaku.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika O terbuka, setiap $x \in O$ mempunyai bola terbuka yang termuat dalam O .

Langkah 2. Untuk arah sebaliknya, gunakan fakta bahwa interior suatu himpunan adalah himpunan terbuka.

Jawaban. Benar. Keterbukaan O memberi $O \subseteq \text{Int}(O)$, sedangkan inklusi sebaliknya selalu benar. Jika $O = \text{Int}(O)$, maka O terbuka karena interior terbuka.

Solusi. Andaikan dahulu O terbuka. Untuk setiap $x \in O$, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq O$. Jadi setiap $x \in O$ merupakan titik interior dan $O \subseteq \text{Int}(O)$. Dari definisi interior selalu berlaku $\text{Int}(O) \subseteq O$, maka $O = \text{Int}(O)$.

Sebaliknya, andaikan $O = \text{Int}(O)$. Interior setiap himpunan merupakan himpunan terbuka. Karena O sama dengan interiornya, O sendiri terbuka. Kedua implikasi telah dibuktikan.

Pemeriksaan H.35 Interior bersifat monoton terhadap inklusi. Pada perintah kelima latihan penutup, diketahui $A \subseteq B \subseteq X$. Buktikan atau sangkal $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$. *Rubrik.* Mulailah dari titik interior sebarang dari A dan pertahankan bola saksinya ketika memperbesar himpunan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \in \text{Int}(A)$, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq A$.

Langkah 2. Rangkaikan inklusi bola itu dengan $A \subseteq B$.

Jawaban. Benar. Bola yang menunjukkan bahwa x interior bagi A juga termuat dalam B .

Solusi. Ambil sebarang $x \in \text{Int}(A)$. Menurut definisi, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B(x, r) \subseteq A$. Karena $A \subseteq B$, diperoleh

$$B(x, r) \subseteq A \subseteq B.$$

Maka x merupakan titik interior dari B , yaitu $x \in \text{Int}(B)$. Karena x sebarang, $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$. Jadi pernyataan tersebut benar.

Pemeriksaan H.36 Interior bersifat idempoten. Pada perintah keenam latihan penutup, buktikan atau sangkal $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$ untuk setiap subhimpunan A dari ruang metrik X . *Rubrik.* Identifikasi sifat topologis $\text{Int}(A)$, lalu terapkan karakterisasi pada perintah keempat.

Petunjuk. *Langkah 1.* Himpunan $\text{Int}(A)$ selalu terbuka.

Langkah 2. Setiap himpunan terbuka sama dengan interiornya sendiri.

Jawaban. Benar. Karena $\text{Int}(A)$ terbuka, interior dari $\text{Int}(A)$ sama dengan $\text{Int}(A)$.

Solusi. Tetapkan $U = \text{Int}(A)$. Berdasarkan sifat dasar interior, U merupakan himpunan terbuka. Hasil perintah keempat menyatakan bahwa himpunan terbuka sama dengan interiornya, sehingga

$$\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(U) = U = \text{Int}(A).$$

Jadi pernyataan tersebut benar untuk setiap $A \subseteq X$, termasuk $A = \emptyset$.

Pemeriksaan H.37 Interval setengah terbuka bukan himpunan terbuka. Pada perintah ketujuh latihan penutup, misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Tunjukkan bahwa $(a, b]$ tidak terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. *Rubrik.* Pilih satu titik anggota yang menjadi titik batas dan, untuk setiap radius positif, bangun titik bola yang keluar dari interval.

Petunjuk. *Langkah 1.* Titik b berada dalam $(a, b]$.

Langkah 2. Untuk $r > 0$, periksa titik $b + r/2$.

Jawaban. Himpunan itu tidak terbuka. Setiap bola $B(b, r)$ memuat $b + r/2$, yang lebih besar daripada b dan karena itu tidak berada dalam $(a, b]$.

Solusi. Titik b adalah anggota $(a, b]$. Ambil sebarang $r > 0$ dan tetapkan $y = b + r/2$. Karena $d_E(y, b) = |y - b| = r/2 < r$, berlaku $y \in B(b, r)$. Namun $y > b$, sehingga $y \notin (a, b]$. Jadi tidak ada bola terbuka berpusat di b yang termuat dalam $(a, b]$. Titik b bukan titik interior, maka $(a, b]$ bukan himpunan terbuka.

Pemeriksaan H.38 Persegi panjang terbuka dalam metrik Euklides. Pada perintah kedelapan latihan penutup, tentukan apakah $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, 0 < y < 1\}$ terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$, lalu buktikan jawaban Anda. *Rubrik.* Untuk titik sebarang dalam A , gunakan jarak terkecil ke empat sisi sebagai radius.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $p = (x, y) \in A$, tetapkan $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\}$ dan periksa bahwa $r > 0$.

Langkah 2. Jika $q = (u, v)$ dan $d_E(p, q) < r$, maka $|u - x| < r$ serta $|v - y| < r$.

Jawaban. Ya. Untuk setiap $p = (x, y) \in A$, radius $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\}$ memenuhi $B_{d_E}(p, r) \subseteq A$.

Solusi. Ambil $p = (x, y) \in A$. Keempat bilangan $x - 1$, $3 - x$, y , dan $1 - y$ positif. Jadi $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\} > 0$. Jika $q = (u, v) \in B_{d_E}(p, r)$, maka

$$|u - x| \leq d_E(p, q) < r, \quad |v - y| \leq d_E(p, q) < r.$$

Karena $r \leq x - 1$ dan $r \leq 3 - x$, pertidaksamaan pertama memberi $1 < u < 3$. Karena $r \leq y$ dan $r \leq 1 - y$, pertidaksamaan kedua memberi $0 < v < 1$. Maka $q \in A$, sehingga $B_{d_E}(p, r) \subseteq A$. Karena p sebarang, A terbuka dalam metrik Euklides.

Pemeriksaan H.39 Persegi panjang terbuka dalam metrik taksi. Pada perintah kesembilan latihan penutup, tentukan apakah persegi panjang $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, 0 < y < 1\}$ terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$, lalu buktikan jawaban Anda. *Rubrik.* Gunakan radius jarak minimum ke sisi dan turunkan batas perubahan masing-masing koordinat dari jarak taksi.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $p = (x, y) \in A$, gunakan kembali $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\}$.

Langkah 2. Dari $|u - x| + |v - y| < r$, simpulkan secara terpisah bahwa $|u - x| < r$ dan $|v - y| < r$.

Jawaban. Ya. Radius minimum ke empat sisi menghasilkan $B_{d_T}((x, y), r) \subseteq A$ bagi setiap $(x, y) \in A$.

Solusi. Ambil $p = (x, y) \in A$ dan tetapkan $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\} > 0$. Jika $q = (u, v) \in B_{d_T}(p, r)$, maka

$$|u - x| + |v - y| = d_T(p, q) < r.$$

Kedua suku tak negatif, sehingga masing-masing kurang daripada r . Seperti pada metrik Euklides, batas $|u - x| < r$ memberi $1 < u < 3$, sedangkan $|v - y| < r$ memberi $0 < v < 1$. Jadi $q \in A$. Dengan demikian $B_{d_T}(p, r) \subseteq A$ dan A terbuka dalam metrik taksi.

Pemeriksaan H.40 Persegi panjang terbuka dalam metrik maksimum. Pada perintah kesepuluh latihan penutup, tentukan apakah persegi panjang $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, 0 < y < 1\}$ terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$, lalu buktikan jawaban Anda. *Rubrik.* Hubungkan langsung syarat bola maksimum dengan dua pertidaksamaan koordinat.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $p = (x, y) \in A$, pilih $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\}$.

Langkah 2. Syarat $\max\{|u - x|, |v - y|\} < r$ menyatakan bahwa kedua selisih koordinat kurang daripada r .

Jawaban. Ya. Untuk setiap $p = (x, y) \in A$, bola maksimum dengan radius $\min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\}$ termuat dalam A .

Solusi. Ambil $p = (x, y) \in A$ dan tetapkan $r = \min\{x - 1, 3 - x, y, 1 - y\} > 0$. Jika $q = (u, v) \in B_{d_M}(p, r)$, maka

$$\max\{|u - x|, |v - y|\} = d_M(p, q) < r.$$

Jadi $|u - x| < r$ dan $|v - y| < r$. Pilihan r kemudian memberikan $1 < u < 3$ serta $0 < v < 1$. Maka $q \in A$, sehingga $B_{d_M}(p, r) \subseteq A$. Karena setiap titik A mempunyai bola demikian, A terbuka dalam metrik maksimum.

Pemeriksaan H.41 Komplemen himpunan titik berhingga terbuka. Pada perintah kesebelas latihan penutup, S adalah himpunan berhingga titik-titik di $\mathbb{R}^2$. Tentukan, disertai bukti, apakah $\mathbb{R}^2 \setminus S$ terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_E)$. Rumus ini mempertahankan perbaikan sumber yang telah disetujui: komplemennya adalah S , bukan variabel A yang tidak didefinisikan. *Rubrik.* Untuk titik di luar S , ambil minimum dari sejumlah berhingga jarak positif; bahas pula kemungkinan S kosong.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $S \neq \emptyset$ dan $p \notin S$, tetapkan $r = \min\{d_E(p, s) \mid s \in S\}$.

Langkah 2. Buktikan $r > 0$ dan bahwa tidak ada $s \in S$ di dalam $B_{d_E}(p, r)$. Jika S kosong, komplemennya adalah seluruh ruang.

Jawaban. Ya. Jika S tidak kosong, jarak minimum dari $p \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ ke S positif dan bolanya dengan radius itu menghindari S ; kasus $S = \emptyset$ langsung.

Solusi. Jika $S = \emptyset$, maka $\mathbb{R}^2 \setminus S = \mathbb{R}^2$, yang terbuka. Andaikan sekarang $S \neq \emptyset$ dan ambil sebarang $p \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Untuk setiap $s \in S$, berlaku $d_E(p, s) > 0$. Karena S berhingga dan tidak kosong, minimum

$$r = \min\{d_E(p, s) \mid s \in S\}$$

ada dan positif.

Jika suatu $s \in S$ berada dalam $B_{d_E}(p, r)$, maka $d_E(p, s) < r$. Hal ini bertentangan dengan definisi $r \leq d_E(p, s)$. Jadi bola itu tidak beririsan dengan S , atau $B_{d_E}(p, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus S$. Setiap titik komplemen adalah titik interior, maka komplemen tersebut terbuka.

Pemeriksaan H.42 Kriteria kekontinuan melalui interior prapeta. Pada perintah kedua belas latihan penutup, untuk fungsi $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$, buktikan bahwa f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\text{Int}(B)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$ untuk setiap $B \subseteq Y$. *Rubrik.* Pada arah maju gunakan bahwa $\text{Int}(B)$ terbuka; pada arah balik substitusikan himpunan terbuka O sebagai B dan buktikan prapetanya terbuka.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika f kontinu, maka $f^{-1}(\text{Int}(B))$ adalah himpunan terbuka yang termuat dalam $f^{-1}(B)$.

Langkah 2. Jika inklusi diasumsikan dan O terbuka, gunakan $\text{Int}(O) = O$ serta $\text{Int}(f^{-1}(O)) \subseteq f^{-1}(O)$.

Jawaban. Pernyataan bikondisional itu benar. Arah maju mengikuti sifat interior sebagai himpunan terbuka terbesar; arah balik membuat setiap prapeta himpunan terbuka sama dengan interiornya sendiri.

Solusi. Andaikan f kontinu dan ambil sebarang $B \subseteq Y$. Himpunan $\text{Int}(B)$ terbuka dalam Y , sehingga $f^{-1}(\text{Int}(B))$ terbuka dalam X . Karena $\text{Int}(B) \subseteq B$, berlaku $f^{-1}(\text{Int}(B)) \subseteq f^{-1}(B)$. Setiap himpunan terbuka yang termuat dalam $f^{-1}(B)$ termuat dalam interiornya. Maka

$$f^{-1}(\text{Int}(B)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B)).$$

Sebaliknya, andaikan inklusi tersebut berlaku untuk setiap $B \subseteq Y$. Ambil himpunan terbuka sebarang $O \subseteq Y$ dan pilih $B = O$. Karena $\text{Int}(O) = O$, hipotesis memberi $f^{-1}(O) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(O))$. Inklusi sebaliknya selalu berlaku dari definisi interior, jadi $f^{-1}(O) = \text{Int}(f^{-1}(O))$. Dengan hasil perintah keempat, $f^{-1}(O)$ terbuka. Prapeta setiap himpunan terbuka terbuka, maka f kontinu.

Pemeriksaan H.43 Bola radius dua dalam metrik pecahan tereduksi. Pada perintah ketiga belas latihan penutup, Q memuat bilangan rasional dalam bentuk paling sederhana, dengan penyebut positif, dan $d(a/b, u/v) = \max\{|a - u|, |b - v|\}$. Deskripsikan tepat $B(2/5, 2)$. *Rubrik.* Ubah pertidaksamaan jarak menjadi dua syarat pada pembilang dan penyebut bulat, lalu sisakan hanya pasangan yang relatif prima.

Petunjuk. *Langkah 1.* Syarat $\max\{|2 - u|, |5 - v|\} < 2$ memberi $u \in \{1, 2, 3\}$ dan $v \in \{4, 5, 6\}$.

Langkah 2. Dari sembilan pasangan itu, coret $(2, 4)$, $(2, 6)$, dan $(3, 6)$ karena pecahannya tidak dalam bentuk paling sederhana.

Jawaban. Bola yang diminta adalah $B(2/5, 2) = \{1/4, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, 3/5\}$.

Solusi. Tuliskan titik sebarang di Q sebagai u/v dalam bentuk paling sederhana dengan $v > 0$. Titik itu berada dalam bola tepat ketika

$$\max\{|2 - u|, |5 - v|\} < 2.$$

Karena u dan v bilangan bulat, syarat ini ekuivalen dengan $u \in \{1, 2, 3\}$ dan $v \in \{4, 5, 6\}$. Ada sembilan pasangan kandidat.

Pasangan $(2, 4)$, $(2, 6)$, dan $(3, 6)$ tidak relatif prima, sehingga bukan representasi paling sederhana dan bukan titik Q dalam koordinat yang mendefinisikan metrik ini. Enam pasangan lainnya relatif prima. Oleh karena itu

$$B(2/5, 2) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} \right\}.$$

Misalnya, pecahan $2/4$ tidak boleh dimasukkan sebagai nama lain bagi $1/2$; bentuk kanonis $1/2$ justru mempunyai jarak $\max\{|2 - 1|, |5 - 2|\} = 3$ dari $2/5$.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Dua belas panduan berikut berkorespondensi, dalam urutan sumber, dengan perintah ke-14 sampai ke-25 pada bagian latihan penutup Bab 8. ID panduan berlanjut dari o003-c90-ch08-guide-44 sampai o003-c90-ch08-guide-55. Materi pendamping ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri, bukan jawaban yang disediakan oleh penulis karya sumber.

Pemeriksaan H.44 Memisahkan dua titik dengan himpunan terbuka. Pada perintah ke-14 latihan penutup, misalkan $x_1 \neq x_2$ dalam ruang metrik (X, d) . Buktikan bahwa ada himpunan terbuka $O_1 \ni x_1$ dan $O_2 \ni x_2$ dengan $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. *Rubrik.* Gunakan jarak positif antartitik untuk memilih dua bola, lalu singkirkan kemungkinan adanya titik pada irisan memakai pertidaksamaan segitiga.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $D = d(x_1, x_2) > 0$ dan ambil $O_i = B(x_i, D/2)$ untuk $i = 1, 2$.

Langkah 2. Jika z berada dalam kedua bola, bandingkan $d(x_1, z) + d(z, x_2)$ dengan D .

Jawaban. Ambil $O_1 = B(x_1, D/2)$ dan $O_2 = B(x_2, D/2)$, dengan $D = d(x_1, x_2)$. Kedua bola terbuka, memuat pusat masing-masing, dan saling lepas.

Solusi. Karena $x_1 \neq x_2$, aksioma metrik memberi $D = d(x_1, x_2) > 0$. Tetapkan $O_1 = B(x_1, D/2)$ dan $O_2 = B(x_2, D/2)$. Bola terbuka adalah himpunan terbuka, dan $d(x_i, x_i) = 0 < D/2$, sehingga $x_i \in O_i$.

Andaikan ada $z \in O_1 \cap O_2$. Pertidaksamaan segitiga menghasilkan

$$D = d(x_1, x_2) \leq d(x_1, z) + d(z, x_2) < \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = D,$$

suatu kontradiksi. Jadi $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, sebagaimana diminta.

Pemeriksaan H.45 Bola terbuka untuk metrik jarak terkompresi. Pada perintah ke-15 latihan penutup, $Y = \mathbb{R}$ memakai metrik $d(x, y) = |x - y|/(|x - y| + 1)$. Deskripsikan $B(c, \delta)$ untuk pusat $c \in \mathbb{R}$ dan $\delta > 0$. Huruf pusat diganti dari a pada perintah sumber menjadi c agar tidak bertabrakan dengan koefisien a dalam rumus $f(x) = ax + b$; rumus sumber tidak diubah. Sumber juga menyebut rumus itu “linear” untuk semua b , padahal secara umum ia afin dan hanya linear bila $b = 0$. Panduan ini mempertahankan kuantor $a, b \in \mathbb{R}$ dan tidak mengubah rumusnya. *Rubrik.* Pisahkan kasus $0 < \delta < 1$ dan $\delta \geq 1$, sebab semua jarak dalam metrik ini kurang dari 1.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $0 < \delta < 1$, tetapkan $t = |x - c|$ dan selesaikan $t/(t + 1) < \delta$ terhadap t .

Langkah 2. Untuk $\delta \geq 1$, gunakan $0 \leq t/(t + 1) < 1 \leq \delta$ bagi setiap $t \geq 0$.

Jawaban. Jika $0 < \delta < 1$, maka $B(c, \delta) = (c - \delta/(1 - \delta), c + \delta/(1 - \delta))$. Jika $\delta \geq 1$, maka $B(c, \delta) = \mathbb{R}$.

Solusi. Ambil $x \in \mathbb{R}$ dan tuliskan $t = |x - c| \geq 0$. Jika $0 < \delta < 1$, maka

$$\begin{aligned} d(x, c) &< \delta \\ \iff \frac{t}{t+1} &< \delta \\ \iff (1-\delta)t &< \delta \\ \iff t &< \frac{\delta}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Jadi

$$B(c, \delta) = \left(c - \frac{\delta}{1-\delta}, c + \frac{\delta}{1-\delta} \right) \quad (0 < \delta < 1).$$

Untuk setiap $t \geq 0$, berlaku $t/(t + 1) < 1$. Maka jika $\delta \geq 1$, setiap $x \in \mathbb{R}$ memenuhi $d(x, c) < \delta$, termasuk ketika $\delta = 1$ karena pertidaksamaannya tetap ketat pada jarak. Jadi $B(c, \delta) = \mathbb{R}$ untuk $\delta \geq 1$.

Pemeriksaan H.46 Rumus afin dari metrik Euklides ke metrik terkompresi. Pada perintah ke-16 latihan penutup, domain $X = (\mathbb{R}, d_E)$, kodomain $Y = (\mathbb{R}, d)$ dengan $d(u, v) = |u - v|/(|u - v| + 1)$, dan

$f(x) = ax + b$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$. Tentukan apakah $f : X \rightarrow Y$ kontinu untuk semua a, b dan buktikan. Label sumber “fungsi linear sebarang” tidak tepat ketika $b \neq 0$; panduan mempertahankan formula serta kuantor sumber dan menyebutnya fungsi afin secara umum. *Rubrik.* Pisahkan kasus $a = 0$; jika $a \neq 0$, bandingkan jarak kodomain dengan $|a||x - x_0|$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $t \geq 0$, berlaku $t/(t+1) \leq t$.

Langkah 2. Jika $a \neq 0$ dan toleransi keluaran adalah $\epsilon > 0$, coba $\delta = \epsilon/|a|$ pada domain Euklides.

Jawaban. Ya. Semua rumus $f(x) = ax + b$ itu kontinu dari X ke Y ; untuk $a \neq 0$, pilihan $\delta = \epsilon/|a|$ cukup, sedangkan $a = 0$ memberi fungsi konstan.

Solusi. Tetapkan $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. Jika $a = 0$, fungsi $f(x) = b$ konstan, sehingga jarak semua nilainya dari $f(x_0)$ adalah nol dan kekontinuan langsung berlaku.

Andaikan $a \neq 0$ dan pilih $\delta = \epsilon/|a| > 0$. Jika $d_E(x, x_0) = |x - x_0| < \delta$, maka, dengan $t = |f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0|$,

$$d(f(x), f(x_0)) = \frac{t}{t+1} \leq t = |a||x - x_0| < |a|\delta = \epsilon.$$

Jadi f kontinu di x_0 . Karena x_0 sebarang, $f : X \rightarrow Y$ kontinu untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$. Suku translasi b hilang dari selisih, tetapi tetap bagian dari formula yang dibuktikan.

Pemeriksaan H.47 Rumus afin dari metrik terkompresi ke metrik Euklides. Pada perintah ke-17 latihan penutup, balik peran ruang: $Y = (\mathbb{R}, d)$ menjadi domain dan $X = (\mathbb{R}, d_E)$ menjadi kodomain. Untuk formula sumber yang sama, $f(x) = ax + b$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$, tentukan apakah $f : Y \rightarrow X$ kontinu. Seperti pada panduan sebelumnya, formula ini diperlakukan sebagai afin secara umum dan linear hanya pada kasus $b = 0$; tidak ada rumus atau kuantor sumber yang diubah. *Rubrik.* Untuk $a \neq 0$, pilih radius domain kurang dari satu dan balik pertidaksamaan $t/(t+1) < \delta$ agar $|a|t < \epsilon$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $a \neq 0$ dan $\epsilon > 0$, ambil $\delta = \epsilon/(|a| + \epsilon)$; periksa bahwa $0 < \delta < 1$.

Langkah 2. Dari $t/(t+1) < \delta$, peroleh $t < \delta/(1 - \delta) = \epsilon/|a|$.

Jawaban. Ya. Semua fungsi itu kontinu dari Y ke X . Untuk $a \neq 0$, pilihan $\delta = \epsilon/(|a| + \epsilon)$ bekerja; kasus $a = 0$ konstan.

Solusi. Tetapkan $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. Jika $a = 0$, f konstan dan kontinu. Andaikan $a \neq 0$, lalu pilih

$$\delta = \frac{\epsilon}{|a| + \epsilon}.$$

Karena pembilang dan penyebut positif serta penyebut lebih besar, $0 < \delta < 1$.

Jika $d(x, x_0) < \delta$ dan $t = |x - x_0|$, maka

$$\frac{t}{t+1} < \delta \implies t < \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{\epsilon}{|a|}.$$

Oleh sebab itu jarak Euklides di kodomain memenuhi

$$d_E(f(x), f(x_0)) = |a||x - x_0| = |a|t < \epsilon.$$

Maka f kontinu di setiap x_0 , untuk seluruh $a, b \in \mathbb{R}$ yang dikuantifikasi dalam sumber.

Pemeriksaan H.48 Kontinuitas proyeksi dari metrik maksimum. Pada perintah ke-18 latihan penutup, fungsi $f : (\mathbb{R}^2, d_M) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ diberikan oleh $f((x, y)) = x$. Tentukan dan buktikan apakah f kontinu. Teks sumber hanya mengatakan “Gunakan Teorema” tanpa nomor, ID, atau xref. Karena sasaran itu memang menggantung dan lebih dari satu hasil kekontinuan di sekitar bagian tersebut dapat dipakai, panduan ini tidak menebak teoremanya dan memberikan bukti langsung. *Rubrik.* Bandingkan perubahan koordinat pertama dengan jarak maksimum dua titik.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk $p = (x, y)$ dan $q = (u, v)$, hitung $d_E(f(p), f(q))$.

Langkah 2. Tunjukkan $|x - u| \leq \max\{|x - u|, |y - v|\} = d_M(p, q)$, lalu pilih $\delta = \epsilon$.

Jawaban. Ya. Proyeksi itu kontinu, bahkan 1-Lipschitz: $d_E(f(p), f(q)) \leq d_M(p, q)$ untuk semua $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Solusi. Ambil $p = (x, y)$ dan $q = (u, v)$. Maka

$$d_E(f(p), f(q)) = |x - u| \leq \max\{|x - u|, |y - v|\} = d_M(p, q).$$

Tetapkan $p \in \mathbb{R}^2$ dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = \epsilon$. Jika $d_M(p, q) < \delta$, pertidaksamaan di atas memberi $d_E(f(p), f(q)) < \epsilon$. Jadi f kontinu di setiap p . Bukti ini menyelesaikan soal tanpa memasang xref baru pada frasa “Gunakan Teorema” yang sarasannya belum ditentukan secara otoritatif.

Pemeriksaan H.49 Interior gabungan tidak selalu masuk gabungan interior. Pada perintah ke-19 latihan penutup, putuskan benar atau salah: untuk subhimpunan tak kosong A, B dari ruang metrik X , selalu berlaku $\text{Int}(A \cup B) \subseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. *Rubrik.* Jika salah, pilih dua interval tertutup yang bertemu pada satu titik dan hitung ketiga interiornya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, ambil $A = [-1, 0]$ dan $B = [0, 1]$.

Langkah 2. Periksa posisi titik 0 terhadap $\text{Int}(A \cup B)$ dan $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

Jawaban. Salah. Untuk $A = [-1, 0]$ dan $B = [0, 1]$, titik 0 berada dalam $\text{Int}(A \cup B) = (-1, 1)$, tetapi tidak berada dalam $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Solusi. Ambil $X = (\mathbb{R}, d_E)$, $A = [-1, 0]$, dan $B = [0, 1]$. Kedua himpunan tak kosong. Interiornya adalah $\text{Int}(A) = (-1, 0)$ dan $\text{Int}(B) = (0, 1)$. Namun $A \cup B = [-1, 1]$, sehingga $\text{Int}(A \cup B) = (-1, 1)$. Khususnya,

$$0 \in \text{Int}(A \cup B) \quad \text{tetapi} \quad 0 \notin \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B).$$

Maka inklusi yang diklaim gagal, jadi pernyataan universal tersebut salah.

Pemeriksaan H.50 Gabungan interior masuk interior gabungan. Pada perintah ke-20 latihan penutup, putuskan benar atau salah: untuk subhimpunan tak kosong $A, B \subseteq X$, selalu berlaku $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$. *Rubrik.* Tunjukkan bahwa ruas kiri terbuka dan termuat dalam $A \cup B$, lalu gunakan sifat interior sebagai himpunan terbuka terbesar yang termuat di dalam suatu himpunan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Himpunan $\text{Int}(A)$ dan $\text{Int}(B)$ terbuka, sehingga gabungannya terbuka.

Langkah 2. Gunakan $\text{Int}(A) \subseteq A$ dan $\text{Int}(B) \subseteq B$.

Jawaban. Benar. $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ adalah himpunan terbuka yang termuat dalam $A \cup B$, maka termuat dalam interior gabungan.

Solusi. Interior $\text{Int}(A)$ dan $\text{Int}(B)$ masing-masing terbuka; gabungan dua himpunan terbuka juga terbuka. Selain itu,

$$\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq A \cup B.$$

Karena $\text{Int}(A \cup B)$ adalah himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam $A \cup B$, setiap himpunan terbuka yang termuat dalam $A \cup B$, termasuk $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, harus termuat di dalamnya. Jadi inklusi itu benar. Hipotesis tak kosong bahkan tidak diperlukan untuk argumen ini.

Pemeriksaan H.51 Interior irisan masuk irisan interior. Pada perintah ke-21 latihan penutup, putuskan benar atau salah: untuk subhimpunan tak kosong $A, B \subseteq X$, selalu berlaku $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$. *Rubrik.* Mulailah dari satu bola yang termuat dalam irisan dan gunakan bola yang sama untuk kedua himpunan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \in \text{Int}(A \cap B)$, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq A \cap B$.

Langkah 2. Dari inklusi itu simpulkan secara terpisah $B(x, r) \subseteq A$ dan $B(x, r) \subseteq B$.

Jawaban. Benar. Setiap titik interior dari $A \cap B$ sekaligus merupakan titik interior dari A dan dari B .

Solusi. Ambil $x \in \text{Int}(A \cap B)$. Terdapat $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq A \cap B$. Karena $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$, berlaku $B(x, r) \subseteq A$ serta $B(x, r) \subseteq B$. Jadi $x \in \text{Int}(A)$ dan $x \in \text{Int}(B)$, sehingga $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$. Karena x sebarang, inklusi yang diminta benar.

Pemeriksaan H.52 Irisan interior masuk interior irisan. Pada perintah ke-22 latihan penutup, putuskan benar atau salah: untuk subhimpunan tak kosong $A, B \subseteq X$, selalu berlaku $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$. *Rubrik.* Dari dua radius yang mungkin berbeda, bangun satu radius positif yang bekerja untuk irisan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, pilih $r_A, r_B > 0$ dengan bola masing-masing termuat dalam A dan B .

Langkah 2. Gunakan $r = \min\{r_A, r_B\}$.

Jawaban. Benar. Bola beradius $\min\{r_A, r_B\}$ termuat sekaligus dalam A dan B , maka termuat dalam irisannya.

Solusi. Ambil $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$. Ada $r_A, r_B > 0$ sedemikian sehingga $B(x, r_A) \subseteq A$ dan $B(x, r_B) \subseteq B$. Tetapkan $r = \min\{r_A, r_B\} > 0$. Jika $y \in B(x, r)$, maka $d(x, y) < r \leq r_A$ dan $d(x, y) < r \leq r_B$. Jadi $y \in A \cap B$. Maka $B(x, r) \subseteq A \cap B$, sehingga $x \in \text{Int}(A \cap B)$. Inklusi itu benar; bersama perintah sebelumnya, bahkan diperoleh $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

Pemeriksaan H.53 Subhimpunan himpunan terbuka belum tentu terbuka. Pada perintah ke-23 latihan penutup, putuskan benar atau salah: setiap subhimpunan dari suatu himpunan terbuka dalam ruang metrik (X, d) terbuka dalam X . *Rubrik.* Jika salah, pilih himpunan terbuka sederhana di garis real dan sebuah himpunan satu titik di dalamnya; verifikasi kegagalan keterbukaan himpunan satu titik tersebut.

Petunjuk. *Langkah 1.* Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, ambil $O = (-1, 1)$ dan $A = \{0\} \subseteq O$.

Langkah 2. Untuk setiap $r > 0$, cari titik bukan nol di dalam $B(0, r)$.

Jawaban. Salah. $O = (-1, 1)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$, tetapi subhimpunannya $\{0\}$ tidak terbuka dalam metrik Euklides.

Solusi. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, himpunan $O = (-1, 1)$ terbuka dan $A = \{0\}$ memenuhi $A \subseteq O$. Namun untuk setiap $r > 0$, titik $r/2$ memenuhi $|r/2 - 0| = r/2 < r$, sehingga berada dalam $B(0, r)$, tetapi $r/2 \notin \{0\}$. Jadi tidak ada bola berpusat di 0 yang termuat dalam A . Maka A tidak terbuka, dan contoh ini membantah pernyataan sumber.

Pemeriksaan H.54 Metrik Euklides dan taksi memberi himpunan terbuka yang sama. Pada perintah ke-24 latihan penutup, putuskan benar atau salah: $O \subseteq \mathbb{R}^2$ terbuka terhadap metrik Euklides d_E jika dan hanya jika terbuka terhadap metrik taksi d_T . *Rubrik.* Buktikan kedua arah dengan perbandingan $d_E(p, q) \leq d_T(p, q) \leq \sqrt{2} d_E(p, q)$ dan inklusi bola yang sesuai.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $B_{d_E}(p, r) \subseteq O$, gunakan $B_{d_T}(p, r) \subseteq B_{d_E}(p, r)$.

Langkah 2. Jika $B_{d_T}(p, r) \subseteq O$, gunakan $B_{d_E}(p, r/\sqrt{2}) \subseteq B_{d_T}(p, r)$.

Jawaban. Benar. Kedua metrik menghasilkan keluarga himpunan terbuka yang sama karena setiap bola kecil untuk salah satu metrik memuat bola yang sesuai untuk metrik lainnya.

Solusi. Untuk $p = (x, y)$ dan $q = (u, v)$, tuliskan $s = |x - u|$ dan $t = |y - v|$. Maka

$$d_E(p, q) = \sqrt{s^2 + t^2} \leq s + t = d_T(p, q) \leq \sqrt{2}\sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{2} d_E(p, q).$$

Andaikan O terbuka terhadap d_E . Untuk $p \in O$, pilih $r > 0$ dengan $B_{d_E}(p, r) \subseteq O$. Pertidaksamaan pertama memberi $B_{d_T}(p, r) \subseteq B_{d_E}(p, r)$, jadi O terbuka terhadap d_T .

Sebaliknya, andaikan O terbuka terhadap d_T . Untuk $p \in O$, pilih $r > 0$ dengan $B_{d_T}(p, r) \subseteq O$. Jika $d_E(p, q) < r/\sqrt{2}$, maka $d_T(p, q) \leq \sqrt{2} d_E(p, q) < r$. Jadi $B_{d_E}(p, r/\sqrt{2}) \subseteq B_{d_T}(p, r) \subseteq O$. Dengan demikian O juga terbuka terhadap d_E , dan bikondisional tersebut terbukti.

Pemeriksaan H.55 Komponen interval terbuka dalam ruang bagian. Pada perintah ke-25 latihan penutup, misalkan $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ dilengkapi metrik Euklides yang dibatasi ke X . Putuskan benar atau salah bahwa $[0, 1]$ merupakan subhimpunan terbuka dari X . *Rubrik.* Bola harus dihitung di dalam ruang X , bukan di seluruh $\mathbb{R}$; gunakan celah antara dua interval untuk memilih radius.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil $x \in [0, 1]$ dan pertimbangkan bola relatif $B_X(x, 1) = \{y \in X \mid |y - x| < 1\}$.

Langkah 2. Untuk $y \in [2, 3]$, tunjukkan $|y - x| \geq 1$.

Jawaban. Benar. Untuk setiap $x \in [0, 1]$, bola relatif $B_X(x, 1)$ tidak mencapai $[2, 3]$ dan karena itu termuat dalam $[0, 1]$.

Solusi. Ambil sebarang $x \in [0, 1]$. Jika $y \in [2, 3]$, maka $y - x \geq 2 - x \geq 1$, sehingga $|y - x| \geq 1$. Jadi tidak ada titik dari komponen $[2, 3]$ yang berada dalam bola relatif

$$B_X(x, 1) = \{y \in X \mid |y - x| < 1\}.$$

Karena semua titik X yang tersisa berada dalam $[0, 1]$, berlaku $B_X(x, 1) \subseteq [0, 1]$. Setiap titik $[0, 1]$ mempunyai bola terbuka relatif yang termuat dalam $[0, 1]$, sehingga $[0, 1]$ terbuka sebagai subhimpunan X . Pernyataan ini tidak mengatakan bahwa $[0, 1]$ terbuka dalam ruang induk $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan penguasaan Bab 8

Enam soal kumulatif berikut ditulis baru sebagai materi pendamping dan tersedia di bawah CC BY 4.0. Setiap petunjuk dibagi menjadi beberapa tahap; gunakan hanya tahap yang diperlukan sebelum membandingkan jawaban dan pembahasan lengkap.

Pemeriksaan H.56 Kriteria bola untuk daerah yang lebih dekat. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $p, q \in X$ dua titik berbeda. Definisikan

$$V_p = \{x \in X : d(x, p) < d(x, q)\}.$$

Untuk setiap $a \in V_p$, tentukan secara eksplisit suatu $r_a > 0$ yang hanya bergantung pada jarak dari a ke p dan q . Buktikan bahwa $B(a, r_a) \subseteq V_p$, lalu simpulkan bahwa V_p terbuka. Apakah kesimpulan yang sama berlaku bagi $V_q = \{x \in X : d(x, q) < d(x, p)\}$?

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena $a \in V_p$, selisih $d(a, q) - d(a, p)$ positif. Ambil setengah dari selisih itu sebagai jari-jari.

Tahap 2. Untuk x di dalam bola tersebut, batasi $d(x, p)$ dari atas dan $d(x, q)$ dari bawah dengan pertidaksamaan segitiga.

Tahap 3. Setelah memperoleh $d(x, p) < d(x, q)$, terapkan kriteria bola di setiap titik $a \in V_p$. Tukarkan peran p dan q untuk bagian terakhir.

Jawaban. Jari-jari $r_a = (d(a, q) - d(a, p))/2$ bernilai positif dan memenuhi $B(a, r_a) \subseteq V_p$. Jadi V_p terbuka. Dengan argumen simetris, V_q juga terbuka.

Solusi. Ambil $a \in V_p$. Definisi V_p memberikan $d(a, p) < d(a, q)$, sehingga

$$r_a = \frac{d(a, q) - d(a, p)}{2} > 0.$$

Misalkan $x \in B(a, r_a)$. Pertidaksamaan segitiga dan bentuk baliknya memberikan

$$\begin{aligned} d(x, p) &\leq d(x, a) + d(a, p) \\ &< r_a + d(a, p) = \frac{d(a, q) + d(a, p)}{2}, \end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} d(x, q) &\geq d(a, q) - d(x, a) \\ &> d(a, q) - r_a = \frac{d(a, q) + d(a, p)}{2}. \end{aligned}$$

Maka $d(x, p) < d(x, q)$, jadi $x \in V_p$. Karena x dipilih sebarang, $B(a, r_a) \subseteq V_p$.

Setiap titik $a \in V_p$ dengan demikian menjadi pusat suatu bola terbuka yang termuat dalam V_p . Berdasarkan kriteria bola, V_p terbuka. Jika p dan q dipertukarkan, bukti yang sama menghasilkan jari-jari $(d(a, p) - d(a, q))/2$ pada setiap $a \in V_q$; jadi V_q juga terbuka.

Pemeriksaan H.57 Gabungan sebarang, irisan berhingga, dan batas kegagalannya. Misalkan (X, d) suatu ruang metrik.

1. Buktikan langsung dengan kriteria bola bahwa gabungan sebarang keluarga himpunan terbuka dalam X bersifat terbuka.
2. Buktikan bahwa irisan berhingga himpunan-himpunan terbuka dalam X bersifat terbuka. Sertakan kasus irisan atas keluarga kosong.
3. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, tetapkan $U_n = (-1/n, 1 + 1/n)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Tentukan dan buktikan nilai $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, lalu jelaskan mengapa hasilnya menyangkal pernyataan serupa untuk irisan tak berhingga.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika sebuah titik berada dalam suatu gabungan, pilih satu anggota keluarga yang memuat titik itu dan gunakan bola saksi dari anggota tersebut.

Tahap 2. Untuk irisan $O_1 \cap \cdots \cap O_k$, pilih satu jari-jari positif dari setiap O_i , lalu ambil minimumnya. Ingat bahwa irisan keluarga kosong didefinisikan sebagai X .

Tahap 3. Titik-titik 0 sampai 1 berada dalam setiap U_n . Jika $x < 0$ atau $x > 1$, pilih n cukup besar agar x tidak lagi berada dalam U_n .

Jawaban. Gabungan sebarang himpunan terbuka bersifat terbuka karena setiap titiknya mewarisi bola dari salah satu anggota keluarga. Untuk irisan berhingga tak kosong, minimum dari jari-jari saksi tetap positif; irisan tanpa faktor ialah X . Namun, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1 + 1/n) = [0, 1]$, yang tidak terbuka dalam metrik Euklides.

Solusi. Misalkan $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ suatu keluarga himpunan terbuka dan $O = \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Jika $x \in O$, terdapat $\alpha_0 \in I$ dengan $x \in O_{\alpha_0}$. Karena O_{α_0} terbuka, ada $r > 0$ sehingga $B(x, r) \subseteq O_{\alpha_0} \subseteq O$. Jadi O terbuka. Jika I kosong, gabungannya adalah $\emptyset$, yang terbuka karena tidak mempunyai titik yang melanggar kriteria bola.

Sekarang misalkan $O_1, \dots, O_k$ terbuka dengan $k \geq 1$, dan ambil $x \in \bigcap_{i=1}^k O_i$. Untuk setiap i , terdapat $r_i > 0$ dengan $B(x, r_i) \subseteq O_i$. Bilangan $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ positif, dan

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^k O_i.$$

Maka irisannya terbuka. Irisan keluarga kosong adalah seluruh ruang X , yang terbuka karena $B(x, 1) \subseteq X$ untuk setiap $x \in X$.

Untuk contoh tak berhingga, setiap $x \in [0, 1]$ memenuhi $-1/n < x < 1 + 1/n$ bagi semua $n \geq 1$. Jadi $[0, 1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Jika $x < 0$, pilih $n > -1/x$; maka $x \leq -1/n$, sehingga $x \notin U_n$. Jika $x > 1$, pilih $n > 1/(x - 1)$; maka $x \geq 1 + 1/n$, sehingga lagi-lagi $x \notin U_n$. Oleh karena itu, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0, 1]$.

Himpunan $[0, 1]$ tidak terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$: setiap bola berjari-jari positif yang berpusat di 0 memuat bilangan negatif. Jadi, tidak ada hukum keterbukaan untuk irisan tak berhingga yang sepadan dengan hukum irisan berhingga.

Pemeriksaan H.58 Penajaman lokal oleh basis bola terbuka. Misalkan $\mathcal{B} = \{B(c, r) : c \in X, r > 0\}$ adalah keluarga semua bola terbuka dalam ruang metrik (X, d) .

1. Jika $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$, buktikan bahwa

$$t = \min\{r - d(a, x), s - d(b, x)\}$$

positif dan bahwa $B(x, t) \subseteq B(a, r) \cap B(b, s)$.

2. Jelaskan mengapa hasil tersebut, bersama fakta bahwa setiap titik berada dalam suatu bola terbuka, memverifikasi sifat tumpang tindih lokal yang diperlukan agar $\mathcal{B}$ menjadi basis.

3. Buktikan pencirian berikut: $O \subseteq X$ terbuka jika dan hanya jika untuk setiap $x \in O$ terdapat $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B \subseteq O$. Nyatakan pula O sebagai gabungan bola-bola basis tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Keanggotaan x dalam kedua bola membuat kedua selisih pada definisi t bernilai positif.

Tahap 2. Jika $y \in B(x, t)$, gunakan $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$, lalu ulangi untuk pusat b .

Tahap 3. Untuk arah maju pada pencirian, gunakan kriteria bola di x . Untuk arah balik, amati bahwa kumpulan bola yang dipilih menutupi O dan tidak memuat titik di luar O .

Jawaban. Jari-jari t yang dinyatakan pada soal positif dan menghasilkan bola yang termuat dalam kedua bola semula. Karena setiap $x \in X$ juga berada dalam $B(x, 1)$, keluarga semua bola terbuka memenuhi kedua syarat basis. Suatu himpunan O terbuka tepat ketika setiap titiknya memiliki bola basis yang termuat dalam O ; dalam hal itu, $O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$ untuk pilihan jari-jari yang sesuai.

Solusi. Karena $x \in B(a, r)$ dan $x \in B(b, s)$, berlaku $d(a, x) < r$ dan $d(b, x) < s$. Jadi kedua bilangan $r - d(a, x)$ dan $s - d(b, x)$ positif, demikian pula minimumnya t . Jika $y \in B(x, t)$, maka

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) \\ &< d(a, x) + t \leq r. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, $d(b, y) < s$. Jadi $y \in B(a, r) \cap B(b, s)$, dan karena y sebarang, $B(x, t) \subseteq B(a, r) \cap B(b, s)$.

Setiap titik $x \in X$ berada dalam anggota basis $B(x, 1)$. Selain itu, jika dua anggota $\mathcal{B}$ bertumpang tindih pada x , perhitungan di atas menghasilkan anggota basis ketiga yang memuat x dan termuat dalam irisan keduanya. Inilah sifat penajaman lokal untuk suatu basis.

Jika O terbuka dan $x \in O$, kriteria bola memberikan $r_x > 0$ dengan $B(x, r_x) \subseteq O$. Karena pusat selalu berada dalam bolanya sendiri,

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x).$$

Untuk $O = \emptyset$, ruas kanan adalah gabungan kosong dan kesamaan tetap berlaku. Sebaliknya, jika setiap $x \in O$ berada dalam suatu bola basis $B_x = B(c_x, r_x) \subseteq O$, maka $\rho_x = r_x - d(c_x, x) > 0$. Pertidaksamaan segitiga memberi $B(x, \rho_x) \subseteq B_x \subseteq O$, sehingga kriteria bola berlaku di x dan O terbuka. Kesamaan $O = \bigcup_{x \in O} B_x$ mengikuti dari $x \in B_x \subseteq O$ untuk setiap $x \in O$.

Pemeriksaan H.59 Kekontinuan fungsi jumlah melalui prapeta. Lengkapi $\mathbb{R}^2$ dengan metrik maksimum d_M dan $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Definisikan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oleh $F(x, y) = x + y$. Gunakan pencirian kekontinuan melalui prapeta himpunan terbuka untuk membuktikan bahwa F kontinu: mulai dengan himpunan terbuka sebarang $V \subseteq \mathbb{R}$ dan tunjukkan langsung bahwa $F^{-1}(V)$ terbuka dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil $(a, b) \in F^{-1}(V)$. Karena V terbuka dan memuat $a + b$, pilih $\eta > 0$ sehingga $B_E(a + b, \eta) \subseteq V$.

Tahap 2. Uji bola maksimum berjari-jari $\eta/2$ di sekitar (a, b) . Untuk (u, v) dalam bola itu, batasi $|(u + v) - (a + b)|$.

Tahap 3. Setelah menemukan bola domain di setiap titik prapeta, simpulkan bahwa prapeta setiap himpunan terbuka bersifat terbuka, lalu gunakan pencirian kekontinuan yang diminta.

Jawaban. Jika $(a, b) \in F^{-1}(V)$ dan $B_E(a + b, \eta) \subseteq V$, maka $B_M((a, b), \eta/2) \subseteq F^{-1}(V)$. Dengan demikian, $F^{-1}(V)$ terbuka untuk setiap V terbuka, sehingga F kontinu.

Solusi. Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}$ terbuka. Jika $F^{-1}(V)$ kosong, prapeta itu terbuka. Jika tidak, ambil titik sebarang $(a, b) \in F^{-1}(V)$. Maka $a + b = F(a, b) \in V$. Keterbukaan V memberikan $\eta > 0$ dengan $B_E(a + b, \eta) \subseteq V$.

Misalkan $(u, v) \in B_M((a, b), \eta/2)$. Definisi metrik maksimum menghasilkan $|u - a| < \eta/2$ dan $|v - b| < \eta/2$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} |F(u, v) - F(a, b)| &= |(u + v) - (a + b)| \\ &\leq |u - a| + |v - b| < \eta. \end{aligned}$$

Jadi $F(u, v) \in B_E(a + b, \eta) \subseteq V$, sehingga $(u, v) \in F^{-1}(V)$. Hal ini membuktikan

$$B_M((a, b), \eta/2) \subseteq F^{-1}(V).$$

Setiap titik dalam $F^{-1}(V)$ mempunyai bola domain yang termuat dalam prapeta tersebut. Maka $F^{-1}(V)$ terbuka. Karena hal ini berlaku untuk setiap himpunan terbuka $V \subseteq \mathbb{R}$, pencirian kekontinuan melalui prapeta menunjukkan bahwa F kontinu.

Pemeriksaan H.60 Interior sebagai bagian terbuka terbesar. Untuk $A \subseteq X$ dalam ruang metrik (X, d) , definisikan

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A &= \{O \subseteq X : O \text{ terbuka dan } O \subseteq A\}, \\ U_A &= \bigcup_{O \in \mathcal{U}_A} O. \end{aligned}$$

1. Buktikan bahwa $U_A = \text{Int}(A)$. Gunakan kesamaan ini untuk menjelaskan dengan tepat arti pernyataan bahwa interior adalah subhimpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A .
2. Turunkan sifat idempoten $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$.
3. Hitung interior $A = [-2, -1] \cup \{0\} \cup (1, 4]$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ dan periksa hasilnya dengan sifat idempoten.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gabungan semua anggota $\mathcal{U}_A$ terbuka dan tetap termuat dalam A . Karena itu, setiap titiknya adalah titik interior A .

Tahap 2. Jika $x \in \text{Int}(A)$, sebuah bola terbuka yang berpusat di x termuat dalam A . Bola ini sendiri adalah anggota $\mathcal{U}_A$.

Tahap 3. Interior yang sudah terbukti terbuka tidak kehilangan titik ketika operasi interior diterapkan lagi. Pada contoh konkret, periksa semua titik ujung dan titik tunggal 0 secara terpisah.

Jawaban. Berlaku $\text{Int}(A) = \bigcup \{O : O \text{ terbuka dan } O \subseteq A\}$. Karena itu, setiap himpunan terbuka yang termuat dalam A termuat pula dalam $\text{Int}(A)$. Interior sendiri terbuka, sehingga $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$. Untuk himpunan pada soal, $\text{Int}(A) = (-2, -1) \cup (1, 4)$, dan interior dari hasil ini tetap sama.

Solusi. Berdasarkan hukum gabungan sebarang, U_A terbuka. Setiap anggota $\mathcal{U}_A$ termuat dalam A , jadi gabungannya juga termuat dalam A . Dengan demikian, untuk setiap $x \in U_A$ terdapat suatu lingkungan terbuka bagi x yang termuat dalam A ; khususnya, $x \in \text{Int}(A)$. Maka $U_A \subseteq \text{Int}(A)$.

Sebaliknya, jika $x \in \text{Int}(A)$, terdapat $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq A$. Bola tersebut terbuka, sehingga $B(x, r) \in \mathcal{U}_A$. Akibatnya, $x \in U_A$. Jadi $\text{Int}(A) \subseteq U_A$, dan kedua inklusi memberikan $U_A = \text{Int}(A)$.

Kesamaan ini sekaligus menunjukkan kemaksimalan: $\text{Int}(A)$ terbuka dan termuat dalam A , sedangkan setiap himpunan terbuka $O \subseteq A$ merupakan salah satu anggota $\mathcal{U}_A$ dan karenanya memenuhi $O \subseteq \text{Int}(A)$. Karena $\text{Int}(A)$ terbuka, setiap titiknya merupakan titik interior dari $\text{Int}(A)$. Selalu juga berlaku $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Int}(A)$. Oleh sebab itu,

$$\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A).$$

Dalam contoh konkret, setiap titik di $(-2, -1)$ mempunyai interval kecil yang termuat dalam $[-2, -1]$, dan setiap titik di $(1, 4)$ mempunyai interval kecil yang termuat dalam $(1, 4]$. Tidak satu pun dari titik $-2, -1, 0, 4$ mempunyai bola Euklides yang termuat dalam A . Jadi $\text{Int}(A) = (-2, -1) \cup (1, 4)$. Hasil ini merupakan gabungan dua interval terbuka, sehingga menerapkan interior sekali lagi tidak mengubahnya, sesuai sifat idempoten.

Pemeriksaan H.61 Terbuka, tertutup, clopen, dan peran metrik. Pada himpunan dasar $X = \mathbb{R}$, bandingkan metrik Euklides d_E dengan metrik diskret

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y, \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Suatu himpunan disebut *tertutup* jika komplementnya terbuka, dan disebut *clopen* jika terbuka sekaligus tertutup.

1. Terhadap d_E , klasifikasikan masing-masing dari $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$, $\emptyset$, dan $\mathbb{R}$ sebagai hanya terbuka, hanya tertutup, clopen, atau tidak terbuka maupun tertutup. Berikan alasan berbasis bola atau komplement.
2. Ulangi klasifikasi terhadap d_D dan buktikan jawaban Anda untuk subhimpunan sebarang dari X .
3. Gunakan hasil klasifikasi untuk menyangkal kedua pernyataan: “himpunan tertutup tidak mungkin terbuka” dan “keterbukaan suatu subhimpunan hanya bergantung pada himpunan dasar, bukan pada metriknya.”

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam metrik Euklides, uji titik ujung. Untuk ketertutupannya, tulis komplement dan periksa apakah setiap titik komplement memiliki interval kecil di dalam komplement itu.

Tahap 2. Dalam metrik diskret, $B_D(x, 1/2) = \{x\}$. Gunakan bola singleton ini untuk setiap titik suatu subhimpunan, lalu terapkan argumen yang sama pada komplementnya.

Tahap 3. Himpunan kosong atau seluruh ruang menyangkal klaim pertama. Untuk klaim kedua, ikuti perubahan klasifikasi $[0, 1)$ ketika metrik diganti.

Jawaban. Terhadap d_E , $(0, 1)$ hanya terbuka, $[0, 1]$ hanya tertutup, $[0, 1)$ tidak terbuka maupun tertutup, sedangkan $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ bersifat clopen. Terhadap d_D , kelima himpunan tersebut—bahkan setiap subhimpunan $\mathbb{R}$ —bersifat clopen. Himpunan $\emptyset$ menyangkal klaim bahwa himpunan tertutup tidak mungkin terbuka, dan perubahan status $[0, 1)$ menyangkal ketidakbergantungan pada metrik.

Solusi. Dalam metrik Euklides, $(0, 1)$ terbuka karena setiap titiknya mempunyai interval kecil yang tetap berada di antara 0 dan 1. Himpunan ini tidak tertutup: komplementnya $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ tidak terbuka, sebab setiap bola di sekitar 0 memuat titik positif yang lebih kecil dari 1.

Himpunan $[0, 1]$ tertutup karena komplementnya $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ terbuka. Himpunan tersebut tidak terbuka karena tidak ada bola Euklides berjari-jari positif di sekitar 0 yang termuat di dalamnya. Himpunan $[0, 1)$ juga tidak terbuka karena alasan yang sama pada 0. Ia tidak tertutup karena komplementnya $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ tidak terbuka di titik 1. Terakhir, $\emptyset$ terbuka secara vakum dan $\mathbb{R}$ terbuka sebagai seluruh ruang; karena keduanya saling berkomplement, keduanya juga tertutup. Jadi keduanya bersifat clopen.

Dalam metrik diskret, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $B_D(x, 1/2) = \{x\}$. Jika $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $x \in A$, bola singleton ini termuat dalam A . Maka setiap A terbuka. Argumen tersebut berlaku pula pada $\mathbb{R} \setminus A$, sehingga komplement A terbuka dan A tertutup. Jadi setiap subhimpunan bersifat clopen terhadap d_D .

Karena $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ sekaligus tertutup dan terbuka, sifat “tertutup” bukan negasi sifat “terbuka”. Selain itu, himpunan yang sama, $[0, 1)$, tidak terbuka terhadap d_E tetapi terbuka—bahkan bersifat clopen—terhadap d_D . Jadi keterbukaan bergantung pada metrik yang dipasang pada himpunan dasar.

Lampiran I

Pendamping Mandiri Bab 9: Barisan dalam Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 9, bukan menggantikannya. Kerjakan dahulu eksplorasi dan kegiatan pada bab utama, kemudian buka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **solusi** secara bertahap. Empat puluh empat panduan mengikuti seluruh butir sumber dalam urutannya: tiga tugas eksplorasi, tiga belas tugas kegiatan, dan dua puluh delapan perintah latihan. Enam pemeriksaan penguasaan tambahan menguji pemindahan gagasan ke situasi baru.

Seluruh uraian pendamping dan pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau GVSU dan tidak menyalin ungkapan dari karya Anton Petrunin. Komponen asli ini memiliki identitas lisensi terpisah dan disediakan di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung, sedangkan solusi memperlihatkan urutan kuantor, pilihan indeks, atau contoh penyangkal yang diperlukan. Untuk pertanyaan yang sengaja bersifat intuitif, solusi berfungsi sebagai rubrik penilaian dan membedakan bukti formal dari pengamatan grafik. Dengan demikian, pembelajar tetap melakukan penyelidikan sebelum melihat penutupan matematisnya.

Panduan konsep dan tugas sumber

Enam belas panduan berikut mengikuti urutan sumber: tiga tugas eksplorasi pada Pendahuluan, empat langkah pembuktian ketunggalan limit, lima langkah arah balik teorema, dan empat tugas tentang fungsi $\sin(1/x)$. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan di bawah memparafrasakan sasaran sumber dan memberi rubrik keberhasilan. Teks panduan asli ini merupakan komponen terpisah yang tersedia di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan I.1 Barisan kebalikan dalam garis Euklides. Pada tugas pertama eksplorasi Pendahuluan, buktikan dari definisi bahwa barisan $(1/n)$ konvergen ke 0 dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Rubrik: mulai dengan $\epsilon > 0$, pilih satu bilangan bulat positif N , dan periksa pertidaksamaan jarak untuk setiap $n \geq N$.

Petunjuk. Tahap 1: sederhanakan $d_E(1/n, 0)$. Tahap 2: gunakan sifat Archimedes untuk memilih $N > 1/\epsilon$.

Jawaban. Barisan $(1/n)$ konvergen ke 0; pilihan $N > 1/\epsilon$ memenuhi definisi limit.

Solusi. Ambil $\epsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes, ada $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d_E(1/n, 0) = |1/n| = 1/n \leq 1/N < \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap toleransi positif terdapat indeks awal yang membuat semua suku sesudahnya berada dalam bola yang diminta. Inilah tepat definisi $1/n \rightarrow 0$.

Pemeriksaan I.2 Konvergensi dalam metrik taksi. Pada tugas kedua eksplorasi Pendahuluan, tentukan limit barisan $a_n = (1/n, 1/(n+1))$ dalam $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dan buktikan klaim tersebut langsung dari definisi. Rubrik: ajukan titik kandidat, hitung jarak taksi, lalu pilih N yang mengendalikan kedua koordinat sekaligus.

Petunjuk. Tahap 1: kedua koordinat menuju 0, jadi uji $(0, 0)$. Tahap 2: gunakan $1/n + 1/(n+1) < 2/n$ dan pilih $N > 2/\epsilon$.

Jawaban. Ya. Barisan tersebut konvergen ke $(0, 0)$ dalam metrik taksi.

Solusi. Ambil $\epsilon > 0$ dan pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $N > 2/\epsilon$. Untuk $n \geq N$,

$$d_T(a_n, (0, 0)) = \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \epsilon.$$

Pilihan N hanya bergantung pada ϵ , dan pertidaksamaan berlaku bagi seluruh ekor barisan. Karena itu $a_n \rightarrow (0, 0)$.

Pemeriksaan I.3 Barisan yang tidak konvergen dalam metrik diskret. Pada tugas ketiga eksplorasi Pendahuluan, tentukan apakah $b_n = (2n, n^2)$ konvergen dalam $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi metrik diskret. Rubrik: gunakan sebuah toleransi yang lebih kecil daripada 1, jelaskan akibatnya bagi ekor barisan, lalu bandingkan dengan bentuk eksplisit b_n .

Petunjuk. Tahap 1: dalam metrik diskret, $d(x, L) < 1/2$ memaksa $x = L$. Tahap 2: periksa apakah $(2n, n^2)$ pada akhirnya konstan.

Jawaban. Tidak. Barisan (b_n) divergen dalam metrik diskret karena tidak pernah menjadi konstan pada suatu ekor.

Solusi. Andaikan $b_n \rightarrow L$ untuk suatu $L \in \mathbb{R}^2$. Terapkan definisi limit dengan $\epsilon = 1/2$. Harus ada $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d(b_n, L) < 1/2$ bagi setiap $n \geq N$. Nilai metrik diskret hanya 0 atau 1, sehingga pertidaksamaan itu memaksa $b_n = L$ bagi seluruh $n \geq N$. Namun koordinat pertama b_n adalah $2n$, jadi $b_n \neq b_{n+1}$ untuk setiap n . Kontradiksi ini menunjukkan bahwa limit tidak ada.

Pemeriksaan I.4 Indeks untuk limit pertama. Pada langkah pertama kegiatan ketunggalan limit, jelaskan mengapa asumsi $a_n \rightarrow a$ menghasilkan bilangan bulat positif N dengan $d(a_n, a) < \epsilon/2$ untuk semua $n \geq N$. Rubrik: tunjukkan definisi yang dipakai dan toleransi yang disubstitusikan.

Petunjuk. Tahap 1: karena $\epsilon > 0$, juga $\epsilon/2 > 0$. Tahap 2: masukkan $\epsilon/2$ sebagai toleransi dalam definisi $a_n \rightarrow a$.

Jawaban. Pernyataan itu merupakan definisi konvergensi $a_n \rightarrow a$ yang diterapkan pada toleransi positif $\epsilon/2$.

Solusi. Definisi $a_n \rightarrow a$ menyatakan bahwa untuk setiap $\eta > 0$ terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d(a_n, a) < \eta$ apabila $n \geq N$. Ambil $\eta = \epsilon/2$, yang positif. Maka definisi langsung memberi N dengan sifat yang diminta. Indeks ini boleh bergantung pada ϵ , tetapi tidak pada n .

Pemeriksaan I.5 Indeks untuk limit kedua. Pada langkah kedua kegiatan ketunggalan limit, jelaskan mengapa asumsi $a_n \rightarrow a'$ menghasilkan bilangan bulat positif N' dengan $d(a_n, a') < \epsilon/2$ untuk semua $n \geq N'$. Rubrik: terapkan definisi pada limit yang kedua tanpa menganggap bahwa indeksnya harus sama dengan indeks untuk a .

Petunjuk. Tahap 1: gunakan kembali toleransi $\epsilon/2$. Tahap 2: definisi konvergensi boleh menghasilkan indeks baru N' .

Jawaban. Pernyataan itu mengikuti dari $a_n \rightarrow a'$ dengan mengambil toleransi $\epsilon/2$.

Solusi. Karena $a_n \rightarrow a'$, untuk setiap $\eta > 0$ ada $N' \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d(a_n, a') < \eta$ bagi semua $n \geq N'$. Pilih $\eta = \epsilon/2$. Kita memperoleh indeks N' yang diperlukan. Tidak ada alasan bahwa $N = N'$; langkah berikutnya

akan menyatukan kedua ambang tersebut.

Pemeriksaan I.6 Menyatukan dua ambang indeks. Pada langkah ketiga kegiatan ketunggalan limit, tetapkan $m = \max\{N, N'\}$ dan tentukan apa yang dapat disimpulkan tentang $d(a_m, a)$ serta $d(a_m, a')$. Rubrik: hubungkan definisi maksimum dengan kedua syarat ekor yang telah diperoleh.

Petunjuk. Tahap 1: dari definisi maksimum, $m \geq N$ dan $m \geq N'$. Tahap 2: terapkan masing-masing kesimpulan hanya pada ambang yang sesuai.

Jawaban. Kedua pertidaksamaan berlaku sekaligus: $d(a_m, a) < \epsilon/2$ dan $d(a_m, a') < \epsilon/2$.

Solusi. Karena $m = \max\{N, N'\}$, berlaku $m \geq N$. Sifat yang berasal dari $a_n \rightarrow a$ karenanya memberi $d(a_m, a) < \epsilon/2$. Demikian pula $m \geq N'$, maka sifat yang berasal dari $a_n \rightarrow a'$ memberi $d(a_m, a') < \epsilon/2$. Pemilihan maksimum memungkinkan satu suku barisan memenuhi kedua kendali secara bersamaan.

Pemeriksaan I.7 Menuntaskan ketunggalan limit. Pada langkah terakhir kegiatan ketunggalan limit, gunakan pertidaksamaan segitiga untuk memperoleh $d(a, a') < \epsilon$, lalu jelaskan mengapa hal itu memaksa $a = a'$. Rubrik: tulis rantai pertidaksamaan dan tutup argumen yang memakai $\epsilon > 0$ sebarang.

Petunjuk. Tahap 1: sisipkan titik a_m di antara a dan a' . Tahap 2: jika $d(a, a') > 0$, coba pilih $\epsilon = d(a, a')/2$.

Jawaban. Pertidaksamaan segitiga memberi $d(a, a') < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$; maka $d(a, a') = 0$ dan sifat definit positif metrik memberi $a = a'$.

Solusi. Dengan suku a_m dari langkah sebelumnya,

$$d(a, a') \leq d(a, a_m) + d(a_m, a') < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$. Andaikan $r = d(a, a') > 0$; memilih $\epsilon = r/2$ akan memberi $r < r/2$, suatu kontradiksi. Jadi $d(a, a') = 0$, dan aksioma metrik menyatakan $a = a'$. Dengan demikian limit barisan dalam ruang metrik bersifat tunggal.

Pemeriksaan I.8 Meniadakan definisi kekontinuan. Pada langkah pertama arah balik teorema, andaikan f tidak kontinu di a dan tuliskan bentuk berkuantor yang diperoleh. Rubrik: nyatakan satu toleransi keluaran positif yang tetap, lalu untuk setiap radius masukan hasilkan sebuah titik yang melanggar implikasi kekontinuan.

Petunjuk. Tahap 1: mulai dari $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$. Tahap 2: ketika meniadakan implikasi, syarat jarak masukan menjadi benar dan kesimpulan jarak keluaran menjadi salah.

Jawaban. Ada $\epsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $x \in X$ dengan $d_X(x, a) < \delta$ dan $d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon_0$.

Solusi. Kekontinuan di a berarti

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Penyangkalannya adalah

$$\exists \epsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X, \quad d_X(x, a) < \delta \text{ dan } d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Toleransi ϵ_0 dipilih sekali dan kemudian tetap; titik pelanggar boleh bergantung pada δ .

Pemeriksaan I.9 Memilih ambang bilangan bulat. Pada sublangkah pertama konstruksi barisan penyangkal, jelaskan mengapa terdapat $K \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1/K < \epsilon_0$, untuk toleransi tetap $\epsilon_0 > 0$ dari ketakkontinuan. Rubrik: sebutkan sifat bilangan real yang menjamin pilihan tersebut.

Petunjuk. Tahap 1: ubah sasaran menjadi $K > 1/\epsilon_0$. Tahap 2: gunakan sifat Archimedes untuk menemukan bilangan bulat positif yang lebih besar daripada bilangan real itu.

Jawaban. Sifat Archimedes memberi $K \in \mathbb{Z}^+$ dengan $K > 1/\epsilon_0$, sehingga $1/K < \epsilon_0$.

Solusi. Karena $\epsilon_0 > 0$, bilangan $1/\epsilon_0$ terdefinisi. Sifat Archimedes menyatakan bahwa untuk setiap bilangan real terdapat bilangan bulat positif yang lebih besar daripadanya. Pilih $K \in \mathbb{Z}^+$ dengan $K > 1/\epsilon_0$. Membalik kedua bilangan positif membalik arah pertidaksamaan, sehingga $1/K < \epsilon_0$.

Pemeriksaan I.10 Memilih suku-suku penyangkal. Pada sublangkah kedua konstruksi, untuk setiap $k > K$ jelaskan mengapa dapat dipilih $a_k \in B(a, 1/k)$ dengan $d_Y(f(a_k), f(a)) \geq \epsilon_0$. Rubrik: terapkan bentuk berkuantor ketakkontinuan pada satu radius positif yang bergantung pada k .

Petunjuk. Tahap 1: untuk setiap $k \in \mathbb{Z}^+$, bilangan $\delta_k = 1/k$ positif. Tahap 2: substitusikan $\delta = \delta_k$ ke pernyataan panduan 08.

Jawaban. Negasi kekontinuan, diterapkan dengan $\delta = 1/k$, menjamin titik a_k yang berada dalam $B(a, 1/k)$ tetapi citranya berjarak sekurang-kurangnya ϵ_0 dari $f(a)$.

Solusi. Untuk $k > K$, ambil $\delta = 1/k > 0$. Dari bentuk ketakkontinuan diperoleh suatu $a_k \in X$ yang memenuhi

$$d_X(a_k, a) < 1/k \quad \text{dan} \quad d_Y(f(a_k), f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Pertidaksamaan pertama persis berarti $a_k \in B(a, 1/k)$. Pilihan boleh berbeda untuk setiap k ; bersama-sama pilihan itu membentuk ekor barisan yang dibutuhkan.

Pemeriksaan I.11 Membuktikan barisan penyangkal menuju titik pusat. Pada sublangkah ketiga konstruksi, pilih sembarang $a_k \in B(a, 1/k)$ untuk $k \leq K$, lalu buktikan bahwa barisan lengkap (a_n) konvergen ke a . Rubrik: mulai dengan toleransi baru, pilih indeks awal, dan gunakan kendali $d_X(a_n, a) < 1/n$.

Petunjuk. Tahap 1: untuk $\eta > 0$, pilih $N > \max\{K, 1/\eta\}$. Tahap 2: bagi $n \geq N$, bandingkan $1/n$ dengan $1/N$ dan η .

Jawaban. Ya. Karena $d_X(a_n, a) < 1/n$ dan $1/n \rightarrow 0$, berlaku $a_n \rightarrow a$; pilihan berhingga untuk $n \leq K$ tidak memengaruhi limit.

Solusi. Ambil $\eta > 0$. Pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > \max\{K, 1/\eta\}$. Untuk setiap $n \geq N$, konstruksi memberi $a_n \in B(a, 1/n)$, sehingga

$$d_X(a_n, a) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \eta.$$

Jadi definisi limit terpenuhi dan $a_n \rightarrow a$. Suku-suku awal hanya memastikan bahwa fungsi $n \mapsto a_n$ terdefinisi untuk seluruh $n \in \mathbb{Z}^+$; jumlah suku awal yang berhingga tidak menentukan konvergensi.

Pemeriksaan I.12 Kontradiksi pada barisan citra. Pada sublangkah terakhir konstruksi, jelaskan mengapa $f(a_n)$ tidak konvergen ke $f(a)$, kemudian tarik kesimpulan tentang asumsi bahwa f tidak kontinu di a . Rubrik: gunakan toleransi keluaran tetap ϵ_0 dan hubungkan hasilnya dengan hipotesis sekuensial.

Petunjuk. Tahap 1: untuk setiap $n > K$, $d_Y(f(a_n), f(a)) \geq \epsilon_0$. Tahap 2: bandingkan fakta ini dengan syarat limit pada toleransi ϵ_0 .

Jawaban. Barisan citra gagal masuk dan tetap berada dalam bola $B(f(a), \epsilon_0)$. Ini bertentangan dengan hipotesis bahwa setiap $a_n \rightarrow a$ menghasilkan $f(a_n) \rightarrow f(a)$; karena itu f harus kontinu di a .

Solusi. Untuk seluruh $n > K$, konstruksi memenuhi $d_Y(f(a_n), f(a)) \geq \epsilon_0$. Karena itu, berapa pun indeks awal yang dipilih, ada suku setelah indeks tersebut yang tidak berjarak kurang dari ϵ_0 terhadap $f(a)$. Definisi $f(a_n) \rightarrow f(a)$ gagal. Di sisi lain, panduan 11 menunjukkan $a_n \rightarrow a$. Ini menyangkal hipotesis sekuensial yang diasumsikan benar bagi setiap barisan. Maka asumsi sementara bahwa f tidak kontinu di a salah, sehingga f kontinu di a .

Pemeriksaan I.13 Intuisi grafik untuk osilasi di dekat nol. Pada tugas pertama kegiatan tentang $f(x) = \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$, gambarkan grafik pada interval kecil di sekitar 0 dan catat intuisi Anda tentang keberadaan limit di 0. Rubrik: gambarkan osilasi yang semakin rapat, jelaskan pengamatan dengan kata-kata, dan nyatakan secara jujur bahwa grafik sendiri bukan bukti formal.

Petunjuk. Tahap 1: plot dengan beberapa jendela yang makin sempit dan cukup banyak titik sampel. Tahap 2: perhatikan apakah nilai fungsi mengerucut ke satu tinggi atau terus mendekati banyak tinggi.

Jawaban. Intuisi yang didukung grafik adalah bahwa limit di 0 tidak ada: grafik terus berosilasi antara nilai dekat -1 dan 1 seberapa pun sempit jendelanya. Tugas ini menerima penjelasan intuitif lain yang jujur terhadap gambar.

Solusi. Rubrik lengkap meminta grafik yang memperlihatkan amplitudo tetap sekitar 1 dan frekuensi osilasi yang meningkat ketika $x \rightarrow 0$. Penjelasan yang baik menyatakan bahwa tidak tampak satu nilai yang didekati semua keluaran. Pengamatan ini bukan bukti: resolusi gambar dan pemilihan sampel dapat menipu. Butir-butir berikutnya mengubah intuisi itu menjadi penyangkal sekuensial dengan memilih titik yang nilainya tepat 1 .

Pemeriksaan I.14 Menyelesaikan persamaan nilai maksimum sinus. Pada tugas kedua kegiatan tentang $\sin(1/x)$, tentukan semua masukan x yang memenuhi $f(x) = 1$. Rubrik: selesaikan dahulu persamaan sinus untuk $1/x$, balikkan hasilnya, dan periksa nilai khusus $x = 0$.

Petunjuk. Tahap 1: $\sin t = 1$ tepat ketika $t = \pi/2 + 2\pi j$ untuk $j \in \mathbb{Z}$. Tahap 2: substitusikan $t = 1/x$.

Jawaban. Semua dan hanya masukan $x = 1/(\pi/2 + 2\pi j) = 2/((4j + 1)\pi)$, dengan $j \in \mathbb{Z}$, memenuhi $f(x) = 1$. Titik $x = 0$ tidak termasuk karena $f(0) = 0$.

Solusi. Untuk $x \neq 0$, persamaan $f(x) = 1$ setara dengan $\sin(1/x) = 1$. Solusi umum $\sin t = 1$ adalah $t = \pi/2 + 2\pi j$, $j \in \mathbb{Z}$. Karena penyebut ini tidak nol bagi bilangan bulat j , pembalikan sah dan memberi

$$x = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi j} = \frac{2}{(4j + 1)\pi}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Substitusi kembali menghasilkan $\sin(\pi/2 + 2\pi j) = 1$. Sementara itu, definisi bercabang menetapkan $f(0) = 0$, jadi 0 bukan solusi.

Pemeriksaan I.15 Membangun barisan yang citranya tetap satu. Pada tugas ketiga kegiatan tentang $\sin(1/x)$, gunakan himpunan solusi sebelumnya untuk membangun barisan $a_n \rightarrow 0$ dengan $f(a_n) = 1$ bagi setiap n . Rubrik: berikan rumus eksplisit, buktikan limit masukan, dan verifikasi nilai fungsi.

Petunjuk. Tahap 1: pilih parameter bilangan bulat $j = n$ dalam panduan 14. Tahap 2: penyebut tumbuh tanpa batas, sedangkan $1/a_n = 2\pi n + \pi/2$.

Jawaban. Salah satu pilihan adalah $a_n = 2/((4n+1)\pi)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Barisan ini menuju 0 dan memenuhi $f(a_n) = 1$ untuk setiap n .

Solusi. Tetapkan $a_n = 2/((4n+1)\pi)$. Karena penyebut positif dan menuju tak hingga, $a_n \rightarrow 0$. Secara langsung, untuk $\epsilon > 0$, pilih N cukup besar sehingga $2/((4N+1)\pi) < \epsilon$; maka $0 < a_n \leq a_N < \epsilon$ bagi $n \geq N$. Selain itu,

$$f(a_n) = \sin(1/a_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Jadi rumus tersebut memenuhi kedua syarat yang diminta.

Pemeriksaan I.16 Menyangkal kekontinuan dengan satu barisan. Pada tugas terakhir kegiatan tentang $\sin(1/x)$, gunakan barisan dari butir sebelumnya untuk menentukan kekontinuan f di 0 . Rubrik: bandingkan limit barisan masukan, limit barisan citra, dan nilai $f(0)$, lalu terapkan teorema pencirian sekuensial dengan arah logis yang benar.

Petunjuk. Tahap 1: $a_n \rightarrow 0$, tetapi barisan $(f(a_n))$ konstan bernilai 1 . Tahap 2: bandingkan $\lim f(a_n)$ dengan $f(0)$.

Jawaban. Fungsi f tidak kontinu di 0 , sebab $a_n \rightarrow 0$ tetapi $f(a_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(0)$.

Solusi. Panduan 15 memberi barisan $a_n \rightarrow 0$ dengan $f(a_n) = 1$ untuk semua n . Maka $\lim f(a_n) = 1$, sedangkan definisi fungsi memberi $f(0) = 0$. Jika f kontinu di 0 , teorema pencirian sekuensial akan memaksa setiap barisan yang menuju 0 mempunyai citra yang menuju $f(0)$. Barisan ini melanggar keharusan tersebut, jadi f tidak kontinu di 0 . Satu barisan penyangkal sudah cukup; tidak perlu memeriksa semua barisan.

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Empat belas panduan berikut berkorespondensi, dalam urutan sumber, dengan empat belas perintah pertama pada bagian latihan penutup Bab 9. ID panduan berlanjut dari o003-c90-ch09-guide-17 sampai o003-c90-ch09-guide-30, sesudah enam belas perintah pembelajar pada bagian-bagian sebelumnya dalam bab ini. Materi pendamping ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri, bukan jawaban yang disediakan oleh penulis karya sumber.

Pemeriksaan I.17 Barisan $1 + 1/n$ pada garis real. Pada perintah pertama latihan penutup, tentukan dengan bukti apakah $a_n = 1 + 1/n$ konvergen atau divergen dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. *Rubrik.* Nyatakan calon limitnya dan ubah syarat $d_E(a_n, a) < \epsilon$ menjadi syarat sederhana pada n .

Petunjuk. *Langkah 1.* Coba $a = 1$ dan hitung $|a_n - a|$ secara tepat.

Langkah 2. Untuk $\epsilon > 0$, gunakan sifat Archimedes untuk memilih bilangan bulat $N > 1/\epsilon$.

Jawaban. Barisan tersebut konvergen ke 1, sebab $d_E(a_n, 1) = 1/n$ dapat dibuat lebih kecil daripada setiap $\epsilon > 0$.

Solusi. Tetapkan $\epsilon > 0$. Pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d_E(a_n, 1) = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Jadi definisi konvergensi dipenuhi dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Pemeriksaan I.18 Barisan $(2, n)$ dalam metrik maksimum. Pada perintah kedua latihan penutup, tentukan dengan bukti apakah $a_n = (2, n)$ konvergen atau divergen dalam $(\mathbb{R}^2, d_M)$. *Rubrik.* Andaikan ada calon limit (u, v) dan perhatikan bahwa jarak maksimum sekurang-kurangnya sebesar selisih koordinat kedua.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk sebarang $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tuliskan $d_M((2, n), (u, v))$.

Langkah 2. Pilih n cukup besar sehingga $|n - v| > 1$; hal ini bertentangan dengan syarat konvergensi untuk $\epsilon = 1$.

Jawaban. Barisan tersebut divergen. Koordinat keduanya menjauh tanpa batas, dan $d_M((2, n), (u, v)) \geq |n - v|$ untuk setiap calon limit (u, v) .

Solusi. Andaikan, demi kontradiksi, bahwa $(2, n)$ konvergen ke suatu $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Definisi metrik maksimum memberi

$$d_M((2, n), (u, v)) = \max\{|2 - u|, |n - v|\} \geq |n - v|.$$

Konvergensi dengan $\epsilon = 1$ menuntut adanya N sehingga jarak di atas kurang dari 1 untuk semua $n \geq N$. Namun kita dapat memilih $n \geq N$ sekaligus $n > v + 1$, sehingga $|n - v| > 1$. Ini kontradiksi. Tidak ada calon limit, jadi barisan tersebut divergen.

Pemeriksaan I.19 Barisan fungsi x/n dalam metrik supremum. Pada perintah ketiga latihan penutup, X adalah himpunan fungsi bernilai real pada $[0, 1]$ dengan metrik supremum, dan $a_n(x) = x/n$. Tentukan dengan bukti apakah (a_n) konvergen. *Rubrik.* Bandingkan setiap a_n dengan fungsi nol dan hitung supremum selisihnya pada seluruh interval.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika 0_X menyatakan fungsi nol, maka $d(a_n, 0_X) = \sup\{x/n \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

Langkah 2. Supremum itu dicapai pada $x = 1$; gunakan hasil perintah pertama untuk bilangan yang diperoleh.

Jawaban. Barisan fungsi tersebut konvergen ke fungsi nol dalam metrik supremum, karena $d(a_n, 0_X) = 1/n \rightarrow 0$.

Solusi. Untuk setiap $x \in [0, 1]$, berlaku $|a_n(x) - 0_X(x)| = x/n$. Fungsi $x \mapsto x/n$ meningkat pada $[0, 1]$, sehingga

$$d(a_n, 0_X) = \sup \left\{ \frac{x}{n} \mid x \in [0, 1] \right\} = \frac{1}{n}.$$

Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Untuk $n \geq N$, jarak ini kurang dari ϵ . Maka $a_n \rightarrow 0_X$ dalam ruang metrik fungsi tersebut; bahkan konvergensinya seragam pada $[0, 1]$.

Pemeriksaan I.20 Mendekati supremum dengan barisan dari himpunan. Pada perintah keempat latihan penutup, misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas. Bangun barisan (a_n) di A yang konvergen ke $\sup(A)$. *Rubrik.* Untuk setiap n , gunakan bahwa bilangan yang sedikit lebih kecil daripada supremum tidak dapat menjadi batas atas. Syarat tak kosong tersirat oleh keberadaan supremum real dan dibuat eksplisit di sini.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $s = \sup(A)$. Mengapa $s - 1/n$ bukan batas atas dari A ?

Langkah 2. Pilih $a_n \in A$ dengan $s - 1/n < a_n \leq s$, lalu gunakan prinsip apit.

Jawaban. Untuk setiap n , pilih $a_n \in A$ sehingga $s - 1/n < a_n \leq s$, dengan $s = \sup(A)$. Maka $|a_n - s| < 1/n$, sehingga $a_n \rightarrow s$.

Solusi. Tuliskan $s = \sup(A)$. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, bilangan $s - 1/n$ lebih kecil daripada batas atas terkecil s , jadi bukan batas atas dari A . Karena itu ada $a_n \in A$ dengan $a_n > s - 1/n$. Di sisi lain, $a_n \leq s$ karena s batas atas. Jadi

$$0 \leq s - a_n < \frac{1}{n}.$$

Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka $|a_n - s| = s - a_n < 1/n \leq 1/N < \epsilon$. Dengan demikian $\lim a_n = \sup(A)$.

Pemeriksaan I.21 Mendekati infimum dengan barisan dari himpunan. Pada perintah kelima latihan penutup, misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di bawah. Bangun barisan (a_n) di A yang konvergen ke $\inf(A)$. *Rubrik.* Terapkan argumen supremum secara terbalik: bilangan yang sedikit lebih besar daripada infimum bukan batas bawah.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tetapkan $t = \inf(A)$. Untuk setiap n , cari $a_n \in A$ dengan $t \leq a_n < t + 1/n$.

Langkah 2. Tunjukkan langsung bahwa $|a_n - t| < 1/n$.

Jawaban. Untuk $t = \inf(A)$, pilih $a_n \in A$ dengan $t \leq a_n < t + 1/n$. Maka $a_n \rightarrow t$.

Solusi. Tuliskan $t = \inf(A)$. Bilangan $t + 1/n$ lebih besar daripada batas bawah terbesar t , sehingga bukan batas bawah dari A . Jadi ada $a_n \in A$ dengan $a_n < t + 1/n$. Karena t sendiri batas bawah, $t \leq a_n$. Akibatnya

$$0 \leq a_n - t < \frac{1}{n}.$$

Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka $|a_n - t| < 1/n < \epsilon$. Jadi $\lim a_n = \inf(A)$.

Pemeriksaan I.22 Supremum dan infimum tidak harus menjadi anggota. Pada perintah keenam latihan penutup, putuskan apakah limit yang dibangun untuk supremum atau infimum harus berada dalam A , lalu jelaskan. *Rubrik.* Satu interval terbuka terbatas dapat memberikan contoh untuk kedua ujung sekaligus.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ambil $A = (0, 1)$.

Langkah 2. Hitung $\inf(A)$ dan $\sup(A)$, lalu periksa apakah kedua bilangan itu merupakan anggota A .

Jawaban. Tidak. Untuk $A = (0, 1)$, supremumnya 1 dan infimumnya 0, tetapi keduanya tidak berada dalam A .

Solusi. Ambil $A = (0, 1)$. Himpunan ini tak kosong serta terbatas di atas dan di bawah, dengan $\sup(A) = 1$ dan $\inf(A) = 0$. Barisan $a_n = 1 - 1/(n+1)$ seluruhnya berada dalam A dan konvergen ke 1; barisan $b_n = 1/(n+1)$ juga seluruhnya berada dalam A dan konvergen ke 0. Akan tetapi, $0, 1 \notin A$. Jadi limit barisan dari A tidak harus menjadi anggota A ; keanggotaan limit memerlukan sifat tambahan seperti ketertutupan

A.

Pemeriksaan I.23 Bola yang sedikit lebih besar daripada jarak harus memotong himpunan. Pada perintah ketujuh latihan penutup, misalkan $m = d(x, A)$ dan $B_n = B(x; m + 1/n)$. Jelaskan mengapa $B_n \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$. *Rubrik.* Gunakan sifat pendefinisi infimum, bukan anggapan bahwa jarak minimum selalu dicapai.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $B_n \cap A = \emptyset$, apa yang dapat disimpulkan tentang $d(x, a)$ untuk setiap $a \in A$?

Langkah 2. Bandingkan kesimpulan itu dengan fakta bahwa m adalah batas bawah terbesar dari himpunan semua jarak $d(x, a)$.

Jawaban. Karena $m + 1/n > m$, bilangan itu bukan batas bawah bagi semua $d(x, a)$. Jadi ada $a \in A$ dengan $d(x, a) < m + 1/n$, yakni $a \in B_n \cap A$.

Solusi. Tetapkan $n \in \mathbb{Z}^+$. Karena $m = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$, setiap bilangan yang lebih besar daripada m , khususnya $m + 1/n$, tidak dapat menjadi batas bawah dari himpunan jarak tersebut. Maka terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $d(x, a) < m + 1/n$. Menurut definisi bola terbuka, $a \in B(x; m + 1/n) = B_n$. Jadi $a \in B_n \cap A$, dan irisan itu tak kosong. Argumen ini tidak menganggap adanya titik A yang tepat berjarak m dari x .

Pemeriksaan I.24 Jarak ke himpunan sebagai limit jarak ke titik. Pada perintah kedelapan latihan penutup, pilih $a_n \in B_n \cap A$. Tentukan sifat barisan ini dan jelaskan mengapa konstruksi tersebut membuktikan bahwa ada barisan di A dengan $\lim d(x, a_n) = d(x, A)$. *Rubrik.* Apit setiap jarak $d(x, a_n)$ di antara m dan $m + 1/n$; jangan menyimpulkan bahwa (a_n) sendiri harus konvergen.

Petunjuk. *Langkah 1.* Keanggotaan $a_n \in A$ memberi satu pertidaksamaan dari definisi infimum.

Langkah 2. Keanggotaan $a_n \in B_n$ memberi pertidaksamaan lainnya. Kurangkan m dan gunakan $1/n \rightarrow 0$.

Jawaban. Barisan memenuhi $a_n \in A$ dan $m \leq d(x, a_n) < m + 1/n$. Karena itu $d(x, a_n) \rightarrow m = d(x, A)$.

Solusi. Untuk setiap n , pilihan $a_n \in B_n \cap A$ memastikan $a_n \in A$. Karena m adalah infimum dari semua jarak $d(x, a)$ dengan $a \in A$, berlaku $m \leq d(x, a_n)$. Karena $a_n \in B_n$, juga berlaku $d(x, a_n) < m + 1/n$. Jadi

$$0 \leq d(x, a_n) - m < \frac{1}{n}.$$

Ruas kanan menuju nol, sehingga prinsip apit memberi $d(x, a_n) \rightarrow m = d(x, A)$. Inilah tepat kesimpulan teorema pada sumber. Yang konvergen di sini adalah barisan bilangan real $(d(x, a_n))$; titik-titik a_n sendiri belum tentu mempunyai limit dalam X .

Pemeriksaan I.25 Konvergensi subruang memberi konvergensi ruang ambien. Pada perintah kesembilan latihan penutup, (Y, d') adalah subruang dari (X, d) , semua a_n dan a berada dalam Y , dan $a_n \rightarrow a$ dalam Y . Buktikan bahwa $a_n \rightarrow a$ dalam X . *Rubrik.* Gunakan bahwa metrik subruang adalah pembatasan metrik ambien: $d'(y, z) = d(y, z)$ untuk $y, z \in Y$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Tuliskan syarat ϵ untuk konvergensi dalam (Y, d') .

Langkah 2. Ganti setiap $d'(a_n, a)$ dengan $d(a_n, a)$; indeks N yang sama bekerja di ruang ambien.

Jawaban. Benar. Karena $d'(a_n, a) = d(a_n, a)$ untuk semua n , syarat konvergensi di subruang dan di ruang ambien identik ketika limitnya berada dalam Y .

Solusi. Ambil $\epsilon > 0$. Dari $a_n \rightarrow a$ dalam (Y, d') , terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d'(a_n, a) < \epsilon$ untuk semua $n \geq N$. Metrik subruang d' adalah pembatasan d , dan $a_n, a \in Y$, maka

$$d(a_n, a) = d'(a_n, a) < \epsilon \quad (n \geq N).$$

Ini adalah definisi $a_n \rightarrow a$ dalam (X, d) . Jadi konvergensi subruang menuju titik subruang selalu memberi konvergensi ambien menuju titik yang sama.

Pemeriksaan I.26 Konvers subruang dan limit ambien di luar subruang. Pada perintah kesepuluh latihan penutup, jelaskan mengapa konvers harfiah perintah sebelumnya benar ketika semua hipotesisnya, termasuk $a \in Y$, dipertahankan. Kemudian, untuk barisan rasional (a_n) yang konvergen ke $\sqrt{2}$ dalam $\mathbb{R}$, buktikan sifat Cauchy yang diminta dan tentukan apakah barisan itu konvergen dalam subruang $\mathbb{Q}$. *Rubrik.* Bedakan tegas dua klaim: konvers dengan limit di subruang memang benar, sedangkan contoh $\sqrt{2}$ mempunyai limit ambien di luar subruang.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk konvers harfiah, gunakan lagi $d' = d|_{Y \times Y}$. Untuk sifat Cauchy, pilih N sehingga $|a_n - \sqrt{2}| < \epsilon/2$ jika $n > N$.

Langkah 2. Jika barisan tersebut konvergen ke suatu $q \in \mathbb{Q}$ dalam subruang, gunakan perintah sebelumnya dan ketunggalan limit di $\mathbb{R}$.

Jawaban. Konvers harfiahnya benar: jika limit ambien a berada dalam Y , jarak subruang dan ambien sama. Barisan rasional yang menuju $\sqrt{2}$ bersifat Cauchy, tetapi tidak konvergen dalam $\mathbb{Q}$, sebab satu-satunya limit ambiennya adalah bilangan irasional $\sqrt{2}$.

Solusi. Pertama, pertahankan semua hipotesis bagian sebelumnya dan andaikan $a_n \rightarrow a$ dalam X , dengan $a_n, a \in Y$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, akhirnya $d(a_n, a) < \epsilon$. Karena $d'(a_n, a) = d(a_n, a)$, pertidaksamaan yang sama membuktikan $a_n \rightarrow a$ dalam Y . Jadi konvers harfiah itu benar.

Sekarang misalkan $a_n \in \mathbb{Q}$ dan $a_n \rightarrow \sqrt{2}$ dalam $\mathbb{R}$. Diberikan $\epsilon > 0$, pilih N sehingga $|a_k - \sqrt{2}| < \epsilon/2$ untuk setiap $k > N$. Jika $n, m > N$, pertidaksamaan segitiga memberi

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \sqrt{2}| + |a_m - \sqrt{2}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Jadi barisan itu Cauchy.

Andaikan barisan tersebut konvergen dalam $\mathbb{Q}$ ke suatu $q \in \mathbb{Q}$. Perintah sebelumnya akan membuatnya konvergen dalam $\mathbb{R}$ ke q . Namun di $\mathbb{R}$ barisan yang sama sudah konvergen ke $\sqrt{2}$, dan limit dalam ruang metrik tunggal. Maka harus berlaku $q = \sqrt{2}$, bertentangan dengan $q \in \mathbb{Q}$. Jadi barisan itu tidak konvergen dalam $\mathbb{Q}$. Contoh ini tidak membantah konvers harfiah, karena limit ambiennya tidak berada dalam subruang.

Pemeriksaan I.27 Limit kelipatan skalar barisan. Pada perintah ke-11 latihan penutup, jika $a_n \rightarrow A$ dalam $\mathbb{R}$, buktikan bahwa $ka_n \rightarrow kA$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$. *Rubrik.* Pisahkan kasus $k = 0$; untuk $k \neq 0$, ubah toleransi keluaran menjadi $\epsilon/|k|$ bagi barisan semula.

Petunjuk. *Langkah 1.* Hitung $|ka_n - kA| = |k| |a_n - A|$.

Langkah 2. Jika $k \neq 0$, terapkan konvergensi $a_n \rightarrow A$ dengan toleransi $\epsilon/|k|$.

Jawaban. Benar. Kasus $k = 0$ menghasilkan barisan nol; untuk $k \neq 0$, syarat $|a_n - A| < \epsilon/|k|$ memberi $|ka_n - kA| < \epsilon$.

Solusi. Tuliskan $A = \lim a_n$. Jika $k = 0$, setiap suku ka_n dan calon limit kA sama dengan nol, jadi konvergensi langsung berlaku. Andaikan $k \neq 0$ dan tetapkan $\epsilon > 0$. Karena $a_n \rightarrow A$, ada N sehingga $|a_n - A| < \epsilon/|k|$ untuk $n \geq N$. Maka

$$|ka_n - kA| = |k| |a_n - A| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

Jadi $\lim ka_n = k \lim a_n$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

Pemeriksaan I.28 Limit jumlah dua barisan. Pada perintah ke-12 latihan penutup, jika $a_n \rightarrow A$ dan $b_n \rightarrow B$, buktikan bahwa $a_n + b_n \rightarrow A + B$. *Rubrik.* Bagi toleransi menjadi dua bagian dan gunakan pertidaksamaan segitiga.

Petunjuk. *Langkah 1.* Cari indeks setelah mana $|a_n - A| < \epsilon/2$ dan indeks setelah mana $|b_n - B| < \epsilon/2$.

Langkah 2. Ambil maksimum kedua indeks dan taksir $|(a_n + b_n) - (A + B)|$.

Jawaban. Benar. Setelah kedua selisih masing-masing kurang dari $\epsilon/2$, pertidaksamaan segitiga membuat selisih jumlah kurang dari ϵ .

Solusi. Tetapkan $\epsilon > 0$. Pilih N_a sehingga $|a_n - A| < \epsilon/2$ untuk $n \geq N_a$, dan pilih N_b sehingga $|b_n - B| < \epsilon/2$ untuk $n \geq N_b$. Tetapkan $N = \max\{N_a, N_b\}$. Untuk $n \geq N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Maka $\lim(a_n + b_n) = A + B = \lim a_n + \lim b_n$.

Pemeriksaan I.29 Setiap barisan real konvergen terbatas. Pada perintah ke-13 latihan penutup, buktikan bahwa jika $a_n \rightarrow A$, maka ada $M > 0$ dengan $|a_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}^+$. *Rubrik.* Konvergensi mengendalikan semua suku sesudah suatu indeks; masukkan sejumlah berhingga suku awal ke dalam satu maksimum.

Petunjuk. *Langkah 1.* Pilih N sehingga $|a_n - A| < 1$ untuk $n \geq N$; simpulkan $|a_n| < |A| + 1$ pada ekor barisan.

Langkah 2. Ambil maksimum dari $|A| + 1$, bilangan 1, dan nilai mutlak semua suku sebelum N .

Jawaban. Benar. Ekor barisan dibatasi oleh $|A| + 1$, sedangkan sejumlah berhingga suku awal mempunyai maksimum nilai mutlak; maksimum kedua batas itu membatasi seluruh barisan.

Solusi. Karena $a_n \rightarrow A$, terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $|a_n - A| < 1$ untuk semua $n \geq N$. Pertidaksamaan segitiga memberi

$$|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < |A| + 1 \quad (n \geq N).$$

Tetapkan

$$M = \max\{1, |A| + 1, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|\}.$$

Jika $N = 1$, daftar suku awal itu kosong dan cukup ambil $M = \max\{1, |A| + 1\}$. Dalam semua kasus, $M > 0$ dan $|a_n| \leq M$ baik untuk suku awal maupun untuk $n \geq N$. Jadi barisan konvergen tersebut terbatas.

Pemeriksaan I.30 Limit hasil kali dua barisan. Pada perintah ke-14 latihan penutup, jika $a_n \rightarrow A$ dan $b_n \rightarrow B$, buktikan bahwa $a_n b_n \rightarrow AB$. *Rubrik.* Gunakan hasil bahwa (a_n) terbatas dan uraikan selisih hasil kali menjadi dua suku yang dapat dikendalikan secara terpisah.

Petunjuk. *Langkah 1.* Pilih $M \geq 1$ dengan $|a_n| \leq M$, lalu gunakan $a_n b_n - AB = a_n(b_n - B) + B(a_n - A)$.

Langkah 2. Buat $|b_n - B| < \epsilon/(2M)$ dan $|a_n - A| < \epsilon/(2(|B| + 1))$ secara serentak.

Jawaban. Benar. Keterbatasan $|a_n| \leq M$ dan uraian $|a_n b_n - AB| \leq M|b_n - B| + |B||a_n - A|$ membuat kedua suku menuju nol.

Solusi. Menurut perintah sebelumnya, ada $M \geq 1$ sehingga $|a_n| \leq M$ untuk semua n . Tetapkan $\epsilon > 0$. Dari $b_n \rightarrow B$, pilih N_b sehingga $|b_n - B| < \epsilon/(2M)$ jika $n \geq N_b$. Dari $a_n \rightarrow A$, pilih N_a sehingga $|a_n - A| < \epsilon/(2(|B| + 1))$ jika $n \geq N_a$. Untuk $n \geq \max\{N_a, N_b\}$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \\ &\leq |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A| \\ &< M \frac{\epsilon}{2M} + |B| \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)} < \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi $a_n b_n \rightarrow AB$, atau $\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Empat belas panduan berikut berkorespondensi, dalam urutan sumber, dengan empat belas perintah terakhir pada latihan penutup Bab 9. ID panduan berlanjut dari o003-c90-ch09-guide-31 sampai o003-c90-ch09-guide-44. Materi ini merupakan uraian asli untuk pembelajaran mandiri dan tersedia

sebagai bagian komponen CC BY 4.0, terpisah dari turunan GVSU.

Pemeriksaan I.31 Hukum limit untuk hasil bagi. Untuk perintah tentang a_n/b_n , buktikan hukum limit hasil bagi ketika $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \neq 0$, dan setiap $b_n \neq 0$. Rubrik: terlebih dahulu batasi penyebut menjauhi nol, lalu pisahkan selisih hasil bagi menjadi dua suku.

Petunjuk. Tahap 1: akhirnya $|b_n - b| < |b|/2$, sehingga $|b_n| \geq |b|/2$. Tahap 2: tambahkan dan kurangkan a/b_n sebelum memakai pertidaksamaan segitiga.

Jawaban. Barisan hasil bagi konvergen dan $\lim(a_n/b_n) = a/b$.

Solusi. Karena $b_n \rightarrow b \neq 0$, ada N_0 sehingga $|b_n - b| < |b|/2$ bagi $n \geq N_0$; akibatnya $|b_n| \geq |b|/2$. Untuk indeks tersebut,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|} |a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2} |b_n - b|.$$

Jika $a = 0$, suku kedua hilang. Jika tidak, pilih ambang bagi kedua barisan sehingga masing-masing suku di ruas kanan lebih kecil dari $\epsilon/2$, lalu ambil maksimum bersama N_0 . Maka selisih hasil bagi lebih kecil dari ϵ untuk semua indeks sesudah ambang itu, yang membuktikan limit yang dinyatakan.

Pemeriksaan I.32 Hasil kali fungsi kontinu. Pada perintah berikutnya, buktikan bahwa fg kontinu apabila $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu. Rubrik: gunakan pencirian sekuensial dan hukum limit hasil kali yang baru dibuktikan.

Petunjuk. Ambil titik x dan sebarang barisan $x_n \rightarrow x$. Kekontinuan memberi dua limit citra; kalikan kedua limit itu.

Jawaban. Untuk setiap $x_n \rightarrow x$, berlaku $f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(x)g(x)$; jadi fg kontinu.

Solusi. Tetapkan $x \in \mathbb{R}$ dan ambil sebarang barisan (x_n) dengan $x_n \rightarrow x$. Karena f dan g kontinu, teorema pencirian sekuensial memberi $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dan $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Hukum limit hasil kali kemudian memberi

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \longrightarrow f(x)g(x) = (fg)(x).$$

Sifat ini berlaku bagi setiap barisan yang menuju x , maka fg kontinu di x . Karena titiknya sebarang, fungsi itu kontinu di seluruh $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan I.33 Hasil bagi fungsi kontinu. Buktikan langsung dari definisi bahwa f/g kontinu jika f dan g kontinu serta $g(x) \neq 0$ untuk semua x . Rubrik: di sekitar titik tetap, buat $|g(x)|$ memiliki batas bawah positif sebelum menaksir hasil bagi.

Petunjuk. Untuk titik x_0 , gunakan kekontinuan g agar $|g(x) - g(x_0)| < |g(x_0)|/2$. Setelah itu uraikan selisih $f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x_0)$ menjadi dua bagian.

Jawaban. Fungsi f/g kontinu di setiap x_0 karena penyebutnya tetap menjauhi nol pada suatu lingkungan x_0 .

Solusi. Tetapkan x_0 dan tulis $g_0 = g(x_0) \neq 0$. Dari kekontinuan g , pilih lingkungan tempat $|g(x) - g_0| < |g_0|/2$; di sana $|g(x)| \geq |g_0|/2$. Untuk x di lingkungan itu,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g_0} \right| \leq \frac{2}{|g_0|} |f(x) - f(x_0)| + \frac{2|f(x_0)|}{|g_0|^2} |g(x) - g_0|.$$

Dengan kekontinuan kedua fungsi, persempit lingkungan sehingga suku pertama kurang dari $\epsilon/2$ dan suku kedua juga kurang dari $\epsilon/2$ (suku kedua nol jika $f(x_0) = 0$). Maka selisih hasil bagi kurang dari ϵ . Ini adalah definisi kekontinuan f/g di x_0 .

Pemeriksaan I.34 Konvergensi koordinat dalam bidang. Untuk barisan $c_n = (a_n, b_n)$ dalam bidang Euklides, buktikan bahwa $c_n \rightarrow (a, b)$ tepat ketika kedua barisan koordinat menuju a dan b . Rubrik: buktikan kedua arah dengan taksiran jarak Euklides.

Petunjuk. Satu arah memakai $|a_n - a| \leq d_E(c_n, (a, b))$. Untuk arah balik, buat kedua selisih koordinat lebih kecil dari $\epsilon/\sqrt{2}$ secara serentak.

Jawaban. Konvergensi Euklides di $\mathbb{R}^2$ ekuivalen dengan konvergensi masing-masing koordinat.

Solusi. Jika $c_n \rightarrow (a, b)$, maka setiap selisih koordinat tidak melebihi $d_E(c_n, (a, b))$, sehingga keduanya menuju nol. Sebaliknya, andaikan $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$. Untuk $\epsilon > 0$, pilih satu ambang sesudah kedua selisih mutlak kurang dari $\epsilon/\sqrt{2}$. Maka

$$d_E(c_n, (a, b)) = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \epsilon.$$

Jadi barisan pasangan menuju pasangan limitnya, dan kedua implikasi telah dibuktikan.

Pemeriksaan I.35 Fungsi rasional–irasional. Untuk fungsi yang bernilai x pada bilangan rasional dan 0 pada bilangan irasional, tentukan tepat semua titik kekontinuannya. Rubrik: buktikan kekontinuan pada calon titik, lalu gunakan barisan rasional atau irasional untuk setiap titik lain.

Petunjuk. Selalu berlaku $|f(x)| \leq |x|$. Di titik tak nol, gunakan kerapatan bilangan rasional dan irasional untuk memilih barisan dari jenis yang membuat nilai fungsi tidak menuju nilai di titik itu.

Jawaban. Fungsi tersebut kontinu tepat di 0 dan tidak kontinu di setiap titik real tak nol.

Solusi. Karena $f(0) = 0$ dan $|f(x) - f(0)| \leq |x|$, fungsi kontinu di 0. Jika $a \neq 0$ rasional, ambil barisan irasional $x_n \rightarrow a$; maka $f(x_n) = 0$, tetapi $f(a) = a \neq 0$. Jika $a \neq 0$ irasional, ambil barisan rasional $x_n \rightarrow a$; maka $f(x_n) = x_n \rightarrow a$, tetapi $f(a) = 0$. Pencirian sekuensial menyangkal kekontinuan dalam kedua kasus, sehingga hanya 0 yang tersisa.

Pemeriksaan I.36 Merancang himpunan titik kontinu berhingga. Modifikasi konstruksi sebelumnya agar fungsi kontinu tepat di 0 dan 1, lalu perluas ke sebarang himpunan berhingga yang telah ditentukan. Rubrik: gunakan polinom yang himpunan nolnya tepat sama dengan titik-titik sasaran.

Petunjuk. Untuk $\{0, 1\}$, gunakan faktor $x(x-1)$. Untuk $F = \{s_1, \dots, s_k\}$, gunakan $P(x) = \prod_{j=1}^k (x - s_j)$ pada bilangan rasional dan nol pada bilangan irasional.

Jawaban. Fungsi $P(x)$ pada rasional dan 0 pada irasional kontinu tepat pada himpunan nol polinom P .

Solusi. Ambil $P(x) = x(x-1)$ dan definisikan $g(x) = P(x)$ bila x rasional, serta $g(x) = 0$ bila x irasional. Di 0 dan 1, kekontinuan P dan taksiran $|g(x)| \leq |P(x)|$ memberi kekontinuan g . Di titik lain, barisan rasional dan irasional memberi dua limit citra berbeda. Argumen sama berlaku bagi $P(x) = \prod_{s \in F} (x - s)$: fungsi hasil konstruksi kontinu tepat pada nol-nol P , yaitu tepat pada himpunan berhingga F .

Pemeriksaan I.37 Limit barisan geometri. Untuk $0 \leq a < 1$, buktikan bahwa $a^n \rightarrow 0$. Rubrik: pisahkan kasus $a = 0$; untuk $0 < a < 1$, hasilkan ambang indeks yang bergantung pada ϵ .

Petunjuk. Tulis $1/a = 1+h$ dengan $h > 0$. Pertidaksamaan Bernoulli memberi $(1+h)^n \geq 1+nh$, sehingga $a^n \leq 1/(1+nh)$.

Jawaban. Barisan (a^n) konvergen ke 0 untuk setiap $0 \leq a < 1$.

Solusi. Jika $a = 0$, semua suku bernilai nol. Jika $0 < a < 1$, tulis $1/a = 1+h$ dengan $h > 0$. Untuk $\epsilon > 0$, pilih N sehingga $1/(1+Nh) < \epsilon$. Bagi $n \geq N$, pertidaksamaan Bernoulli memberi

$$0 \leq a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{1+Nh} < \epsilon.$$

Ini tepat definisi $a^n \rightarrow 0$.

Pemeriksaan I.38 Konvergensi titik demi titik bukan konvergensi seragam. Untuk $f_n(x) = x^n$ pada $[0, 1]$, tentukan apakah f_n konvergen dalam metrik supremum ke fungsi yang nol pada $[0, 1)$ dan satu di 1. Rubrik: hitung supremum selisih, bukan hanya limit pada setiap titik.

Petunjuk. Pada $x = 1$ selisihnya nol, tetapi untuk $x < 1$ selisihnya x^n . Seberapa besar supremum x^n ketika $0 \leq x < 1$?

Jawaban. Tidak. Untuk setiap n , jarak supremum dari f_n ke fungsi calon limit itu sama dengan 1.

Solusi. Jika $x < 1$, fungsi calon limit bernilai nol sehingga $|f_n(x) - f(x)| = x^n$; pada $x = 1$ selisihnya nol. Walaupun nilai 1 tidak dicapai pada interval setengah terbuka $[0, 1)$, nilai x^n dapat dibuat sedekat apa pun dengan 1 dengan memilih x cukup dekat ke 1. Jadi

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

untuk setiap n . Jarak itu tidak menuju nol, maka tidak ada konvergensi dalam metrik supremum.

Pemeriksaan I.39 Limit dalam metrik integral. Pandang kembali $f_n(x) = x^n$, kini di $C[0, 1]$ dengan metrik integral. Tentukan apakah barisan memiliki limit di ruang itu. Rubrik: uji fungsi nol yang kontinu dengan menghitung integral secara tepat.

Petunjuk. Hitung $d(f_n, 0) = \int_0^1 x^n dx$. Limit titik demi titik yang tak kontinu bukan calon dalam $C[0, 1]$, tetapi metrik integral dapat memiliki limit lain pada satu titik yang berbeda.

Jawaban. Ya. Dalam metrik integral, f_n konvergen ke fungsi nol.

Solusi. Fungsi nol berada dalam $C[0, 1]$. Karena $x^n \geq 0$,

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Jadi $f_n \rightarrow 0$ dalam metrik integral. Tidak ada konflik dengan limit titik demi titik yang bernilai satu di 1: perubahan pada satu titik tidak memengaruhi integral, sedangkan metrik supremum peka terhadap nilai-nilai yang mendekati titik itu.

Pemeriksaan I.40 Barisan menurun dan infimum. Nilai pernyataan bahwa barisan real yang menurun dan terbatas di bawah konvergen ke infimum himpunan sukunya. Rubrik: gunakan sifat penentu infimum untuk menemukan satu suku di bawah $L + \epsilon$.

Petunjuk. Tulis $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Ada N dengan $a_N < L + \epsilon$; kemotongan mengendalikan semua suku sesudahnya.

Jawaban. Pernyataan benar: barisan tersebut konvergen ke infimum himpunan semua sukunya.

Solusi. Karena L batas bawah, $L \leq a_n$ bagi semua n . Untuk $\epsilon > 0$, bilangan $L + \epsilon$ bukan batas bawah; maka ada N dengan $a_N < L + \epsilon$. Karena barisan menurun, bagi $n \geq N$ berlaku $L \leq a_n \leq a_N < L + \epsilon$. Dengan demikian $|a_n - L| < \epsilon$, sehingga $a_n \rightarrow L$.

Pemeriksaan I.41 Membangun barisan dari irisan bola. Nilai pernyataan: jika setiap bola $B(a, r)$ bertemu subhimpunan tak kosong A , maka ada barisan di A yang konvergen ke a . Rubrik: pilih satu titik dari bola berjari-jari $1/n$ untuk setiap n .

Petunjuk. Pilih $a_n \in A \cap B(a, 1/n)$. Definisi bola langsung memberi batas atas untuk $d(a_n, a)$.

Jawaban. Pernyataan benar; pilihan $a_n \in A \cap B(a, 1/n)$ menghasilkan barisan yang konvergen ke a .

Solusi. Hipotesis menjamin bahwa $A \cap B(a, 1/n)$ tidak kosong untuk setiap n . Pilih a_n dari irisan itu. Maka $d(a_n, a) < 1/n$. Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka $d(a_n, a) < 1/n \leq 1/N < \epsilon$. Jadi barisan yang seluruh sukunya berada di A tersebut konvergen ke a .

Pemeriksaan I.42 Membandingkan supremum dan infimum. Nilai pernyataan bahwa $\sup(S) \leq \inf(R)$ apabila setiap unsur S tidak melebihi setiap unsur R . Rubrik: baca setiap unsur R sebagai batas atas S , lalu balikkan peran batas itu.

Petunjuk. Untuk setiap $y \in R$, berlaku $\sup(S) \leq y$. Artinya, $\sup(S)$ sendiri merupakan batas bawah bagi R .

Jawaban. Pernyataan benar: syarat urutan memaksa $\sup(S) \leq \inf(R)$.

Solusi. Tetapkan $y \in R$. Karena $x \leq y$ untuk semua $x \in S$, bilangan y adalah batas atas S ; sehingga $\sup(S) \leq y$. Ini berlaku bagi setiap $y \in R$, jadi $\sup(S)$ adalah batas bawah R . Karena $\inf(R)$ adalah batas bawah terbesar, diperoleh $\sup(S) \leq \inf(R)$.

Pemeriksaan I.43 Menguji klaim limit dalam metrik pecahan. Nilai klaim bahwa $(1/n)$ menuju 0 dalam metrik pada pecahan rasional bentuk paling sederhana yang membandingkan pembilang dan penyebut. Rubrik: tulis representasi paling sederhana bagi $1/n$ dan 0, lalu hitung jaraknya.

Petunjuk. Gunakan $1/n$ dan $0/1$. Metrik memberi maksimum antara selisih pembilang dan selisih penyebut.

Jawaban. Klaim salah, sebab $d(1/n, 0) = \max\{1, n-1\}$, yang tidak menuju nol.

Solusi. Pecahan $1/n$ sudah dalam bentuk paling sederhana dan nol ditulis sebagai $0/1$. Maka

$$d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \max\{|1-0|, |n-1|\} = \max\{1, n-1\}.$$

Nilai ini sekurang-kurangnya 1 untuk semua n , bahkan bertambah tanpa batas. Karena jarak ke calon limit tidak menuju nol, barisan tersebut tidak konvergen ke 0 dalam metrik ini.

Pemeriksaan I.44 Konvergensi dalam metrik diskret. Nilai pernyataan bahwa barisan dalam ruang bermetrik diskret konvergen tepat ketika barisan itu pada akhirnya konstan. Rubrik: untuk satu arah pilih toleransi yang lebih kecil dari 1; arah sebaliknya mengikuti definisi secara langsung.

Petunjuk. Jika $a_n \rightarrow a$, gunakan $\epsilon = 1/2$. Dalam metrik diskret, pertidaksamaan $d(a_n, a) < 1/2$ memaksa $a_n = a$.

Jawaban. Pernyataan benar: barisan konvergen dalam metrik diskret jika dan hanya jika pada akhirnya semua sukunya sama dengan limitnya.

Solusi. Andaikan $a_n \rightarrow a$. Untuk $\epsilon = 1/2$, ada N sehingga $d(a_n, a) < 1/2$ bagi semua $n \geq N$. Jarak diskret hanya bernilai nol atau satu, maka harus $d(a_n, a) = 0$, yakni $a_n = a$, sesudah N . Sebaliknya, jika $a_n = a$ sesudah suatu ambang, maka bagi setiap $\epsilon > 0$ jarak $d(a_n, a) = 0 < \epsilon$ sesudah ambang tersebut. Jadi barisan konvergen ke a .

Pemeriksaan penguasaan Bab 9

Keenam soal kumulatif berikut merupakan komponen pendamping asli O003, terpisah dari teks GVSU, dan tersedia di bawah CC BY 4.0. Setiap petunjuk dibagi menjadi beberapa tahap; gunakan hanya tahap yang diperlukan sebelum membandingkan jawaban dan pembahasan lengkap.

Pemeriksaan I.45 Menyusun bukti epsilon-N. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, definisikan $a_n = (2n+1)/(n+3)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hitung $|a_n - 2|$ dan, untuk $\epsilon > 0$, temukan bilangan bulat positif N yang dinyatakan secara eksplisit dalam ϵ sehingga $n \geq N$ mengakibatkan $|a_n - 2| < \epsilon$.
2. Tulislah bukti lengkap langsung dari definisi bahwa $\lim a_n = 2$. Pisahkan perhitungan untuk menemukan N dari pembuktian yang memverifikasi pilihan tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Satukan kedua suku pada $|(2n+1)/(n+3) - 2|$ dengan penyebut $n+3$.

Tahap 2. Pertidaksamaan yang perlu dijamin adalah $5/(n+3) < \epsilon$. Pilihan $N = \lceil 5/\epsilon \rceil$ sedikit lebih besar daripada yang benar-benar diperlukan, tetapi mudah diverifikasi.

Tahap 3. Dalam bukti formal, mulailah dengan $\epsilon > 0$, tetapkan N , lalu ambil sebarang $n \geq N$. Jangan memilih N yang bergantung pada n .

Jawaban. Berlaku $|a_n - 2| = 5/(n+3)$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, pilihan $N = \lceil 5/\epsilon \rceil$ memenuhi syarat definisi limit; jadi $\lim a_n = 2$.

Solusi. Perhitungan awal memberikan

$$\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2n-6}{n+3} \right| = \frac{5}{n+3}.$$

Agar besaran terakhir lebih kecil daripada ϵ , cukup memastikan $n \geq 5/\epsilon$; tambahkan 3 pada penyebut kemudian menghasilkan pertidaksamaan ketat.

Sekarang misalkan $\epsilon > 0$ diberikan dan tetapkan $N = \lceil 5/\epsilon \rceil$. Bilangan N adalah bilangan bulat positif. Jika $n \geq N$, maka $n+3 \geq N+3 > 5/\epsilon$. Karena semua besaran positif,

$$|a_n - 2| = \frac{5}{n+3} < \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N sehingga $n \geq N$ mengakibatkan $d_E(a_n, 2) < \epsilon$. Menurut definisi, (a_n) konvergen ke 2.

Pemeriksaan I.46 Ketunggalan limit dan peran metrik.

1. Misalkan (a_n) suatu barisan dalam ruang metrik (X, d) . Andaikan (a_n) konvergen ke L dan juga konvergen ke M . Buktikan bahwa $L = M$. Tunjukkan dengan jelas di mana sifat metrik dan kedua asumsi konvergensi digunakan.
2. Pada himpunan dasar $X = \mathbb{R}$, bandingkan metrik Euklides $d_E(x, y) = |x - y|$ dengan metrik diskret

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y, \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Buktikan bahwa barisan $a_n = 1/n$ konvergen ke 0 terhadap d_E . Buktikan pula bahwa suatu barisan dalam ruang bermetrik diskret konvergen jika dan hanya jika barisan itu pada akhirnya konstan, lalu tentukan perilaku (a_n) terhadap d_D .

3. Jelaskan mengapa hasil pada bagian kedua tidak bertentangan dengan ketunggalan limit pada bagian pertama.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $L \neq M$, gunakan $\epsilon = d(L, M)/3$ bagi kedua limit. Pilih satu indeks yang melampaui kedua indeks ambang, lalu terapkan pertidaksamaan segitiga pada lintasan L, a_n, M .

Tahap 2. Untuk metrik Euklides, pilih bilangan bulat $N > 1/\epsilon$.

Tahap 3. Jika suatu barisan konvergen ke L dalam metrik diskret, terapkan definisi dengan $\epsilon = 1/2$. Untuk arah balik, jika semua suku mulai indeks tertentu sama dengan L , jaraknya ke L sama dengan nol.

Tahap 4. Teorema ketunggalan membahas satu ruang metrik yang telah ditetapkan. Di sini struktur metriknya diganti.

Jawaban. Jika $L \neq M$, pilihan $\epsilon = d(L, M)/3$ dan pertidaksamaan segitiga menghasilkan $d(L, M) < 2d(L, M)/3$, suatu kontradiksi. Jadi limit dalam satu ruang metrik bersifat tunggal.

Barisan $1/n$ konvergen ke 0 terhadap d_E , tetapi divergen terhadap d_D . Dalam metrik diskret, syarat $d_D(a_n, L) < 1/2$ memaksa $a_n = L$; jadi konvergensi setara dengan sifat pada akhirnya konstan. Ketunggalan limit tidak dilanggar karena kedua kesimpulan dibuat dalam dua ruang metrik yang berbeda.

Solusi. Andaikan $L \neq M$. Sifat definit positif suatu metrik memberi $d(L, M) > 0$. Tetapkan $\epsilon = d(L, M)/3$. Karena $a_n \rightarrow L$ dan $a_n \rightarrow M$, terdapat $N_L, N_M \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d(a_n, L) < \epsilon$ untuk $n \geq N_L$ dan $d(a_n, M) < \epsilon$ untuk $n \geq N_M$. Pilih $n \geq \max\{N_L, N_M\}$. Simetri dan pertidaksamaan segitiga memberi

$$d(L, M) \leq d(L, a_n) + d(a_n, M) < \frac{2}{3}d(L, M),$$

yang mustahil. Jadi $L = M$.

Misalkan $\epsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d_E(a_n, 0) = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Jadi $a_n \rightarrow 0$ dalam $(\mathbb{R}, d_E)$.

Sekarang misalkan suatu barisan (x_n) konvergen ke L terhadap d_D . Dengan $\epsilon = 1/2$, terdapat N sehingga $d_D(x_n, L) < 1/2$ untuk semua $n \geq N$. Satu-satunya nilai metrik diskret yang lebih kecil daripada $1/2$ adalah 0, sehingga $x_n = L$ untuk setiap $n \geq N$. Jadi barisan tersebut pada akhirnya konstan. Sebaliknya, jika $x_n = L$ untuk setiap $n \geq N$, maka $d_D(x_n, L) = 0 < \epsilon$ bagi setiap $\epsilon > 0$ dan setiap $n \geq N$; jadi $x_n \rightarrow L$.

Suku-suku $1/n$ semuanya berbeda, sehingga barisan itu tidak pada akhirnya konstan. Maka $(1/n)$ divergen dalam $(\mathbb{R}, d_D)$. Teorema ketunggalan mengatakan bahwa suatu barisan tidak mempunyai dua limit berbeda terhadap metrik yang sama. Teorema itu tidak mengatakan bahwa perilaku konvergensi tidak berubah ketika metriknya diganti.

Pemeriksaan I.47 Menguji kekontinuan dengan barisan.

1. Definisikan $F : (\mathbb{R}, d_E) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ oleh $F(x) = x^2$. Gunakan pencirian kekontinuan melalui barisan untuk membuktikan bahwa F kontinu di setiap $a \in \mathbb{R}$. Jangan mengandaikan tanpa bukti bahwa hasil kali limit dapat dipertukarkan.
2. Definisikan $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oleh

$$H(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{jika } x \neq 0, \\ 0 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$$

Temukan satu barisan (x_n) yang konvergen ke 0 tetapi $(H(x_n))$ tidak konvergen ke $H(0)$. Simpulkan bahwa H tidak kontinu di 0.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $x_n \rightarrow a$, maka untuk suku-suku yang cukup jauh berlaku $|x_n - a| < 1$, sehingga $|x_n + a| \leq 2|a| + 1$.

Tahap 2. Gunakan faktorisasi $|x_n^2 - a^2| = |x_n - a||x_n + a|$. Untuk epsilon yang diberikan, minta $|x_n - a| < \min\{1, \epsilon/(2|a| + 1)\}$.

Tahap 3. Untuk fungsi kedua, pilih penyebut yang membuat $1/x_n = \pi/2 + 2\pi n$. Nilai sinusnya kemudian selalu sama.

Jawaban. Jika $x_n \rightarrow a$, maka $|x_n^2 - a^2| \leq (2|a| + 1)|x_n - a| \rightarrow 0$ untuk semua suku yang cukup jauh; jadi F kontinu di setiap a . Sebaliknya, $x_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ konvergen ke 0, tetapi $H(x_n) = 1$ untuk semua n , sedangkan $H(0) = 0$. Jadi H tidak kontinu di 0.

Solusi. Ambil $a \in \mathbb{R}$ dan sebarang barisan (x_n) dengan $x_n \rightarrow a$. Misalkan $\epsilon > 0$ dan tetapkan

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2|a| + 1} \right\}.$$

Karena $x_n \rightarrow a$, ada N sehingga $|x_n - a| < \delta$ untuk setiap $n \geq N$. Untuk indeks tersebut, $|x_n - a| < 1$, sehingga $|x_n| \leq |a| + 1$ dan $|x_n + a| \leq 2|a| + 1$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(a)| &= |x_n^2 - a^2| \\ &= |x_n - a||x_n + a| \\ &< \frac{\epsilon}{2|a| + 1} (2|a| + 1) = \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi $F(x_n) \rightarrow F(a)$. Hal ini berlaku bagi setiap barisan yang konvergen ke a ; pencirian melalui barisan menunjukkan bahwa F kontinu di a . Karena a sebarang, F kontinu di seluruh $\mathbb{R}$.

Untuk fungsi kedua, tetapkan $x_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$. Penyebutnya menuju tak hingga, sehingga $x_n \rightarrow 0$. Namun,

$$H(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$$

untuk setiap n . Jadi barisan $(H(x_n))$ konvergen ke 1, bukan ke $H(0) = 0$. Satu barisan saksi ini menyangkal syarat barisan yang diperlukan untuk kekontinuan di 0. Maka H tidak kontinu di 0.

Pemeriksaan I.48 Limit dalam subruang dan ruang ambien. Misalkan $Y \subseteq X$, (X, d) suatu ruang metrik, dan d_Y adalah metrik subruang, yakni $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$ untuk $y_1, y_2 \in Y$.

1. Jika (a_n) adalah barisan di Y dan $a \in Y$, buktikan bahwa $a_n \rightarrow a$ dalam (Y, d_Y) jika dan hanya jika $a_n \rightarrow a$ dalam (X, d) .
2. Untuk $Y = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = X$, tetapkan

$$q_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}.$$

Buktikan bahwa (q_n) konvergen dalam ruang ambien $\mathbb{R}$, tetapi tidak konvergen sebagai barisan dalam subruang $\mathbb{Q}$. Jelaskan mengapa hal ini tidak bertentangan dengan bagian pertama.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk titik-titik yang semuanya berada di Y , bilangan $d_Y(a_n, a)$ dan $d(a_n, a)$ persis sama.

Tahap 2. Sifat fungsi lantai memberi $0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}$.

Tahap 3. Jika (q_n) konvergen di $\mathbb{Q}$ ke suatu $q \in \mathbb{Q}$, bagian pertama menjadikannya konvergen ke q di $\mathbb{R}$. Gunakan ketunggalan limit.

Jawaban. Selama calon limit a berada di Y , kedua definisi konvergensi identik karena $d_Y(a_n, a) = d(a_n, a)$. Barisan (q_n) memenuhi $0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}$, sehingga konvergen ke $\sqrt{2}$ di $\mathbb{R}$. Ia tidak dapat konvergen di $\mathbb{Q}$: limit rasional demikian juga akan menjadi limit ambien, bertentangan dengan ketunggalan limit dan ketakrasionalan $\sqrt{2}$.

Solusi. Misalkan (a_n) barisan di Y dan $a \in Y$. Untuk setiap n , definisi metrik subruang memberi $d_Y(a_n, a) = d(a_n, a)$. Karena itu, bagi setiap $\epsilon > 0$ dan setiap indeks N , pernyataan

$$d_Y(a_n, a) < \epsilon \quad \text{untuk semua } n \geq N$$

setara dengan pernyataan yang sama dengan d menggantikan d_Y . Kuantor dalam kedua definisi limit pun identik, sehingga $a_n \rightarrow a$ di Y jika dan hanya jika $a_n \rightarrow a$ di X .

Untuk contoh, setiap q_n rasional. Dari $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$ dengan $t = 10^n \sqrt{2}$, setelah dibagi dengan 10^n diperoleh

$$0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}.$$

Karena $10^{-n} \rightarrow 0$, untuk setiap $\epsilon > 0$ semua suku yang cukup jauh memenuhi $|q_n - \sqrt{2}| < \epsilon$. Jadi $q_n \rightarrow \sqrt{2}$ dalam ruang ambien $\mathbb{R}$.

Andaikan (q_n) konvergen sebagai barisan di $\mathbb{Q}$. Maka limitnya harus berupa suatu $q \in \mathbb{Q}$. Berdasarkan bagian pertama, $q_n \rightarrow q$ juga dalam $\mathbb{R}$. Akan tetapi, di $\mathbb{R}$ barisan yang sama sudah terbukti konvergen ke $\sqrt{2}$. Ketunggalan limit memaksa $q = \sqrt{2}$, yang mustahil karena q rasional dan $\sqrt{2}$ irasional. Jadi barisan itu tidak konvergen di $\mathbb{Q}$. Tidak ada kontradiksi dengan bagian pertama: limit ambien $\sqrt{2}$ tidak berada di subruang $\mathbb{Q}$, sedangkan kesetaraan pada bagian pertama mensyaratkan $a \in Y$.

Pemeriksaan I.49 Konvergensi koordinat demi koordinat. Dalam $\mathbb{R}^2$ dengan metrik Euklides, misalkan $c_n = (a_n, b_n)$ dan $c = (a, b)$. Buktikan bahwa $c_n \rightarrow c$ jika dan hanya jika $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$ dalam $\mathbb{R}$. Bukti harus menangani kedua arah langsung dari definisi metrik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk arah dari pasangan ke koordinat, gunakan $|a_n - a| \leq d_E(c_n, c)$ dan $|b_n - b| \leq d_E(c_n, c)$.

Tahap 2. Untuk arah sebaliknya dan epsilon yang diberikan, buat kedua selisih koordinat lebih kecil daripada $\epsilon/\sqrt{2}$.

Tahap 3. Kedua koordinat mungkin memberikan indeks awal yang berbeda. Ambil maksimum dari kedua indeks tersebut.

Jawaban. Konvergensi $c_n \rightarrow c$ memaksa setiap selisih koordinat menuju nol karena masing-masing dibatasi oleh $d_E(c_n, c)$. Sebaliknya, jika kedua koordinat konvergen, buat masing-masing selisih lebih kecil daripada $\epsilon/\sqrt{2}$; maka $d_E(c_n, c) < \epsilon$. Jadi kedua kondisi setara.

Solusi. Andaikan $c_n \rightarrow c$. Untuk setiap n ,

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = d_E(c_n, c), \\ |b_n - b| &\leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = d_E(c_n, c). \end{aligned}$$

Misalkan $\epsilon > 0$. Untuk semua n yang cukup besar, $d_E(c_n, c) < \epsilon$; kedua pertidaksamaan di atas kemudian memberi $|a_n - a| < \epsilon$ dan $|b_n - b| < \epsilon$. Jadi $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$.

Sebaliknya, andaikan $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$. Diberikan $\epsilon > 0$, ada N_a sehingga $|a_n - a| < \epsilon/\sqrt{2}$ untuk $n \geq N_a$, dan ada N_b sehingga $|b_n - b| < \epsilon/\sqrt{2}$ untuk $n \geq N_b$. Jika $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$, maka

$$d_E(c_n, c) = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon.$$

Dengan demikian, $c_n \rightarrow c$. Kedua arah membuktikan kesetaraan yang diminta.

Pemeriksaan I.50 Konvergensi titik demi titik dan konvergensi seragam. Misalkan X adalah himpunan semua fungsi terbatas bernilai real pada $[0, 1]$, dengan metrik supremum

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

1. Untuk $f_n(x) = x^n$, tentukan limit titik demi titik f pada $[0, 1]$.
2. Hitung $d_\infty(f_n, f)$. Apakah (f_n) konvergen ke f dalam metrik supremum, yakni secara seragam?
3. Untuk pembandingan, tetapkan $g_n(x) = x/n$. Buktikan bahwa (g_n) konvergen secara seragam ke fungsi nol. Jelaskan secara umum mengapa konvergensi dalam metrik supremum selalu mengakibatkan konvergensi titik demi titik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $0 \leq x < 1$, maka $x^n \rightarrow 0$, sedangkan $1^n = 1$.

Tahap 2. Untuk $x < 1$, selisih $|f_n(x) - f(x)|$ sama dengan x^n . Nilai-nilai ini dapat dibuat sedekat yang diinginkan dengan 1 dengan memilih x cukup dekat ke 1, walaupun pada $x = 1$ selisihnya nol.

Tahap 3. Untuk fungsi pembandingan, $\sup_{x \in [0, 1]} |x/n| = 1/n$. Untuk implikasi umum, bandingkan nilai pada satu titik tetap dengan supremum atas semua titik.

Jawaban. Limit titik demi titik $f_n(x) = x^n$ ialah $f(x) = 0$ untuk $0 \leq x < 1$ dan $f(1) = 1$. Namun, $d_\infty(f_n, f) = 1$ untuk setiap n , sehingga konvergensi itu tidak seragam. Sebaliknya, $d_\infty(g_n, 0) = 1/n \rightarrow 0$. Secara umum, $|f_n(x) - f(x)| \leq d_\infty(f_n, f)$ pada setiap titik, sehingga konvergensi seragam mengakibatkan konvergensi titik demi titik.

Solusi. Untuk $x = 1$, berlaku $f_n(1) = 1$ untuk semua n . Jika $x = 0$, berlaku $f_n(0) = 0$. Jika $0 < x < 1$, tetapkan $r = 1/x > 1$. Pertidaksamaan Bernoulli memberi $r^n \geq 1 + n(r - 1)$, sehingga

$$0 \leq x^n = \frac{1}{r^n} \leq \frac{1}{1 + n(r - 1)} \rightarrow 0.$$

Jadi limit titik demi titiknya adalah

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{jika } x = 1. \end{cases}$$

Untuk $0 \leq x < 1$, selisihnya adalah $|f_n(x) - f(x)| = x^n < 1$, sedangkan pada $x = 1$ selisihnya nol. Meskipun nilai 1 tidak dicapai oleh selisih tersebut, nilai itu adalah supremumnya. Memang, jika $0 < c < 1$,

pilih $x = ((1+c)/2)^{1/n}$. Maka $x < 1$ dan $x^n = (1+c)/2 > c$. Jadi nilai selisih dapat melampaui setiap $c < 1$, sementara selalu dibatasi di atas oleh 1. Dengan demikian,

$$d_\infty(f_n, f) = 1$$

untuk setiap n . Jarak ini tidak menuju nol, sehingga (f_n) tidak konvergen ke f secara seragam.

Untuk $g_n(x) = x/n$, karena $0 \leq x \leq 1$,

$$d_\infty(g_n, 0) = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Jadi $g_n \rightarrow 0$ dalam metrik supremum. Secara umum, jika $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ dan $x \in [0, 1]$ ditetapkan, maka

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| = d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0.$$

Maka $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pada setiap titik x . Contoh x^n menunjukkan bahwa implikasi sebaliknya tidak berlaku.

Lampiran J

Pendamping Mandiri Bab 10: Himpunan Tertutup dalam Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 10, bukan menggantikannya. Kerjakan dahulu eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama, kemudian buka unsur **petunjuk, jawaban**, atau **solusi** secara bertahap. Delapan puluh panduan mengikuti setiap butir sumber dalam urutan bacanya: empat puluh tiga tugas eksplorasi atau kegiatan dan tiga puluh tujuh perintah latihan. Delapan pemeriksaan penguasaan tambahan menguji pemindahan gagasan ke situasi baru.

Seluruh uraian pendamping dan pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau Grand Valley State University dan tidak menyalin ungkapan dari karya pembanding. Komponen asli ini memiliki identitas lisensi terpisah dan disediakan di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung, sedangkan solusi memperlihatkan urutan definisi, konstruksi, atau contoh penyangkal yang diperlukan. Untuk pertanyaan yang sengaja bersifat terbuka, solusi berfungsi sebagai rubrik penilaian. Dengan demikian, pembelajar tetap melakukan penyelidikan sebelum melihat penutupan matematisnya.

Panduan konsep dan tugas sumber

Dua puluh dua panduan berikut mengikuti urutan tugas sumber: sembilan tugas tentang titik batas, titik limit, dan titik terasing; empat tugas tentang himpunan tertutup di ruang metrik; tujuh langkah tentang kekontinuan dan prapeta himpunan tertutup; serta dua langkah konstruksi barisan dari titik limit. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan memparafrasakan sasaran sumber dan menyertakan rubrik keberhasilan. Teks panduan asli ini merupakan komponen terpisah yang tersedia di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan J.1 Interval setengah tertutup di garis real. Untuk $A = [0, \frac{1}{2})$ di $(\mathbb{R}, d_E)$, tentukan semua titik batas, titik limit, dan titik terasing, lalu putuskan apakah A tertutup. Rubrik: nyatakan masing-masing himpunan titik secara lengkap, uji kedua titik ujung, dan jelaskan keputusan tertutup dari komplement atau dari titik batas yang hilang.

Petunjuk. Tahap 1: pisahkan titik di bagian dalam interval, kedua titik ujung, dan titik di luar interval. Tahap 2: tanyakan apakah setiap lingkungan memotong A , memotong komplementnya, atau memuat titik lain dari A .

Jawaban. Titik batasnya adalah $\{0, \frac{1}{2}\}$, titik limitnya adalah $[0, \frac{1}{2}]$, tidak ada titik terasing, dan A tidak tertutup di $\mathbb{R}$.

Solusi. Setiap lingkungan dari 0 dan $\frac{1}{2}$ memuat titik A sekaligus titik $\mathbb{R} \setminus A$, jadi tepat kedua titik itu merupakan titik batas. Titik dalam $(0, \frac{1}{2})$ mempunyai bola yang seluruhnya di A , sedangkan titik di luar $[0, \frac{1}{2}]$ mempunyai bola yang tidak memotong A . Setiap lingkungan dari titik $[0, \frac{1}{2}]$ memuat titik lain dari A , sehingga himpunan titik limitnya $[0, \frac{1}{2}]$; akibatnya tidak ada titik terasing. Titik limit $\frac{1}{2}$ tidak termasuk A , dan komplemen A tidak terbuka di titik itu. Maka A tidak tertutup.

Pemeriksaan J.2 Ketertutupan relatif dalam subruang. Ambil $X = (0, 1]$ dengan metrik Euklides terinduksi dan $A = (0, \frac{1}{2}]$. Tentukan titik batas, titik limit, dan titik terasing A relatif terhadap X , lalu tentukan apakah A tertutup di X . Rubrik: jangan memasukkan titik yang bukan unsur ruang sekitar X .

Petunjuk. Tahap 1: titik 0 bukan titik di X . Tahap 2: periksa sisi mana dari $\frac{1}{2}$ yang berada dalam A , lalu tuliskan $X \setminus A$ dan uji keterbukaannya di X .

Jawaban. Relatif terhadap X , titik batasnya hanya $\frac{1}{2}$, titik limitnya $(0, \frac{1}{2}]$, tidak ada titik terasing, dan A tertutup di X .

Solusi. Setiap lingkungan relatif dari $\frac{1}{2}$ memuat titik di bawahnya yang termasuk A dan titik di atasnya yang termasuk $X \setminus A$, jadi itulah satu-satunya titik batas. Titik-titik $(0, \frac{1}{2})$ interior relatif A , sedangkan titik-titik $(\frac{1}{2}, 1]$ interior relatif komplementnya. Setiap titik A didekati titik lain dari A , sehingga titik limitnya A sendiri dan tidak ada titik terasing. Karena $X \setminus A = (\frac{1}{2}, 1]$ terbuka relatif, A tertutup di X . Titik 0 tidak didaftarkan karena $0 \notin X$.

Pemeriksaan J.3 Subhimpunan dalam ruang diskret hingga. Misalkan $X = \{a, b, c, e\}$ bermetrik diskret dan $A = \{a, b\}$. Tentukan semua titik batas, titik limit, dan titik terasing A , lalu putuskan apakah A tertutup. Rubrik: gunakan satu radius kurang dari 1 untuk menganalisis setiap titik.

Petunjuk. Tahap 1: untuk $0 < r \leq 1$, bola $B(x, r)$ hanya memuat x . Tahap 2: periksa akibat bola satu titik itu bagi definisi ketiga jenis titik dan bagi keterbukaan komplement.

Jawaban. Himpunan titik batas dan titik limit keduanya kosong, titik terasingnya adalah $\{a, b\}$, dan A tertutup; bahkan A terbuka-tertutup.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, bola $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$. Jika $x \in A$, bola ini tidak memuat titik komplement atau titik A selain x ; jadi x bukan titik batas atau titik limit, tetapi titik terasing. Jika $x \notin A$, bola yang sama tidak memotong A , sehingga x juga bukan titik batas atau titik limit. Jadi titik batas dan titik limit kosong, sedangkan titik terasing tepat a, b . Setiap subhimpunan ruang diskret terbuka, maka $X \setminus A$ terbuka dan A tertutup; A sendiri juga terbuka.

Pemeriksaan J.4 Apakah titik limit selalu titik batas? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik limit merupakan titik batas.” Rubrik: jika salah, berikan ruang metrik, himpunan, dan satu titik tertentu, lalu periksa kedua definisi pada titik itu.

Petunjuk. Tahap 1: titik interior suatu interval dapat didekati titik lain dari interval. Tahap 2: lingkungan yang seluruhnya di dalam interval gagal memotong komplementnya.

Jawaban. Salah. Misalnya, 0 adalah titik limit $A = (-1, 1)$ di $\mathbb{R}$, tetapi bukan titik batas A .

Solusi. Setiap lingkungan N dari 0 memuat suatu bola $B(0, r)$, sehingga memuat titik tak nol dari $A = (-1, 1)$ jika titik itu dipilih cukup kecil. Jadi 0 titik limit A . Namun $B(0, \frac{1}{2}) \subseteq A$, sehingga bola ini tidak memuat titik komplement. Definisi titik batas gagal, dan contoh tandingan ini membuktikan pernyataannya salah.

Pemeriksaan J.5 Apakah titik batas selalu titik limit? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik batas merupakan titik limit.” Rubrik: perhatikan bahwa titik batas boleh menjadi satu-satunya titik himpunan di lingkungan kecilnya.

Petunjuk. Tahap 1: coba himpunan satu titik di garis real. Tahap 2: setiap lingkungan pusat itu memuat pusat dan titik komplement, tetapi apakah harus memuat titik kedua dari himpunan?

Jawaban. Salah. Untuk $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, titik 0 adalah titik batas tetapi bukan titik limit.

Solusi. Setiap lingkungan N dari 0 memuat $0 \in A$ dan, karena memuat bola berjari-jari positif, juga memuat titik real taknol dalam $\mathbb{R} \setminus A$. Jadi 0 titik batas A . Tetapi tidak ada titik A yang berbeda dari 0, sehingga syarat titik limit mustahil dipenuhi. Maka pernyataannya salah.

Pemeriksaan J.6 Apakah titik limit selalu terasing? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik limit merupakan titik terasing.” Rubrik: bandingkan tuntutan “setiap lingkungan memuat titik lain” dengan tuntutan “ada lingkungan yang tidak memuat titik lain.”

Petunjuk. Tahap 1: gunakan titik 0 dalam suatu interval real. Tahap 2: tunjukkan bahwa setiap lingkungan memuat unsur interval selain pusat, sehingga tidak mungkin mengasingkan pusat.

Jawaban. Salah. Dalam $A = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, titik 0 merupakan titik limit tetapi bukan titik terasing.

Solusi. Setiap lingkungan dari 0 memuat bola $B(0, r)$. Ada $y \neq 0$ yang cukup kecil sehingga $y \in (-1, 1) \cap B(0, r)$; jadi 0 titik limit. Fakta ini berlaku bagi setiap lingkungan, maka tidak ada lingkungan N dengan $N \cap A = \{0\}$. Jadi 0 tidak terasing dan klaim universal itu salah.

Pemeriksaan J.7 Apakah titik terasing selalu titik limit? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik terasing merupakan titik limit.” Rubrik: sajikan contoh yang memenuhi definisi titik terasing dan tunjukkan lingkungan yang menggagalkan definisi titik limit.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $A = \{0\}$ di garis real. Tahap 2: irisan setiap lingkungan dengan A tidak pernah dapat memuat anggota A selain 0.

Jawaban. Salah. Titik 0 terasing dalam $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, tetapi bukan titik limit A .

Solusi. Bola $B(0, 1)$ memenuhi $B(0, 1) \cap A = \{0\}$, sehingga 0 titik terasing. Definisi titik limit meminta setiap lingkungan memuat titik A yang berbeda dari 0. Karena A tidak mempunyai titik demikian, syarat itu gagal. Jadi contoh ini menyangkal pernyataan tersebut.

Pemeriksaan J.8 Apakah titik batas selalu terasing? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik batas merupakan titik terasing.” Rubrik: cari titik ujung interval yang sekaligus didekati oleh banyak titik interval.

Petunjuk. Tahap 1: uji 0 untuk $A = [0, 1]$ di $\mathbb{R}$. Tahap 2: setiap lingkungan memuat bilangan negatif dan bilangan positif kecil; tentukan akibat masing-masing bagi kedua definisi.

Jawaban. Salah. Titik 0 adalah titik batas $[0, 1]$, tetapi bukan titik terasing dari himpunan itu.

Solusi. Setiap lingkungan dari 0 memuat $0 \in A = [0, 1]$ dan bilangan negatif di luar A , jadi 0 titik batas. Lingkungan itu juga memuat bilangan positif kecil yang berbeda dari 0 dan berada di A . Maka tidak ada lingkungan yang beririsan dengan A tepat pada $\{0\}$; 0 bukan titik terasing.

Pemeriksaan J.9 Apakah titik terasing selalu titik batas? Nilai benar atau salah pernyataan “setiap titik terasing merupakan titik batas.” Rubrik: pilih ruang yang mempunyai lingkungan satu titik dan periksa apakah lingkungan itu harus memotong komplement himpunan.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan ruang diskret $X = \{a, b\}$ dan $A = \{a\}$. Tahap 2: periksa bola $B(a, \frac{1}{2})$.

Jawaban. Salah. Dalam ruang diskret $X = \{a, b\}$, titik a terasing dalam $A = \{a\}$, tetapi bukan titik batas A .

Solusi. Pada metrik diskret, $B(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$. Irisannya dengan A tepat $\{a\}$, maka a terasing. Namun bola itu tidak memuat b , satu-satunya titik $X \setminus A$. Jadi ada lingkungan a yang tidak memotong komplement, sehingga a bukan titik batas.

Pemeriksaan J.10 Ketertutupan himpunan kosong. Untuk ruang metrik sebarang X , tentukan apakah $\emptyset$ tertutup di X dan jelaskan. Rubrik: gunakan definisi tertutup melalui komplement dan sifat dasar himpunan terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: hitung $X \setminus \emptyset$. Tahap 2: ingat apakah seluruh ruang X terbuka dalam dirinya sendiri.

Jawaban. Ya. Himpunan $\emptyset$ tertutup di setiap ruang metrik X .

Solusi. Komplemen himpunan kosong di X adalah $X \setminus \emptyset = X$. Seluruh ruang X terbuka: bagi setiap $x \in X$, bola terbuka berpusat di x tetap merupakan subhimpunan X . Karena komplemennya terbuka, definisi menyatakan bahwa $\emptyset$ tertutup.

Pemeriksaan J.11 Ketertutupan seluruh ruang. Untuk ruang metrik sebarang X , tentukan apakah X tertutup di dirinya sendiri dan jelaskan. Rubrik: hitung komplemen relatifnya dan uji keterbukaan komplemen itu.

Petunjuk. Tahap 1: $X \setminus X$ tidak mempunyai anggota. Tahap 2: syarat keterbukaan yang dikuantifikasi atas semua anggota berlaku secara hampa bagi himpunan tanpa anggota.

Jawaban. Ya. Seluruh ruang X tertutup di X .

Solusi. Komplemen X relatif terhadap dirinya adalah $X \setminus X = \emptyset$. Himpunan kosong terbuka karena tidak ada titik yang dapat melanggar syarat keterbukaan. Maka komplemen X terbuka, sehingga X tertutup di X . Jadi X dan $\emptyset$ keduanya terbuka-tertutup.

Pemeriksaan J.12 Gabungan interval tertutup yang membesar. Di $\mathbb{R}$, tetapkan $A_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ untuk $n \geq 2$. Tentukan $\bigcup_{n \geq 2} A_n$ tanpa perlu membuktikannya. Rubrik: identifikasi titik ujung yang tidak pernah tercapai dan titik di antaranya yang akhirnya masuk ke salah satu interval.

Petunjuk. Tahap 1: semua A_n terletak di antara 0 dan 1, tanpa memuat kedua titik itu. Tahap 2: untuk $0 < x < 1$, pilih n sehingga $1/n$ lebih kecil daripada $\min\{x, 1 - x\}$.

Jawaban. Gabungannya adalah $\bigcup_{n \geq 2} A_n = (0, 1)$.

Solusi. Setiap $A_n \subseteq (0, 1)$. Sebaliknya, jika $0 < x < 1$, maka $\min\{x, 1 - x\} > 0$. Pilih $n \geq 2$ cukup besar agar $1/n \leq \min\{x, 1 - x\}$. Maka $1/n \leq x \leq 1 - 1/n$, jadi $x \in A_n$. Karena itu gabungannya tepat $(0, 1)$, sedangkan 0 dan 1 tidak pernah termasuk.

Pemeriksaan J.13 Apakah gabungan tersebut tertutup? Putuskan apakah $\bigcup_{n \geq 2} A_n$ dari tugas sebelumnya tertutup di $\mathbb{R}$. Rubrik: gunakan hasil gabungan dan jelaskan kegagalan definisi tertutup pada salah satu titik ujung.

Petunjuk. Tahap 1: gabungannya adalah $(0, 1)$. Tahap 2: uji apakah komplemen $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ mempunyai lingkungan terbuka di titik 0 atau 1.

Jawaban. Tidak. Gabungan itu adalah $(0, 1)$, yang tidak tertutup di $\mathbb{R}$.

Solusi. Komplemen $(0, 1)$ ialah $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Setiap bola terbuka di sekitar 0 memuat bilangan positif kecil yang tidak berada dalam komplemen, sehingga komplemen tidak terbuka. Jadi $(0, 1)$ tidak tertutup. Contoh ini menunjukkan bahwa gabungan tak berhingga dari himpunan-himpunan tertutup A_n dapat gagal tertutup.

Pemeriksaan J.14 Citra titik di luar prapeta. Untuk fungsi $f : X \rightarrow Y$ dan $B \subseteq Y$, andaikan $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Tentukan apa yang dapat disimpulkan tentang $f(x)$. Rubrik: uraikan keanggotaan komplemen dan definisi prapeta satu langkah demi satu langkah.

Petunjuk. Tahap 1: hipotesis berarti $x \notin f^{-1}(B)$. Tahap 2: ubah pernyataan itu menjadi pernyataan tentang apakah $f(x)$ termasuk B .

Jawaban. Berlaku $f(x) \notin B$, atau secara ekuivalen $f(x) \in Y \setminus B$.

Solusi. Dari $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ diperoleh $x \notin f^{-1}(B)$. Definisi prapeta menyatakan $x \in f^{-1}(B)$ jika dan hanya jika $f(x) \in B$. Jadi $f(x) \notin B$. Karena $f(x) \in Y$, kesimpulan itu sama dengan $f(x) \in Y \setminus B$.

Pemeriksaan J.15 Inklusi komplemen prapeta yang pertama. Dengan hipotesis panduan sebelumnya, simpulkan hubungan inklusi antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$. Rubrik: mulai dari anggota sebarang himpunan pertama dan tunjukkan bahwa ia anggota himpunan kedua.

Petunjuk. Tahap 1: panduan 14 memberi $f(x) \in Y \setminus B$. Tahap 2: terjemahkan kembali pernyataan itu menjadi keanggotaan x dalam suatu prapeta.

Jawaban. Diperoleh $X \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B)$.

Solusi. Ambil $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ sebarang. Panduan 14 memberi $f(x) \in Y \setminus B$, yang menurut definisi prapeta berarti $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$. Karena berlaku bagi setiap anggota ruas kiri, diperoleh $X \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B)$.

Pemeriksaan J.16 Citra titik dalam prapeta komplemen. Sekarang andaikan $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$. Tentukan apa yang dapat disimpulkan tentang $f(x)$. Rubrik: gunakan definisi prapeta dan uraikan arti keanggotaan dalam komplemen B .

Petunjuk. Tahap 1: keanggotaan dalam prapeta memberi $f(x) \in Y \setminus B$. Tahap 2: nyatakan konsekuensinya terhadap keanggotaan $f(x)$ dalam B .

Jawaban. Berlaku $f(x) \in Y \setminus B$, sehingga $f(x) \notin B$.

Solusi. Definisi prapeta langsung memberi $f(x) \in Y \setminus B$. Menjadi anggota komplemen B di Y berarti tidak menjadi anggota B ; oleh karena itu $f(x) \notin B$.

Pemeriksaan J.17 Inklusi komplemen prapeta yang kedua. Dengan hipotesis panduan 16, simpulkan hubungan inklusi antara $f^{-1}(Y \setminus B)$ dan $X \setminus f^{-1}(B)$. Rubrik: mulai dari anggota sebarang himpunan pertama dan buktikan keanggotaannya dalam himpunan kedua.

Petunjuk. Tahap 1: dari $f(x) \notin B$, simpulkan $x \notin f^{-1}(B)$. Tahap 2: karena $x \in X$, tuliskan keanggotaan itu sebagai keanggotaan dalam komplemen relatif.

Jawaban. Diperoleh $f^{-1}(Y \setminus B) \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$.

Solusi. Ambil $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$. Panduan 16 memberi $f(x) \notin B$, sehingga $x \notin f^{-1}(B)$. Karena domain f adalah X , juga $x \in X$; jadi $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Keumuman x membuktikan inklusi tersebut.

Pemeriksaan J.18 Prapeta dan komplemen. Tentukan hubungan tepat antara $X \setminus f^{-1}(B)$ dan $f^{-1}(Y \setminus B)$. Rubrik: gabungkan kedua inklusi yang telah diperoleh dan nyatakan identitas himpunannya.

Petunjuk. Tahap 1: panduan 15 memberi satu arah inklusi. Tahap 2: panduan 17 memberi arah sebaliknya; dua inklusi berlawanan menentukan kesamaan.

Jawaban. Identitasnya adalah $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$.

Solusi. Panduan 15 membuktikan $X \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B)$, sedangkan panduan 17 membuktikan inklusi sebaliknya. Dua himpunan yang saling memuat adalah sama. Jadi prapeta menghormati komplemen: $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$.

Pemeriksaan J.19 Fungsi kontinu menarik himpunan tertutup. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu antara ruang metrik dan C tertutup di Y . Tunjukkan, dengan identitas panduan 18, bahwa $f^{-1}(C)$ tertutup di X . Rubrik: mulai dari komplemen $Y \setminus C$, gunakan karakterisasi kekontinuan melalui prapeta himpunan terbuka, lalu kembali ke definisi tertutup.

Petunjuk. Tahap 1: karena C tertutup, $Y \setminus C$ terbuka. Tahap 2: kekontinuan membuat $f^{-1}(Y \setminus C)$ terbuka, dan panduan 18 mengidentifikasinya dengan komplemen $f^{-1}(C)$.

Jawaban. Berlaku $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$; ruas kanan terbuka, sehingga $f^{-1}(C)$ tertutup di X .

Solusi. Karena C tertutup, $Y \setminus C$ terbuka. Kekontinuan f menjamin $f^{-1}(Y \setminus C)$ terbuka di X . Identitas panduan 18 memberi

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C).$$

Jadi komplemen $f^{-1}(C)$ terbuka. Berdasarkan definisi, $f^{-1}(C)$ tertutup di X .

Pemeriksaan J.20 Prapeta tertutup memaksa kekontinuan. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ mempunyai sifat bahwa $f^{-1}(C)$ tertutup di X untuk setiap himpunan tertutup $C \subseteq Y$. Gunakan identitas panduan 18 untuk membuktikan bahwa f kontinu. Rubrik: mulai dari himpunan terbuka sebarang dan buktikan prapetanya terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: jika O terbuka, maka $C = Y \setminus O$ tertutup. Tahap 2: hipotesis dan panduan 18 menunjukkan bahwa $X \setminus f^{-1}(O)$ tertutup; ambil komplementnya.

Jawaban. Untuk setiap O terbuka di Y , himpunan $f^{-1}(O)$ terbuka di X . Karena itu f kontinu.

Solusi. Ambil $O \subseteq Y$ terbuka. Himpunan $C = Y \setminus O$ tertutup, sehingga $f^{-1}(C)$ tertutup di X . Identitas panduan 18 memberi

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O).$$

Jadi komplemen $f^{-1}(O)$ tertutup, yang berarti $f^{-1}(O)$ terbuka. Ini berlaku untuk setiap O terbuka; karakterisasi prapeta himpunan terbuka membuktikan f kontinu.

Pemeriksaan J.21 Memilih titik barisan dari bola yang menyusut. Misalkan x titik limit subhimpunan A dari ruang metrik X . Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, jelaskan mengapa $B(x, 1/n)$ memuat titik $a_n \in A$ yang berbeda dari x . Rubrik: periksa bahwa bola itu lingkungan dan terapkan setiap bagian definisi titik limit.

Petunjuk. Tahap 1: $1/n > 0$, jadi $B(x, 1/n)$ lingkungan terbuka dari x . Tahap 2: definisi titik limit berlaku untuk setiap lingkungan, bukan hanya radius tertentu.

Jawaban. Definisi titik limit menjamin pilihan $a_n \in B(x, 1/n) \cap (A \setminus \{x\})$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solusi. Ambil $n \in \mathbb{Z}^+$. Karena $1/n > 0$, bola $B(x, 1/n)$ adalah lingkungan dari x . Karena x titik limit A , setiap lingkungannya memuat titik A yang berbeda dari x . Maka ada $a_n \in A$ dengan $a_n \neq x$ dan $d(a_n, x) < 1/n$. Pilihan bagi setiap n menghasilkan barisan yang diminta.

Pemeriksaan J.22 Limit barisan dari titik-titik sekitar. Untuk barisan (a_n) yang dipilih pada panduan 21, tentukan $\lim a_n$ dan buktikan jawaban Anda. Rubrik: mulai dengan toleransi sebarang, pilih indeks secara Archimedes, lalu kendalikan semua suku pada ekor barisan.

Petunjuk. Tahap 1: konstruksi memberi $d(a_n, x) < 1/n$. Tahap 2: untuk $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$ dan bandingkan $1/n$ dengan $1/N$ ketika $n \geq N$.

Jawaban. Barisan tersebut konvergen ke x ; jadi $\lim a_n = x$.

Solusi. Ambil $\epsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, konstruksi panduan 21 memberi

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Jadi seluruh ekor mulai dari N berada dalam $B(x, \epsilon)$. Karena berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$, definisi memberi $a_n \rightarrow x$, sehingga $\lim a_n = x$. Syarat $a_n \neq x$ mempertahankan makna titik limit tanpa mengubah bukti konvergensi.

Panduan konsep dan tugas sumber, bagian kedua

Dua puluh satu panduan berikut melanjutkan urutan tugas sumber Bab 10: dua pembuktian tentang titik terasing, empat langkah karakterisasi himpunan tertutup melalui titik limit, delapan langkah tentang tutupan dan batas, serta tujuh tugas tentang limit barisan dalam himpunan tertutup. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan di bawah memparafrasakan sasaran sumber dan menyertakan rubrik keberhasilan. Teks panduan asli ini merupakan komponen terpisah yang tersedia di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan J.23 Dari titik terasing ke ekor konstan. Misalkan A subhimpunan ruang metrik (X, d) dan a titik terasing dari A . Buktikan bahwa setiap barisan (a_n) di A yang konvergen ke a pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) . Rubrik: gunakan satu lingkungan yang mengasingkan a , terapkan definisi konvergensi pada radiusnya, dan tunjukkan bahwa seluruh ekor barisan sama dengan a .

Petunjuk. Tahap 1: pilih $r > 0$ sehingga $B(a, r) \cap A = \{a\}$. Tahap 2: karena $a_n \rightarrow a$, cari N yang membuat $d(a_n, a) < r$ untuk setiap $n \geq N$.

Jawaban. Untuk suatu $r > 0$, satu-satunya anggota A di $B(a, r)$ ialah a . Konvergensi menempatkan seluruh ekor (a_n) di bola itu, sehingga $a_n = a$ pada akhirnya.

Solusi. Karena a titik terasing dari A , terdapat $r > 0$ dengan $B(a, r) \cap A = \{a\}$. Konvergensi $a_n \rightarrow a$, diterapkan pada toleransi r , memberi $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $d(a_n, a) < r$ apabila $n \geq N$. Untuk indeks tersebut, $a_n \in B(a, r)$; karena barisan berada di A , juga $a_n \in A$. Jadi $a_n \in B(a, r) \cap A = \{a\}$, dan akibatnya $a_n = a$ untuk setiap $n \geq N$. Inilah arti bahwa barisan pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) .

Pemeriksaan J.24 Dari ekor konstan ke titik terasing. Misalkan $a \in A$ dan setiap barisan di A yang konvergen ke a pada akhirnya sama dengan barisan konstan (a) . Buktikan bahwa a merupakan titik terasing dari A . Rubrik: sangkal keterasingan, bangun satu titik berbeda dari a di setiap bola berjari-jari $1/n$, lalu peroleh barisan penyangkal.

Petunjuk. Tahap 1: jika a tidak terasing, untuk setiap n pilih $a_n \in (B(a, 1/n) \cap A) \setminus \{a\}$. Tahap 2: buktikan $a_n \rightarrow a$, kemudian bandingkan dengan hipotesis tentang ekor konstan.

Jawaban. Jika a tidak terasing, ada barisan (a_n) di $A \setminus \{a\}$ dengan $d(a_n, a) < 1/n$. Barisan ini menuju a tetapi tidak pernah sama dengan a , bertentangan dengan hipotesis. Jadi a terasing.

Solusi. Andaikan, demi kontradiksi, bahwa a bukan titik terasing dari A . Maka tidak ada bola berpusat di a yang irisannya dengan A hanya $\{a\}$. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, kita dapat memilih $a_n \in (B(a, 1/n) \cap A) \setminus \{a\}$. Dengan demikian $d(a_n, a) < 1/n$ dan $a_n \neq a$ untuk semua n .

Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka $d(a_n, a) < 1/n \leq 1/N < \epsilon$; jadi $a_n \rightarrow a$. Hipotesis sekarang mengharuskan $a_n = a$ untuk semua indeks yang cukup besar, padahal konstruksi memastikan $a_n \neq a$ untuk setiap indeks. Kontradiksi tersebut membuktikan bahwa a titik terasing dari A .

Pemeriksaan J.25 Sasaran untuk membuktikan ketertutupan. Andaikan $C' \subseteq C$. Pada langkah pertama pembuktian bahwa C tertutup, nyatakan apa yang cukup ditunjukkan menurut definisi himpunan tertutup. Rubrik: identifikasi komplemen C di dalam X dan sifat topologis yang harus dimilikinya.

Petunjuk. Tahap 1: ingat kesetaraan antara ketertutupan suatu himpunan dan keterbukaan komplemennya. Tahap 2: terjemahkan keterbukaan ke syarat bola di setiap titik komplemen.

Jawaban. Cukup dibuktikan bahwa $X \setminus C$ terbuka, yaitu bahwa setiap $x \in X \setminus C$ mempunyai bola terbuka yang termuat dalam $X \setminus C$.

Solusi. Menurut definisi, C tertutup tepat ketika komplemennya $X \setminus C$ terbuka. Karena itu sasaran pembuktian dapat dinyatakan sebagai berikut: untuk setiap $x \in X \setminus C$, temukan $r > 0$ sehingga $B(x, r) \subseteq X \setminus C$. Sasaran ekuivalen inilah yang akan disangkal pada langkah berikutnya untuk menjalankan pembuktian dengan kontradiksi.

Pemeriksaan J.26 Akibat andaian bahwa himpunan tidak tertutup. Lanjutkan dengan pembuktian kontradiksi: andaikan C tidak tertutup. Apa yang dapat disimpulkan tentang $X \setminus C$? Rubrik: gunakan negasi langsung dari definisi ketertutupan, tanpa memakai dahulu asumsi $C' \subseteq C$.

Petunjuk. Tahap 1: C tertutup jika dan hanya jika $X \setminus C$ terbuka. Tahap 2: negasikan kedua sisi pernyataan ekuivalen itu.

Jawaban. Jika C tidak tertutup, maka komplemennya $X \setminus C$ tidak terbuka.

Solusi. Definisi ketertutupan menyatakan bahwa C tertutup jika dan hanya jika $X \setminus C$ terbuka. Oleh sebab itu, andaian bahwa C tidak tertutup memaksa $X \setminus C$ tidak terbuka. Secara berkuantor, kegagalan keterbukaan ini berarti ada sedikitnya satu titik komplemen yang tidak memiliki bola terbuka yang seluruhnya tinggal di dalam komplemen.

Pemeriksaan J.27 Titik komplemen yang juga titik limit. Uraikan akibat dari fakta bahwa $X \setminus C$ tidak terbuka. Hasilkan suatu $x \in X \setminus C$ dan buktikan bahwa $x \in C'$. Rubrik: nyatakan kegagalan syarat bola, tunjukkan bahwa setiap bola di x bertemu C , dan periksa bahwa titik pertemuan itu berbeda dari x .

Petunjuk. Tahap 1: ada $x \in X \setminus C$ sehingga untuk setiap $r > 0$, bola $B(x, r)$ tidak termuat dalam $X \setminus C$. Tahap 2: titik bola yang berada di luar komplemen terletak di C , dan tidak mungkin sama dengan x .

Jawaban. Ada $x \in X \setminus C$ sehingga setiap $B(x, r)$ bertemu C . Karena $x \notin C$, setiap titik pertemuan berbeda dari x ; jadi x adalah titik limit dari C .

Solusi. Karena $X \setminus C$ tidak terbuka, terdapat $x \in X \setminus C$ yang memenuhi: untuk setiap $r > 0$, bola $B(x, r)$ tidak termuat dalam $X \setminus C$. Maka setiap bola tersebut memuat suatu titik y_r yang tidak berada di $X \setminus C$, sehingga $y_r \in C$. Di sisi lain $x \notin C$, jadi $y_r \neq x$. Dengan demikian setiap lingkungan bola di x memuat anggota C yang berbeda dari x . Menurut definisi, $x \in C'$.

Pemeriksaan J.28 Kontradiksi yang menuntaskan ketertutupan. Jelaskan mengapa titik yang diperoleh pada langkah sebelumnya bertentangan dengan asumsi $C' \subseteq C$, lalu tuntaskan pembuktian. Rubrik: tulis kedua keanggotaan yang tidak serasi dan nyatakan kesimpulan tentang C .

Petunjuk. Tahap 1: konstruksi memberi sekaligus $x \in C'$ dan $x \in X \setminus C$. Tahap 2: terapkan inklusi $C' \subseteq C$ pada keanggotaan pertama.

Jawaban. Dari $x \in C'$ dan $C' \subseteq C$ diperoleh $x \in C$, sedangkan konstruksi memberi $x \notin C$. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa C tertutup.

Solusi. Langkah sebelumnya menghasilkan $x \in C'$. Asumsi awal $C' \subseteq C$ karenanya memberi $x \in C$. Namun titik yang sama dipilih dari $X \setminus C$, sehingga $x \notin C$. Ini kontradiksi. Jadi andaian bahwa C tidak tertutup harus ditolak; akibatnya C tertutup. Bersama arah pertama teorema, diperoleh karakterisasi bahwa C tertutup jika dan hanya jika memuat semua titik limitnya.

Pemeriksaan J.29 Sasaran sifat minimal tutupan. Misalkan $A \subseteq X$. Nyatakan apa yang harus dibuktikan agar $\bar{A}$ merupakan subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A . Rubrik: pisahkan ketertutupan dan keanggotaan A yang sudah diketahui dari syarat minimal terhadap setiap pesaing tertutup.

Petunjuk. Tahap 1: teorema sebelumnya sudah memberi bahwa $\bar{A}$ tertutup, dan definisinya memberi $A \subseteq \bar{A}$. Tahap 2: ambil sembarang himpunan tertutup C dengan $A \subseteq C$ dan tentukan inklusi yang harus dibuktikan.

Jawaban. Selain mengetahui bahwa $\bar{A}$ tertutup dan memuat A , harus dibuktikan bahwa untuk setiap himpunan tertutup C yang memuat A , berlaku $\bar{A} \subseteq C$.

Solusi. Sebuah himpunan tertutup yang memuat A adalah yang terkecil menurut inklusi apabila ia termuat dalam setiap himpunan tertutup lain yang memuat A . Sudah diketahui bahwa $\bar{A} = A \cup A'$ memuat A , dan teorema sebelumnya menyatakan bahwa $\bar{A}$ tertutup. Jadi bagian yang tersisa ialah: untuk sembarang $C \subseteq X$, jika C tertutup dan $A \subseteq C$, maka $\bar{A} \subseteq C$.

Pemeriksaan J.30 Mengurangi sasaran ke titik limit. Andaikan C tertutup dan $A \subseteq C$. Jelaskan mengapa, untuk membuktikan $\bar{A} \subseteq C$, cukup menunjukkan $A' \subseteq C$. Rubrik: uraikan definisi tutupan sebagai gabungan dan tangani kedua bagiannya.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan $\bar{A} = A \cup A'$. Tahap 2: inklusi satu bagian gabungan, yakni $A \subseteq C$, sudah menjadi hipotesis.

Jawaban. Karena $\bar{A} = A \cup A'$ dan $A \subseteq C$ sudah diketahui, satu-satunya inklusi yang masih perlu dibuktikan ialah $A' \subseteq C$.

Solusi. Ambil $x \in \bar{A}$. Dari $\bar{A} = A \cup A'$, berlaku $x \in A$ atau $x \in A'$. Pada kasus pertama, hipotesis $A \subseteq C$ langsung memberi $x \in C$. Karena itu, jika dapat dibuktikan bahwa setiap $x \in A'$ juga berada di C , kedua kasus memberi $x \in C$. Maka $A' \subseteq C$ bersama $A \subseteq C$ memang cukup untuk menyimpulkan $\bar{A} \subseteq C$.

Pemeriksaan J.31 Titik limit berpindah ke superset tertutup. Ambil $x \in A'$, dengan $A \subseteq C$ dan C tertutup. Tentukan apa yang dapat disimpulkan tentang x . Rubrik: mula-mula hubungkan titik limit A dengan titik limit C , lalu gunakan karakterisasi himpunan tertutup.

Petunjuk. Tahap 1: setiap lingkungan x memuat anggota $A \setminus \{x\}$, yang juga anggota $C \setminus \{x\}$. Tahap 2: karena C tertutup, ia memuat semua titik limitnya.

Jawaban. Inklusi $A \subseteq C$ membuat setiap titik limit A juga titik limit C . Jadi $x \in C'$, dan ketertutupan C memberi $x \in C$.

Solusi. Misalkan $x \in A'$. Setiap lingkungan N dari x memuat suatu $y \in A$ dengan $y \neq x$. Karena $A \subseteq C$, titik yang sama memenuhi $y \in C$ dan $y \neq x$. Jadi setiap lingkungan x memuat anggota C yang berbeda dari x , sehingga $x \in C'$. Himpunan C tertutup dan karenanya memuat semua titik limitnya; maka $x \in C$. Ini membuktikan bahwa $A' \subseteq C$.

Pemeriksaan J.32 Menuntaskan sifat minimal tutupan. Lengkapi pembuktian bahwa $\overline{A} \subseteq C$ untuk setiap subhimpunan tertutup C yang memuat A , lalu simpulkan sifat minimal $\overline{A}$. Rubrik: gabungkan dua inklusi bagian dari $A \cup A'$ dan nyatakan kuantifikasi atas C .

Petunjuk. Tahap 1: hipotesis memberi $A \subseteq C$, sedangkan langkah sebelumnya memberi $A' \subseteq C$. Tahap 2: ambil gabungan dan ingat bahwa C dipilih sembarang di antara superset tertutup A .

Jawaban. Dari $A \subseteq C$ dan $A' \subseteq C$ diperoleh $\overline{A} = A \cup A' \subseteq C$. Karena ini berlaku bagi setiap superset tertutup C dari A , tutupan A adalah yang terkecil.

Solusi. Misalkan C sembarang subhimpunan tertutup dari X dengan $A \subseteq C$. Untuk setiap $x \in A'$, panduan sebelumnya menunjukkan $x \in C$; jadi $A' \subseteq C$. Oleh karena itu

$$\overline{A} = A \cup A' \subseteq C.$$

Tutupan $\overline{A}$ sendiri tertutup dan memuat A . Karena ia termuat dalam setiap himpunan tertutup C yang memuat A , $\overline{A}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A .

Pemeriksaan J.33 Dua keanggotaan dari irisan tutupan. Misalkan $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Nyatakan dua keanggotaan yang langsung mengikuti dari fakta bahwa x berada dalam irisan itu. Rubrik: uraikan definisi keanggotaan dalam irisan tanpa menambahkan asumsi kasus.

Petunjuk. Tahap 1: keanggotaan dalam $P \cap Q$ berarti keanggotaan dalam P dan Q . Tahap 2: substitusikan kedua tutupan untuk P dan Q .

Jawaban. Berlaku sekaligus $x \in \overline{A}$ dan $x \in \overline{X \setminus A}$.

Solusi. Menurut definisi irisan, $x \in P \cap Q$ jika dan hanya jika $x \in P$ serta $x \in Q$. Dengan $P = \overline{A}$ dan $Q = \overline{X \setminus A}$, kita memperoleh $x \in \overline{A}$ dan $x \in \overline{X \setminus A}$. Kedua fakta ini akan dipakai terpisah sesuai apakah $x \in A$ atau $x \notin A$.

Pemeriksaan J.34 Kasus titik berada di dalam himpunan. Misalkan N sembarang lingkungan dari x dan tinjau kasus $x \in A$. Jelaskan mengapa N memuat sebuah titik di A dan sebuah titik di $X \setminus A$, lalu simpulkan sifat x . Rubrik: gunakan x sendiri untuk salah satu sisi dan keanggotaan dalam tutupan komplemen untuk sisi lain.

Petunjuk. Tahap 1: karena $x \in A$ dan $x \in N$, lingkungan itu sudah memuat titik A . Tahap 2: dari $x \in \overline{X \setminus A}$ tetapi $x \notin X \setminus A$, simpulkan bahwa x titik limit komplemen.

Jawaban. Lingkungan N memuat $x \in A$. Selain itu, $x \in (X \setminus A)'$, sehingga N memuat titik $X \setminus A$. Jadi setiap lingkungan x bertemu kedua sisi, dan $x \in \text{Bdry}(A)$.

Solusi. Ambil sembarang lingkungan N dari x . Karena $x \in A$ dan setiap lingkungan memuat titik pusatnya, N memuat sebuah titik di A , yakni x . Kita juga mengetahui $x \in \overline{X \setminus A}$. Karena dalam kasus ini $x \notin X \setminus A$, definisi tutupan $\overline{X \setminus A} = (X \setminus A) \cup (X \setminus A)'$ memaksa $x \in (X \setminus A)'$. Maka N memuat suatu titik dari $X \setminus A$ yang berbeda dari x . Karena N sebarang dan bertemu A maupun komplemennya, x adalah titik batas dari A .

Pemeriksaan J.35 Kasus titik berada di luar himpunan. Dengan N sembarang lingkungan dari x , tinjau kasus $x \notin A$. Jelaskan mengapa N memuat sebuah titik di A dan sebuah titik di $X \setminus A$, lalu simpulkan sifat x . Rubrik: tukarkan peran himpunan dan komplemennya dari kasus sebelumnya.

Petunjuk. Tahap 1: kini $x \in X \setminus A$, jadi titik luar sudah tersedia di N . Tahap 2: dari $x \in \overline{A}$ tetapi $x \notin A$, simpulkan $x \in A'$ dan gunakan definisinya.

Jawaban. Lingkungan N memuat $x \in X \setminus A$. Karena $x \in A'$, lingkungan yang sama juga memuat titik A . Jadi N bertemu kedua sisi dan $x \in \text{Bdry}(A)$.

Solusi. Ambil sembarang lingkungan N dari x . Andaian $x \notin A$ berarti $x \in X \setminus A$; karena $x \in N$, lingkungan tersebut memuat titik di luar A . Di sisi lain, $x \in \overline{A} = A \cup A'$ dan $x \notin A$, sehingga $x \in A'$. Oleh definisi titik limit, N memuat suatu anggota A yang berbeda dari x . Jadi setiap lingkungan x memuat titik dari A dan dari $X \setminus A$. Dengan demikian $x \in \text{Bdry}(A)$.

Pemeriksaan J.36 Menyimpulkan inklusi ke dalam batas. Gabungkan kedua kasus sebelumnya untuk membuktikan $\overline{A \cap X \setminus A} \subseteq \text{Bdry}(A)$. Rubrik: jelaskan bahwa pemisahan kasus mencakup setiap $x \in X$ dan kembalikan kesimpulan titik-sebarang menjadi inklusi himpunan.

Petunjuk. Tahap 1: setiap titik $x \in X$ memenuhi tepat satu di antara $x \in A$ dan $x \notin A$. Tahap 2: kedua cabang telah memberi kesimpulan yang sama, yaitu $x \in \text{Bdry}(A)$.

Jawaban. Baik ketika $x \in A$ maupun ketika $x \notin A$, setiap lingkungan x bertemu A dan komplementnya. Maka setiap x dalam irisan kedua tutupan berada di $\text{Bdry}(A)$, sehingga inklusi yang diminta berlaku.

Solusi. Ambil sembarang $x \in \overline{A \cap X \setminus A}$. Jika $x \in A$, panduan 34 menunjukkan bahwa setiap lingkungan x memuat titik dari A dan dari $X \setminus A$. Jika $x \notin A$, panduan 35 memberikan sifat yang sama. Kedua kasus mencakup semua kemungkinan, sehingga selalu $x \in \text{Bdry}(A)$. Karena x dipilih sembarang,

$$\overline{A \cap X \setminus A} \subseteq \text{Bdry}(A).$$

Bersama inklusi arah lain yang telah dibuktikan, hasil ini memberi $\text{Bdry}(A) = \overline{A \cap X \setminus A}$.

Pemeriksaan J.37 Limit barisan di dalam dua himpunan. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, tentukan limit barisan $a_n = 1/(n+1)$, yang seluruh sukunya berada di $A = (0, 1)$ dan $B = [0, 1]$. Rubrik: ajukan kandidat limit dan verifikasi langsung dengan definisi ϵ - N . Cetakan sumber menulis $a_n = 1/n$, tetapi suku pertamanya tidak berada di A ; edisi ini menggeser indeks satu langkah sesuai emendasi tercatat O003-C100 agar syarat soal berlaku bagi semua suku.

Petunjuk. Tahap 1: uji titik 0 dan hitung $d_E(a_n, 0) = 1/(n+1)$. Tahap 2: untuk $\epsilon > 0$, pilih N yang cukup besar sehingga $1/(N+1) < \epsilon$.

Jawaban. Limit barisan tersebut ialah 0.

Solusi. Ambil $\epsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d_E(a_n, 0) = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Jadi semua suku pada ekor barisan berada sedekat yang diminta dari 0, dan $\lim a_n = 0$.

Pemeriksaan J.38 Limit tidak berada di himpunan terbuka. Tentukan apakah $\lim a_n$ dari panduan sebelumnya berada di $A = (0, 1)$. Rubrik: gunakan nilai limit yang telah diperoleh dan periksa syarat keanggotaan interval terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: substitusikan $\lim a_n = 0$. Tahap 2: anggota $(0, 1)$ harus lebih besar secara ketat dari 0.

Jawaban. Tidak. Karena $\lim a_n = 0$ dan $0 \notin (0, 1)$, limit tidak berada di A .

Solusi. Panduan 37 menunjukkan bahwa $\lim a_n = 0$. Interval $A = (0, 1)$ berisi tepat bilangan real x dengan $0 < x < 1$; titik ujung 0 tidak disertakan. Oleh karena itu $\lim a_n = 0 \notin A$. Contoh ini memperlihatkan bahwa suatu barisan yang seluruh sukunya berada dalam himpunan terbuka tidak harus memiliki limit di himpunan tersebut.

Pemeriksaan J.39 Limit berada di himpunan tertutup. Tentukan apakah $\lim a_n$ berada di $B = [0, 1]$. Rubrik: gunakan limit 0 dan periksa apakah tanda kurung siku menyertakan titik ujung.

Petunjuk. Tahap 1: interval $[0, 1]$ memuat kedua titik ujungnya. Tahap 2: bandingkan fakta ini dengan $\lim a_n = 0$.

Jawaban. Ya. Titik 0 berada di $[0, 1]$, sehingga $\lim a_n \in B$.

Solusi. Karena $B = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, titik ujung 0 merupakan anggota B . Dari $\lim a_n = 0$ diperoleh $\lim a_n \in B$. Berbeda dengan A , himpunan B tidak kehilangan titik batas ini.

Pemeriksaan J.40 Dua perbedaan yang menjelaskan perilaku limit. Sebutkan dua perbedaan penting antara $A = (0, 1)$ dan $B = [0, 1]$ yang menjelaskan mengapa limit barisan berada di B tetapi tidak di A . Gunakan terminologi bagian ini. Rubrik: bandingkan jenis keterbukaan atau ketertutupan dan perlakuan kedua himpunan terhadap titik limit atau titik batasnya.

Petunjuk. Tahap 1: klasifikasikan $(0, 1)$ dan $[0, 1]$ sebagai terbuka atau tertutup di $\mathbb{R}$. Tahap 2: periksa apakah masing-masing memuat titik limit sekaligus titik batas 0 dan 1.

Jawaban. Himpunan A terbuka dan tidak tertutup, sedangkan B tertutup dan tidak terbuka. Selain itu, A tidak memuat titik batas sekaligus titik limit 0 dan 1, sedangkan B memuat keduanya.

Solusi. Perbedaan pertama ialah sifat topologisnya: $A = (0, 1)$ terbuka tetapi tidak tertutup dalam $\mathbb{R}$, sedangkan $B = [0, 1]$ tertutup tetapi tidak terbuka. Perbedaan kedua menyangkut titik tepi: 0 dan 1 merupakan titik batas dan titik limit dari kedua interval, tetapi A tidak memuat keduanya sedangkan B memuat keduanya. Khususnya, limit 0 dari (a_n) hilang dari A tetapi dipertahankan oleh B . Hal ini mencerminkan karakterisasi bahwa himpunan tertutup memuat semua titik limitnya.

Pemeriksaan J.41 Memilih karakterisasi ketertutupan yang relevan. Sebutkan tiga cara untuk menunjukkan bahwa subhimpunan ruang metrik adalah himpunan tertutup, lalu pilih cara yang paling sesuai apabila hipotesis berbicara tentang limit setiap barisan di C . Rubrik: berikan tiga kriteria yang ekuivalen dan jelaskan mengapa kriteria titik limit cocok dengan informasi barisan.

Petunjuk. Tahap 1: ingat kriteria melalui komplemen, titik limit, dan tutupan. Tahap 2: titik limit menghasilkan barisan di C yang konvergen ke titik tersebut.

Jawaban. Tiga cara ialah membuktikan $X \setminus C$ terbuka, membuktikan $C' \subseteq C$, atau membuktikan $C = \overline{C}$. Cara kedua paling relevan karena sebuah titik limit c dari C dapat diwujudkan sebagai limit suatu barisan di C .

Solusi. Tiga karakterisasi yang dapat dipakai adalah: C tertutup apabila $X \setminus C$ terbuka; C tertutup apabila ia memuat semua titik limitnya, yakni $C' \subseteq C$; dan C tertutup apabila $C = \overline{C}$. Kriteria melalui titik limit adalah pilihan paling langsung di sini. Jika $c \in C'$, teorema tentang titik limit menyediakan barisan (c_n) di C yang menuju c , tepat jenis objek yang dapat dimasukkan ke hipotesis soal. Karakterisasi melalui batas, $\text{Bdry}(C) \subseteq C$, juga setara, tetapi tidak diperlukan untuk argumen ini.

Pemeriksaan J.42 Barisan yang mendekati sebuah titik limit. Misalkan c titik limit dari C . Nyatakan kesimpulan berurutan yang diperlukan untuk memakai hipotesis bahwa setiap barisan konvergen di C memiliki limit di C . Rubrik: bangun atau kutip keberadaan barisan di C , nyatakan limitnya, dan jaga agar semua sukunya berada di C .

Petunjuk. Tahap 1: untuk setiap n , pilih $c_n \in (B(c, 1/n) \cap C) \setminus \{c\}$. Tahap 2: gunakan $d(c_n, c) < 1/n$ untuk membuktikan $c_n \rightarrow c$.

Jawaban. Terdapat barisan (c_n) di C , bahkan dengan $c_n \neq c$, yang konvergen ke c .

Solusi. Karena $c \in C'$, setiap bola di c memuat anggota C yang berbeda dari c . Untuk tiap $n \in \mathbb{Z}^+$, pilih $c_n \in (B(c, 1/n) \cap C) \setminus \{c\}$. Maka seluruh suku c_n berada di C dan $d(c_n, c) < 1/n$. Jika $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$. Untuk $n \geq N$, $d(c_n, c) < 1/n \leq 1/N < \epsilon$. Jadi $c_n \rightarrow c$. Ini juga merupakan penerapan langsung teorema bahwa setiap titik limit suatu himpunan adalah limit sebuah barisan di himpunan itu.

Pemeriksaan J.43 Menuntaskan kriteria barisan untuk himpunan tertutup. Andaikan setiap barisan (c_n) di C yang konvergen ke suatu $c \in X$ memenuhi $c \in C$. Gunakan hasil panduan sebelumnya untuk menyelesaikan pembuktian bahwa C tertutup. Rubrik: terapkan hipotesis kepada barisan yang dibangun, generalisasikan dari satu titik limit sebarang, lalu gunakan karakterisasi ketertutupan.

Petunjuk. Tahap 1: barisan dari panduan 42 berada di C dan menuju c , sehingga hipotesis menentukan keanggotaan c . Tahap 2: karena $c \in C'$ dipilih sembarang, simpulkan satu inklusi himpunan.

Jawaban. Hipotesis memberi $c \in C$ untuk setiap $c \in C'$. Jadi $C' \subseteq C$, dan karakterisasi melalui titik limit menyatakan bahwa C tertutup.

Solusi. Ambil sembarang $c \in C'$. Panduan 42 menghasilkan barisan (c_n) di C dengan $c_n \rightarrow c$. Hipotesis soal berlaku bagi setiap barisan di C yang konvergen ke titik di X ; karena itu hipotesis tersebut memberi $c \in C$. Titik $c \in C'$ dipilih sembarang, sehingga $C' \subseteq C$. Menurut karakterisasi himpunan tertutup melalui titik limit, inklusi ini membuktikan bahwa C tertutup. Dengan demikian kedua arah kriteria barisan telah lengkap: C tertutup jika dan hanya jika setiap barisan konvergen di C memiliki limit di C .

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Delapan belas panduan berikut mengikuti, dalam urutan baca, delapan belas perintah atomik pertama pada latihan penutup Bab 10. Tugas yang berulang tetap diperlakukan sebagai kesempatan pembuktian tersendiri. Uraian ini merupakan materi pendamping asli untuk belajar mandiri, bukan jawaban dari penulis karya sumber, dan tersedia di bawah lisensi Creative Commons Atribusi 4.0 Internasional (CC BY 4.0).

Pemeriksaan J.44 Klasifikasi cakram satuan tertutup. Untuk cakram $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ dalam metrik Euklides, tentukan interior, batas, titik limit, dan titik terasingnya, lalu putuskan apakah D terbuka atau tertutup. *Rubrik.* Jawaban lengkap harus membedakan pertidaksamaan ketat dari persamaan pada lingkaran satuan dan membenarkan setiap klasifikasi dengan bola terbuka.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $\|z\|_2 < 1$, bandingkan radius bola dengan $1 - \|z\|_2$. Jika $\|z\|_2 = 1$, gerakkan titik sedikit ke arah dalam dan ke arah luar sepanjang garis radial.

Langkah 2. Untuk menunjukkan bahwa setiap titik cakram adalah titik limit, dekatkan titik itu dengan titik cakram lain; di pusat, pilih arah tetap. Gunakan hasil ini untuk menguji keterbukaan dan ketertutupan.

Jawaban. $\text{Int}(D) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\|_2 < 1\}$, $\text{Bdry}(D) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\|_2 = 1\}$, dan $D' = D$. Tidak ada titik terasing. Cakram D tidak terbuka, tetapi tertutup.

Solusi. Tuliskan $\|z\|_2$ untuk jarak z dari pusat. Jika $\|z\|_2 < 1$, bola berjari-jari $1 - \|z\|_2$ di z termuat dalam D , karena $\|w\|_2 \leq \|w - z\|_2 + \|z\|_2 < 1$. Jadi titik-titik dengan norma kurang dari 1 tepat merupakan titik interior. Bila $\|z\|_2 = 1$, setiap bola di z memuat $(1 - t)z \in D$ dan $(1 + t)z \notin D$ untuk $t > 0$ yang cukup kecil. Maka lingkaran satuan adalah batas. Titik dengan norma lebih dari 1 mempunyai bola berjari-jari $\|z\|_2 - 1$ yang tidak memotong D , sehingga tidak ada titik batas lain.

Setiap $z \in D$ didekati oleh titik lain dari D : untuk $z \neq 0$ gunakan $(1 - 1/n)z$ untuk n cukup besar, sedangkan untuk $z = 0$ gunakan $(1/n, 0)$. Jadi $D' = D$ dan tidak ada titik terasing. Titik pada lingkaran bukan titik interior, sehingga D tidak terbuka. Komplementnya terbuka oleh bola yang baru dibangun untuk $\|z\|_2 > 1$; karena itu D tertutup.

Pemeriksaan J.45 Klasifikasi himpunan bilangan rasional. Pandang $\mathbb{Q}$ sebagai subhimpunan dari garis real bermetrik standar. Tentukan interior, batas, titik limit, dan titik terasingnya, lalu tentukan apakah $\mathbb{Q}$ terbuka atau tertutup. *Rubrik.* Gunakan kerapatan bilangan rasional dan irasional di setiap interval terbuka.

Petunjuk. *Langkah 1.* Setiap bola terbuka pada garis real adalah suatu interval dan memuat bilangan rasional sekaligus irasional.

Langkah 2. Bahkan jika pusat bola rasional, ada rasional lain di dalam bola. Terapkan pengamatan ini pada definisi interior, batas, titik limit, dan titik terasing.

Jawaban. $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{Bdry}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, dan $\mathbb{Q}^i = \emptyset$. Maka $\mathbb{Q}$ tidak terbuka dan tidak tertutup dalam $\mathbb{R}$.

Solusi. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$, interval $(x - r, x + r)$ memuat bilangan rasional dan irasional. Karena itu tidak ada bola di suatu anggota $\mathbb{Q}$ yang termuat dalam $\mathbb{Q}$, sehingga interiornya kosong. Setiap bola berpusat di sebarang $x \in \mathbb{R}$ memotong $\mathbb{Q}$ dan komplementnya, maka setiap bilangan real adalah titik batas: $\text{Bdry}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Kerapatan rasional juga menjamin bahwa setiap bola di x memuat anggota $\mathbb{Q}$ yang berbeda dari x ; jadi $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Akibatnya tidak ada anggota rasional yang terasing. Interior kosong membuat $\mathbb{Q}$ tidak terbuka, dan $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ membuatnya tidak tertutup.

Pemeriksaan J.46 Klasifikasi himpunan $\{1/n\}$. Untuk $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}$, tentukan interior, batas, titik limit, dan titik terasingnya, lalu putuskan apakah A terbuka atau tertutup. *Rubrik.* Perlakukan 0 secara terpisah dan tunjukkan secara eksplisit bahwa setiap $1/n$ dapat dipisahkan dari semua suku lainnya.

Petunjuk. *Langkah 1.* Barisan $1/n$ menuju 0. Di sekitar $1/n$, ambil radius yang lebih kecil daripada separuh jarak ke tetangga terdekat dalam daftar menurun tersebut.

Langkah 2. Jika $x \notin A \cup \{0\}$, cari celah terbuka di antara dua suku berurutan yang memuat x , atau gunakan bahwa x berada di luar $[0, 1]$.

Jawaban. $\text{Int}(A) = \emptyset$, $\text{Bdry}(A) = A \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$, dan $A^i = A$. Himpunan A tidak terbuka dan tidak tertutup.

Solusi. Karena $1/n \rightarrow 0$, setiap bola di 0 memuat suatu $1/n$; jadi 0 adalah titik limit dan berada dalam $\overline{A}$. Untuk $n \geq 2$, ambil radius positif yang lebih kecil daripada $\frac{1}{2} \min\{1/(n-1) - 1/n, 1/n - 1/(n+1)\}$; untuk $n = 1$ ambil, misalnya, radius $1/4$. Bola tersebut beririsan dengan A hanya di $1/n$. Maka setiap anggota A terasing dan bukan titik limit.

Jika $x \notin A \cup \{0\}$, ada bola di x yang tidak memotong A . Hal ini langsung untuk $x < 0$ atau $x > 1$; untuk $0 < x < 1$, sifat Archimedes dan urutan menurun $1/n$ menempatkan x secara ketat di antara dua suku berurutan, sehingga jarak positif ke kedua ujung memberi bola yang diinginkan. Jadi $\overline{A} = A \cup \{0\}$ dan satu-satunya titik limit ialah 0. Tidak ada anggota A yang interior, sebab setiap interval di sekitarnya memuat bilangan yang bukan anggota A . Dengan demikian interior kosong, sehingga batas sama dengan tutupan, yaitu $A \cup \{0\}$. Himpunan itu tidak terbuka dan tidak tertutup; kegagalan ketertutupan disaksikan oleh $0 \notin A$.

Pemeriksaan J.47 Ketertutupan bola tertutup. Dalam ruang metrik (X, d) , untuk $a \in X$ dan $r > 0$, buktikan atau sangkal bahwa $B[a, r] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ selalu tertutup. *Rubrik.* Putuskan klaim untuk metrik sebarang, bukan hanya metrik Euklides, dan berikan bola yang berada di dalam komplemen.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \notin B[a, r]$, maka $d(a, x) - r$ positif.

Langkah 2. Untuk y yang cukup dekat dengan x , gunakan pertidaksamaan segitiga terbalik untuk membuktikan $d(a, y) > r$.

Jawaban. Klaim benar: setiap bola tertutup dalam setiap ruang metrik adalah himpunan tertutup.

Solusi. Ambil $x \in X \setminus B[a, r]$. Maka $\delta = d(a, x) - r > 0$. Jika $y \in B(x, \delta)$, pertidaksamaan segitiga memberi

$$d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - \delta = r.$$

Jadi $y \notin B[a, r]$, dan $B(x, \delta) \subseteq X \setminus B[a, r]$. Setiap titik komplemen merupakan titik interior komplemen; komplemen itu terbuka, sehingga $B[a, r]$ tertutup.

Pemeriksaan J.48 Batas kosong mencirikan himpunan terbuka-tertutup. Temukan dan buktikan syarat pada $\text{Bdry}(A)$ yang ekuivalen dengan suatu subhimpunan A sekaligus terbuka dan tertutup. *Rubrik.* Isian yang benar harus berlaku bagi semua ruang metrik, termasuk $A = \emptyset$ dan $A = X$.

Petunjuk. *Langkah 1.* Ingat bahwa titik batas adalah titik yang setiap bolanya bertemu A dan $X \setminus A$.

Langkah 2. Jika batas kosong, terapkan definisi itu secara terpisah pada titik di A dan titik di komplemennya untuk mendapatkan bola yang seluruhnya berada pada salah satu sisi.

Jawaban. Suatu $A \subseteq X$ sekaligus terbuka dan tertutup jika dan hanya jika $\text{Bdry}(A) = \emptyset$.

Solusi. Andaikan A terbuka dan tertutup. Untuk $x \in A$, ada bola di x yang termuat dalam A ; untuk $x \notin A$, ketertutupan A membuat komplemennya terbuka, sehingga ada bola di x yang termuat dalam komplemen. Dalam kedua kasus, sebuah bola gagal bertemu salah satu sisi, maka tidak ada titik batas.

Sebaliknya, andaikan $\text{Bdry}(A) = \emptyset$. Jika $x \in A$, suatu bola di x pasti bertemu A di x . Karena x bukan titik batas, ada bola di x yang tidak bertemu komplemen, jadi termuat dalam A . Dengan demikian A terbuka. Argumen yang sama untuk $x \in X \setminus A$ menunjukkan bahwa komplemen A terbuka, sehingga A tertutup. Kesetaraan ini juga mencakup himpunan kosong dan seluruh ruang.

Pemeriksaan J.49 Menguraikan $A \cup A'$. Jika A' adalah himpunan titik limit dan A^i himpunan titik terasing dari A , buktikan $A' \cup A^i = A \cup A'$. Cetakan sumber menampilkan $A \cup A^i = A \cup A'$, yang tidak benar secara umum; edisi ini memakai identitas yang dimaksud sesuai emendasi tercatat O003-C102. *Rubrik.* Buktikan kedua inklusi dan jelaskan dikotomi bagi setiap anggota A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Menurut definisi, setiap titik terasing dari A merupakan anggota A .

Langkah 2. Untuk $x \in A$, jika $x \notin A'$, negasi definisi titik limit menghasilkan bola yang tidak memuat anggota A selain x .

Jawaban. Identitas benar: anggota A yang bukan titik limit tepat merupakan titik terasing, sedangkan $A^i \subseteq A$.

Solusi. Karena titik terasing, menurut definisi, harus menjadi anggota A , berlaku $A^i \subseteq A$. Maka $A' \cup A^i \subseteq A' \cup A$. Untuk inklusi sebaliknya, ambil $x \in A \cup A'$. Jika $x \in A'$, tidak ada lagi yang perlu dibuktikan. Jika $x \in A \setminus A'$, ada bola terbuka di x yang tidak memuat titik A selain x ; karenanya $x \in A^i$. Jadi $A \cup A' \subseteq A' \cup A^i$, dan kedua himpunan sama.

Pemeriksaan J.50 Titik limit dan titik terasing tidak bertumpang tindih. Buktikan $A' \cap A^i = \emptyset$. *Rubrik.* Bandingkan tuntutan “setiap bola” dalam definisi titik limit dengan “ada sebuah bola” dalam definisi titik terasing.

Petunjuk. *Langkah 1.* Andaikan $x \in A^i$ dan pilih radius yang mengisolasi x dari $A \setminus \{x\}$.

Langkah 2. Bola yang sama menyangkal syarat agar x menjadi titik limit.

Jawaban. Identitas benar. Bola yang menyaksikan keterasingan suatu titik sekaligus membuktikan bahwa titik itu bukan titik limit.

Solusi. Jika $x \in A^i$, terdapat $r > 0$ sehingga $B(x, r) \cap A = \{x\}$. Jadi bola ini tidak memuat anggota A yang berbeda dari x . Namun titik limit menuntut agar setiap bola di x memuat anggota semacam itu. Karena itu $x \notin A'$. Tidak ada titik yang dapat berada sekaligus di A' dan A^i , sehingga irisannya kosong.

Pemeriksaan J.51 Setiap anggota adalah titik limit atau titik terasing. Buktikan $A \subseteq A' \cup A^i$. *Rubrik.* Mulailah dengan anggota sebarang $x \in A$ dan pisahkan kasus menurut apakah x merupakan titik limit.

Petunjuk. *Langkah 1.* Kasus $x \in A'$ langsung selesai.

Langkah 2. Jika $x \notin A'$, negasikan kuantor pada definisi titik limit untuk memperoleh satu bola yang hanya dapat memotong A di pusatnya.

Jawaban. Inklusi benar. Setiap $x \in A$ yang bukan titik limit memiliki lingkungan yang mengisolasinya, sehingga termasuk A^i .

Solusi. Ambil $x \in A$. Jika $x \in A'$, jelas $x \in A' \cup A^i$. Jika $x \notin A'$, tidak benar bahwa setiap bola di x memuat titik A yang berbeda dari x . Jadi terdapat $r > 0$ dengan $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Karena $x \in A \cap B(x, r)$, diperoleh $B(x, r) \cap A = \{x\}$, sehingga $x \in A^i$. Kedua kasus membuktikan inklusi.

Pemeriksaan J.52 Penutup melalui limit barisan. Buktikan bahwa $x \in \overline{A}$ jika dan hanya jika ada barisan titik-titik di A yang konvergen ke x . *Rubrik.* Perhatikan bahwa barisan konstan diperlukan ketika $x \in A$; ketika $x \notin A$, pilih titik dari bola dengan radius yang menuju nol.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \in A$, ambil $a_n = x$. Jika $x \in \overline{A} \setminus A$, pilih $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$.

Langkah 2. Untuk arah balik, gunakan konvergensi untuk menunjukkan bahwa setiap bola di x bertemu A .

Jawaban. Ekuivalensi benar. Keanggotaan dalam tutupan memungkinkan pemilihan $a_n \in A$ dengan $d(a_n, x) < 1/n$ (atau barisan konstan), sedangkan limit barisan di A memaksa setiap bola di x memotong A .

Solusi. Andaikan $x \in \bar{A}$. Jika $x \in A$, barisan konstan $a_n = x$ berada dalam A dan konvergen ke x . Jika $x \notin A$, setiap bola di x bertemu A ; untuk tiap n , pilih $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$. Maka $d(a_n, x) < 1/n \rightarrow 0$, jadi $a_n \rightarrow x$.

Sebaliknya, misalkan $a_n \in A$ dan $a_n \rightarrow x$. Untuk setiap $r > 0$, ada N sehingga $d(a_N, x) < r$. Jadi $a_N \in A \cap B(x, r)$, sehingga setiap bola di x memotong A . Inilah karakterisasi keanggotaan dalam tutupan, maka $x \in \bar{A}$.

Pemeriksaan J.53 Penutup sebagai irisan semua superset tertutup. Buktikan bahwa $\bar{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A . *Rubrik.* Tunjukkan bahwa tutupan itu sendiri merupakan superset tertutup dan bahwa ia termuat dalam setiap superset tertutup lain.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika F tertutup dan $A \subseteq F$, maka $\bar{A} \subseteq \bar{F} = F$.

Langkah 2. Masukkan $\bar{A}$ sendiri ke dalam keluarga semua superset tertutup A , lalu bandingkan kedua inklusi terhadap irisannya.

Jawaban. Jika $\mathcal{F}$ menyatakan keluarga semua $F \subseteq X$ yang tertutup dan memuat A , maka $\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

Solusi. Penutup $\bar{A}$ tertutup dan memuat A . Selanjutnya, jika F tertutup serta $A \subseteq F$, kemonotonan tutupan memberi $\bar{A} \subseteq \bar{F} = F$. Secara langsung, kemonotonan ini juga terlihat karena setiap bola di titik $\bar{A}$ bertemu A , maka bertemu F , sehingga titik itu berada dalam $\bar{F}$.

Misalkan $G = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Inklusi sebelumnya menunjukkan $\bar{A} \subseteq G$. Karena $\bar{A} \in \mathcal{F}$, irisan G termuat dalam $\bar{A}$. Jadi $G = \bar{A}$.

Pemeriksaan J.54 Interior sebagai gabungan semua subhimpunan terbuka. Buktikan bahwa $\text{Int}(A)$ adalah gabungan semua himpunan terbuka yang termuat di dalam A . *Rubrik.* Identifikasi interior sebagai subhimpunan terbuka terbesar dari A melalui dua inklusi.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika U terbuka dan $U \subseteq A$, setiap $x \in U$ mempunyai bola di dalam U , sehingga $x \in \text{Int}(A)$.

Langkah 2. Interior A sendiri terbuka dan termuat dalam A , jadi ia merupakan salah satu himpunan dalam keluarga yang digabungkan.

Jawaban. Jika $\mathcal{U}$ menyatakan keluarga semua $U \subseteq A$ yang terbuka dalam X , maka $\text{Int}(A) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Solusi. Ambil $U \in \mathcal{U}$ dan $x \in U$. Karena U terbuka, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq U \subseteq A$. Maka $x \in \text{Int}(A)$. Ini berlaku untuk setiap U , sehingga $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subseteq \text{Int}(A)$.

Sebaliknya, $\text{Int}(A)$ terbuka dan termuat dalam A , maka $\text{Int}(A) \in \mathcal{U}$. Karena setiap anggota suatu keluarga termuat dalam gabungannya, $\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Kedua inklusi membuktikan kesamaan.

Pemeriksaan J.55 Penutup sebagai gabungan saling lepas. Buktikan bahwa $\bar{A}$ adalah gabungan saling lepas dari $\text{Int}(A)$ dan $\text{Bdry}(A)$. *Rubrik.* Tunjukkan baik kesamaan gabungan maupun kosongnya irisan kedua bagian.

Petunjuk. *Langkah 1.* Titik interior memiliki sebuah bola yang tidak bertemu komplemen, jadi tidak mungkin menjadi titik batas.

Langkah 2. Jika $x \in \bar{A}$ tetapi bukan titik interior, setiap bola di x bertemu A dan juga bertemu komplemennya.

Jawaban. Berlaku $\bar{A} = \text{Int}(A) \cup \text{Bdry}(A)$: kedua himpunan menutupi tutupan dan irisannya kosong.

Solusi. Setiap titik interior A berada dalam $A \subseteq \bar{A}$. Setiap titik batas juga berada dalam $\bar{A}$, sebab setiap bolanya bertemu A . Jadi $\text{Int}(A) \cup \text{Bdry}(A) \subseteq \bar{A}$.

Ambil $x \in \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$. Setiap bola di x bertemu A karena $x \in \bar{A}$. Karena x bukan interior, tidak ada bola di x yang termuat dalam A ; jadi setiap bola juga bertemu $X \setminus A$. Maka $x \in \text{Bdry}(A)$, yang membuktikan inklusi sebaliknya. Akhirnya, titik interior memiliki satu bola yang tidak bertemu komplemen, sedangkan

titik batas menuntut semua bola bertemu komplemen. Karena itu $\text{Int}(A) \cap \text{Bdry}(A) = \emptyset$, sehingga gabungan tersebut saling lepas.

Pemeriksaan J.56 Penutup komplemen dan komplemen interior. Buktikan identitas $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{Int}(A)$. *Rubrik.* Uraikan kedua sisi secara titik demi titik memakai syarat bahwa setiap bola memotong suatu himpunan.

Petunjuk. *Langkah 1.* $x \notin \text{Int}(A)$ berarti tidak ada bola di x yang seluruhnya berada dalam A .

Langkah 2. Negasi itu ekuivalen dengan pernyataan bahwa setiap bola di x memuat titik dari $X \setminus A$.

Jawaban. Identitas benar: tidak menjadi titik interior A tepat berarti setiap lingkungan memotong komplemen A , yaitu berada dalam tutupan komplemen.

Solusi. Untuk $x \in X$, rangkaian ekuivalensi berikut berlaku:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \text{Int}(A) &\iff \text{tidak ada } r > 0 \text{ dengan } B(x, r) \subseteq A \\ &\iff \text{untuk setiap } r > 0, B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{X \setminus A}. \end{aligned}$$

Karena keanggotaan kedua himpunan ekuivalen bagi setiap x , diperoleh $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{Int}(A)$.

Pemeriksaan J.57 Interior komplemen dan komplemen tutupan. Buktikan identitas $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$. *Rubrik.* Hubungkan keberadaan bola yang termuat dalam komplemen dengan keberadaan bola yang tidak memotong A .

Petunjuk. *Langkah 1.* Tuliskan definisi $x \in \text{Int}(X \setminus A)$ dengan sebuah radius positif.

Langkah 2. Ganti inklusi bola ke dalam komplemen dengan syarat irisan kosong terhadap A , lalu negasikan karakterisasi tutupan.

Jawaban. Identitas benar: sebuah titik berada di interior komplemen tepat ketika suatu bolanya tidak bertemu A , yakni ketika titik itu berada di luar $\overline{A}$.

Solusi. Bagi setiap $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Int}(X \setminus A) &\iff \text{ada } r > 0 \text{ dengan } B(x, r) \subseteq X \setminus A \\ &\iff \text{ada } r > 0 \text{ dengan } B(x, r) \cap A = \emptyset \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in X \setminus \overline{A}. \end{aligned}$$

Maka $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$.

Pemeriksaan J.58 Karakterisasi bola bagi titik limit. Buktikan bahwa $x \in X$ adalah titik limit dari $A \subseteq X$ jika dan hanya jika setiap bola terbuka berpusat di x memuat suatu titik A yang berbeda dari x . *Rubrik.* Gunakan langsung hubungan antara lingkungan dan bola: setiap bola terbuka merupakan lingkungan pusatnya, sedangkan setiap lingkungan memuat suatu bola terbuka yang berpusat di titik tersebut.

Petunjuk. *Langkah 1.* Untuk arah maju, ingat bahwa setiap $B(x, r)$ merupakan lingkungan dari x .

Langkah 2. Untuk arah balik, ambil lingkungan sebarang N dari x dan pilih $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq N$.

Jawaban. Ekuivalensi benar karena bola terbuka adalah lingkungan, dan setiap lingkungan dari x memuat suatu bola terbuka berpusat di x .

Solusi. Andaikan dahulu x adalah titik limit dari A . Setiap bola terbuka $B(x, r)$ merupakan lingkungan dari x . Menurut definisi titik limit, bola itu memuat suatu titik dari A yang berbeda dari x .

Sebaliknya, andaikan setiap bola terbuka berpusat di x memuat suatu titik dari $A \setminus \{x\}$. Ambil lingkungan sebarang N dari x . Berdasarkan definisi lingkungan dalam ruang metrik, ada $r > 0$ sehingga $B(x, r) \subseteq N$. Hipotesis memberikan titik $a \in B(x, r) \cap (A \setminus \{x\})$; karena $B(x, r) \subseteq N$, titik yang sama berada di $N \cap (A \setminus \{x\})$. Jadi setiap lingkungan dari x memuat anggota A yang berbeda dari x , tepat definisi bahwa x adalah titik

limit dari A .

Pemeriksaan J.59 Mengulang dikotomi limit-terasing. Dalam tugas pembuktian ulang, buktikan sekaligus $A' \cap A^i = \emptyset$ dan $A \subseteq A' \cup A^i$. *Rubrik.* Satu analisis kasus pada $x \in A$ harus membuktikan cakupan, sedangkan ketidakmungkinan memenuhi dua definisi sekaligus harus membuktikan keterpisahan.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika suatu anggota A bukan titik limit, ada bola di pusat itu tanpa anggota A lain.

Langkah 2. Bola pengisolasi tersebut bertentangan langsung dengan tuntutan bahwa setiap bola memuat anggota A lain.

Jawaban. Kedua klaim benar: setiap anggota A adalah titik limit atau terasing, dan titik terasing tidak pernah menjadi titik limit.

Solusi. Ambil $x \in A$. Bila setiap bola di x memuat anggota A selain x , maka $x \in A'$. Bila tidak, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Karena pusatnya berada dalam A , ini berarti $B(x, r) \cap A = \{x\}$, maka $x \in A^i$. Jadi $A \subseteq A' \cup A^i$.

Sekarang, jika $x \in A^i$, sebuah bola pengisolasi di x tidak memuat anggota A yang berbeda dari x . Karena titik limit mengharuskan setiap bola memuat anggota demikian, $x \notin A'$. Jadi $A' \cap A^i = \emptyset$.

Pemeriksaan J.60 Mengulang karakterisasi barisan bagi tutupan. Dalam tugas pembuktian ulang, buktikan lagi bahwa $x \in \bar{A}$ jika dan hanya jika suatu barisan di A konvergen ke x . *Rubrik.* Pastikan bukti mencakup kasus $x \in A$ tanpa mensyaratkan suku-suku barisan berbeda dari limit.

Petunjuk. *Langkah 1.* Gunakan barisan konstan jika $x \in A$; selain itu, pilih satu anggota A dari tiap $B(x, 1/n)$.

Langkah 2. Jika $a_n \rightarrow x$, setiap bola di x memuat semua suku yang indeksnya cukup besar, khususnya setidaknya satu anggota A .

Jawaban. Ekuivalensi benar. Titik tutupan dapat didekati oleh pilihan dari bola-bola $1/n$ (dengan barisan konstan untuk anggota A), dan limit barisan di A selalu berada dalam tutupan A .

Solusi. Jika $x \in \bar{A}$ dan $x \in A$, tetapkan $a_n = x$ untuk semua n . Jika $x \in \bar{A} \setminus A$, setiap bola $B(x, 1/n)$ bertemu A ; pilih a_n dari irisan itu. Dalam kasus kedua $d(a_n, x) < 1/n$, dan dalam kasus pertama jaraknya nol. Jadi pada kedua kasus $a_n \rightarrow x$ dengan semua $a_n \in A$.

Untuk arah balik, andaikan $a_n \in A$ dan $a_n \rightarrow x$. Bagi setiap $r > 0$, ada indeks N sehingga $a_n \in B(x, r)$ bila $n \geq N$. Maka bola tersebut memotong A . Semua bola di x memotong A , jadi $x \in \bar{A}$.

Pemeriksaan J.61 Minimalitas dan ketertutupan tutupan. Dalam tugas pembuktian ulang, jika F tertutup dan $A \subseteq F$, buktikan $\bar{A} \subseteq F$. Selanjutnya buktikan bahwa $\bar{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup semacam itu dan karenanya tertutup. *Rubrik.* Bukti harus mencakup minimalitas, kesamaan dengan irisan, dan alasan tersendiri bahwa irisan tersebut tertutup.

Petunjuk. *Langkah 1.* Jika $x \notin F$, keterbukaan $X \setminus F$ memberi bola di x yang tidak memotong $A \subseteq F$; gunakan kontraposisif.

Langkah 2. Misalkan G adalah irisan semua supersset tertutup A . Buktikan $\bar{A} \subseteq G$ dan $G \subseteq \bar{A}$, lalu gunakan bahwa irisan sebarang himpunan tertutup adalah tertutup.

Jawaban. Setiap supersset tertutup F dari A memuat $\bar{A}$. Karena $\bar{A}$ sendiri termasuk dalam keluarga itu, irisannya tepat $\bar{A}$; sebagai irisan himpunan-himpunan tertutup, tutupan tersebut tertutup.

Solusi. Misalkan F tertutup dan $A \subseteq F$. Jika $x \notin F$, karena $X \setminus F$ terbuka, ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \subseteq X \setminus F$. Bola itu tidak memotong A , sehingga $x \notin \bar{A}$. Kontraposisifnya memberi $\bar{A} \subseteq F$.

Biarkan $\mathcal{F}$ menjadi keluarga semua himpunan tertutup yang memuat A , dan tetapkan $G = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Hasil paragraf pertama memberi $\bar{A} \subseteq G$. Penutup $\bar{A}$ sendiri memuat A dan tertutup: memang, jika $x \notin \bar{A}$, ada $r > 0$ sehingga $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Untuk setiap $y \in B(x, r/2)$, bola $B(y, r - d(x, y))$ termuat dalam $B(x, r)$ dan tidak memotong A . Jadi $B(x, r/2) \subseteq X \setminus \bar{A}$, sehingga komplemen tutupan terbuka. Dengan demikian $\bar{A} \in \mathcal{F}$, sehingga $G \subseteq \bar{A}$. Maka $G = \bar{A}$. Selain itu, komplemen G adalah gabungan komplemen-komplemen terbuka dari anggota $\mathcal{F}$, sehingga terbuka. Jadi G , dan karenanya $\bar{A}$, tertutup.

Panduan latihan lanjutan

Sembilan belas panduan berikut mendampingi butir ke-19 sampai ke-37 pada latihan Bab 10, yakni panduan bernomor 62–80 dalam urutan seluruh bab. Kerjakan dahulu latihan sumber. Buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap hanya setelah Anda telah mencoba menyusun argumen sendiri. Pernyataan di bawah memparafrasakan sasaran latihan, sedangkan solusinya merupakan uraian asli yang ditulis untuk edisi ini dan tersedia sebagai komponen terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan J.62 Dua barisan menuju titik batas. Susun bukti bahwa setiap titik batas b dari A dapat didekati oleh satu barisan dari A dan satu barisan dari $X \setminus A$. Rubrik keberhasilan: pilihan suku harus sah untuk setiap indeks positif dan kedua bukti konvergensi harus dinyatakan.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan lingkungan $B(b, 1/n)$. Tahap 2: sifat titik batas memastikan bahwa bola tersebut bertemu dengan kedua himpunan.

Jawaban. Pilih $a_n \in A \cap B(b, 1/n)$ dan $x_n \in (X \setminus A) \cap B(b, 1/n)$. Maka $a_n \rightarrow b$ dan $x_n \rightarrow b$.

Solusi. Karena b adalah titik batas, setiap lingkungan b memuat titik dari A dan titik dari komplementnya. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, pilihan $a_n \in A \cap B(b, 1/n)$ dan $x_n \in (X \setminus A) \cap B(b, 1/n)$ memang tersedia. Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d(a_n, b) < 1/n \leq 1/N < \epsilon \quad \text{dan} \quad d(x_n, b) < 1/n \leq 1/N < \epsilon.$$

Definisi konvergensi memberi $a_n \rightarrow b$ dan $x_n \rightarrow b$.

Pemeriksaan J.63 Jarak nol sebagai uji ketertutupan. Untuk subhimpunan tak kosong C dari ruang metrik X , buktikan bahwa C tertutup tepat ketika $d(x, C) = 0$ selalu memaksa $x \in C$.

Petunjuk. Arah maju: titik di luar himpunan tertutup memiliki bola yang tidak bertemu C . Arah balik: dari $d(x, C) = 0$, pilih titik $c_n \in C$ dengan $d(x, c_n) < 1/n$.

Jawaban. Pernyataan benar. Himpunan tertutup menjaga setiap titik luar pada jarak positif; sebaliknya, setiap titik tutupan memiliki jarak nol dan karena itu harus berada di C .

Solusi. Andaikan C tertutup dan $x \notin C$. Komplemen C terbuka, sehingga ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \cap C = \emptyset$. Jadi $d(x, c) \geq r$ untuk setiap $c \in C$, dan $d(x, C) \geq r > 0$. Kontraposisinya memberi arah yang diminta.

Sekarang andaikan sifat jarak nol berlaku. Jika $x \in \overline{C}$, maka untuk setiap n terdapat $c_n \in C \cap B(x, 1/n)$. Karena $0 \leq d(x, C) \leq d(x, c_n) < 1/n$ untuk semua n , berlaku $d(x, C) = 0$, sehingga $x \in C$. Maka $\overline{C} \subseteq C$; inklusi sebaliknya selalu benar, jadi $C = \overline{C}$ dan C tertutup.

Pemeriksaan J.64 Subhimpunan berhingga selalu tertutup. Buktikan bahwa setiap subhimpunan berhingga dari ruang metrik bersifat tertutup, termasuk kasus himpunan kosong.

Petunjuk. Untuk titik x di luar himpunan berhingga tak kosong F , ambil minimum dari daftar berhingga jarak $d(x, a)$ dengan $a \in F$.

Jawaban. Benar. Setiap titik luar memiliki jarak minimum positif dari himpunan, sehingga komplementnya terbuka.

Solusi. Himpunan kosong tertutup karena komplementnya adalah X . Untuk $F = \{a_1, \dots, a_k\}$ tak kosong dan $x \notin F$, semua bilangan $d(x, a_i)$ positif. Karena daftarnya berhingga, $\delta = \min_i d(x, a_i) > 0$. Bola $B(x, \delta/2)$ tidak memuat satu pun a_i , jadi berada di $X \setminus F$. Setiap titik komplemen mempunyai lingkungan di dalam komplemen; akibatnya $X \setminus F$ terbuka dan F tertutup.

Pemeriksaan J.65 Ketertutupan dan batas himpunan. Buktikan pencirian: C tertutup jika dan hanya jika semua titik pada batas C termuat di dalam C .

Petunjuk. Gunakan identitas $\overline{C} = \text{Int}(C) \cup \text{Bdry}(C)$, atau buktikan langsung bahwa titik di luar C yang bukan titik batas memiliki lingkungan yang tidak bertemu C .

Jawaban. Pencirian benar. Jika C tertutup, batasnya berada dalam $\overline{C} = C$; jika batasnya berada dalam C , maka seluruhutupan C juga berada dalam C .

Solusi. Jika C tertutup, maka $\overline{C} = C$. Karena $\text{Bdry}(C) \subseteq \overline{C}$, diperoleh $\text{Bdry}(C) \subseteq C$. Sebaliknya, andaikan $\text{Bdry}(C) \subseteq C$. Identitas yang telah dibuktikan dalam bab memberi

$$\overline{C} = \text{Int}(C) \dot{\cup} \text{Bdry}(C).$$

Kedua bagian ruas kanan termuat di C , sehingga $\overline{C} \subseteq C$. Karena selalu $C \subseteq \overline{C}$, berlaku $C = \overline{C}$; jadi C tertutup.

Pemeriksaan J.66 Kekontinuan melalui interior prapeta. Untuk $f : X \rightarrow Y$, buktikan bahwa f kontinu tepat ketika $f^{-1}(\text{Int}B) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$ bagi setiap $B \subseteq Y$.

Petunjuk. Arah maju: $\text{Int}B$ terbuka dan termuat di B . Arah balik: terapkan syarat pada himpunan terbuka $B = O$, sehingga $\text{Int}O = O$.

Jawaban. Kriteria tersebut ekuivalen dengan pernyataan bahwa prapeta setiap himpunan terbuka bersifat terbuka.

Solusi. Jika f kontinu, maka $f^{-1}(\text{Int}B)$ terbuka. Selain itu, dari $\text{Int}B \subseteq B$ diperoleh $f^{-1}(\text{Int}B) \subseteq f^{-1}(B)$. Karena interior adalah himpunan terbuka terbesar di dalam suatu himpunan, $f^{-1}(\text{Int}B) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$.

Sebaliknya, andaikan inklusi berlaku untuk semua B . Untuk himpunan terbuka $O \subseteq Y$, kita mempunyai $\text{Int}O = O$, sehingga $f^{-1}(O) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(O))$. Inklusi sebaliknya selalu benar; jadi $f^{-1}(O) = \text{Int}(f^{-1}(O))$ terbuka. Prapeta setiap himpunan terbuka bersifat terbuka, maka f kontinu.

Pemeriksaan J.67 Contoh inklusi interior yang ketat. Berikan fungsi kontinu dan subhimpunan B yang membuat inklusi pada panduan sebelumnya ketat.

Petunjuk. Cobalah fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan himpunan satu titik yang memuat nilai konstannya.

Jawaban. Ambil $f(x) = 0$ dan $B = \{0\}$. Ruas kiri kosong, sedangkan ruas kanan adalah $\mathbb{R}$.

Solusi. Fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, kontinu. Untuk $B = \{0\}$ dalam metrik Euklides, $\text{Int}(B) = \emptyset$. Karena itu

$$f^{-1}(\text{Int}B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Namun $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$, sehingga $\text{Int}(f^{-1}(B)) = \mathbb{R}$. Jadi inklusinya benar-benar ketat: $\emptyset \subsetneq \mathbb{R}$.

Pemeriksaan J.68 Contoh ketika kedua interior sama. Berikan contoh konkret ketika inklusi $f^{-1}(\text{Int}B) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(B))$ menjadi kesamaan.

Petunjuk. Gunakan fungsi identitas; prapeta terhadap fungsi ini tidak mengubah himpunan.

Jawaban. Untuk $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ dan, misalnya, $B = [0, 1]$, kedua ruas sama dengan $(0, 1)$.

Solusi. Ambil $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai fungsi identitas dan $B = [0, 1]$. Fungsi ini kontinu, $f^{-1}(B) = B$, dan $f^{-1}(\text{Int}B) = \text{Int}B$. Karena $\text{Int}[0, 1] = (0, 1)$, kita memperoleh

$$f^{-1}(\text{Int}B) = (0, 1) = \text{Int}(f^{-1}(B)).$$

Bahkan fungsi identitas memberikan kesamaan tersebut untuk setiap subhimpunan B .

Pemeriksaan J.69 Titik batas: limit atau terasing. Buktikan bahwa setiap titik batas b dari A merupakan titik limit atau titik terasing dari A .

Petunjuk. Pisahkan kasus $b \notin A$ dan $b \in A$. Pada kasus kedua, gunakan langsung negasi definisi titik terasing.

Jawaban. Jika $b \notin A$, setiap pertemuan lingkungan dengan A otomatis berbeda dari b , jadi b titik limit. Jika $b \in A$, titik itu terasing atau, jika tidak, merupakan titik limit.

Solusi. Misalkan $b \in \text{Bdry}(A)$. Jika $b \notin A$, setiap lingkungan b bertemu A , dan setiap titik pertemuan berbeda dari b . Maka b adalah titik limit. Jika $b \in A$ dan b terasing, kesimpulan sudah diperoleh. Jika

$b \in A$ tetapi tidak terasing, tidak ada lingkungan N dengan $N \cap A = \{b\}$. Jadi setiap lingkungan b memuat titik A selain b , sehingga b adalah titik limit. Ketiga kemungkinan menuntaskan bukti.

Pemeriksaan J.70 Tutupan mempertahankan gabungan berhingga. Tentukan apakah $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ selalu berlaku, lalu buktikan keputusan Anda.

Petunjuk. Gunakan monotonisitasutupan untuk satu inklusi. Untuk inklusi lain, perhatikan bahwa gabungan dua himpunan tertutup tetap tertutup.

Jawaban. Ya, kesamaan selalu berlaku untuk gabungan dua subhimpunan.

Solusi. Dari $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$, monotonisitas memberi $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Sebaliknya, $\overline{A \cup B}$ tertutup karena merupakan gabungan berhingga dari himpunan tertutup, dan himpunan itu memuat $A \cup B$. Tutupan adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat himpunan asal, sehingga $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Kedua inklusi memberi kesamaan.

Pemeriksaan J.71 Tutupan tidak selalu mempertahankan irisan. Uji apakah $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ selalu benar. Jika tidak, berikan contoh penyangkal dan nyatakan inklusi yang tetap berlaku.

Petunjuk. Ambil dua interval terbuka yang saling lepas tetapi kedua tutupannya memuat titik 0.

Jawaban. Tidak. Selalu $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, tetapi inklusi dapat ketat.

Solusi. Karena $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$, monotonisitasutupan memberikan $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Untuk melihat bahwa kesamaan dapat gagal, di $\mathbb{R}$ ambil $A = (-\infty, 0)$ dan $B = (0, \infty)$. Maka $A \cap B = \emptyset$, sehingga $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Akan tetapi, $\overline{A} = (-\infty, 0]$ dan $\overline{B} = [0, \infty)$, jadi $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$.

Pemeriksaan J.72 Titik luar berjarak positif dari himpunan tertutup. Untuk himpunan tertutup tak kosong C dan $x \notin C$, buktikan bahwa $d(x, C) > 0$.

Petunjuk. Komplemen C terbuka. Ambil sebuah bola berpusat di x yang seluruhnya berada dalam komplemen.

Jawaban. Ada $r > 0$ dengan $B(x, r) \cap C = \emptyset$; akibatnya $d(x, C) \geq r > 0$.

Solusi. Karena C tertutup, $X \setminus C$ terbuka. Dari $x \in X \setminus C$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B(x, r) \subseteq X \setminus C$. Jadi tidak ada $c \in C$ dengan $d(x, c) < r$; dengan kata lain, $d(x, c) \geq r$ untuk setiap $c \in C$. Mengambil infimum menghasilkan $d(x, C) = \inf_{c \in C} d(x, c) \geq r > 0$.

Pemeriksaan J.73 Gabungan keluarga tertutup yang lokal berhingga. Misalkan setiap titik $x \in X$ mempunyai bola yang bertemu hanya berhingga banyak anggota keluarga tertutup $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Buktikan bahwa gabungan seluruh keluarga tersebut tertutup.

Petunjuk. Untuk x di luar gabungan, pilih bola yang hanya melihat $C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_k}$. Gunakan jarak positif dari x ke masing-masing himpunan berhingga itu.

Jawaban. Benar. Di sekitar setiap titik luar, hanya berhingga banyak himpunan perlu dihindari; radius minimum positif menghasilkan bola yang menghindari semuanya.

Solusi. Tetapkan $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$. Pilih $\epsilon_x > 0$ sehingga $B(x, \epsilon_x)$ bertemu hanya dengan, katakanlah, $C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_k}$. Karena x tidak berada dalam satu pun himpunan itu dan masing-masing tertutup, panduan 72 memberi $\delta_i = d(x, C_{\alpha_i}) > 0$. Jika $k = 0$, bola awal sudah tidak bertemu gabungan. Jika $k > 0$, ambil

$$r = \frac{1}{2} \min\{\epsilon_x, \delta_1, \dots, \delta_k\} > 0.$$

Bola $B(x, r)$ berada dalam bola awal, sehingga tidak dapat bertemu anggota keluarga selain daftar berhingga tersebut; pilihan $r < \delta_i$ juga membuatnya tidak bertemu satu pun anggota dalam daftar. Jadi $B(x, r)$ terletak di komplemen gabungan. Komplemen itu terbuka, maka gabungannya tertutup.

Pemeriksaan J.74 Pernyataan dual untuk irisan himpunan terbuka. Rumuskan dan buktikan syarat lokal yang menjamin irisan tak hingga dari keluarga himpunan terbuka tetap terbuka.

Petunjuk. Terapkan hasil gabungan tertutup pada keluarga komplemen $C_\alpha = X \setminus O_\alpha$, lalu gunakan Hukum De Morgan.

Jawaban. Jika keluarga komplemen $\{X \setminus O_\alpha\}$ lokal berhingga, maka $\bigcap_\alpha O_\alpha$ terbuka.

Solusi. Pernyataan yang tepat adalah: jika setiap O_α terbuka dan, untuk setiap $x \in X$, ada lingkungan yang bertemu hanya berhingga banyak komplemen $X \setminus O_\alpha$, maka $\bigcap_\alpha O_\alpha$ terbuka. Memang, $C_\alpha = X \setminus O_\alpha$ tertutup dan keluarga $\{C_\alpha\}$ lokal berhingga. Panduan 73 menyatakan bahwa $\bigcup_\alpha C_\alpha$ tertutup. Hukum De Morgan memberi

$$X \setminus \bigcup_\alpha C_\alpha = X \setminus \bigcup_\alpha (X \setminus O_\alpha) = \bigcap_\alpha O_\alpha.$$

Ruas kiri adalah komplemen suatu himpunan tertutup, sehingga irisan pada ruas kanan terbuka.

Pemeriksaan J.75 Himpunan satu titik tertutup. Putuskan apakah $\{x\}$ selalu tertutup dalam setiap ruang metrik dan berikan alasan yang tidak bergantung pada gambar.

Petunjuk. Untuk $y \neq x$, gunakan radius yang lebih kecil daripada $d(x, y)$.

Jawaban. Benar. Setiap $y \in X \setminus \{x\}$ memiliki bola yang tidak memuat x .

Solusi. Ambil $y \in X \setminus \{x\}$. Karena metrik memisahkan titik, $d(x, y) > 0$. Dengan $r = d(x, y)/2$, titik x tidak dapat berada di $B(y, r)$, sebab jaraknya dari y adalah $2r$. Jadi $B(y, r) \subseteq X \setminus \{x\}$. Komplemen $\{x\}$ terbuka, maka $\{x\}$ tertutup.

Pemeriksaan J.76 Himpunan sekaligus terbuka dan tertutup di garis real. Tentukan apakah $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ merupakan satu-satunya subhimpunan yang sekaligus terbuka dan tertutup dalam metrik Euklides.

Petunjuk. Andaikan A tak kosong dan tidak sama dengan $\mathbb{R}$. Pilih $a \in A$ dan $b \notin A$, lalu gunakan sifat supremum pada bagian A di antara kedua titik tersebut.

Jawaban. Benar. Tidak ada pemisahan garis real menjadi dua himpunan terbuka tak kosong yang saling komplemen.

Solusi. Jelas $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ keduanya terbuka dan tertutup. Andaikan ada A lain dengan kedua sifat itu. Pilih $a \in A$ dan $b \notin A$. Setelah menukar arah garis bila perlu, kita dapat menganggap $a < b$. Himpunan $S = A \cap [a, b]$ tak kosong dan terbatas atas; tulis $s = \sup S$. Karena komplemen A terbuka dan memuat b , ada interval di sekitar b yang tidak bertemu A , sehingga $s < b$. Karena A terbuka dan memuat a , ada titik A di kanan a , sehingga $s > a$.

Jika $s \in A$, keterbukaan A memberi titik $A \cap [a, b]$ yang lebih besar dari s , bertentangan dengan sifat batas atas. Jika $s \notin A$, keterbukaan komplemen memberi interval di sekitar s tanpa titik A ; tetapi definisi supremum menuntut titik S sedekat apa pun di bawah s . Keduanya mustahil. Jadi tidak ada A seperti itu.

Pemeriksaan J.77 Subhimpunan pada ruang metrik berhingga. Untuk $X = \{1, 3, 5\}$ dengan $d(x, y) = xy - 1 \pmod{8}$, tentukan apakah $\{1, 3\}$ sekaligus terbuka dan tertutup.

Petunjuk. Hitung jarak pasangan berbeda: $d(1, 3)$, $d(1, 5)$, dan $d(3, 5)$. Gunakan bola kecil untuk mengisolasi setiap titik.

Jawaban. Benar. Topologi metrik pada himpunan berhingga ini diskret, sehingga setiap subhimpunan terbuka dan tertutup.

Solusi. Perhitungan modulo 8 memberi $d(1, 3) = 2$, $d(1, 5) = 4$, dan $d(3, 5) = 6$. Jadi jarak positif terkecil antara dua titik berbeda adalah 2. Untuk setiap $x \in X$, bola $B(x, 1)$ sama dengan $\{x\}$. Dengan demikian semua himpunan satu titik terbuka, sehingga setiap subhimpunan adalah gabungan himpunan-himpunan satu titik dan karenanya terbuka. Komplemen setiap subhimpunan juga terbuka, jadi setiap subhimpunan tertutup. Secara khusus, $\{1, 3\}$ terbuka dan komplemennya $\{5\}$ terbuka; maka $\{1, 3\}$ juga tertutup.

Pemeriksaan J.78 Interior tutupan tidak memulihkan himpunan asal. Uji klaim $\text{Int}(\overline{A}) = A$ untuk setiap subhimpunan ruang metrik dan, jika salah, berikan contoh yang tegas.

Petunjuk. Gunakan himpunan rapat yang bukan seluruh garis real, misalnya $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Jawaban. Salah. Untuk $A = \mathbb{Q}$ dalam $\mathbb{R}$, ruas kiri adalah $\mathbb{R}$, bukan $\mathbb{Q}$.

Solusi. Ambil $A = \mathbb{Q}$ sebagai subhimpunan $(\mathbb{R}, d_E)$. Setiap interval terbuka memuat bilangan rasional, jadi $\mathbb{Q}$ rapat di $\mathbb{R}$ dan $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ terbuka dalam dirinya sendiri, $\text{Int}(\overline{\mathbb{Q}}) = \text{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Namun $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Satu contoh ini cukup menyangkal klaim universal.

Pemeriksaan J.79 Batas suatu himpunan selalu tertutup. Tentukan apakah $\text{Bdry}(A)$ tertutup untuk setiap $A \subseteq X$ dan buktikan keputusan Anda.

Petunjuk. Gunakan rumus $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Jawaban. Benar. Batas adalah irisan dua himpunan tertutup.

Solusi. Bab ini telah membuktikan

$$\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Tutupan setiap himpunan bersifat tertutup, sehingga $\overline{A}$ dan $\overline{X \setminus A}$ tertutup. Irisan berhingga dari himpunan tertutup tetap tertutup. Oleh karena itu $\text{Bdry}(A)$ tertutup untuk setiap $A \subseteq X$.

Pemeriksaan J.80 Setiap titik himpunan: limit atau terasing. Buktikan bahwa $A \subseteq A' \cup A^i$, dengan A' himpunan titik limit dan A^i himpunan titik terasing dari A .

Petunjuk. Ambil sembarang $a \in A$ dan gunakan dikotomi: a terasing atau tidak terasing.

Jawaban. Benar. Titik A yang tidak terasing memenuhi definisi titik limit.

Solusi. Tetapkan $a \in A$. Jika ada lingkungan N dari a dengan $N \cap A = \{a\}$, maka $a \in A^i$. Jika tidak ada lingkungan seperti itu, setiap lingkungan a memuat suatu titik dari A yang berbeda dari a . Ini tepat definisi bahwa $a \in A'$. Jadi dalam kedua kasus $a \in A' \cup A^i$. Karena a dipilih sembarang, $A \subseteq A' \cup A^i$.

Pemeriksaan penguasaan Bab 10

Delapan pemeriksaan berikut menggabungkan beberapa gagasan Bab 10 dalam situasi baru. Materi ini ditulis secara mandiri untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0. Gunakan petunjuk hanya setelah mencoba soal; jawaban menyatakan hasil, sedangkan solusi memperlihatkan bukti lengkap.

Pemeriksaan J.81 Membaca seluruh struktur sebuah himpunan. Dalam $(\mathbb{R}, d_E)$, ambil $A = \{0\} \cup (1, 2]$. Tentukan interior, tutupan, batas, himpunan titik limit, dan himpunan titik terasing dari A . Putuskan pula apakah A terbuka atau tertutup.

Petunjuk. Analisis titik 0, kedua ujung 1, 2, dan titik di antara 1 dan 2 secara terpisah.

Jawaban. $\text{Int}(A) = (1, 2)$, $\overline{A} = \{0\} \cup [1, 2]$, $\text{Bdry}(A) = \{0, 1, 2\}$, $A' = [1, 2]$, dan $A^i = \{0\}$. Himpunan A tidak terbuka dan tidak tertutup.

Solusi. Setiap titik di $(1, 2)$ memiliki interval kecil di dalam A ; tidak ada titik lain yang interior. Titik 1 dapat didekati dari kanan dan titik 2 dari kiri, sehingga keduanya berada dalam tutupan dan merupakan titik limit. Semua titik $(1, 2)$ juga titik limit, sedangkan titik 0 terasing karena, misalnya, $(-1/2, 1/2) \cap A = \{0\}$. Jadi $A' = [1, 2]$ dan $A^i = \{0\}$. Tutupan adalah $A \cup A' = \{0\} \cup [1, 2]$. Menggunakan $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$ memberi $\{0, 1, 2\}$. Karena 0 bukan titik interior, A tidak terbuka; karena $1 \in \overline{A} \setminus A$, A tidak tertutup.

Pemeriksaan J.82 Menutup barisan kebalikan. Buktikan langsung bahwa $C = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ tertutup di $\mathbb{R}$, dan tentukan semua titik limit serta titik terasingnya.

Petunjuk. Titik 0 adalah satu-satunya kandidat titik limit. Untuk $1/n$, pilih radius kurang dari separuh jaraknya ke tetangga terdekat dalam daftar.

Jawaban. Himpunan titik limit adalah $C' = \{0\}$; setiap $1/n$ terasing. Karena $C' \subseteq C$, himpunan C tertutup.

Solusi. Barisan $1/n$ konvergen ke 0, sehingga setiap lingkungan 0 memuat titik C selain 0; jadi $0 \in C'$. Untuk suatu $1/n$, jaraknya ke anggota lain dari daftar mempunyai minimum positif di sekitar indeks itu;

pilih radius lebih kecil daripada setengah jarak ke $1/(n-1)$ dan $1/(n+1)$, dengan penyesuaian yang jelas untuk $n=1$. Bola tersebut bertemu C hanya di $1/n$, jadi setiap $1/n$ terasing.

Jika $x \notin C$ dan $x \neq 0$, pilih lingkungan kecil yang tidak memuat 0. Hanya berhingga banyak suku $1/n$ dapat berada di lingkungan itu; radius dapat diperkecil lagi untuk menghindari semuanya. Maka x bukan titik limit. Jadi $C' = \{0\}$. Karena C memuat semua titik limitnya, C tertutup.

Pemeriksaan J.83 Mengapa syarat lokal berhingga diperlukan. Berikan keluarga terhitung himpunan tertutup di $\mathbb{R}$ yang gabungannya tidak tertutup. Tunjukkan secara eksplisit di titik mana keluarga itu gagal menjadi lokal berhingga.

Petunjuk. Gunakan himpunan satu titik $C_n = \{1/n\}$.

Jawaban. Keluarga $C_n = \{1/n\}$ terdiri atas himpunan tertutup, tetapi gabungannya tidak memuat titik limit 0. Keluarga itu tidak lokal berhingga di 0.

Solusi. Setiap $C_n = \{1/n\}$ tertutup karena himpunan satu titik tertutup dalam ruang metrik. Gabungannya adalah $U = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. Barisan $1/n$ konvergen ke 0, jadi $0 \in \overline{U}$, tetapi $0 \notin U$. Maka U tidak tertutup. Untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat tak hingga banyak n dengan $1/n < \epsilon$; akibatnya $B(0, \epsilon)$ bertemu tak hingga banyak C_n . Tepat di 0 syarat lokal berhingga gagal.

Pemeriksaan J.84 Himpunan nol fungsi kontinu. Jika $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, buktikan bahwa $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ tertutup. Kemudian simpulkan bahwa setiap himpunan aras $\{x \mid f(x) = c\}$ juga tertutup.

Petunjuk. Tulis himpunan tersebut sebagai prapeta dari himpunan satu titik di $\mathbb{R}$.

Jawaban. $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ dan $\{x \mid f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$; keduanya tertutup.

Solusi. Setiap himpunan satu titik $\{c\}$ tertutup di $\mathbb{R}$. Menurut pencirian kekontinuan dengan himpunan tertutup, prapeta himpunan tertutup terhadap f tertutup di X . Karena $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$, himpunan nol tertutup. Argumen yang sama dengan $\{c\}$ memberi ketertutupan setiap himpunan aras $f^{-1}(\{c\})$.

Pemeriksaan J.85 Fungsi jarak ke suatu himpunan. Untuk $C \neq \emptyset$, definisikan $\delta_C(x) = d(x, C)$. Buktikan $|\delta_C(x) - \delta_C(y)| \leq d(x, y)$. Simpulkan bahwa δ_C kontinu dan bahwa himpunan nolnya adalah $\overline{C}$.

Petunjuk. Untuk setiap $c \in C$, pertidaksamaan segitiga memberi $d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c)$. Ambil infimum, lalu tukar x dan y .

Jawaban. Fungsi δ_C bersifat Lipschitz dengan konstanta 1, sehingga kontinu, dan $\delta_C^{-1}(\{0\}) = \overline{C}$.

Solusi. Untuk setiap $c \in C$, $d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c)$. Mengambil infimum atas c memberi $\delta_C(x) \leq d(x, y) + \delta_C(y)$, jadi $\delta_C(x) - \delta_C(y) \leq d(x, y)$. Menukar x dan y menghasilkan pertidaksamaan lawan; keduanya setara dengan $|\delta_C(x) - \delta_C(y)| \leq d(x, y)$. Maka δ_C kontinu.

Jika $x \in \overline{C}$, setiap $B(x, 1/n)$ bertemu C , sehingga $0 \leq \delta_C(x) < 1/n$ untuk semua n dan $\delta_C(x) = 0$. Sebaliknya, jika $\delta_C(x) = 0$, untuk setiap n ada $c_n \in C$ dengan $d(x, c_n) < 1/n$; jadi setiap lingkungan x bertemu C dan $x \in \overline{C}$.

Pemeriksaan J.86 Dua identitas batas. Buktikan $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$ dan $\text{Bdry}(A) = \text{Bdry}(X \setminus A)$ untuk setiap $A \subseteq X$.

Petunjuk. Mulai dari $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ dan identitas $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{Int}(A)$.

Jawaban. Kedua identitas benar; yang pertama mengikuti dari identitas komplemen interior, dan yang kedua dari simetri irisan kedua tutupan.

Solusi. Gunakan rumus batas dan dualitas interior-tutupan:

$$\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap (X \setminus \text{Int}(A)) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A).$$

Selanjutnya,

$$\text{Bdry}(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus (X \setminus A)} = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \text{Bdry}(A).$$

Kesamaan terakhir hanya menggunakan sifat komutatif irisan.

Pemeriksaan J.87 Pencirian titikutupan dengan barisan. Buktikan bahwa $x \in \overline{A}$ jika dan hanya jika terdapat barisan (a_n) di A yang konvergen ke x . Jelaskan mengapa barisan konstan diperlukan ketika $x \in A$ terasing.

Petunjuk. Dariutupan, pilih $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$. Untuk arah balik, setiap lingkungan akhirnya memuat semua suku barisan.

Jawaban. Pilihan dari bola menyusut memberi arah maju; definisi konvergensi memberi arah balik. Jika x terasing, pilihan yang mungkin untuk semua indeks besar adalah $a_n = x$.

Solusi. Jika $x \in \overline{A}$, setiap bola $B(x, 1/n)$ bertemu A . Pilih $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$. Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N > 1/\epsilon$; jika $n \geq N$, maka $d(a_n, x) < 1/n \leq 1/N < \epsilon$. Jadi $a_n \rightarrow x$. Bila x terasing, bola yang cukup kecil bertemu A hanya di x , sehingga konstruksi ini akhirnya memilih $a_n = x$; barisan konstan memang harus diizinkan.

Sebaliknya, jika $a_n \in A$ dan $a_n \rightarrow x$, setiap lingkungan N dari x memuat suatu bola $B(x, \epsilon)$. Semua suku dengan indeks cukup besar berada dalam bola itu, sehingga $N \cap A \neq \emptyset$. Maka setiap lingkungan x bertemu A , yakni $x \in \overline{A}$.

Pemeriksaan J.88 Himpunan terbuka-tertutup dan fungsi indikator. Beri $\{0, 1\}$ metrik diskret dan definisikan $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ dengan nilai 1 pada A dan 0 di luar A . Buktikan bahwa χ_A kontinu jika dan hanya jika A sekaligus terbuka dan tertutup.

Petunjuk. Dalam ruang diskret dua titik, $\{0\}$ dan $\{1\}$ terbuka. Hitung kedua prapetanya.

Jawaban. $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ dan $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$; kekontinuan ekuivalen dengan keterbukaan kedua himpunan tersebut.

Solusi. Jika χ_A kontinu, prapeta dua himpunan terbuka $\{1\}$ dan $\{0\}$ harus terbuka. Prapeta itu masing-masing adalah A dan $X \setminus A$. Jadi A terbuka dan komplementnya terbuka, yang berarti A juga tertutup.

Sebaliknya, andaikan A sekaligus terbuka dan tertutup. Maka A dan $X \setminus A$ terbuka. Setiap himpunan terbuka dalam ruang diskret $\{0, 1\}$ adalah salah satu dari $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$; prapetanya berturut-turut $\emptyset, X \setminus A, A, X$, semuanya terbuka. Karena prapeta setiap himpunan terbuka bersifat terbuka, χ_A kontinu.

Lampiran K

Pendamping Mandiri Bab 11: Subruang dan Hasil Kali Ruang Metrik

Komponen ini mendampingi Bab 11, bukan menggantikannya. Kerjakan dahulu eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama, kemudian buka unsur **petunjuk**, **jawaban**, atau **solusi** secara bertahap. Tiga puluh lima panduan mengikuti setiap butir sumber dalam urutan bacanya: enam belas tugas eksplorasi atau kegiatan dan sembilan belas perintah latihan. Delapan pemeriksaan penguasaan tambahan menguji pemindahan gagasan ke situasi baru.

Seluruh uraian pendamping dan pemeriksaan penguasaan ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini. Uraian tersebut bukan teks Steven Schlicker atau Grand Valley State University dan tidak menyalin ungkapan dari karya pembanding. Komponen asli ini memiliki identitas lisensi terpisah dan disediakan di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Terjemahan bab utama tetap merupakan turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif menurut CC BY-NC-SA 3.0.

Jawaban memberi hasil langsung, sedangkan solusi memperlihatkan urutan definisi, konstruksi, pertidaksamaan, atau contoh penyangkal yang diperlukan. Untuk pertanyaan yang sengaja bersifat terbuka, solusi berfungsi sebagai rubrik penilaian. Dengan demikian, pembelajar tetap melakukan penyelidikan sebelum melihat penutupan matematisnya.

Panduan konsep dan tugas sumber, bagian pertama

Sembilan panduan berikut mengikuti seluruh tugas sumber dalam pendahuluan subruang dan bagian tentang himpunan terbuka serta tertutup di subruang: enam tugas pendahuluan dan tiga langkah implikasi sebaliknya. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan memparafrasakan sasaran sumber dan menyertakan rubrik keberhasilan. Teks panduan asli ini merupakan komponen terpisah yang tersedia di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Sepanjang panduan ini, bola $B_A(a, r)$ dihitung dengan metrik pembatasan pada A , sedangkan $B_X(a, r)$ dihitung di ruang ambien X . Keterbukaan di A dan keterbukaan di X karena itu selalu dibedakan secara eksplisit.

Pemeriksaan K.1 Metrik pembatasan pada subhimpunan. Misalkan (X, d) ruang metrik dan $A \subseteq X$. Untuk $a_1, a_2 \in A$, definisikan $d'(a_1, a_2) = d(a_1, a_2)$. Buktikan bahwa d' merupakan metrik pada A . Rubrik: periksa kodomain, definit positif, simetri, dan pertidaksamaan segitiga; jelaskan mengapa sifat-sifat itu tetap berlaku setelah domain dipersempit.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $a_1, a_2, a_3 \in A$; ketiganya juga unsur X . Tahap 2: tuliskan setiap aksioma untuk d' , lalu ganti setiap nilai d' dengan nilai d yang sama.

Jawaban. Fungsi d' adalah metrik pada A karena semua aksioma metrik diwarisi langsung dari d . Jadi $(A, d') = (A, d_A)$ merupakan subruang metrik dari (X, d) .

Solusi. Karena d bernilai real taknegatif, demikian pula $d'(a_1, a_2) = d(a_1, a_2)$. Selanjutnya, $d'(a_1, a_2) = 0$ jika dan hanya jika $d(a_1, a_2) = 0$, yang menurut definit positif bagi d ekuivalen dengan $a_1 = a_2$. Simetri memberi

$$d'(a_1, a_2) = d(a_1, a_2) = d(a_2, a_1) = d'(a_2, a_1).$$

Untuk $a_1, a_2, a_3 \in A$, pertidaksamaan segitiga bagi d di X memberi

$$d'(a_1, a_3) = d(a_1, a_3) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) = d'(a_1, a_2) + d'(a_2, a_3).$$

Jadi keempat syarat metrik terpenuhi pada A . Walaupun d dan d' mempunyai nilai yang sama pada pasangan titik di A , keduanya merupakan fungsi berbeda karena domain d' ialah $A \times A$, bukan $X \times X$.

Pemeriksaan K.2 Interval setengah terbuka dalam ruang ambien dan subruang. Ambil $X = (\mathbb{R}, d_E)$, $A = [0, 1]$, dan $0 < a < 1$. Tentukan secara terpisah apakah $[0, a)$ terbuka di X dan apakah himpunan yang sama terbuka di subruang A . Rubrik: uji titik 0 menggunakan bola ambien, lalu untuk setiap titik di $[0, a)$ bangun bola relatif yang tetap berada dalam himpunan tersebut.

Petunjuk. Tahap 1: setiap bola di $\mathbb{R}$ yang berpusat di 0 memuat bilangan negatif. Tahap 2: jika $x \in [0, a)$, coba radius $r = (a - x)/2$ untuk bola $B_A(x, r)$ dalam subruang.

Jawaban. Himpunan $[0, a)$ tidak terbuka di $X = \mathbb{R}$, tetapi terbuka di subruang $A = [0, 1]$.

Solusi. Di ruang ambien X , titik $0 \in [0, a)$ tidak mempunyai bola terbuka yang termuat dalam $[0, a)$. Memang, untuk setiap $r > 0$, titik $-r/2$ berada di $B_X(0, r)$ tetapi tidak berada di $[0, a)$. Jadi $[0, a)$ tidak terbuka di X .

Sekarang ambil sembarang $x \in [0, a)$ dan tetapkan $r = (a - x)/2 > 0$. Jika $y \in B_A(x, r)$, maka $y \in A$, sehingga $y \geq 0$, dan

$$y < x + r = x + \frac{a - x}{2} = \frac{a + x}{2} < a.$$

Maka $y \in [0, a)$, sehingga $B_A(x, r) \subseteq [0, a)$. Setiap titik himpunan mempunyai bola relatif seperti itu; karena itu $[0, a)$ terbuka di A . Perbedaan jawaban muncul karena bola subruang dipotong oleh A dan tidak memuat bilangan negatif.

Pemeriksaan K.3 Semua subhimpunan bilangan bulat terbuka secara relatif. Pandang $A = \mathbb{Z}$ sebagai subruang dari $(\mathbb{R}, d_E)$. Tentukan semua subhimpunan A yang terbuka di A . Rubrik: hitung bola subruang berjari-jari kurang dari 1 di setiap bilangan bulat, lalu tangani subhimpunan sebarang dan himpunan kosong.

Petunjuk. Tahap 1: untuk $n \in \mathbb{Z}$, tentukan $B_A(n, 1/2)$. Tahap 2: nyatakan subhimpunan $S \subseteq A$ sebagai gabungan bola-bola satu titik tersebut.

Jawaban. Setiap subhimpunan $S \subseteq \mathbb{Z}$, termasuk $\emptyset$, terbuka di subruang $\mathbb{Z}$. Dengan demikian, metrik terinduksi pada $\mathbb{Z}$ menghasilkan topologi diskret.

Solusi. Jika $n \in \mathbb{Z}$, setiap bilangan bulat lain berjarak sedikitnya 1 dari n . Karena itu

$$B_A(n, 1/2) = B_{\mathbb{R}}(n, 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{n\}.$$

Untuk subhimpunan tak kosong $S \subseteq \mathbb{Z}$, berlaku

$$S = \bigcup_{n \in S} B_A(n, 1/2),$$

sehingga S merupakan gabungan bola-bola terbuka di A dan karenanya terbuka di A . Himpunan kosong terbuka menurut definisi. Jadi seluruh himpunan kuasa $\mathbb{Z}$ adalah keluarga himpunan terbuka subruang ini; sebagai akibat tambahan, setiap subhimpunan juga tertutup karena komplementnya terbuka.

Pemeriksaan K.4 Sumbu horizontal tertutup di bidang Euklides. Dalam $X = (\mathbb{R}^2, d_E)$, misalkan $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Buktikan bahwa A tertutup di X . Rubrik: ambil titik sebarang di luar sumbu, pilih radius dari jarak vertikalnya ke sumbu, dan buktikan bahwa bola itu tidak memotong A .

Petunjuk. Tahap 1: tulis titik luar sebagai $p = (u, v)$ dengan $v \neq 0$. Tahap 2: gunakan $r = |v|/2$ dan fakta bahwa jarak Euklides dari p ke setiap titik sumbu sedikitnya $|v|$.

Jawaban. Untuk setiap $p = (u, v) \notin A$, bola $B_X(p, |v|/2)$ termuat dalam $X \setminus A$. Jadi $X \setminus A$ terbuka dan A tertutup di X .

Solusi. Ambil $p = (u, v) \in X \setminus A$. Karena p tidak berada pada sumbu horizontal, $v \neq 0$, sehingga $r = |v|/2 > 0$. Untuk setiap $q = (s, 0) \in A$,

$$d_E(p, q) = \sqrt{(u-s)^2 + v^2} \geq |v| > r.$$

Jadi tidak ada titik A di $B_X(p, r)$, atau $B_X(p, r) \subseteq X \setminus A$. Karena setiap titik komplemen mempunyai bola ambien yang termuat dalam komplemen, $X \setminus A$ terbuka. Berdasarkan definisi, A tertutup di X .

Pemeriksaan K.5 Segmen terbuka sebagai himpunan terbuka di sumbu. Dengan $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ dan $Z = \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$, buktikan bahwa Z terbuka di subruang A . Rubrik: untuk titik sebarang $(x, 0) \in Z$, pilih radius positif yang lebih kecil daripada jaraknya ke kedua ujung dan uji setiap titik bola relatif.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $r = \frac{1}{2} \min\{x, 1-x\}$. Tahap 2: jika $(y, 0) \in B_A((x, 0), r)$, gunakan $|y-x| < r$ untuk membuktikan $0 < y < 1$.

Jawaban. Setiap $(x, 0) \in Z$ mempunyai bola relatif $B_A((x, 0), \frac{1}{2} \min\{x, 1-x\})$ yang termuat dalam Z . Maka Z terbuka di A .

Solusi. Ambil $p = (x, 0) \in Z$. Karena $0 < x < 1$, bilangan $r = \frac{1}{2} \min\{x, 1-x\}$ positif. Jika $q = (y, 0) \in B_A(p, r)$, maka $|y-x| = d_E(p, q) < r$. Karena $r \leq x/2$, kita memperoleh $y > x-r \geq x/2 > 0$. Karena $r \leq (1-x)/2$, kita juga memperoleh $y < x+r \leq (1+x)/2 < 1$. Jadi $q \in Z$, sehingga $B_A(p, r) \subseteq Z$. Konstruksi ini berlaku di setiap titik Z ; oleh sebab itu Z terbuka di subruang A .

Pemeriksaan K.6 Segmen sumbu tidak terbuka di bidang. Untuk himpunan Z pada panduan 5, tentukan apakah Z terbuka di ruang ambien $X = \mathbb{R}^2$ dan buktikan keputusan Anda. Rubrik: ambil titik di Z dan radius sebarang, lalu temukan titik di dalam bola ambien yang keluar dari sumbu.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan $p = (1/2, 0) \in Z$. Tahap 2: untuk $r > 0$, periksa titik $q = (1/2, r/2)$.

Jawaban. Himpunan Z tidak terbuka di $X = \mathbb{R}^2$. Setiap bola ambien yang berpusat di $(1/2, 0)$ memuat titik di luar sumbu dan karena itu tidak termuat dalam Z .

Solusi. Titik $p = (1/2, 0)$ berada di Z . Ambil radius sebarang $r > 0$ dan tetapkan $q = (1/2, r/2)$. Jaraknya ialah

$$d_E(p, q) = r/2 < r,$$

sehingga $q \in B_X(p, r)$. Namun koordinat kedua q tidak nol, jadi $q \notin A$ dan khususnya $q \notin Z$. Dengan demikian, tidak ada bola terbuka di X yang berpusat di p dan termuat dalam Z . Maka Z tidak terbuka di X , meskipun panduan 5 membuktikan bahwa Z terbuka di subruang A .

Pemeriksaan K.7 Bola ambien dari keterbukaan himpunan pemotong. Misalkan $A \subseteq X$, O_X terbuka di ruang metrik X , dan $O_A = A \cap O_X$. Untuk $a \in O_A$, buktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ dengan $B_X(a, \delta) \subseteq O_X$. Rubrik: uraikan keanggotaan dalam irisan, lalu terapkan definisi keterbukaan di ruang ambien yang tepat.

Petunjuk. Tahap 1: dari $a \in A \cap O_X$, simpulkan dua fakta keanggotaan. Tahap 2: hanya fakta $a \in O_X$ dan keterbukaan O_X di X yang diperlukan untuk memperoleh bola ambien.

Jawaban. Karena $a \in O_A = A \cap O_X$, berlaku $a \in O_X$. Karena O_X terbuka di X , ada $\delta > 0$ sehingga $B_X(a, \delta) \subseteq O_X$.

Solusi. Keanggotaan $a \in A \cap O_X$ berarti sekaligus $a \in A$ dan $a \in O_X$. Definisi himpunan terbuka di X menyatakan bahwa setiap titik O_X menjadi pusat suatu bola terbuka ambien yang termuat di O_X . Oleh karena itu, terdapat $\delta > 0$ dengan $B_X(a, \delta) \subseteq O_X$. Pada tahap ini bolanya berada di X ; kita belum menyatakan bahwa bola itu merupakan bola di subruang A .

Pemeriksaan K.8 Memotong bola ambien menjadi bola subruang. Lanjutkan panduan 7. Sumber meminta kandidat bola terbuka di A yang berpusat di a dan termuat dalam A . Identifikasi kandidat itu dan buktikan pernyataan yang lebih kuat yang diperlukan oleh pembuktian, yaitu bahwa bola tersebut termuat dalam O_A . Rubrik: gunakan definisi metrik pembatasan untuk membuktikan kesamaan bola, lalu gunakan dua inklusi yang sudah diketahui.

Petunjuk. Tahap 1: kandidatnya adalah $B_A(a, \delta)$ dan $B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta)$. Tahap 2: gabungkan $B_X(a, \delta) \subseteq O_X$ dengan $O_A = A \cap O_X$.

Jawaban. Kandidatnya ialah $B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta)$. Karena bola ambien termuat dalam O_X , berlaku $B_X(a, \delta) \subseteq A \cap O_X = O_A$.

Solusi. Karena d_A adalah pembatasan d ke $A \times A$, untuk setiap $x \in A$ berlaku

$$x \in B_A(a, \delta) \iff d_A(x, a) < \delta \iff d(x, a) < \delta \iff x \in B_X(a, \delta).$$

Dengan tetap mengingat syarat $x \in A$, ekuivalensi ini memberi $B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta)$.

Panduan 7 memberi $B_X(a, \delta) \subseteq O_X$. Maka

$$B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta) \subseteq A \cap O_X = O_A.$$

Jadi kandidat itu bukan hanya termuat dalam A , sebagaimana diminta secara harfiah oleh tugas sumber, melainkan termuat dalam O_A . Inklusi yang lebih kuat inilah yang diperlukan untuk membuktikan keterbukaan O_A di A .

Pemeriksaan K.9 Menyelesaikan implikasi sebaliknya. Dari panduan 7 dan 8, tarik kesimpulan tentang O_A sebagai subhimpunan dari subruang A , lalu nyatakan implikasi sebaliknya yang telah dibuktikan. Rubrik: kuantifikasikan argumen untuk setiap $a \in O_A$ dan sebutkan ruang tempat setiap bola serta setiap keterbukaan dihitung.

Petunjuk. Tahap 1: untuk setiap $a \in O_A$, panduan sebelumnya menghasilkan $\delta_a > 0$ dengan $B_A(a, \delta_a) \subseteq O_A$. Tahap 2: cocokkan pernyataan ini dengan definisi himpunan terbuka di ruang metrik A .

Jawaban. Himpunan O_A terbuka di A . Jadi, jika $O_A = A \cap O_X$ untuk suatu O_X yang terbuka di X , maka O_A terbuka dalam topologi subruang A .

Solusi. Ambil sembarang $a \in O_A$. Karena $a \in O_X$ dan O_X terbuka di X , panduan 7 memberi $\delta_a > 0$ dengan $B_X(a, \delta_a) \subseteq O_X$. Panduan 8 kemudian memberi

$$B_A(a, \delta_a) = A \cap B_X(a, \delta_a) \subseteq A \cap O_X = O_A.$$

Jadi setiap titik O_A mempunyai bola terbuka di A yang termuat dalam O_A . Menurut definisi, O_A terbuka di A . Ini membuktikan implikasi sebaliknya dari karakterisasi himpunan terbuka dalam subruang.

Untuk membaca arah maju karakterisasi tersebut dengan lingkup yang tepat, radius δ_a hanya perlu dipilih, dan hanya dijamin ada, bagi $a \in O_A$; tidak diperlukan pilihan bagi semua $a \in A$. Perbedaan kuantor ini juga menjaga agar keterbukaan di A tidak tertukar dengan keterbukaan di X .

Panduan konsep dan tugas sumber, bagian kedua

Tujuh panduan berikut mengikuti tepat tujuh tugas sumber tentang hasil kali ruang metrik: tiga pemeriksaan aksioma metrik dan empat tugas tentang geometri serta keterbukaan pada hasil kali. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan mempara-

frasakan sasaran sumber dan menyertakan rubrik keberhasilan. Teks panduan asli ini merupakan komponen terpisah yang tersedia di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan K.10 Nilai metrik hasil kali tak negatif. Untuk $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dalam $X_1 \times X_2$, jelaskan mengapa

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

selalu lebih besar daripada atau sama dengan 0. Rubrik: gunakan kodomain metrik faktor, penguadratan, penjumlahan, dan akar kuadrat utama secara berurutan.

Petunjuk. Tahap 1: setiap jarak $d_i(x_i, y_i)$ merupakan bilangan real tak negatif. Tahap 2: tentukan tanda jumlah kuadratnya dan tanda akar kuadrat utama dari jumlah tersebut.

Jawaban. Kedua suku kuadrat tak negatif, sehingga jumlahnya tak negatif dan akar kuadrat utamanya juga tak negatif. Jadi $d(x, y) \geq 0$.

Solusi. Karena d_1 dan d_2 merupakan metrik, $d_1(x_1, y_1) \geq 0$ dan $d_2(x_2, y_2) \geq 0$. Khususnya, $d_1(x_1, y_1)^2 \geq 0$ dan $d_2(x_2, y_2)^2 \geq 0$, sehingga

$$d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \geq 0.$$

Simbol akar kuadrat menyatakan akar utama yang tak negatif. Maka $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap pasangan x, y . Argumen ini juga menunjukkan bahwa rumus tersebut bernilai real pada seluruh domain $(X_1 \times X_2)^2$.

Pemeriksaan K.11 Simetri metrik hasil kali. Buktikan bahwa metrik hasil kali memenuhi $d(x, y) = d(y, x)$. Rubrik: terapkan simetri secara terpisah pada d_1 dan d_2 , lalu substitusikan kedua kesamaan itu ke dalam rumus hasil kali.

Petunjuk. Tahap 1: tuliskan $d_1(x_1, y_1) = d_1(y_1, x_1)$ dan $d_2(x_2, y_2) = d_2(y_2, x_2)$. Tahap 2: bandingkan rumus untuk $d(x, y)$ dan $d(y, x)$ suku demi suku.

Jawaban. Simetri kedua metrik faktor membuat kedua kuadrat dalam rumus tidak berubah ketika x dan y dipertukarkan. Karena itu $d(x, y) = d(y, x)$.

Solusi. Dengan simetri d_1 dan d_2 , kita memperoleh

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \\ &= \sqrt{d_1(y_1, x_1)^2 + d_2(y_2, x_2)^2} \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

Jadi pertukaran kedua titik tidak mengubah jarak hasil kali, tepat seperti yang disyaratkan oleh aksioma simetri.

Pemeriksaan K.12 Definit positif dan pertidaksamaan segitiga. Jelaskan mengapa $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. Rubrik: gunakan fakta bahwa jumlah dua kuadrat tak negatif bernilai nol tepat ketika kedua sukunya nol, lalu terapkan definit positif pada setiap metrik faktor. Setelah itu, tutup pemeriksaan metrik dengan langkah Cauchy–Schwarz yang benar bagi pertidaksamaan segitiga.

Petunjuk. Tahap 1: kuadratkan kesamaan $d(x, y) = 0$ dan simpulkan $d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0$. Tahap 2: bagi pertidaksamaan segitiga, tetapkan $a_i = d_i(x_i, y_i)$ dan $b_i = d_i(y_i, z_i)$, kemudian batasi $a_1b_1 + a_2b_2$ dengan Cauchy–Schwarz.

Jawaban. Berlaku $d(x, y) = 0$ tepat ketika kedua jarak koordinat nol, yaitu tepat ketika $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$, atau $x = y$. Cauchy–Schwarz memberi suku silang paling besar $d(x, y)d(y, z)$, sehingga $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Solusi. Jika $x = y$, maka $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$. Kedua jarak koordinat nol, sehingga $d(x, y) = 0$. Sebaliknya, jika $d(x, y) = 0$, maka

$$d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 = 0.$$

Kedua suku tak negatif, jadi masing-masing harus nol. Definit positif metrik faktor memberi $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$. Maka $x = (x_1, x_2) = (y_1, y_2) = y$.

Untuk melengkapi verifikasi, ambil $z = (z_1, z_2)$ dan tulis $a_i = d_i(x_i, y_i)$ serta $b_i = d_i(y_i, z_i)$. Pertidaksamaan segitiga di setiap faktor memberi $d_i(x_i, z_i) \leq a_i + b_i$. Oleh karena semua suku tak negatif,

$$\begin{aligned} d(x, z)^2 &\leq (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2). \end{aligned}$$

Pertidaksamaan Cauchy–Schwarz yang diterapkan pada pasangan (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) memberikan

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = d(x, y)d(y, z).$$

Jadi

$$d(x, z)^2 \leq d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2 = (d(x, y) + d(y, z))^2.$$

Kedua ruas berakar tak negatif; mengambil akar kuadrat menghasilkan $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Langkah Cauchy–Schwarz ini membatasi suku silang dengan hasil kali kedua norma; suku silang tersebut tidak boleh dihilangkan.

Pemeriksaan K.13 Geometri ruang hasil kali dua interval. Misalkan $X_1 = [1, 2]$ dan $X_2 = [3, 4]$, masing-masing sebagai subruang dari $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Jelaskan secara rinci ruang hasil kali $X_1 \times X_2$ dan metrik hasil kalinya. Rubrik: gambarkan himpunan titik, nyatakan apakah sisi-sisinya termasuk, sederhanakan rumus jarak, dan jelaskan bentuk bola jauh dari serta dekat batas.

Petunjuk. Tahap 1: unsur hasil kali adalah pasangan (x_1, x_2) dengan $1 \leq x_1 \leq 2$ dan $3 \leq x_2 \leq 4$. Tahap 2: substitusikan $d_1(s, t) = |s - t|$ dan $d_2(s, t) = |s - t|$ ke rumus metrik hasil kali.

Jawaban. Hasil kalinya adalah persegi tertutup $[1, 2] \times [3, 4]$ di bidang. Metrik hasil kalinya sama dengan pembatasan metrik Euklides bidang, sehingga bola relatif adalah irisan cakram terbuka Euklides dengan persegi tersebut.

Solusi. Secara himpunan,

$$X_1 \times X_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq s \leq 2, 3 \leq t \leq 4\}.$$

Jadi bentuknya persegi dengan keempat sisi dan keempat titik sudut termasuk. Untuk $p = (s, t)$ dan $q = (u, v)$, metrik hasil kali ialah

$$d(p, q) = \sqrt{|s - u|^2 + |t - v|^2} = \sqrt{(s - u)^2 + (t - v)^2},$$

tepat metrik Euklides bidang yang dibatasi ke persegi.

Karena ruangnya hanya persegi tersebut, bola $B_{X_1 \times X_2}(p, r)$ adalah cakram Euklides terbuka berpusat di p yang dipotong dengan $[1, 2] \times [3, 4]$. Jika cakram tidak mencapai sisi, bola tampak bulat penuh; dekat sisi atau sudut, bagian di luar ruang dibuang. Keterbukaan selalu dihitung relatif terhadap ruang hasil kali ini.

Pemeriksaan K.14 Hasil kali bola umumnya bukan bola metrik hasil kali. Jika B_1 bola terbuka di X_1 dan B_2 bola terbuka di X_2 , tentukan apakah $B_1 \times B_2$ harus menjadi satu bola terbuka bagi metrik hasil kali. Rubrik: bedakan bentuk persegi panjang dari cakram, berikan pilihan bola faktor yang konkret, dan buktikan bahwa tidak ada pusat serta radius yang membuat kedua himpunan itu sama.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $B_1 = B_{X_1}(3/2, 1/4)$ dan $B_2 = B_{X_2}(7/2, 1/4)$. Tahap 2: hasil kalinya adalah persegi terbuka; irisan horizontal dan vertikal melalui pusat memaksa radius calon bola menjadi $1/4$, tetapi titik-titik dekat sudut persegi berjarak lebih dari $1/4$ dari pusat.

Jawaban. Tidak harus. Pada contoh tersebut, $B_1 \times B_2 = (5/4, 7/4) \times (13/4, 15/4)$ adalah persegi terbuka, bukan bola bagi metrik hasil kali Euklides. Hasil kali bola dapat menjadi bola dalam kasus khusus, tetapi tidak secara umum.

Solusi. Kedua bola yang diberikan tidak terpotong oleh batas ruang faktornya, sehingga

$$P = B_1 \times B_2 = (5/4, 7/4) \times (13/4, 15/4).$$

Himpunan P adalah persegi terbuka berpusat di $c = (3/2, 7/2)$. Andaikan $P = B(w, R)$ untuk suatu pusat $w = (w_1, w_2)$. Karena $w \in P$, irisan P dengan garis horizontal melalui w adalah interval $(5/4, 7/4) \times \{w_2\}$. Irisan bola dengan garis yang sama adalah $(w_1 - R, w_1 + R) \times \{w_2\}$. Kesamaan kedua irisan memaksa $w_1 = 3/2$ dan $R = 1/4$. Dengan cara yang sama, irisan vertikal memaksa $w_2 = 7/2$. Jadi pusat dan radius calon bola haruslah c dan $1/4$.

Namun titik $p = (17/10, 37/10)$ berada di P , sedangkan

$$d(c, p) = \sqrt{(1/5)^2 + (1/5)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} > \frac{1}{4}.$$

Jadi p tidak berada di bola berpusat c berjari-jari $1/4$, suatu kontradiksi. Dengan demikian, hasil kali dua bola terbuka tidak harus merupakan satu bola terbuka dalam metrik hasil kali. Perbedaan ini ialah syarat hasil kali membatasi setiap koordinat secara terpisah, sedangkan bola hasil kali membatasi jumlah kuadrat jarak koordinat.

Pemeriksaan K.15 Hasil kali bola tetap merupakan himpunan terbuka. Misalkan $B_i = B_{X_i}(c_i, r_i)$ untuk $i = 1, 2$. Buktikan bahwa $B_1 \times B_2$ merupakan himpunan terbuka di $X_1 \times X_2$, meskipun panduan 14 menunjukkan bahwa himpunan itu umumnya bukan satu bola. Rubrik: pada titik sebarang dalam hasil kali, hitung sisa radius di kedua faktor dan pilih radius bola hasil kali yang dikendalikan oleh sisa terkecil.

Petunjuk. Tahap 1: untuk $x = (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$, tetapkan $\epsilon_i = r_i - d_i(x_i, c_i) > 0$. Tahap 2: pilih $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ dan gunakan $d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y)$.

Jawaban. Ya. Setiap titik $x \in B_1 \times B_2$ mempunyai bola hasil kali berjari-jari $\min\{r_1 - d_1(x_1, c_1), r_2 - d_2(x_2, c_2)\}$ yang termuat dalam $B_1 \times B_2$. Jadi hasil kali tersebut terbuka.

Solusi. Ambil $x = (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$. Karena $d_i(x_i, c_i) < r_i$, bilangan $\epsilon_i = r_i - d_i(x_i, c_i)$ positif. Tetapkan $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Jika $y = (y_1, y_2)$ memenuhi $d(x, y) < \epsilon$, maka untuk $i = 1, 2$,

$$d_i(x_i, y_i) \leq \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} = d(x, y) < \epsilon \leq \epsilon_i.$$

Pertidaksamaan segitiga di faktor ke- i sekarang memberi

$$d_i(y_i, c_i) \leq d_i(y_i, x_i) + d_i(x_i, c_i) < \epsilon_i + d_i(x_i, c_i) = r_i.$$

Jadi $y_i \in B_i$ untuk kedua koordinat, sehingga $y \in B_1 \times B_2$. Dengan demikian, $B(x, \epsilon) \subseteq B_1 \times B_2$, dan hasil kali itu terbuka. Secara geometris, himpunan terbuka tidak harus berupa satu bola; ia cukup menjadi gabungan bola-bola yang lebih kecil.

Pemeriksaan K.16 Himpunan terbuka yang bukan satu hasil kali berbentuk persegi panjang. Temukan suatu subhimpunan terbuka dari $X_1 \times X_2 = [1, 2] \times [3, 4]$ yang tidak dapat ditulis sebagai $O_1 \times O_2$ dengan O_i terbuka di X_i . Rubrik: gunakan satu bola hasil kali yang tidak menyentuh batas, lalu pilih dua titik di dalamnya yang titik silang koordinatnya berada di luar bola.

Petunjuk. Tahap 1: ambil $U = B((3/2, 7/2), 1/4)$. Tahap 2: uji $p = (17/10, 7/2)$, $q = (3/2, 37/10)$, dan titik silang $s = (17/10, 37/10)$.

Jawaban. Bola terbuka $U = B((3/2, 7/2), 1/4)$ adalah contoh yang diminta. Titik p dan q pada petunjuk berada di U , tetapi titik silang s tidak; sifat ini mustahil bagi satu hasil kali $O_1 \times O_2$.

Solusi. Bola $U = B((3/2, 7/2), 1/4)$ terbuka menurut definisi dan seluruhnya berada di bagian dalam persegi hasil kali. Kedua titik $p = (17/10, 7/2)$ dan $q = (3/2, 37/10)$ masing-masing berjarak $1/5 < 1/4$ dari pusat, sehingga $p, q \in U$. Untuk titik silang $s = (17/10, 37/10)$, berlaku

$$d((3/2, 7/2), s) = \frac{\sqrt{2}}{5} > \frac{1}{4},$$

sehingga $s \notin U$.

Andaikan $U = O_1 \times O_2$. Dari $p \in U$ diperoleh $17/10 \in O_1$ dan $7/2 \in O_2$; dari $q \in U$ diperoleh $3/2 \in O_1$ dan $37/10 \in O_2$. Maka definisi hasil kali memaksa $s = (17/10, 37/10) \in O_1 \times O_2 = U$, bertentangan dengan

perhitungan jarak. Jadi U terbuka tetapi tidak berbentuk satu hasil kali dari himpunan-himpunan terbuka pada ruang faktor.

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Sepuluh panduan berikut mengikuti, dalam urutan baca, sepuluh perintah atomik pertama pada latihan penutup Bab 11. Uraian ini merupakan materi pendamping asli untuk belajar mandiri, bukan jawaban dari penulis karya sumber, dan tersedia di bawah lisensi Creative Commons Atribusi 4.0 Internasional (CC BY 4.0).

Pemeriksaan K.17 Keterbukaan relatif interval $[1, 2)$. Dalam subruang $A = [1, 3]$ dari $(\mathbb{R}, d_E)$, tentukan apakah $S = [1, 2)$ terbuka dalam A . *Rubrik.* Jawaban harus menyatakan suatu himpunan terbuka di ruang ambien yang irisannya dengan A tepat sama dengan S .

Petunjuk. Gunakan pencirian keterbukaan subruang: cari himpunan terbuka $O \subseteq \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $S = A \cap O$. Interval terbuka dengan ujung kanan 2 dapat dipilih agar juga memuat titik 1.

Jawaban. Ya. Himpunan $S = [1, 2)$ terbuka secara relatif dalam $A = [1, 3]$ karena $S = A \cap (0, 2)$.

Solusi. Interval $O = (0, 2)$ terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$. Selain itu,

$$A \cap O = [1, 3] \cap (0, 2) = [1, 2) = S.$$

Berdasarkan pencirian himpunan terbuka dalam subruang, irisan suatu himpunan terbuka di ruang ambien dengan A terbuka dalam A . Jadi S terbuka dalam A , walaupun S tidak terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan K.18 Keterbukaan relatif dua titik dalam $\mathbb{Q}$. Dalam subruang $A = \mathbb{Q}$ dari $(\mathbb{R}, d_E)$, tentukan apakah $S = \{1, 2\}$ terbuka dalam A . *Rubrik.* Jika jawabannya negatif, tunjukkan bahwa sekurang-kurangnya satu titik S tidak mempunyai bola subruang yang termuat dalam S .

Petunjuk. Ambil sebarang $r > 0$. Dengan memilih bilangan bulat positif n yang cukup besar, titik rasional $1 + 1/n$ dapat dibuat berada dalam $B_{\mathbb{Q}}(1, r)$ tanpa sama dengan 1 atau 2.

Jawaban. Tidak. Setiap bola terbuka dalam $\mathbb{Q}$ yang berpusat di 1 memuat bilangan rasional selain 1 dan 2.

Solusi. Andaikan $r > 0$. Pilih $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $1/n < \min\{r, 1/2\}$, dan tetapkan $q = 1 + 1/n$. Maka $q \in \mathbb{Q}$, $d_E(q, 1) = 1/n < r$, sehingga $q \in B_{\mathbb{Q}}(1, r)$. Akan tetapi, pilihan $1/n < 1/2$ menjamin $1 < q < 3/2$; jadi $q \notin \{1, 2\}$. Karena argumen ini berlaku bagi setiap $r > 0$, tidak ada bola terbuka dalam $\mathbb{Q}$ yang berpusat di 1 dan termuat dalam S . Maka S tidak terbuka dalam subruang $\mathbb{Q}$.

Pemeriksaan K.19 Keterbukaan relatif dua titik dalam $\mathbb{Z}$. Dalam subruang $A = \mathbb{Z}$ dari $(\mathbb{R}, d_E)$, tentukan apakah $S = \{1, 2\}$ terbuka dalam A . *Rubrik.* Tunjukkan secara eksplisit bahwa setiap titik S mempunyai bola subruang yang termuat dalam S .

Petunjuk. Dua bilangan bulat berbeda berjarak sekurang-kurangnya 1. Tinjau bola berjari-jari $1/2$ dalam subruang $\mathbb{Z}$.

Jawaban. Ya. Dalam metrik subruang pada $\mathbb{Z}$, berlaku $B_{\mathbb{Z}}(1, 1/2) = \{1\}$ dan $B_{\mathbb{Z}}(2, 1/2) = \{2\}$.

Solusi. Jika $k, \ell \in \mathbb{Z}$ dan $k \neq \ell$, maka $|k - \ell| \geq 1$. Karena itu, satu-satunya bilangan bulat dalam bola ambien $(k - 1/2, k + 1/2)$ adalah k , sehingga $B_{\mathbb{Z}}(k, 1/2) = \{k\}$. Khususnya,

$$S = B_{\mathbb{Z}}(1, 1/2) \cup B_{\mathbb{Z}}(2, 1/2).$$

Setiap bola pada ruas kanan terbuka dalam $\mathbb{Z}$; gabungannya juga terbuka. Jadi S terbuka dalam subruang $\mathbb{Z}$.

Pemeriksaan K.20 Keterbukaan di dalam subruang terbuka. Misalkan O terbuka dalam ruang metrik (X, d) dan $U \subseteq O$. Buktikan bahwa U terbuka dalam $(O, d|_{O \times O})$ jika dan hanya jika U terbuka dalam

(X, d) . *Rubrik.* Kedua implikasi harus dibuktikan; nyatakan dengan jelas tempat digunakannya hipotesis bahwa O terbuka dalam X .

Petunjuk. *Arah pertama.* Jika U terbuka dalam O , tuliskan $U = O \cap V$ untuk suatu V yang terbuka dalam X .

Arah kedua. Jika U terbuka dalam X , gunakan kesamaan sederhana $U = O \cap U$.

Jawaban. Ekuivalensi benar. Pada arah yang tidak otomatis bagi subruang sebarang, keterbukaan O membuat irisan $O \cap V$ terbuka dalam X .

Solusi. Andaikan U terbuka dalam subruang O . Berdasarkan pencirian keterbukaan relatif, terdapat himpunan terbuka $V \subseteq X$ dengan $U = O \cap V$. Hipotesis menyatakan bahwa O terbuka dalam X ; karena irisan berhingga himpunan-himpunan terbuka bersifat terbuka, $U = O \cap V$ terbuka dalam X .

Sebaliknya, andaikan U terbuka dalam X . Karena $U \subseteq O$, berlaku $U = O \cap U$. Himpunan kedua pada irisan ini terbuka dalam X , sehingga pencirian keterbukaan relatif menunjukkan bahwa U terbuka dalam subruang O . Kedua implikasi telah terbukti.

Pemeriksaan K.21 Kekontinuan pembatasan fungsi. Misalkan $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ kontinu dan A suatu subruang dari X . Tentukan apakah pembatasan $f|_A : A \rightarrow Y$ harus kontinu, lalu buktikan jawaban Anda. *Rubrik.* Bukti harus memperhitungkan topologi subruang pada A , bukan sekadar menyatakan bahwa rumus fungsinya tidak berubah.

Petunjuk. Untuk himpunan terbuka $V \subseteq Y$, bandingkan $(f|_A)^{-1}(V)$ dengan $f^{-1}(V)$. Prapeta yang pertama merupakan irisan yang kedua dengan A .

Jawaban. Ya. Pembatasan fungsi kontinu pada sebarang subruang domain selalu kontinu.

Solusi. Ambil sebarang himpunan terbuka V dalam Y . Karena $f : X \rightarrow Y$ kontinu, $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Dari definisi pembatasan fungsi,

$$(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V).$$

Ruas kanan terbuka dalam subruang A . Jadi prapeta setiap himpunan terbuka di Y di bawah $f|_A$ terbuka dalam domain A . Pencirian kekontinuan melalui himpunan terbuka membuktikan bahwa $f|_A : A \rightarrow Y$ kontinu.

Pemeriksaan K.22 Himpunan tertutup relatif. Misalkan (X, d) ruang metrik dan $A \subseteq X$. Buktikan bahwa $C_A \subseteq A$ tertutup dalam A jika dan hanya jika terdapat himpunan tertutup C_X dalam X sedemikian sehingga $C_A = C_X \cap A$. *Rubrik.* Buktikan kedua arah dengan menggunakan komplemen relatif dan pencirian himpunan terbuka dalam subruang.

Petunjuk. *Arah maju.* Karena $A \setminus C_A$ terbuka dalam A , tuliskan $A \setminus C_A = A \cap O_X$ untuk suatu O_X terbuka dalam X , lalu ambil $C_X = X \setminus O_X$.

Arah balik. Ambil komplemen relatif dari $C_A = A \cap C_X$ di dalam A .

Jawaban. Ekuivalensi benar. Himpunan tertutup relatif tepat merupakan irisan subruang dengan suatu himpunan tertutup di ruang ambien.

Solusi. Andaikan C_A tertutup dalam A . Maka $A \setminus C_A$ terbuka dalam A . Ada himpunan terbuka O_X dalam X sedemikian sehingga $A \setminus C_A = A \cap O_X$. Tetapkan $C_X = X \setminus O_X$; himpunan C_X tertutup dalam X . Dengan mengambil komplemen relatif di dalam A , diperoleh

$$C_A = A \setminus (A \cap O_X) = A \cap (X \setminus O_X) = A \cap C_X.$$

Sebaliknya, andaikan $C_A = A \cap C_X$ untuk suatu himpunan tertutup C_X dalam X . Komplemen $X \setminus C_X$ terbuka dalam X , dan

$$A \setminus C_A = A \cap (X \setminus C_X).$$

Ruas kanan terbuka dalam subruang A . Jadi komplemen relatif C_A terbuka dalam A , yang berarti C_A tertutup dalam A .

Pemeriksaan K.23 Metrik jumlah pada ruang hasil kali. Untuk ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) , definisikan $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Buktikan atau sangkal bahwa d merupakan metrik pada $X \times Y$. *Rubrik.* Periksa keempat aksioma metrik dan tuliskan langkah pertidaksamaan segitiga secara eksplisit.

Petunjuk. Ketaknegatifan dan simetri diwarisi dari kedua metrik koordinat. Suatu jumlah dua bilangan tak negatif bernilai nol tepat ketika keduanya nol. Untuk pertidaksamaan segitiga, terapkan aksioma tersebut sekali pada d_X dan sekali pada d_Y , lalu jumlahkan.

Jawaban. Klaim benar. Fungsi d adalah metrik pada $X \times Y$; metrik ini sering disebut metrik hasil kali berbentuk jumlah.

Solusi. Tuliskan $p = (x_1, y_1)$ dan $q = (x_2, y_2)$. Karena d_X dan d_Y tak negatif, $d(p, q) \geq 0$. Selain itu, $d(p, q) = 0$ jika dan hanya jika kedua sukunya nol, yakni jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$; kondisi ini ekuivalen dengan $p = q$. Simetri kedua metrik koordinat memberi $d(p, q) = d(q, p)$.

Untuk $r = (x_3, y_3)$, pertidaksamaan segitiga pada setiap koordinat memberikan

$$\begin{aligned} d(p, r) &= d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3) \\ &\leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) \\ &= d(p, q) + d(q, r). \end{aligned}$$

Jadi semua aksioma metrik terpenuhi dan d merupakan metrik pada $X \times Y$.

Pemeriksaan K.24 Metrik Euklides pada hasil kali berhingga. Misalkan (X_i, d_i) ruang metrik untuk $1 \leq i \leq n$, tetapkan $X = \prod_{i=1}^n X_i$, dan definisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}.$$

Buktikan bahwa d merupakan metrik pada X . *Rubrik.* Selain tiga aksioma langsung, bukti harus membenarkan pertidaksamaan segitiga menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz atau bentuk ekuivalen pertidaksamaan Minkowski.

Petunjuk. Untuk $x, y, z \in X$, tetapkan $a_i = d_i(x_i, y_i)$, $b_i = d_i(y_i, z_i)$, dan $c_i = d_i(x_i, z_i)$. Maka $c_i \leq a_i + b_i$. Kembangkan $\sum_i (a_i + b_i)^2$ dan gunakan Cauchy-Schwarz pada $\sum_i a_i b_i$.

Jawaban. Fungsi d adalah metrik pada hasil kali berhingga $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Pertidaksamaan segitiganya adalah pertidaksamaan Minkowski bagi vektor jarak koordinat.

Solusi. Ketaknegatifan jelas dari definisi. Nilai $d(x, y)$ sama dengan nol jika dan hanya jika $d_i(x_i, y_i) = 0$ untuk setiap i , yang terjadi jika dan hanya jika $x_i = y_i$ untuk setiap i , yakni $x = y$. Simetri setiap d_i langsung memberikan $d(x, y) = d(y, x)$.

Sekarang ambil $x, y, z \in X$ dan gunakan notasi a_i, b_i, c_i dari petunjuk. Pertidaksamaan segitiga pada X_i memberi $c_i \leq a_i + b_i$. Karena semua bilangan ini tak negatif dan, berdasarkan Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

kita memperoleh

$$d(x, z)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \\
&= (d(x, y) + d(y, z))^2.
\end{aligned}$$

Kedua ruas terakhir tak negatif, sehingga pengambilan akar kuadrat memberi $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Jadi d memenuhi seluruh aksioma metrik.

Pemeriksaan K.25 Teorema konvergensi monoton. Misalkan (x_n) suatu barisan bilangan real yang tak menurun dan terbatas di atas. Buktikan bahwa (x_n) konvergen. *Rubrik.* Identifikasi kandidat limit melalui supremum dan verifikasi langsung definisi epsilon bagi konvergensi.

Petunjuk. Tetapkan $L = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. Untuk $\epsilon > 0$, bilangan $L - \epsilon$ bukan batas atas himpunan suku barisan. Setelah menemukan $x_N > L - \epsilon$, gunakan sifat tak menurun.

Jawaban. Barisan tersebut konvergen ke supremum himpunan suku-sukunya: $\lim x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Solusi. Himpunan $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ tidak kosong dan terbatas di atas. Berdasarkan kelengkapan bilangan real, terdapat $L = \sup S$. Ambil $\epsilon > 0$. Karena $L - \epsilon < L$, bilangan $L - \epsilon$ bukan batas atas S . Jadi terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $x_N > L - \epsilon$.

Jika $n \geq N$, sifat tak menurun memberi $x_N \leq x_n$, sedangkan sifat L sebagai batas atas memberi $x_n \leq L$. Maka

$$L - \epsilon < x_N \leq x_n \leq L,$$

sehingga $|x_n - L| = L - x_n < \epsilon$. Ini berlaku bagi setiap $n \geq N$, jadi definisi konvergensi memberikan $x_n \rightarrow L$.

Pemeriksaan K.26 Contoh dan noncontoh dalam ruang Hilbert. Untuk ruang Hilbert $H = \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$, berikan dua unsur berbeda dari H dan satu barisan tak hingga yang tidak berada dalam H . Jelaskan setiap pilihan. *Rubrik.* Hitung atau tentukan perilaku deret kuadrat untuk ketiga barisan.

Petunjuk. Mulailah dengan barisan nol dan barisan yang hanya mempunyai satu suku tak nol. Untuk noncontoh, pilih barisan yang semua sukunya sama dengan 1.

Jawaban. Contoh yang memenuhi adalah $u = (0, 0, 0, \dots)$ dan $v = (1, 0, 0, \dots)$. Noncontohnya adalah $w = (1, 1, 1, \dots)$.

Solusi. Untuk $u_n = 0$ bagi semua n , berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = 0$; jadi $u \in H$. Untuk $v_1 = 1$ dan $v_n = 0$ bila $n \geq 2$, berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = 1$; jadi $v \in H$. Kedua barisan berbeda karena suku pertamanya berbeda.

Untuk $w_n = 1$ bagi semua n , jumlah parsial deret kuadratnya adalah $\sum_{n=1}^N w_n^2 = N$, yang tidak terbatas ketika $N \rightarrow \infty$. Karena itu $\sum_{n=1}^{\infty} w_n^2$ divergen dan $w \notin H$. Jadi w merupakan barisan tak hingga yang bukan unsur H .

Panduan latihan lanjutan

Sembilan panduan berikut mendampingi tiga tugas terakhir tentang ruang Hilbert dan enam butir benar-salah penutup pada latihan Bab 11, yakni panduan bernomor 27–35 dalam urutan seluruh bab. Kerjakan dahulu latihan sumber. Buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap hanya setelah Anda mencoba menyusun argumen sendiri. Pernyataan di bawah memparafrasakan sasaran latihan, sedangkan solusinya merupakan uraian asli yang ditulis untuk edisi ini dan tersedia sebagai komponen terpisah di bawah Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Pemeriksaan K.27 Ketertutupan ruang barisan terhadap pengurangan. Misalkan H terdiri atas semua barisan real $x = (x_n)$ yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Untuk $x, y \in H$, buktikan bahwa $x - y \in H$.

Rubrik: berikan pertidaksamaan suku demi suku, terapkan pada jumlah parsial, lalu jelaskan mengapa deret kuadrat selisih benar-benar konvergen.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan $(u - v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2$. Tahap 2: jumlahkan hingga indeks N ; jumlah parsial di ruas kiri tak menurun dan mempunyai batas atas yang tidak bergantung pada N .

Jawaban. Berlaku $x - y \in H$, sebab $\sum (x_k - y_k)^2 \leq 2 \sum x_k^2 + 2 \sum y_k^2 < \infty$.

Solusi. Untuk bilangan real u dan v , pertidaksamaan $(u + v)^2 \geq 0$ memberi $-2uv \leq u^2 + v^2$. Karena itu

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \leq u^2 + 2v^2.$$

Terapkan pertidaksamaan ini dengan $u = x_k$ dan $v = y_k$. Untuk setiap $N \in \mathbb{Z}^+$, jumlah parsial $S_N = \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2$ memenuhi

$$0 \leq S_N \leq 2 \sum_{k=1}^N x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N y_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2.$$

Barisan (S_N) tak menurun karena setiap suku yang ditambahkan taknegatif. Ruas paling kanan merupakan bilangan real berhingga karena $x, y \in H$. Jadi (S_N) tak menurun dan terbatas di atas, sehingga konvergen. Dengan demikian $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$ berhingga. Menurut definisi H , hal ini tepat berarti $x - y \in H$.

Pemeriksaan K.28 Metrik yang diinduksi oleh norma jumlah kuadrat. Pada ruang H dari panduan sebelumnya, definisikan $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{1/2}$ dan $d(x, y) = \|x - y\|$. Buktikan bahwa d merupakan metrik pada H . Rubrik: periksa keterdefinisan, definit positif, simetri, dan pertidaksamaan segitiga; untuk syarat terakhir, buktikan pertidaksamaan pada jumlah parsial dengan Cauchy–Schwarz lalu ambil limit.

Petunjuk. Tahap 1: panduan 27 menjamin $x - y \in H$. Tahap 2: untuk $a_k = x_k - y_k$ dan $b_k = y_k - z_k$, terapkan Cauchy–Schwarz berhingga pada $\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^2$, kemudian biarkan $N \rightarrow \infty$.

Jawaban. Fungsi d merupakan metrik. Sifat selain pertidaksamaan segitiga mengikuti langsung dari jumlah kuadrat, sedangkan pertidaksamaan segitiga adalah pertidaksamaan Minkowski yang diperoleh dari Cauchy–Schwarz pada jumlah parsial.

Solusi. Panduan 27 menunjukkan bahwa $x - y \in H$ untuk setiap $x, y \in H$, jadi $d(x, y)$ terdefinisi dan berhingga. Jelas $d(x, y) \geq 0$. Jika $d(x, y) = 0$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 = 0$. Semua sukunya taknegatif, sehingga setiap suku harus nol dan $x_k = y_k$ untuk semua k ; jadi $x = y$. Implikasi sebaliknya langsung berlaku. Selain itu,

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 \right)^{1/2} = d(y, x),$$

sehingga d simetris.

Tinggal membuktikan pertidaksamaan segitiga. Ambil $x, y, z \in H$, lalu tetapkan $a_k = x_k - y_k$ dan $b_k = y_k - z_k$. Untuk setiap N , definisikan

$$A_N = \sqrt{\sum_{k=1}^N a_k^2}, \quad B_N = \sqrt{\sum_{k=1}^N b_k^2}.$$

Cauchy–Schwarz berhingga memberi $\sum_{k=1}^N a_k b_k \leq A_N B_N$. Oleh sebab itu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (x_k - z_k)^2 &= \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^2 \\ &= A_N^2 + 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k + B_N^2 \end{aligned}$$

$$\leq A_N^2 + 2A_N B_N + B_N^2 = (A_N + B_N)^2.$$

Setelah mengambil akar kuadrat taknegatif, diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - z_k)^2} \leq A_N + B_N.$$

Ketika $N \rightarrow \infty$, ketiga jumlah parsial kuadrat tersebut konvergen ke deret yang mendefinisikan normanya. Kekontinuan fungsi akar kuadrat memberikan

$$d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Jadi keempat aksioma metrik terpenuhi dan d merupakan metrik pada H .

Pemeriksaan K.29 Ruang E pangkat m sebagai salinan isometrik ruang Euklides. Untuk $m \in \mathbb{Z}^+$, definisikan $E^m = \{(x_n) \in H \mid x_k = 0 \text{ untuk } k > m\}$ dan $f : E^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dengan $f((x_n)) = (x_1, \dots, x_m)$. Buktikan bahwa f bijektif dan, untuk setiap $x, y \in E^m$, berlaku $d(x, y) = d_E(f(x), f(y))$. Rubrik: buktikan injektivitas, surjektivitas melalui perluasan berekor nol, dan kesamaan jarak.

Petunjuk. Tahap 1: unsur E^m sepenuhnya ditentukan oleh m koordinat pertamanya. Tahap 2: perluas setiap vektor di $\mathbb{R}^m$ dengan nol untuk semua indeks yang lebih besar dari m .

Jawaban. Fungsi f bijektif dan mempertahankan jarak. Inversnya mengirim $(u_1, \dots, u_m)$ ke barisan $(u_1, \dots, u_m, 0, 0, \dots)$.

Solusi. Jika $f(x) = f(y)$ untuk $x, y \in E^m$, maka $x_k = y_k$ untuk $1 \leq k \leq m$. Untuk $k > m$, definisi E^m memberi $x_k = y_k = 0$. Jadi $x = y$ dan f injektif.

Sebaliknya, ambil sembarang $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ dan bentuk barisan $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_m, 0, 0, \dots)$. Jumlah kuadrat koordinatnya hanya mempunyai paling banyak m suku taknol, jadi berhingga; dengan demikian $\tilde{u} \in E^m$. Karena $f(\tilde{u}) = u$, fungsi f surjektif. Maka f bijektif.

Akhirnya, untuk $x, y \in E^m$, semua koordinat keduanya setelah indeks m bernilai nol. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2 = d_E(f(x), f(y))^2. \end{aligned}$$

Kedua jarak taknegatif, sehingga pengambilan akar memberi $d(x, y) = d_E(f(x), f(y))$. Jadi f merupakan bijeksi yang mempertahankan jarak, dan E^m adalah salinan isometrik $\mathbb{R}^m$ di dalam H .

Pemeriksaan K.30 Pembatasan metrik diskret tetap diskret. Tentukan benar atau salah: jika d adalah metrik diskret pada X , maka untuk setiap subruang $A \subseteq X$, metrik pembatasan d_A juga merupakan metrik diskret pada A . Berikan bukti atau contoh tandingan.

Petunjuk. Tulis rumus nilai metrik diskret untuk dua titik $a, b \in A$. Pembatasan mengubah domain, bukan nilai pada pasangan tersebut.

Jawaban. Benar. Pada A , jarak tetap nol untuk dua titik yang sama dan satu untuk dua titik yang berbeda.

Solusi. Metrik diskret pada X memenuhi

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Untuk $a, b \in A$, metrik subruang didefinisikan oleh $d_A(a, b) = d(a, b)$. Karena itu $d_A(a, b) = 0$ jika $a = b$ dan $d_A(a, b) = 1$ jika $a \neq b$. Ini tepat rumus metrik diskret pada A , sehingga pernyataannya benar.

Pemeriksaan K.31 Subruang diskret dari metrik yang tidak diskret. Tentukan benar atau salah: jika d bukan metrik diskret pada X , maka pembatasannya pada setiap subhimpunan $A \subseteq X$ juga tidak mungkin menjadi metrik diskret. Berikan contoh tandingan konkret jika klaim ini salah.

Petunjuk. Ambil metrik Euklides pada $\mathbb{R}$, lalu pilih subhimpunan dua titik yang jarak antartitiknya tepat satu.

Jawaban. Salah. Metrik Euklides pada $\mathbb{R}$ tidak diskret, tetapi pembatasannya pada $A = \{0, 1\}$ adalah metrik diskret.

Solusi. Ambil $X = \mathbb{R}$ dengan $d_E(x, y) = |x - y|$. Metrik ini bukan metrik diskret; misalnya, $d_E(0, 2) = 2$, sedangkan metrik diskret akan memberi jarak satu kepada setiap pasangan titik berbeda. Sekarang ambil $A = \{0, 1\}$. Pada A , satu-satunya pasangan titik berbeda adalah 0 dan 1, dan $d_E(0, 1) = d_E(1, 0) = 1$. Jarak titik ke dirinya sendiri tetap nol. Jadi $d_E|_{A \times A}$ tepat merupakan metrik diskret pada A . Contoh ini menyangkal klaim universal tersebut.

Pemeriksaan K.32 Konvergensi subruang mengimplikasikan konvergensi ambien. Tentukan benar atau salah: jika A subruang dari (X, d) , barisan (a_n) di A konvergen ke $a \in A$ dalam metrik subruang, maka barisan yang sama konvergen ke a dalam X . Buktikan keputusan Anda dari definisi epsilon.

Petunjuk. Bandingkan $d_A(a_n, a)$ dengan $d(a_n, a)$. Nilainya sama untuk semua pasangan titik yang berada di A .

Jawaban. Benar. Metrik subruang dan metrik ambien memberikan jarak yang sama pada a_n dan a .

Solusi. Ambil sembarang $\epsilon > 0$. Karena $a_n \rightarrow a$ di A , terdapat $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga untuk setiap $n \geq N$, $d_A(a_n, a) < \epsilon$. Namun metrik subruang adalah pembatasan metrik ambien, sehingga $d_A(a_n, a) = d(a_n, a)$. Akibatnya $d(a_n, a) < \epsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Ini tepat definisi $a_n \rightarrow a$ dalam X . Jadi pernyataannya benar.

Pemeriksaan K.33 Limit ambien yang berada di luar subruang. Tentukan benar atau salah: jika (a_n) adalah barisan di subruang $A \subseteq X$ dan konvergen dalam X ke suatu $a \in X$, maka barisan itu selalu konvergen ke a dalam A . Jika salah, tunjukkan secara eksplisit hipotesis yang hilang.

Petunjuk. Pilih subruang yang tidak tertutup, misalnya $A = (0, 1)$ di $\mathbb{R}$, dan bangun barisan dalam A yang menuju salah satu titik ujungnya.

Jawaban. Salah. Dalam $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, barisan $a_n = 1/(n+1)$ konvergen di $\mathbb{R}$ ke 0, tetapi $0 \notin A$ sehingga tidak dapat menjadi limit di ruang A .

Solusi. Ambil $X = (\mathbb{R}, d_E)$, $A = (0, 1)$, dan $a_n = 1/(n+1)$. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, berlaku $0 < a_n < 1$, jadi seluruh suku berada di A . Untuk $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{Z}^+$ dengan $N+1 > 1/\epsilon$. Jika $n \geq N$, maka

$$d_E(a_n, 0) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

Jadi $a_n \rightarrow 0$ dalam X .

Akan tetapi, konvergensi dalam ruang metrik A harus mempunyai titik limit yang merupakan unsur A . Karena $0 \notin A$, ungkapan “konvergen ke 0 dalam A ” tidak memenuhi definisi limit di ruang tersebut. Hipotesis yang hilang adalah $a \in A$. Jika hipotesis itu ditambahkan, metrik pembatasan memberikan kesetaraan antara konvergensi di A dan konvergensi ambien ke titik tersebut.

Pemeriksaan K.34 Maksimum dua jarak sebagai metrik hasil kali. Untuk ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) , tentukan benar atau salah bahwa fungsi

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

merupakan metrik pada $X \times Y$. Rubrik: periksa seluruh aksioma dan buktikan langkah maksimum yang diperlukan dalam pertidaksamaan segitiga.

Petunjuk. Untuk tiga titik hasil kali, tetapkan

$$M_1 = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\},$$

$$M_2 = \max\{d_X(x_2, x_3), d_Y(y_2, y_3)\}.$$

Masing-masing jumlah jarak koordinat paling besar $M_1 + M_2$.

Jawaban. Benar. Maksimum dua metrik koordinat memenuhi definit positif, simetri, dan pertidaksamaan segitiga pada $X \times Y$.

Solusi. Fungsi D taknegatif karena kedua jarak koordinat taknegatif. Selain itu, $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$ jika dan hanya jika kedua jarak koordinat nol, yaitu jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Ini ekuivalen dengan kesamaan dua pasangan terurut. Simetri D mengikuti simetri d_X dan d_Y .

Untuk pertidaksamaan segitiga, ambil $p_i = (x_i, y_i) \in X \times Y$ bagi $i = 1, 2, 3$, lalu tetapkan

$$M_1 = D(p_1, p_2), \quad M_2 = D(p_2, p_3).$$

Dari definisi maksimum dan pertidaksamaan segitiga koordinat,

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_3) &\leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) \leq M_1 + M_2, \\ d_Y(y_1, y_3) &\leq d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) \leq M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Karena kedua bilangan di dalam maksimum yang mendefinisikan $D(p_1, p_3)$ paling besar $M_1 + M_2$, diperoleh

$$D(p_1, p_3) \leq M_1 + M_2 = D(p_1, p_2) + D(p_2, p_3).$$

Jadi D memenuhi semua aksioma metrik.

Pemeriksaan K.35 Hasil kali dua jarak gagal memisahkan titik. Untuk ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) , tentukan benar atau salah bahwa

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2)d_Y(y_1, y_2)$$

selalu merupakan metrik pada $X \times Y$. Jika salah, tunjukkan aksioma yang gagal dengan dua titik konkret.

Petunjuk. Pilih dua titik hasil kali yang mempunyai koordinat pertama sama, tetapi koordinat kedua berbeda. Apa yang terjadi pada faktor jarak pertama?

Jawaban. Salah. Pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, titik $(0, 0)$ dan $(0, 1)$ berbeda, tetapi rumus tersebut memberi jarak nol.

Solusi. Ambil $X = Y = \mathbb{R}$ dengan metrik Euklides. Tetapkan $p = (0, 0)$ dan $q = (0, 1)$. Kedua titik berbeda karena koordinat keduanya berbeda. Namun

$$D(p, q) = d_E(0, 0)d_E(0, 1) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Jadi $D(p, q) = 0$ tidak memaksa $p = q$. Aksioma definit positif gagal, sehingga rumus hasil kali ini bukan metrik pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Satu contoh tersebut cukup menyangkal pernyataan universal; kegagalan ini pula yang memotivasi penggunaan jumlah, maksimum, atau akar jumlah kuadrat untuk metrik hasil kali.

Pemeriksaan penguasaan Bab 11

Delapan pemeriksaan berikut memadukan gagasan subruang, himpunan relatif, dan metrik hasil kali. Materi ini ditulis secara mandiri untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0. Cobalah setiap soal sebelum membuka petunjuk; jawaban menyatakan hasil, sedangkan solusi memberi penutupan matematis lengkap.

Pemeriksaan K.36 Merekonstruksi himpunan terbuka relatif. Dalam $X = \mathbb{R}$, ambil $A = [0, 1] \cup \{2\}$ dan $U = [0, 1/2)$. Buktikan langsung bahwa U terbuka di A , lalu berikan suatu himpunan terbuka O di X dengan $U = A \cap O$. Apakah U terbuka di X ?

Petunjuk. Untuk $x \in U$, pilih radius yang lebih kecil daripada jarak x ke $1/2$. Untuk representasi ambien, coba sebuah interval yang ujung kirinya negatif.

Jawaban. Himpunan U terbuka di A dan $U = A \cap (-1, 1/2)$. Himpunan itu tidak terbuka di $X = \mathbb{R}$.

Solusi. Ambil $x \in U$ dan tetapkan $r = (1/2 - x)/2 > 0$. Jika $y \in B_A(x, r)$, maka $y \in A$ dan $y < x + r < 1/2$; jadi $y \in [0, 1/2) = U$. Dengan demikian setiap titik U memiliki bola relatif yang termuat dalam U . Selain itu, $A \cap (-1, 1/2) = [0, 1/2) = U$, sedangkan $(-1, 1/2)$ terbuka di $\mathbb{R}$. Namun, setiap bola ambien yang berpusat di 0 memuat bilangan negatif, sehingga tidak termuat dalam U . Maka U tidak terbuka di X .

Pemeriksaan K.37 Dua arah pencirian tertutup relatif. Misalkan $A \subseteq X$, dengan X ruang metrik. Buktikan langsung bahwa $C_A \subseteq A$ tertutup di A jika dan hanya jika terdapat himpunan tertutup C_X di X sehingga $C_A = A \cap C_X$.

Petunjuk. Gunakan komplemen relatif $A \setminus C_A$ dan pencirian himpunan terbuka relatif sebagai $A \cap O_X$.

Jawaban. Jika $A \setminus C_A = A \cap O_X$, ambil $C_X = X \setminus O_X$. Untuk arah sebaliknya, komplemen relatif $A \setminus (A \cap C_X) = A \cap (X \setminus C_X)$ terbuka di A .

Solusi. Andaikan C_A tertutup di A . Maka $U_A = A \setminus C_A$ terbuka di A , sehingga terdapat O_X terbuka di X dengan $U_A = A \cap O_X$. Tetapkan $C_X = X \setminus O_X$; himpunan C_X tertutup dan

$$A \cap C_X = A \cap (X \setminus O_X) = A \setminus (A \cap O_X) = A \setminus U_A = C_A.$$

Sebaliknya, jika $C_A = A \cap C_X$ dengan C_X tertutup, maka $O_X = X \setminus C_X$ terbuka dan $A \setminus C_A = A \cap O_X$ terbuka di A . Jadi C_A tertutup di A .

Pemeriksaan K.38 Pembatasan fungsi kontinu. Jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu dan $A \subseteq X$ diberi metrik subruang, buktikan bahwa $f|_A : A \rightarrow Y$ kontinu dengan dua cara: memakai prapeta himpunan terbuka dan memakai definisi epsilon-delta.

Petunjuk. Untuk himpunan terbuka $V \subseteq Y$, bandingkan $(f|_A)^{-1}(V)$ dengan $f^{-1}(V)$. Dalam argumen metrik, ingat bahwa d_A sama dengan d_X pada pasangan titik di A .

Jawaban. Fungsi $f|_A$ selalu kontinu. Prapetanya memenuhi $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$, dan delta yang bekerja untuk f di suatu titik $a \in A$ juga bekerja untuk $f|_A$.

Solusi. Jika V terbuka di Y , kekontinuan f membuat $f^{-1}(V)$ terbuka di X . Identitas $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ menunjukkan bahwa prapeta itu terbuka di A ; jadi $f|_A$ kontinu.

Untuk bukti epsilon-delta, ambil $a \in A$ dan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta > 0$ dari kekontinuan f di a . Jika $x \in A$ dan $d_A(x, a) < \delta$, maka $d_X(x, a) = d_A(x, a) < \delta$, sehingga $d_Y(f|_A(x), f|_A(a)) < \epsilon$. Ini membuktikan kekontinuan pembatasan pada setiap titik A .

Pemeriksaan K.39 Tiga metrik pada hasil kali dua ruang. Untuk ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) , definisikan pada $X \times Y$

$$d_2 = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}, \quad d_1 = d_X + d_Y, \quad d_\infty = \max\{d_X, d_Y\}.$$

Buktikan bahwa ketiganya menginduksi himpunan terbuka yang sama.

Petunjuk. Buktikan pertidaksamaan titik demi titik $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$, lalu bandingkan bola dengan radius yang diskalakan.

Jawaban. Karena $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$, setiap bola untuk salah satu metrik memuat bola yang cukup kecil untuk setiap metrik lain. Jadi ketiga topologinya sama.

Solusi. Tulis $a = d_X(x_1, x_2) \geq 0$ dan $b = d_Y(y_1, y_2) \geq 0$. Jelas $\max\{a, b\} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, dan $a + b \leq 2 \max\{a, b\}$. Maka

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty.$$

Dari sini, $B_{d_1}(p, r) \subseteq B_{d_2}(p, r) \subseteq B_{d_\infty}(p, r)$, sedangkan $B_{d_\infty}(p, r/2) \subseteq B_{d_1}(p, r)$. Siklus inklusi tersebut menyediakan, di setiap titik dan untuk setiap bola pada salah satu metrik, bola metrik lain yang termuat di dalamnya. Oleh karena itu ketiga metrik menentukan keluarga himpunan terbuka yang sama.

Pemeriksaan K.40 Persegi panjang terbuka dan bola hasil kali. Pada hasil kali dengan metrik d_2 , buktikan untuk $p = (x, y)$ dan $r > 0$ bahwa

$$B_X(x, r/\sqrt{2}) \times B_Y(y, r/\sqrt{2}) \subseteq B_{d_2}(p, r) \subseteq B_X(x, r) \times B_Y(y, r).$$

Jelaskan mengapa hasil kali dua bola terbuka selalu terbuka tetapi umumnya bukan satu bola d_2 .

Petunjuk. Gunakan kuadrat jarak. Untuk klaim terakhir, gambar cakram Euklides dan persegi panjang terbuka di $\mathbb{R}^2$.

Jawaban. Kedua inklusi berlaku. Hasil kali bola memuat bola hasil kali kecil di sekitar setiap titiknya, jadi terbuka; dalam $\mathbb{R}^2$ bentuknya persegi panjang, bukan cakram, sehingga biasanya bukan satu bola.

Solusi. Jika $d_X(x, u) < r/\sqrt{2}$ dan $d_Y(y, v) < r/\sqrt{2}$, maka $d_2(p, (u, v))^2 < r^2/2 + r^2/2 = r^2$; ini memberi inklusi kiri. Jika $d_2(p, (u, v)) < r$, masing-masing suku taknegatif $d_X(x, u)^2$ dan $d_Y(y, v)^2$ lebih kecil daripada r^2 , sehingga kedua jarak koordinat lebih kecil daripada r ; ini memberi inklusi kanan.

Untuk titik di $B_X(x, r_1) \times B_Y(y, r_2)$, pilih sisa radius positif pada kedua koordinat dan gunakan minimum yang diskalkan untuk mendapatkan bola d_2 di dalam hasil kali tersebut. Jadi hasil kalinya terbuka. Di $\mathbb{R}^2$, hasil kali interval terbuka mempunyai sisi lurus dan sudut batas, sedangkan bola d_2 berbentuk cakram; keduanya tidak sama kecuali dalam kasus degenerat yang tidak terjadi untuk radius positif.

Pemeriksaan K.41 Pertidaksamaan segitiga pada hasil kali berhingga. Untuk $X = \prod_{i=1}^n X_i$, definisikan $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$. Buktikan pertidaksamaan segitiga bagi d dengan menyatakan secara jelas tempat penggunaan Cauchy–Schwarz.

Petunjuk. Tetapkan $a_i = d_i(x_i, y_i)$ dan $b_i = d_i(y_i, z_i)$. Kuadratkan batas $d_i(x_i, z_i) \leq a_i + b_i$ dan jumlahkan.

Jawaban. Cauchy–Schwarz memberi $\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^2)^{1/2} (\sum b_i^2)^{1/2}$, sehingga $d(x, z)^2 \leq (d(x, y) + d(y, z))^2$ dan karenanya $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Solusi. Dari pertidaksamaan segitiga di setiap faktor, $d_i(x_i, z_i) \leq a_i + b_i$. Karena semua suku taknegatif,

$$\begin{aligned} d(x, z)^2 &\leq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \\ &= \sum a_i^2 + 2 \sum a_i b_i + \sum b_i^2 \\ &\leq \sum a_i^2 + 2 \sqrt{\sum a_i^2} \sqrt{\sum b_i^2} + \sum b_i^2 \\ &= (d(x, y) + d(y, z))^2. \end{aligned}$$

Pertidaksamaan kedua adalah tepat penggunaan Cauchy–Schwarz. Mengambil akar kuadrat yang taknegatif menghasilkan pertidaksamaan segitiga.

Pemeriksaan K.42 Penutupan ruang barisan kuadrat-terjumlah. Misalkan H terdiri atas barisan real $x = (x_n)$ dengan $\sum x_n^2 < \infty$. Buktikan bahwa $x - y \in H$ jika $x, y \in H$, dan jelaskan mengapa $d(x, y) = \sqrt{\sum (x_n - y_n)^2}$ merupakan metrik.

Petunjuk. Gunakan $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ untuk penutupan. Definit positif dan simetri langsung; pertidaksamaan segitiga diperoleh dengan Cauchy–Schwarz pada jumlah parsial lalu melewati limit.

Jawaban. Pertidaksamaan $\sum (x_n - y_n)^2 \leq 2 \sum x_n^2 + 2 \sum y_n^2 < \infty$ memberi penutupan. Norma kuadrat-terjumlah memenuhi pertidaksamaan Minkowski, sehingga jarak selisih tersebut memenuhi semua aksioma metrik.

Solusi. Untuk setiap n , $(x_n - y_n)^2 \leq 2x_n^2 + 2y_n^2$. Menjumlahkan memberi batas berhingga, jadi $x - y \in H$ dan d terdefinisi. Jelas $d(x, y) \geq 0$, simetris, dan bernilai nol tepat ketika $x_n = y_n$ untuk setiap n .

Untuk jumlah parsial hingga, perluas $\sum_{n=1}^N ((x_n - y_n) + (y_n - z_n))^2$. Cauchy-Schwarz pada suku silang memberi pertidaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{n=1}^N (x_n - z_n)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^N (y_n - z_n)^2 \right)^{1/2}.$$

Ketiga jumlah parsial naik menuju jumlah tak hingganya. Melewatkan $N \rightarrow \infty$ menghasilkan $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Jadi d adalah metrik pada H .

Pemeriksaan K.43 Konvergensi di subruang dan ruang ambien. Misalkan $A \subseteq X$ adalah subruang metrik dan (a_n) barisan di A . Buktikan bahwa untuk $a \in A$, barisan tersebut konvergen ke a di A jika dan hanya jika konvergen ke a di X . Berikan contoh yang menunjukkan mengapa syarat $a \in A$ tidak boleh dibuang.

Petunjuk. Bandingkan langsung $d_A(a_n, a)$ dan $d_X(a_n, a)$. Untuk contoh, gunakan $A = (0, 1)$ dan barisan yang menuju 0.

Jawaban. Untuk $a \in A$, kedua definisi identik karena $d_A(a_n, a) = d_X(a_n, a)$. Barisan $a_n = 1/(n+1)$ berada di $A = (0, 1)$ dan konvergen ke 0 di $X = \mathbb{R}$, tetapi tidak mempunyai limit 0 di A karena $0 \notin A$.

Solusi. Ambil $a \in A$. Untuk setiap n , metrik subruang memenuhi $d_A(a_n, a) = d_X(a_n, a)$. Karena itu, bagi setiap $\epsilon > 0$, keberadaan N sehingga $n \geq N$ mengakibatkan $d_A(a_n, a) < \epsilon$ ekuivalen persis dengan syarat yang sama menggunakan d_X . Maka konvergensi ke titik $a \in A$ sama di kedua ruang.

Dalam $X = \mathbb{R}$, tetapkan $A = (0, 1)$ dan $a_n = 1/(n+1)$. Semua suku berada di A dan $a_n \rightarrow 0$ di X . Akan tetapi, pernyataan “konvergen ke 0 di A ” tidak berlaku karena limit suatu barisan di ruang A harus merupakan unsur A , sedangkan $0 \notin A$. Contoh ini menunjukkan peran tepat syarat $a \in A$.

Lampiran L

Pendamping Mandiri Bab 12: Ruang Topologi

Komponen ini mendampingi Bab 12, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Panduan source-order untuk definisi, basis, metrik, lingkungan, interior, dan seluruh latihan kini tersedia dalam urutan sumber. Kelima simpul pengelompokan sumber dipertahankan sebagai hubungan induk-anak pada backend, bukan dihitung ulang sebagai pertanyaan. Delapan pemeriksaan penguasaan orisinal menyatukan gagasan bab tanpa menggandakan tugas sumber. Pembangunan dan pemeriksaan pembaca kumulatif masih harus selesai sebelum bab ini diakui sebagai batas pembaca.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks Steven Schlicker atau Grand Valley State University dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0; teks utama tetap diperlakukan sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0 secara konservatif.

Panduan ruang topologi: definisi dan contoh awal

Delapan panduan pertama ini mengikuti kegiatan eksplorasi pada bagian pendahuluan Bab 12. Kerjakan butir sumber terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Panduan ini ditulis mandiri untuk edisi ini sebagai komponen CC BY 4.0 yang terpisah dari turunan GVSU.

Pemeriksaan L.1 Uji tiga aksioma topologi. Uji $\tau = \{a, b\}$ pada $X = \{a, b, c\}$ terhadap ketiga aksioma topologi. Nyatakan aksioma pertama yang gagal.

Petunjuk. Aksioma pertama meminta X dan $\emptyset$ menjadi anggota τ ; periksa ini sebelum memeriksa gabungan atau irisan.

Jawaban. Dengan pembacaan literal, $\tau = \{a, b\}$ bahkan bukan koleksi himpunan bagian dari X ; ia memuat titik, bukan himpunan bagian. Jika yang dimaksud adalah $\tau = \{\{a, b\}\}$, koleksi itu juga bukan topologi karena X dan $\emptyset$ belum termasuk.

Solusi. Definisi mensyaratkan bahwa setiap anggota τ adalah subhimpunan dari X . Pada tulisan literal, a dan b adalah titik, sehingga ada ambiguitas tipe sebelum aksioma topologi diperiksa. Untuk pembacaan yang lazim dimaksudkan dalam kegiatan ini, ambil $\tau_0 = \{\{a, b\}\}$. Aksioma pertama lalu gagal karena $\emptyset \notin \tau_0$ dan $X = \{a, b, c\} \notin \tau_0$. Penutupan paling kecil yang memuat $\{a, b\}$ adalah $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$.

Pemeriksaan L.2 Menutup koleksi hingga menjadi topologi. Untuk $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, tentukan tambahan minimum agar koleksi tersebut menjadi topologi pada X .

Petunjuk. Tambahkan dulu $\emptyset$ dan X . Kemudian tutup terhadap gabungan dan irisan; gabungan dua singleton yang sudah ada adalah $\{a, b\}$, sedangkan unsur c, d belum muncul.

Jawaban. Tambahan minimum adalah $\emptyset$ dan $X = \{a, b, c, d\}$; hasilnya $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

Solusi. Aksioma pertama memaksa dua tambahan tersebut. Setelah keduanya ditambahkan, gabungan dan irisan dari $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X$ tetap berada dalam koleksi, dan gabungan dengan himpunan kosong tidak menambah anggota. Jadi koleksi itu topologi. Karena masing-masing tambahan dipaksa oleh aksioma pertama, tidak ada pilihan yang lebih kecil.

Pemeriksaan L.3 Memeriksa gabungan dan irisan berhingga. Periksa koleksi $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, X\}$ pada $X = \{a, b, c, d\}$, lalu tentukan tambahan minimum jika diperlukan.

Petunjuk. Cari gabungan dua himpunan yang menghasilkan himpunan baru, khususnya $\{b\} \cup \{d\}$ dan $\{a, b\} \cup \{a, d\}$.

Jawaban. Koleksi itu bukan topologi; paling tidak perlu menambahkan $\{b, d\}$ dan $\{a, b, d\}$, setelah itu gabungan dan irisan tertutup.

Solusi. Karena $\{b\}$ dan $\{d\}$ terbuka, gabungannya $\{b, d\}$ harus terbuka. Kemudian $\{a, b\} \cup \{a, d\} = \{a, b, d\}$ juga harus ditambahkan. Dengan dua tambahan itu, gabungan sebarang dari anggota koleksi hanya menghasilkan anggota yang sudah tercantum atau X , dan irisan berhingga juga tercantum (misalnya $\{a, b, d\} \cap \{a, d\} = \{a, d\}$). Jadi dua tambahan tersebut cukup dan keduanya dipaksa oleh penutupan terhadap gabungan.

Pemeriksaan L.4 Mencari gabungan yang hilang. Periksa $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, X\}$ pada $X = \{a, b, c, d\}$.

Petunjuk. Setelah menemukan $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$, periksa juga gabungan dengan $\{b, d\}, \{c, d\}$, dan singleton yang tersedia. Daftarkan semua himpunan baru yang dipaksa sebelum menyimpulkan bahwa penutupan sudah lengkap.

Jawaban. Bukan topologi. Penutupan terhadap gabungan memaksa penambahan tepat lima himpunan yang belum tercantum: $\{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$, dan $\{b, c, d\}$. Setelah semuanya ditambahkan, koleksinya adalah $\mathcal{P}(X)$.

Solusi. Koleksi awal memuat semua singleton dan pasangan $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}$. Gabungan $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ dan $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\}$ sudah ada, tetapi $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}$ memaksa pasangan yang hilang. Selanjutnya gabungan pasangan dengan singleton memaksa keempat himpunan tiga unsur $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$. Dengan lima tambahan itu semua 16 subhimpunan X hadir, sehingga koleksi menjadi topologi diskret $\mathcal{P}(X)$. Karena setiap tambahan muncul sebagai gabungan anggota yang sudah diwajibkan, kelimaanya memang minimum.

Pemeriksaan L.5 Koleksi subhimpunan berhingga dan uji gabungan tak berhingga. Misalkan F koleksi semua subhimpunan berhingga $\mathbb{R}$ dan $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup F$. Tentukan apakah τ topologi. Tuliskan terlebih dahulu tiga anggota F dan tiga himpunan yang bukan anggota F .

Petunjuk. Ambil dua singleton berbeda. Gabungan berhingga tetap berhingga, tetapi gabungan tak berhingga dari singleton berbeda dapat menjadi tak berhingga dan bukan $\mathbb{R}$.

Jawaban. Contoh anggota F adalah $\emptyset, \{0\}$, dan $\{0, 1\}$. Contoh yang bukan anggota F adalah $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, dan $[0, 1]$. Koleksi τ bukan topologi pada $\mathbb{R}$; gabungan tak berhingga $\bigcup_{n \geq 1} \{n\} = \mathbb{Z}^+$ tidak berhingga dan bukan $\mathbb{R}$.

Solusi. Himpunan kosong dan $\mathbb{R}$ ada, dan irisan berhingga anggota tetap anggota. Namun topologi menuntut gabungan sebarang. Himpunan $U_n = \{n\}$ berada dalam F untuk setiap $n \geq 1$, sedangkan gabungannya $\mathbb{Z}^+$ tak berhingga dan merupakan proper subset dari $\mathbb{R}$; karenanya $\mathbb{Z}^+ \notin \tau$. Aksioma gabungan gagal. Ini berbeda dari topologi komplement berhingga, yang memasukkan himpunan dengan komplement berhingga, bukan semua himpunan berhingga.

Pemeriksaan L.6 Topologi tiga unsur pada bilangan real. Uji $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}\}$ terhadap aksioma topologi.

Petunjuk. Semua gabungan anggota koleksi hanya menghasilkan salah satu dari tiga himpunan; periksa pula semua irisan berhingga.

Jawaban. Ya. Koleksi tersebut merupakan topologi pada $\mathbb{R}$.

Solusi. $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ tercantum. Gabungan sebarang keluarga yang mengandung $\mathbb{R}$ adalah $\mathbb{R}$; jika tidak, gabungannya adalah $\emptyset$ atau $\{0\}$. Irisan berhingga memiliki pola yang sama: irisan dengan $\emptyset$ kosong, irisan dengan $\mathbb{R}$ tidak mengubah himpunan, dan $\{0\} \cap \{0\} = \{0\}$. Semua hasil berada dalam τ .

Pemeriksaan L.7 Topologi indiskret. Untuk himpunan sembarang X , uji $\tau = \{\emptyset, X\}$ sebagai topologi.

Petunjuk. Hanya ada dua anggota; daftar semua kemungkinan gabungan dan irisan berhingga.

Jawaban. Ya. Ini adalah topologi indiskret pada X .

Solusi. Aksioma pertama benar. Gabungan keluarga yang seluruhnya kosong adalah kosong; jika sedikitnya satu anggota adalah X , gabungannya X . Untuk irisan berhingga, adanya anggota kosong memberi kosong, sedangkan irisan beberapa salinan X tetap X . Jadi ketiga aksioma terpenuhi.

Pemeriksaan L.8 Topologi diskret. Untuk himpunan sembarang X , uji koleksi semua subhimpunan X sebagai topologi.

Petunjuk. Gabungan atau irisan dari subhimpunan X tetap merupakan subhimpunan X .

Jawaban. Ya. Koleksi semua subhimpunan adalah topologi diskret.

Solusi. Himpunan kosong dan X termasuk dalam koleksi kuasa $\mathcal{P}(X)$. Jika setiap $U_i \subseteq X$, maka $\bigcup_i U_i \subseteq X$; demikian pula irisan berhingga $\bigcap_{j=1}^n U_j \subseteq X$. Jadi koleksi kuasa tertutup terhadap operasi yang disyaratkan dan merupakan topologi diskret.

Panduan topologi komplemen berhingga

Dua panduan berikut mengikuti kegiatan *act_TSimits1* pada bagian [Contoh-Contoh Topologi](#). Panduan ini ditulis mandiri sebagai komponen CC BY 4.0 yang terpisah dari turunan GVSU; pengenalan tugas lokal ditambahkan karena tugas sumber tidak memiliki *xml : id*.

Pemeriksaan L.9 Membuktikan topologi komplemen berhingga. Misalkan X suatu himpunan dan $\tau_{FC} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X : X \setminus O \text{ berhingga}\}$. Buktikan bahwa τ_{FC} merupakan topologi pada X .

Petunjuk. Periksa X dan $\emptyset$ terlebih dahulu. Untuk gabungan, gunakan bahwa komplemen gabungan adalah irisan komplemen; untuk irisan berhingga, gunakan bahwa komplemennya adalah gabungan berhingga.

Jawaban. Ya. τ_{FC} memuat X dan $\emptyset$, tertutup terhadap gabungan sebarang, dan tertutup terhadap irisan berhingga.

Solusi. Karena $X \setminus X = \emptyset$ berhingga, maka $X \in \tau_{FC}$; himpunan kosong dimasukkan berdasarkan definisi. Ambil keluarga $\{O_i\}_{i \in I}$ dalam τ_{FC} . Jika semua anggotanya kosong, gabungannya kosong. Jika ada anggota tak kosong, pilih satu, katakan O_{i_0} . Untuk semua anggota tak kosong, setiap $X \setminus O_i$ berhingga dan $X \setminus \bigcup_i O_i = \bigcap_i (X \setminus O_i)$ merupakan subhimpunan dari $X \setminus O_{i_0}$, sehingga berhingga. Jadi gabungan sebarang tetap berada dalam τ_{FC} .

Untuk $O_1, \dots, O_n \in \tau_{FC}$, jika salah satunya kosong, irisannya kosong. Jika semuanya tidak kosong, maka $X \setminus \bigcap_{k=1}^n O_k = \bigcup_{k=1}^n (X \setminus O_k)$ adalah gabungan berhingga dari himpunan berhingga, jadi berhingga. Dengan demikian ketiga aksioma topologi terpenuhi.

Pemeriksaan L.10 Ketika topologi komplemen berhingga menjadi diskret. Jelaskan mengapa τ_{FC} merupakan topologi diskret ketika X berhingga.

Petunjuk. Untuk setiap $O \subseteq X$, komplemen $X \setminus O$ adalah subhimpunan dari himpunan berhingga.

Jawaban. Setiap subhimpunan O memiliki komplemen berhingga, sehingga $\tau_{FC} = \mathcal{P}(X)$, yaitu topologi diskret.

Solusi. Jika X berhingga dan $O \subseteq X$, maka $X \setminus O$ juga berhingga. Jadi setiap subhimpunan O memenuhi syarat definisi topologi komplemen berhingga dan termasuk dalam τ_{FC} . Sebaliknya, semua anggota τ_{FC} adalah subhimpunan X . Maka $\tau_{FC} = \mathcal{P}(X)$, persis topologi diskret.

Panduan basis untuk topologi

Sembilan panduan berikut mengikuti kegiatan basis dalam source order. Pengenal panduan bersifat netral-lokal dan materi ini merupakan komponen CC BY 4.0 orisinal, bukan prosa Schlicker/GVSU.

Pemeriksaan L.11 Membangkitkan topologi dari tiga himpunan dasar. Untuk $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$, jelaskan mengapa setiap himpunan terbuka tak kosong dapat dibentuk dari gabungan sebarang dan irisan berhingga dari $\{a\}$, $\{b\}$, dan $\{c, d\}$.

Petunjuk. Namai tiga himpunan tersebut A , B , dan C . Daftar delapan kemungkinan gabungan, termasuk gabungan kosong, lalu periksa irisan pasangan yang berbeda.

Jawaban. Dengan $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, dan $C = \{c, d\}$, gabungan dari subkeluarga $\{A, B, C\}$ menghasilkan tepat $\emptyset, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C$, yaitu semua anggota τ . Irisan pasangan yang berbeda kosong dan irisan suatu himpunan dengan dirinya sendiri tetap himpunan itu.

Solusi. Ambil $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, dan $C = \{c, d\}$. Delapan gabungan subkeluarga adalah $\emptyset, A, B, C, A \cup B = \{a, b\}, A \cup C = \{a, c, d\}, B \cup C = \{b, c, d\}$, dan $A \cup B \cup C = X$. Ini persis delapan anggota τ , sehingga setiap himpunan terbuka tak kosong (bahkan himpunan kosong juga) adalah gabungan unsur-unsur dasar. Selain itu, karena ketiga himpunan saling lepas, irisan dua unsur dasar yang berbeda adalah $\emptyset$, sedangkan irisan berulang tidak mengubah unsur tersebut. Jadi operasi irisan berhingga tidak menghasilkan himpunan di luar daftar.

Pemeriksaan L.12 Syarat penutupan basis: menutupi ruang. Nyatakan dan jelaskan kondisi pertama pada definisi basis untuk koleksi $\mathcal{B}$ subhimpunan dari X .

Petunjuk. Kondisi tersebut harus berlaku untuk setiap titik x di ruang, bukan hanya untuk titik-titik pada beberapa unsur basis.

Jawaban. Untuk setiap $x \in X$ terdapat $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B$; ekuivalen dengan $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

Solusi. Kondisi pertama adalah $\forall x \in X \exists B_x \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B_x$. Karena setiap titik berada dalam sedikitnya satu unsur basis, gabungan seluruh unsur $\mathcal{B}$ menutupi X . Tanpa kondisi ini, gabungan unsur basis tidak mungkin menghasilkan himpunan terbuka X dan koleksi tersebut tidak dapat membangkitkan topologi pada ruang itu.

Pemeriksaan L.13 Kasus dasar induksi untuk irisan basis. Jelaskan mengapa kasus $n = 1$ dan $n = 2$ benar dalam pernyataan: jika $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, maka ada $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B \subseteq \bigcap_{k=1}^n B_k$.

Petunjuk. Untuk satu himpunan, pilih himpunan itu sendiri. Untuk dua himpunan, gunakan langsung kondisi kedua definisi basis.

Jawaban. Untuk $n = 1$, ambil $B = B_1$. Untuk $n = 2$, kondisi kedua memberi $B_3 \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Solusi. Jika $n = 1$, hipotesis berarti $x \in B_1$; pilihan $B = B_1$ memenuhi $x \in B$ dan $B \subseteq B_1 = \bigcap_{k=1}^1 B_k$. Jika $n = 2$, hipotesis berarti $x \in B_1 \cap B_2$. Kondisi kedua secara tepat menyediakan B_3 yang memuat x dan berada di dalam irisan tersebut. Kedua kasus dasar selesai.

Pemeriksaan L.14 Merumuskan hipotesis dan target induksi. Tuliskan hipotesis induksi dan target pada langkah induksi untuk memperluas pernyataan irisan basis dari k ke $k + 1$.

Petunjuk. Bekukan sebuah bilangan bulat $k \geq 2$. Hipotesis harus berlaku untuk $B_1, \dots, B_k$; target menambahkan B_{k+1} .

Jawaban. Hipotesisnya: untuk setiap $x \in \bigcap_{i=1}^k B_i$ ada $C \in \mathcal{B}$ dengan $x \in C \subseteq \bigcap_{i=1}^k B_i$. Targetnya: untuk setiap $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$ ada $D \in \mathcal{B}$ dengan $x \in D \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$.

Solusi. Dalam langkah induksi, anggap hasil yang diinginkan sudah benar untuk setiap irisan hingga k unsur basis. Jadi, bila x berada di semua $B_1, \dots, B_k$, tersedia satu C yang memuat x dan memenuhi $C \subseteq \bigcap_{i=1}^k B_i$. Yang harus dibuktikan adalah versi sama untuk $B_1, \dots, B_k, B_{k+1}$; setelah itu kondisi kedua dapat diterapkan pada C dan B_{k+1} .

Pemeriksaan L.15 Menyelesaikan lemma irisan berhingga. Gunakan hipotesis induksi dan kondisi kedua untuk melengkapi pembuktian lemma: jika $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, maka ada $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B \subseteq \bigcap_{k=1}^n B_k$.

Petunjuk. Terapkan hipotesis induksi pada $B_1, \dots, B_k$ untuk memperoleh C , lalu gunakan kondisi kedua pada C dan B_{k+1} .

Jawaban. Dari hipotesis induksi ambil $C \in \mathcal{B}$ dengan $x \in C \subseteq \bigcap_{i=1}^k B_i$. Karena juga $x \in B_{k+1}$, kondisi kedua menghasilkan $D \in \mathcal{B}$ dengan $x \in D \subseteq C \cap B_{k+1} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$.

Solusi. Buktikan dengan induksi pada n . Kasus $n = 1$ dan $n = 2$ adalah Panduan 13. Anggap pernyataan benar sampai $n = k$, dan ambil $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$. Maka $x \in \bigcap_{i=1}^k B_i$; hipotesis induksi memberi $C \in \mathcal{B}$ dengan $x \in C \subseteq \bigcap_{i=1}^k B_i$. Karena $x \in C \cap B_{k+1}$, kondisi kedua basis memberi $D \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in D \subseteq C \cap B_{k+1} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$ menyelesaikan langkah induksi dan lemma.

Pemeriksaan L.16 Melengkapi basis pertama pada topologi hingga. Untuk $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$, uji $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, c, d\}\}$. Jika bukan basis, tambahkan sesedikit mungkin himpunan agar menjadi basis untuk τ .

Petunjuk. Basis harus menutupi titik b, e, f dan harus dapat menghasilkan setiap himpunan terbuka nonkosong sebagai gabungan. Periksa pula himpunan $\{c, d\}$ yang hanya memiliki satu subhimpunan terbuka nonkosong di dalamnya.

Jawaban. Bukan basis. Tambahkan tepat dua himpunan, $\{c, d\}$ dan $\{b, c, d, e, f\}$.

Solusi. Himpunan $\{c, d\}$ wajib ditambahkan: satu-satunya anggota τ yang dapat membentuknya sebagai gabungan himpunan terbuka yang berada di dalamnya adalah dirinya sendiri. Himpunan $\{b, c, d, e, f\}$ juga wajib, karena titik b, e, f tidak berada dalam generator awal dan satu-satunya anggota τ yang memuat ketiganya tanpa memuat a adalah himpunan tersebut. Dengan kedua tambahan itu, gabungan generator menghasilkan semua anggota τ : $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d, e, f\}$, dan X . Irisan takkosong generator juga dapat diperhalus oleh generator: misalnya irisan $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, d\}$. Jadi dua tambahan cukup dan, dari argumen keharusan di atas, minimum.

Pemeriksaan L.17 Menguji basis kedua pada topologi hingga. Uji apakah $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ merupakan basis untuk topologi τ pada Panduan 16.

Petunjuk. Periksa penutupan liputan, daftar semua gabungan generator, lalu periksa irisan pasangan yang tidak kosong.

Jawaban. Ya. Koleksi tersebut menutupi X , gabungannya menghasilkan tepat τ , dan setiap irisan pasangan takkosong sudah memiliki penyempurnaan basis di dalamnya.

Solusi. Tulis $A = \{a\}$, $C = \{c, d\}$, dan $L = \{b, c, d, e, f\}$. Gabungan $A \cup C \cup L = X$, sehingga liputan terpenuhi. Semua gabungan subkeluarga adalah $\emptyset, A, C, L, A \cup C = \{a, c, d\}, A \cup L = X, C \cup L = L, X$, tepat anggota τ . Irisan berbeda yang tidak kosong hanya $C \cap L = C$; irisan lain kosong, dan irisan dengan dirinya sendiri tetap generator. Karena itu kedua kondisi basis terpenuhi.

Pemeriksaan L.18 Menambahkan singleton pada topologi diskret tiga titik. Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dengan topologi diskret. Uji $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ dan tambahkan sesedikit mungkin himpunan jika diperlukan.

Petunjuk. Cari irisan $\{a, b\} \cap \{b, c\}$. Kondisi kedua basis meminta sebuah unsur basis yang memuat titik hasil irisan dan berada di dalamnya.

Jawaban. Koleksi awal bukan basis. Tambahkan tepat $\{b\}$; hasilnya menjadi basis untuk topologi diskret.

Solusi. Koleksi awal menutupi X , tetapi $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$. Tidak ada unsur awal yang memuat b dan sekaligus merupakan subhimpunan dari $\{b\}$, sehingga kondisi kedua gagal. Setelah $\{b\}$ ditambahkan, semua titik memiliki singleton dan semua irisan pasangan dapat diperhalus oleh singleton yang sesuai. Karena topologi diskret memuat setiap subhimpunan dan setiap subhimpunan merupakan gabungan singleton, koleksi baru membangkitkan tepat topologi diskret. Satu tambahan diperlukan dan cukup.

Pemeriksaan L.19 Basis singleton untuk topologi diskret. Tentukan sebuah basis untuk topologi diskret pada himpunan sembarang X .

Petunjuk. Gunakan semua singleton yang mungkin, satu untuk setiap titik $x \in X$.

Jawaban. Basisnya adalah $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$.

Solusi. Setiap $x \in X$ berada dalam singletonnya sendiri, sehingga liputan terpenuhi. Irisan dua singleton adalah kosong atau singleton, dan pada kasus takkosong singleton itu sendiri menjadi penyempurnaan basis. Setiap subhimpunan $U \subseteq X$ dapat ditulis sebagai $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$, termasuk gabungan kosong untuk $U = \emptyset$. Jadi koleksi singleton membangkitkan semua subhimpunan, yaitu topologi diskret. Untuk $X = \emptyset$, koleksi kosong memenuhi kondisi secara vakum dan membangkitkan $\{\emptyset\}$.

Panduan ruang topologi yang bukan ruang metrik

Panduan ini mengikuti kegiatan langsung pada bagian [Ruang Metrik dan Ruang Topologi](#). Uraian dan solusi ditulis mandiri sebagai komponen CC BY 4.0 yang terpisah dari turunan GVSU.

Pemeriksaan L.20 Ruang topologi yang tidak dapat dimetriskan. Misalkan $X = \{a, b, c, e\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Jelaskan mengapa tidak ada metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang topologi metriknya tepat τ .

Petunjuk. Andaikan metrik tersebut ada. Perhatikan bola terbuka berpusat di c dengan jari-jari kurang dari jarak antara c dan e .

Jawaban. Tidak mungkin. Dalam topologi τ , satu-satunya himpunan terbuka yang memuat c adalah X , tetapi setiap metrik memisahkan c dan e dengan bola terbuka yang tidak memuat e .

Solusi. Andaikan ada metrik d yang menghasilkan tepat τ . Karena $c \neq e$, maka $\delta = d(c, e) > 0$. Ambil $r = \delta/2$. Bola metrik $B_d(c, r) = \{x \in X : d(c, x) < r\}$ memuat c , tetapi tidak memuat e , sebab $d(c, e) = \delta > r$. Bola ini harus menjadi himpunan terbuka dalam topologi metrik, sehingga harus menjadi anggota τ . Namun dari daftar τ , satu-satunya himpunan terbuka yang memuat c adalah X , dan X juga memuat e . Kontradiksi. Jadi τ bukan topologi yang termetriskan.

Panduan lingkungan dalam ruang topologi

Lima panduan berikut mengikuti dua kegiatan pada bagian [Lingkungan dalam Ruang Topologi](#). Pengenal tugas lokal ditambahkan karena tugas sumber tidak memiliki *xml : id*. Panduan ini merupakan komponen CC BY 4.0 orisinal yang terpisah dari prosa turunan GVSU.

Pemeriksaan L.21 Menentukan semua lingkungan titik a . Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Tentukan semua lingkungan titik a .

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Gunakan definisi: suatu himpunan N adalah lingkungan a jika ada himpunan terbuka U dengan $a \in U \subseteq N$.

Petunjuk 2. Daftar himpunan terbuka yang memuat a . Perhatikan bahwa $\{a\}$ adalah salah satunya.

Jawaban. Semua lingkungannya adalah semua subhimpunan $N \subseteq X$ yang memuat a .

$$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X.$$

Solusi. Himpunan terbuka yang memuat a adalah $\{a\}$, $\{a, b\}$, dan X . Jika N memuat a , maka $\{a\} \subseteq N$; karena $\{a\}$ terbuka dan memuat a , definisi langsung menyatakan bahwa N adalah lingkungan a . Sebaliknya, setiap lingkungan N harus memuat suatu himpunan terbuka yang memuat a , sehingga khususnya $a \in N$. Jadi lingkungan titik a tepat merupakan delapan subhimpunan X yang tercantum dalam jawaban.

Rubrik penilaian. Jawaban lengkap (3 poin) menyebutkan kriteria $a \in N$ dan seluruh delapan himpunan; jawaban yang mencantumkan kriteria tetapi melewatkan satu atau lebih himpunan memperoleh 2 poin; daftar tanpa alasan memperoleh 1 poin.

Pemeriksaan L.22 Menentukan semua lingkungan titik c . Dengan X dan τ seperti pada Panduan 21, tentukan semua lingkungan titik c .

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Cari semua anggota τ yang memuat c .

Petunjuk 2. Lingkungan harus memuat salah satu himpunan terbuka yang memuat c , bukan sekadar memuat c sendiri.

Jawaban. Satu-satunya lingkungan titik c adalah X .

Solusi. Dari daftar topologi, satu-satunya himpunan terbuka yang memuat c adalah X . Jika N merupakan lingkungan c , definisi mengharuskan ada himpunan terbuka U dengan $c \in U \subseteq N$. Hanya mungkin $U = X$, sehingga $X \subseteq N \subseteq X$ dan akhirnya $N = X$. Sebaliknya, X memang lingkungan setiap titik karena X terbuka.

Rubrik penilaian. Tiga poin diberikan bila jawaban menyatakan X dan mengaitkannya dengan fakta bahwa X adalah satu-satunya himpunan terbuka yang memuat c ; satu poin diberikan untuk daftar yang benar tanpa penjelasan.

Pemeriksaan L.23 Mengubah lingkungan setiap titik menjadi keterbukaan. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dan $O \subseteq X$. Andaikan O merupakan lingkungan dari setiap titiknya. Apa yang perlu dilakukan untuk menunjukkan bahwa O merupakan himpunan terbuka?

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk setiap $a \in O$, terapkan definisi lingkungan pada O .

Petunjuk 2. Kumpulkan himpunan-himpunan terbuka yang diperoleh menjadi gabungan; tunjukkan kedua inklusi untuk gabungan tersebut.

Jawaban. Untuk setiap $a \in O$, pilih himpunan terbuka O_a dengan $a \in O_a \subseteq O$. Lalu buktikan $O = \bigcup_{a \in O} O_a$. Gabungan sebarang himpunan terbuka adalah terbuka, sehingga O terbuka.

Solusi. Karena O adalah lingkungan setiap titiknya, untuk setiap $a \in O$ ada himpunan terbuka O_a yang memenuhi $a \in O_a \subseteq O$. Definisikan $U = \bigcup_{a \in O} O_a$. Setiap O_a berada di dalam O , jadi $U \subseteq O$. Sebaliknya, setiap $a \in O$ berada dalam $O_a \subseteq U$, jadi $O \subseteq U$. Maka $O = U$. Karena U merupakan gabungan sebarang anggota τ , aksioma topologi memberi $U \in \tau$, dan akibatnya O terbuka. Jika $O = \emptyset$, gabungan kosong tersebut adalah $\emptyset$, yang juga terbuka.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk pemilihan satu O_a per titik, 1 poin untuk kedua inklusi, dan 1 poin untuk penggunaan aksioma gabungan sebarang (termasuk kasus kosong).

Pemeriksaan L.24 Mengapa himpunan O_a harus ada. Dalam situasi Panduan 23, ambil $a \in O$. Mengapa harus ada himpunan terbuka O_a sedemikian sehingga $a \in O_a \subseteq O$?

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Tulis ulang arti kalimat “ O merupakan lingkungan dari a ” menggunakan kuantor dan inklusi.

Petunjuk 2. Ganti nama himpunan terbuka yang dijamin definisi itu dengan simbol O_a .

Jawaban. Berdasarkan definisi lingkungan, karena O merupakan lingkungan a , ada himpunan terbuka U dengan $a \in U \subseteq O$. Ambil $O_a = U$.

Solusi. Definisi menyatakan bahwa N adalah lingkungan a tepat ketika ada $U \in \tau$ sehingga $a \in U \subseteq N$. Terapkan pernyataan ini dengan $N = O$. Hipotesis Panduan 23 mengatakan bahwa penerapan itu sah untuk setiap $a \in O$, jadi diperoleh $U_a \in \tau$ dengan $a \in U_a \subseteq O$. Menamai ulang U_a sebagai O_a menghasilkan tepat himpunan yang diperlukan; nama itu hanya mengingatkan bahwa pilihannya dapat bergantung pada titik a .

Rubrik penilaian. Jawaban penuh (3 poin) menyebutkan bahwa hipotesis berlaku untuk setiap $a \in O$, menyatakan $U_a \in \tau$, dan menuliskan dua inklusi yang benar.

Pemeriksaan L.25 Menyelesaikan pembuktian karakterisasi himpunan terbuka. Lengkapi pembuktian: jika O merupakan lingkungan dari setiap titiknya dalam ruang topologi (X, τ) , maka O merupakan himpunan terbuka.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Untuk tiap $a \in O$, pilih O_a terbuka dengan $a \in O_a \subseteq O$.

Petunjuk 2. Tunjukkan $\bigcup_{a \in O} O_a \subseteq O$ dan inklusi sebaliknya. Kemudian gunakan penutupan τ terhadap gabungan sebarang.

Jawaban. Untuk setiap $a \in O$, definisi lingkungan memberi himpunan terbuka O_a dengan $a \in O_a \subseteq O$. Karena itu $O = \bigcup_{a \in O} O_a$, dan gabungan tersebut terbuka. Jadi $O \in \tau$.

Solusi. Untuk arah yang belum dibuktikan, andaikan O merupakan lingkungan dari setiap titik $a \in O$. Maka untuk setiap titik tersebut terdapat $O_a \in \tau$ sehingga $a \in O_a \subseteq O$. Letakkan $U = \bigcup_{a \in O} O_a$. Dari inklusi $O_a \subseteq O$ untuk semua a , diperoleh $U \subseteq O$. Jika $a \in O$, maka $a \in O_a \subseteq U$, sehingga $O \subseteq U$. Jadi $O = U$. Aksioma topologi menyatakan bahwa gabungan sebarang anggota τ adalah anggota τ , maka $U \in \tau$ dan $O \in \tau$. Untuk $O = \emptyset$, indeks gabungan kosong memberi $U = \emptyset \in \tau$, sehingga argumen tetap berlaku. Bersama arah pertama pada teorema sumber—himpunan terbuka merupakan lingkungan setiap titiknya—ini menyelesaikan karakterisasi tersebut.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk menghubungkan hipotesis dengan pilihan O_a , 1 poin untuk kesetaraan gabungan, 1 poin untuk aksioma gabungan, dan 1 poin untuk menyebutkan arah pertama atau menangani kasus $O = \emptyset$.

Panduan interior dalam ruang topologi

Enam panduan berikut mengikuti, dalam urutan sumber, empat tugas pada kegiatan interior dan dua tugas pada kegiatan pembuktian sesudahnya dalam bagian [Interior Himpunan dalam Ruang Topologi](#). Tugas sumber tidak memiliki *xml : id*, sehingga pengenalan lokal yang stabil diberikan di sini. Panduan ini merupakan komponen CC BY 4.0 orisinal yang terpisah dari prosa turunan GVSU. Sumber mencetak pasangan (X, d) pada pernyataan teorema interior; karena argumennya hanya memakai struktur topologi, panduan ini menuliskannya sebagai (X, τ) .

Pemeriksaan L.26 Interior pada topologi standar di garis real. Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$ dengan topologi standar, dan ambil $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Tentukan $\text{Int}(A)$ dan subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A . *Rubrik.* Pisahkan tiga bagian A , periksa titik ujung 2 dan singleton $\{3\}$, lalu jelaskan mengapa hasilnya memang terbuka dan maksimal.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Himpunan $(-\infty, 0)$ sudah terbuka. Di dalam $(1, 2]$, titik-titik yang memiliki interval terbuka kecil seluruhnya berada di dalam A adalah titik-titik di $(1, 2)$.

Petunjuk 2. Setiap interval terbuka di sekitar 2 memuat bilangan lebih besar dari 2. Jika interval di sekitar 3 berjari-jari $r > 0$, titik $3 + r/2$ berada di interval itu tetapi tidak berada dalam A . Gunakan ini untuk menyingkirkan kedua titik tersebut dari interior.

Jawaban. $\text{Int}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$. Himpunan terbuka terbesar yang terkandung dalam A adalah himpunan yang sama.

Solusi. Bagian $(-\infty, 0)$ merupakan himpunan terbuka. Jika $x \in (1, 2)$, pilih jari-jari positif yang lebih kecil daripada $\min\{x - 1, 2 - x\}$; interval yang dihasilkan berada di dalam $(1, 2] \subseteq A$, sehingga setiap titik tersebut interior. Sebaliknya, untuk titik 2, setiap interval terbuka yang memuat 2 juga memuat titik-titik yang lebih

besar dari 2, yang tidak berada di A . Jadi 2 bukan titik interior. Demikian pula, jika $r > 0$ dan $(3-r, 3+r)$ adalah interval terbuka di sekitar 3, maka $3+r/2$ berada dalam interval itu tetapi tidak berada dalam A ; maka 3 bukan titik interior. Titik 0 dan 1 tidak termasuk A . Dengan demikian $\text{Int}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, yang terbuka sebagai gabungan dua himpunan terbuka. Setiap himpunan terbuka yang terkandung dalam A hanya dapat memuat titik-titik interior, sehingga terkandung dalam hasil ini; hasil tersebut adalah yang terbesar.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk bagian pertama, 1 poin untuk menghapus titik ujung dan singleton dengan alasan lingkungan, 1 poin untuk hasil interior, dan 1 poin untuk argumen keterbukaan serta kemaksimalan.

Pemeriksaan L.27 Interior pada topologi diskret. Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$ dengan topologi diskret dan $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Tentukan $\text{Int}(A)$ dan subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A . *Rubrik.* Gunakan fakta bahwa setiap singleton, dan karenanya setiap subhimpunan, terbuka dalam topologi diskret.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Dalam topologi diskret, untuk setiap $x \in A$ himpunan $\{x\}$ adalah terbuka dan berada di dalam A .

Petunjuk 2. Tulis A sebagai gabungan singleton dari titik-titiknya, lalu bandingkan dengan definisi interior.

Jawaban. $\text{Int}(A) = A$, dan A sendiri merupakan subhimpunan terbuka terbesar yang terkandung dalam A .

Solusi. Karena topologinya diskret, setiap subhimpunan $U \subseteq \mathbb{R}$ terbuka. Khususnya, untuk setiap $x \in A$, singleton $\{x\}$ terbuka, memuat x , dan terkandung dalam A . Jadi setiap titik A merupakan titik interior. Sebaliknya, interior selalu merupakan subhimpunan dari A menurut definisi. Maka $\text{Int}(A) = A$. Karena A terbuka dan jelas merupakan subhimpunan dari dirinya sendiri, tidak ada subhimpunan terbuka di dalam A yang lebih besar daripada A .

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk menyatakan semua subhimpunan terbuka, 1 poin untuk menunjukkan singleton di sekitar setiap titik, dan 1 poin untuk kesimpulan interior serta kemaksimalan.

Pemeriksaan L.28 Interior pada topologi komplemen berhingga. Pertimbangkan $(\mathbb{R}, \tau)$ dengan topologi komplemen berhingga dan $A = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Tentukan $\text{Int}(A)$ dan subhimpunan terbuka terbesar dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A . *Rubrik.* Periksa ukuran komplemen $\mathbb{R} \setminus A$ dan jelaskan mengapa tidak ada himpunan terbuka tak kosong yang dapat berada di dalam A .

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Himpunan terbuka tak kosong dalam topologi ini mempunyai komplemen berhingga. Tulis sebagian komplemen A untuk melihat bahwa komplemennya tak berhingga.

Petunjuk 2. Jika $O \subseteq A$, maka $\mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus O$. Bandingkan inklusi ini dengan syarat komplemen berhingga untuk O .

Jawaban. $\text{Int}(A) = \emptyset$. Satu-satunya subhimpunan terbuka dari $\mathbb{R}$ yang terkandung dalam A adalah $\emptyset$.

Solusi. Komplemen A memuat, misalnya, $[0, 1] \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$, sehingga $\mathbb{R} \setminus A$ tak berhingga. Andaikan O adalah himpunan terbuka tak kosong dengan $O \subseteq A$. Dalam topologi komplemen berhingga, $\mathbb{R} \setminus O$ harus berhingga. Namun dari $O \subseteq A$ diperoleh $\mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus O$; ruas kiri tak berhingga, sehingga ruas kanan juga tak berhingga, suatu kontradiksi. Jadi tidak ada himpunan terbuka tak kosong di dalam A . Himpunan kosong selalu terbuka, maka gabungan seluruh himpunan terbuka yang terkandung dalam A , yakni interiornya, adalah $\emptyset$.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk menunjukkan komplemen tak berhingga, 1 poin untuk inklusi komplemen yang benar, dan 1 poin untuk kontradiksi komplemen berhingga serta kesimpulan.

Pemeriksaan L.29 Interior pada topologi hingga yang diberikan. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$. Andaikan τ merupakan topologi pada X , dan ambil $A = \{b, c, d\}$. Tentukan $\text{Int}(A)$ dan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A . *Rubrik.* Daftar semua anggota τ yang berada di dalam A , lalu ambil gabungannya; jelaskan secara khusus mengapa b tidak termasuk.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Dari daftar topologi, cari himpunan terbuka yang hanya menggunakan titik-titik b, c, d .

Petunjuk 2. Himpunan terbuka yang memuat b dalam daftar selalu juga memuat a . Periksa titik c dan d dengan singletonnya.

Jawaban. Anggota topologi yang terkandung dalam A adalah $\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}$. Jadi $\text{Int}(A) = \{c, d\}$, yang juga merupakan subhimpunan terbuka terbesar di dalam A .

Solusi. Periksa daftar τ satu per satu. Himpunan yang tidak memuat a dan seluruhnya berada di dalam A hanyalah $\emptyset, \{c\}, \{d\}$, dan $\{c, d\}$. Gabungan semua himpunan tersebut adalah $\{c, d\}$, dan himpunan itu sendiri terbuka. Titik c dan d interior karena masing-masing mempunyai lingkungan terbuka singleton yang berada di dalam A . Sebaliknya, setiap anggota τ yang memuat b adalah $\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}$, atau X ; semuanya memuat $a \notin A$. Karena itu b bukan titik interior. Maka $\text{Int}(A) = \{c, d\}$, dan argumen daftar tersebut juga membuktikan kemaksimalannya.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk daftar anggota terbuka yang terkandung dalam A , 1 poin untuk alasan bahwa b gagal, dan 1 poin untuk gabungan, interior, serta klaim terbesar.

Pemeriksaan L.30 Menetapkan sasaran teorema interior. Misalkan (X, τ) ruang topologi dan $A \subseteq X$. Apa saja yang harus ditunjukkan untuk membuktikan bahwa $\text{Int}(A)$ merupakan subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A ? *Rubrik.* Bedakan sifat “terbuka”, “berada di dalam A ”, dan sifat “terbesar” sebagai pernyataan universal tentang setiap himpunan terbuka lain.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Pecah kata “terbesar” menjadi dua syarat: objek yang diusulkan harus memenuhi sifat yang diminta, dan setiap objek lain dengan sifat itu harus berada di dalamnya.

Petunjuk 2. Gunakan definisi interior untuk syarat inklusi $\text{Int}(A) \subseteq A$; yang tersisa adalah keterbukaan dan perbandingan dengan sembarang $O \in \tau$ yang memenuhi $O \subseteq A$.

Jawaban. Tunjukkan tiga hal: $\text{Int}(A)$ terbuka; secara definisi $\text{Int}(A) \subseteq A$; dan untuk setiap himpunan terbuka $O \subseteq X$ dengan $O \subseteq A$ berlaku $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Solusi. Pernyataan “subhimpunan terbuka terbesar dari X yang terkandung dalam A ” berarti pertamanya bahwa objek tersebut adalah subhimpunan A dan terbuka dalam X . Inklusi $\text{Int}(A) \subseteq A$ langsung mengikuti definisi $\text{Int}(A) = \{a \in A \mid a \text{ merupakan titik interior dari } A\}$; keterbukaan adalah bagian yang perlu dibuktikan dari definisi lingkungan. Terakhir, “terbesar” berarti bahwa setiap $O \in \tau$ dengan $O \subseteq A$ harus memenuhi $O \subseteq \text{Int}(A)$. Ketiga syarat ini bersama-sama tepat menyatakan klaim teorema, tanpa perlu mengasumsikan bahwa X memiliki metrik.

Rubrik penilaian. Berikan masing-masing 1 poin untuk keterbukaan, inklusi ke dalam A , dan kondisi universal yang menyatakan kemaksimalan.

Pemeriksaan L.31 Membuktikan kemaksimalan interior. Misalkan O merupakan subhimpunan terbuka dari ruang topologi X dan $O \subseteq A$. Jika $x \in O$, apa yang diberitahukan oleh keterbukaan O , dan bagaimana fakta itu melengkapi pembuktian $O \subseteq \text{Int}(A)$? *Rubrik.* Hubungkan keterbukaan dengan definisi lingkungan, gunakan inklusi $O \subseteq A$, lalu simpulkan untuk titik sembarang.

Petunjuk. *Petunjuk 1.* Karena $x \in O$ dan O terbuka, himpunan O sendiri adalah lingkungan dari x .

Petunjuk 2. Lingkungan terbuka O yang memenuhi $O \subseteq A$ adalah saksi langsung bahwa x merupakan titik interior A . Ulangi untuk semua $x \in O$.

Jawaban. Keterbukaan memberi bahwa O adalah lingkungan dari setiap $x \in O$. Bersama $O \subseteq A$, ini menunjukkan bahwa setiap $x \in O$ merupakan titik interior A ; oleh karena itu $O \subseteq \text{Int}(A)$.

Solusi. Ambil titik sembarang $x \in O$. Karena $O \in \tau$ dan $x \in O$, definisi lingkungan menyatakan bahwa O merupakan lingkungan dari x : kita dapat memilih himpunan terbuka O itu sendiri, dengan $x \in O \subseteq O$. Selain itu, hipotesis memberi $O \subseteq A$. Jadi ada himpunan terbuka yang memuat x dan terkandung dalam A , tepatnya O ; menurut definisi, x adalah titik interior dari A dan $x \in \text{Int}(A)$. Karena x dipilih sembarang, setiap titik O berada di $\text{Int}(A)$, sehingga $O \subseteq \text{Int}(A)$. Inilah syarat kemaksimalan yang melengkapi pembuktian teorema interior.

Rubrik penilaian. Berikan 1 poin untuk memakai keterbukaan O sebagai lingkungan, 1 poin untuk memakai $O \subseteq A$, dan 1 poin untuk memperluas argumen dari titik sembarang menjadi inklusi himpunan.

Panduan latihan sumber, bagian pertama

Sepuluh panduan berikut mengikuti urutan sumber pada *sec_top_space_exer.ptx*: dua tugas pembuka, empat tugas pada latihan *ex_aZ_top*, dan empat tugas pertama pada latihan koset aritmetika. Materi ini adalah komponen pendamping asli untuk belajar mandiri, bukan jawaban dari penulis sumber. Setiap panduan menyediakan petunjuk bertahap, jawaban singkat, solusi lengkap, dan rubrik pemeriksaan; komponen ini diterbitkan terpisah di bawah CC BY 4.0.

Pemeriksaan L.32 Semua gabungan koleksi pembangkit. *Jangkar sumber:* latihan tanpa ID pada awal *sec_top_space_exer.ptx*, tugas pertama. Untuk $X = \{a, b, c\}$ dan $S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, tentukan koleksi semua gabungan subkoleksi dari S . Gabungan subkoleksi kosong juga harus diperhitungkan. *Rubrik.* Daftar harus memuat setiap hasil yang berbeda tepat satu kali dan tidak boleh memasukkan himpunan yang tidak dapat diperoleh.

Petunjuk. Beri nama keempat anggota S , lalu mulai dari gabungan kosong dan gabungan satu anggota. Setelah itu periksa kapan dua anggota menghubungkan a , b , dan c menjadi seluruh X .

Jawaban. Koleksinya adalah $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$.

Solusi. Tuliskan $A = \{a\}$, $C = \{c\}$, $AB = \{a, b\}$, dan $BC = \{b, c\}$. Gabungan kosong menghasilkan $\emptyset$. Gabungan satu anggota menghasilkan A, C, AB, BC . Gabungan $A \cup C$ menghasilkan $\{a, c\}$. Setiap gabungan yang memuat AB dan BC , atau yang memuat salah satu dari keduanya bersama anggota yang melengkapi titik yang hilang, menghasilkan $X = \{a, b, c\}$. Tidak ada hasil lain: setiap gabungan adalah subhimpunan X , dan pemeriksaan seluruh pola keanggotaan A, C, AB, BC hanya menghasilkan tujuh himpunan yang tercantum.

Pemeriksaan L.33 Mengapa koleksi gabungan itu bukan topologi. *Jangkar sumber:* latihan pembuka pada *sec_top_space_exer.ptx*, tugas kedua. Dengan $S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, jelaskan mengapa koleksi semua gabungan anggota S , setelah ditambah himpunan kosong, bukan topologi pada $X = \{a, b, c\}$. Sebutkan aksioma basis yang gagal. *Rubrik.* Berikan satu irisan eksplisit dan hubungkan kegagalan itu dengan syarat irisan basis, bukan hanya dengan pernyataan bahwa daftar tersebut "kurang".

Petunjuk. Bandingkan dua anggota basis $\{a, b\}$ dan $\{b, c\}$. Titik b berada di irisan keduanya. Tanyakan apakah ada anggota S yang memuat b dan sekaligus terkandung dalam irisan tersebut.

Jawaban. Koleksi itu bukan topologi karena $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ tidak termasuk koleksi semua gabungan tersebut. Syarat irisan basis gagal pada titik b .

Solusi. Jika $\mathcal{U}$ adalah semua gabungan subkoleksi dari S , maka $\{a, b\}$ dan $\{b, c\}$ sendiri berada di $\mathcal{U}$. Namun

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}.$$

Himpunan $\{b\}$ tidak dapat ditulis sebagai gabungan anggota S : setiap anggota S yang memuat b juga memuat a atau c . Maka $\mathcal{U}$ tidak tertutup terhadap irisan berhingga dan bukan topologi.

Dilihat langsung dari dua aksioma basis, masalahnya adalah: untuk $B_1 = \{a, b\}$, $B_2 = \{b, c\}$, dan $b \in B_1 \cap B_2$, tidak ada $B_3 \in S$ dengan $b \in B_3 \subseteq \{b\}$. Jadi syarat irisan basis memang gagal, persis pada titik b .

Pemeriksaan L.34 Basis kelipatan bilangan bulat. *Jangkar sumber:* *ex_aZ_top*, tugas pertama. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, tetapkan $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Buktikan bahwa $\mathcal{B} = \{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ merupakan basis untuk suatu topologi τ pada $\mathbb{Z}$. *Rubrik.* Verifikasi cakupan dan syarat irisan basis, termasuk kasus $a = 0$ dan tanda negatif.

Petunjuk. Gunakan $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z}$. Untuk $m, n \neq 0$, irisan dua himpunan kelipatan adalah kelipatan dari $\text{lcm}(|m|, |n|)$; jika salah satu bilangan nol, hitung irisan itu secara langsung.

Jawaban. Cakupan diberikan oleh $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Selain itu, $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{lcm}(|m|, |n|)\mathbb{Z}$ untuk $m, n \neq 0$, sedangkan jika salah satunya nol, irisan tersebut adalah $\{0\} = 0\mathbb{Z}$. Jadi syarat basis terpenuhi.

Solusi. Pertama, setiap bilangan bulat berada dalam suatu anggota $\mathcal{B}$, karena $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$. Sekarang ambil $B_1 = m\mathbb{Z}$ dan $B_2 = n\mathbb{Z}$. Jika $m = 0$ atau $n = 0$, maka irisan keduanya adalah $\{0\} = 0\mathbb{Z}$, kecuali keduanya nol yang memberi hasil sama. Jika keduanya tidak nol, tanda tidak berpengaruh dan aritmetika pembagi memberi

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{lcm}(|m|, |n|)\mathbb{Z}.$$

Jadi irisan itu sendiri merupakan anggota $\mathcal{B}$. Khususnya, untuk setiap x di irisan, anggota basis tersebut menjadi B_3 dengan $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Kedua syarat basis terpenuhi, sehingga $\mathcal{B}$ membangkitkan topologi τ pada $\mathbb{Z}$.

Pemeriksaan L.35 Bilangan bulat positif tidak terbuka. *Jangkar sumber: ex_aZ_top*, tugas kedua. Dalam ruang $(\mathbb{Z}, \tau)$ dari panduan sebelumnya, tentukan apakah $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ terbuka. *Rubrik.* Jika tidak terbuka, pilih satu titik di dalamnya dan buktikan bahwa tidak ada anggota basis yang mengelilingi titik itu dan tetap berada di dalam $\mathbb{Z}^+$.

Petunjuk. Setiap anggota basis yang memuat bilangan positif n juga memuat 0 dan $-n$. Bandingkan hal itu dengan syarat keterbukaan melalui basis.

Jawaban. Tidak. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ tidak terbuka dalam τ .

Solusi. Ambil, misalnya, $1 \in \mathbb{Z}^+$. Setiap anggota basis berbentuk $a\mathbb{Z}$ yang memuat 1 harus memiliki $a = \pm 1$, sebab a membagi 1. Maka anggota itu adalah seluruh $\mathbb{Z}$, yang jelas tidak terkandung dalam $\mathbb{Z}^+$. Bahkan secara umum, jika $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \in a\mathbb{Z}$, maka $0, -n \in a\mathbb{Z}$, sehingga $a\mathbb{Z}$ tidak mungkin menjadi subhimpunan $\mathbb{Z}^+$. Kriteria keterbukaan melalui basis gagal pada setiap titik positif; jadi $\mathbb{Z}^+$ tidak terbuka.

Pemeriksaan L.36 Bilangan bulat ganjil tidak terbuka. *Jangkar sumber: ex_aZ_top*, tugas ketiga. Tentukan apakah himpunan semua bilangan bulat ganjil terbuka dalam $(\mathbb{Z}, \tau)$. *Rubrik.* Berikan argumen basis pada satu titik ganjil, bukan hanya menunjukkan bahwa himpunan tersebut bukan anggota basis.

Petunjuk. Setiap himpunan $a\mathbb{Z}$ memuat 0. Apa yang terjadi jika anggota basis itu memuat suatu bilangan ganjil tetapi harus tetap berada di dalam himpunan ganjil?

Jawaban. Tidak. Himpunan bilangan ganjil tidak terbuka karena setiap lingkungan basis dari titik ganjil juga memuat bilangan genap 0.

Solusi. Misalkan O adalah himpunan bilangan ganjil dan ambil $n \in O$. Jika $a\mathbb{Z}$ adalah anggota basis yang memuat n , maka $0 \in a\mathbb{Z}$ karena $0 = a \cdot 0$. Akan tetapi 0 bukan bilangan ganjil, sehingga $a\mathbb{Z} \not\subseteq O$. Tidak ada lingkungan basis yang memenuhi syarat keterbukaan di n . Maka O tidak terbuka.

Pemeriksaan L.37 Satu himpunan terbuka dengan ekor kelipatan. *Jangkar sumber: ex_aZ_top*, tugas keempat. Tentukan apakah $O = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 5\}$ terbuka dalam $(\mathbb{Z}, \tau)$. *Rubrik.* Untuk jawaban positif, tuliskan O sebagai gabungan anggota basis; untuk jawaban negatif, tunjukkan titik yang gagal.

Petunjuk. Untuk titik 0 gunakan $0\mathbb{Z}$. Untuk titik x dengan $|x| \geq 5$, coba gunakan $x\mathbb{Z}$ sendiri dan periksa besar setiap kelipatan tak nolnya.

Jawaban. Ya. Berlaku

$$O = 0\mathbb{Z} \cup \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Z} \\ |x| \geq 5}} x\mathbb{Z},$$

sehingga O terbuka.

Solusi. Himpunan $0\mathbb{Z} = \{0\}$ adalah anggota basis. Jika $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $|x| \geq 5$, maka $x \in x\mathbb{Z}$. Setiap unsur tak nol dari $x\mathbb{Z}$ berbentuk kx dengan $|k| \geq 1$, sehingga $|kx| = |k||x| \geq |x| \geq 5$; unsur nolnya adalah 0. Karena itu $x\mathbb{Z} \subseteq O$. Sebaliknya, setiap unsur O termasuk salah satu himpunan dalam gabungan di atas. Jadi persamaan gabungan tersebut benar, dan karena setiap suku adalah anggota basis, O terbuka.

Pemeriksaan L.38 Basis dari kelas-kelas residu. *Jangkar sumber:* latihan koset setelah ex_aZ_top , tugas pembuktian pertama. Untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a \neq 0$, tetapkan $A_{a,b} = a\mathbb{Z} + b = \{ak + b \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Buktikan bahwa $\mathcal{C} = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$ merupakan basis untuk suatu topologi pada $\mathbb{Z}$. *Rubrik.* Tunjukkan cakupan dan konstruksi anggota basis yang berada di dalam setiap irisan yang relevan.

Petunjuk. Cakupan dapat memakai $A_{1,0} = \mathbb{Z}$. Jika $x \in A_{a_1,b_1} \cap A_{a_2,b_2}$, pertimbangkan $A_{a_1a_2,x}$ dan tuliskan bentuk umum elemennya.

Jawaban. Untuk titik x di irisan dua anggota basis, $A_{a_1a_2,x} \subseteq A_{a_1,b_1} \cap A_{a_2,b_2}$ dan memuat x . Bersama $A_{1,0} = \mathbb{Z}$, ini membuktikan kedua aksioma basis.

Solusi. Karena $A_{1,0} = \mathbb{Z}$, setiap bilangan bulat tercakup oleh anggota $\mathcal{C}$. Sekarang ambil $B_1 = A_{a_1,b_1}$, $B_2 = A_{a_2,b_2}$, dan $x \in B_1 \cap B_2$. Untuk setiap $y \in A_{a_1a_2,x}$, ada $k \in \mathbb{Z}$ dengan $y = x + a_1a_2k$. Karena $x \in B_1$, ada $r \in \mathbb{Z}$ sehingga $x = a_1r + b_1$. Maka

$$y = a_1(r + a_2k) + b_1 \in A_{a_1,b_1}.$$

Dengan cara yang sama, dari $x = a_2s + b_2$ diperoleh

$$y = a_2(s + a_1k) + b_2 \in A_{a_2,b_2}.$$

Jadi $y \in B_1 \cap B_2$. Selain itu, $x \in A_{a_1a_2,x}$ dan $a_1a_2 \neq 0$. Syarat irisan basis terpenuhi, sehingga $\mathcal{C}$ adalah basis.

Pemeriksaan L.39 Fungsi yang menukar pasangan berurutan. *Jangkar sumber:* latihan koset, sublatihan yang mendefinisikan f . Misalkan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ diberikan oleh $f(n) = n + (-1)^n$. Buktikan bahwa f bijektif. *Rubrik.* Berikan argumen injektif dan surjektif, atau buktikan secara sah bahwa f adalah involusi.

Petunjuk. Hitung rumus terpisah untuk n genap dan n ganjil. Perhatikan pasangan $(2k, 2k + 1)$.

Jawaban. Jika n genap, $f(n) = n + 1$; jika n ganjil, $f(n) = n - 1$. Karena itu $f(f(n)) = n$ untuk setiap n , sehingga f adalah bijeksi.

Solusi. Untuk $n = 2k$, berlaku $f(2k) = 2k + 1$. Untuk $n = 2k + 1$, berlaku $f(2k + 1) = 2k$. Jadi f menukar kedua anggota setiap pasangan $\{2k, 2k + 1\}$. Menerapkan f dua kali mengembalikan setiap bilangan:

$$f(f(n)) = n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Jika $f(u) = f(v)$, terapkan f pada kedua ruas untuk mendapatkan $u = v$, jadi f injektif. Untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$, ambil $n = f(y)$; maka $f(n) = f(f(y)) = y$, jadi f surjektif. Dengan demikian f bijektif dan sekaligus memenuhi $f^{-1} = f$.

Pemeriksaan L.40 Citra himpunan terbuka di bawah f . *Jangkar sumber:* latihan koset, sublatihan citra. Dengan topologi yang dibangkitkan oleh $A_{a,b} = a\mathbb{Z} + b$, tentukan apakah $f(O)$ terbuka setiap kali O terbuka, untuk $f(n) = n + (-1)^n$. *Rubrik.* Cukup memeriksa citra setiap anggota basis, tetapi kasus a genap dan ganjil harus dibedakan dan ditulis eksplisit.

Petunjuk. Jika a genap, semua $ak + b$ memiliki paritas yang sama. Jika a ganjil, pisahkan $k = 2j$ dan $k = 2j + 1$; masing-masing bagian akan menjadi kelas residu dengan langkah $2a$.

Jawaban. Ya. Citra setiap $A_{a,b}$ adalah satu atau dua anggota basis (digabungkan), sehingga citra gabungan terbuka juga terbuka.

Solusi. Tetapkan $\varepsilon = (-1)^b$. Jika a genap, maka $ak + b$ selalu berparitas b , sehingga

$$f(A_{a,b}) = A_{a,b+\varepsilon}.$$

Jika a ganjil, untuk $k = 2j$ diperoleh $f(2aj + b) = 2aj + b + \varepsilon$, sedangkan untuk $k = 2j + 1$ (yang paritasnya berlawanan) diperoleh $f(2aj + a + b) = 2aj + a + b - \varepsilon$. Oleh karena itu

$$f(A_{a,b}) = A_{2a,b+\varepsilon} \cup A_{2a,a+b-\varepsilon}.$$

Semua himpunan di ruas kanan merupakan anggota basis $\mathcal{C}$, jadi citra setiap anggota basis terbuka. Setiap himpunan terbuka O adalah gabungan anggota basis; karena citra menghormati gabungan, $f(O) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{C} \\ B \subseteq O}} f(B)$ merupakan gabungan himpunan terbuka. Jadi $f(O)$ terbuka.

Pemeriksaan L.41 Prapeta himpunan terbuka di bawah f . *Jangkar sumber:* latihan koset, sublatihan prapeta. Untuk $f(n) = n + (-1)^n$, tentukan apakah $f^{-1}(U)$ terbuka setiap kali U terbuka dalam $(\mathbb{Z}, \tau)$. *Rubrik.* Nyatakan prapeta f secara tepat dan hubungkan kesimpulan dengan hasil tentang citra pada panduan sebelumnya.

Petunjuk. Dari panduan bijektivitas, $f^{-1} = f$. Jadi prapeta U sama dengan citra U di bawah fungsi yang sama.

Jawaban. Ya. Karena f involutif, berlaku $f^{-1}(U) = f(U)$; panduan citra menunjukkan himpunan ini terbuka.

Solusi. Kita telah membuktikan bahwa $f(f(n)) = n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Jadi fungsi inversnya adalah fungsi itu sendiri: $f^{-1} = f$. Ambil U terbuka. Maka

$$f^{-1}(U) = f(U).$$

Pada panduan sebelumnya, citra setiap himpunan terbuka di bawah f dibuktikan terbuka dengan memeriksa citra anggota basis. Karena itu $f^{-1}(U)$ terbuka. Bahkan, f adalah homeomorfisme involutif untuk topologi ini.

Panduan latihan sumber, bagian kedua

Sepuluh panduan berikut meneruskan urutan tugas dalam *sec_top_space_exer.ptx* tepat setelah panduan *o003-c90-ch12-exer-a-10*: dua tugas tentang basis interval berpusat di nol, lima tugas tentang kekasaran topologi pada tiga titik, lalu tiga tugas pertama tentang basis minimal ruang hingga. Setiap panduan adalah komponen pendamping asli berbahasa Indonesia yang diterbitkan di bawah CC BY 4.0; isinya bukan teks, terjemahan resmi, atau jawaban resmi GVSU, melainkan penjelasan baru untuk belajar mandiri.

Pemeriksaan L.42 Basis interval berpusat di nol. *Jangkar sumber:* latihan berjudul *ex_coarse_topology_example*, tugas pertama (baris sumber 126--138). Misalkan $\mathcal{B} = \{(-r, r) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk suatu topologi τ pada $\mathbb{R}$. *Rubrik.* Periksa cakupan $\mathbb{R}$ dan syarat irisan basis untuk dua interval, termasuk pilihan anggota basis yang memuat setiap titik irisan. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $x \in \mathbb{R}$, pilih radius positif yang lebih besar daripada $|x|$.

Tahap 2. Tulis irisan dua anggota sebagai interval dengan radius yang lebih kecil.

Tahap 3. Gunakan interval irisan itu sendiri sebagai anggota basis ketiga untuk setiap titik di dalam irisan.

Jawaban. Ya. Setiap $x \in \mathbb{R}$ berada dalam $(-(|x|+1), |x|+1)$, dan $(-r_1, r_1) \cap (-r_2, r_2) = (-\min(r_1, r_2), \min(r_1, r_2))$ kembali merupakan anggota $\mathcal{B}$. Jadi $\mathcal{B}$ memenuhi kedua aksioma basis.

Solusi. Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}$. Dengan $r = |x| + 1 > 0$, berlaku $-r < x < r$, sehingga $x \in (-r, r) \in \mathcal{B}$. Ini membuktikan bahwa gabungan anggota basis mencakup seluruh $\mathbb{R}$.

Selanjutnya, misalkan $B_1 = (-r_1, r_1)$ dan $B_2 = (-r_2, r_2)$ dengan $r_1, r_2 > 0$, dan ambil $x \in B_1 \cap B_2$. Jika $r_3 = \min(r_1, r_2) > 0$, maka

$$B_1 \cap B_2 = (-r_3, r_3).$$

Interval ini adalah anggota $\mathcal{B}$, memuat x , dan terkandung dalam $B_1 \cap B_2$ (bahkan sama dengannya). Kedua syarat basis terpenuhi, sehingga $\mathcal{B}$ membangkitkan topologi τ pada $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan L.43 Interval Euklides yang tidak terbuka. *Jangkar sumber:* *ex_coarse_topology_example*, tugas kedua (baris sumber 139--148). Setiap anggota basis $\mathcal{B} = \{(-r, r) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$ terbuka dalam topologi

Euklides τ_E . Tunjukkan bahwa ada interval (a, b) yang terbuka dalam $(\mathbb{R}, d_E)$ tetapi bukan himpunan terbuka dalam topologi τ yang dibangkitkan $\mathcal{B}$. *Rubrik.* Berikan interval konkret dan alasan yang berlaku untuk semua gabungan anggota basis. Ini adalah panduan orisinal CC BY 4.0, bukan teks atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Perhatikan bahwa setiap interval basis $(-r, r)$ memuat titik 0.

Tahap 2. Maka setiap gabungan basis yang tidak kosong juga memuat 0.

Tahap 3. Pilih interval Euklides tak kosong yang seluruhnya berada di sisi kanan 0.

Jawaban. Contohnya adalah $(1, 2)$. Interval ini terbuka dalam topologi Euklides, tetapi bukan terbuka dalam τ karena tidak memuat 0, sedangkan setiap himpunan τ -terbuka yang tidak kosong memuat 0.

Solusi. Untuk setiap $r > 0$, interval $(-r, r)$ adalah interval terbuka Euklides, sehingga semua anggota $\mathcal{B}$ memang terbuka dalam τ_E . Setiap himpunan terbuka dalam τ merupakan gabungan anggota $\mathcal{B}$. Bila gabungan itu tidak kosong, pilih salah satu sukunya; suku tersebut memuat 0, sehingga gabungannya juga memuat 0.

Interval $(1, 2)$ terbuka untuk metrik Euklides, tetapi $0 \notin (1, 2)$. Karena itu interval tersebut tidak mungkin merupakan gabungan tak kosong anggota $\mathcal{B}$, dan jelas bukan gabungan kosong. Jadi $(1, 2) \notin \tau$, yang membuktikan bahwa τ berbeda (lebih kasar) dari topologi Euklides.

Pemeriksaan L.44 Topologi paling lemah. *Jangkar sumber:* latihan tentang topologi lebih kasar dan lebih halus, tugas pertama (baris sumber 178--184). Apa topologi paling lemah pada suatu himpunan X ? Jelaskan urutan inklusi yang dimaksud. Panduan ini merupakan materi pendamping baru berlisensi CC BY 4.0, bukan jawaban atau terjemahan resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat dua himpunan yang wajib ada dalam setiap topologi pada X .

Tahap 2. Bentuk koleksi yang hanya memuat dua himpunan wajib itu, lalu cek tiga aksioma topologi.

Jawaban. Topologi paling lemah adalah topologi indiskret $\tau_{\text{ind}} = \{\emptyset, X\}$. Ia merupakan subkoleksi dari setiap topologi pada X .

Solusi. Aksioma topologi mengharuskan $\emptyset$ dan X menjadi terbuka. Koleksi

$$\tau_{\text{ind}} = \{\emptyset, X\}$$

tertutup terhadap gabungan sebarang (gabungan yang tidak kosong adalah X) dan irisan berhingga, sehingga memang merupakan topologi. Jika τ topologi apa pun pada X , kedua himpunan tersebut berada di τ ; maka $\tau_{\text{ind}} \subseteq \tau$. Dalam urutan berdasarkan inklusi koleksi terbuka, inilah topologi paling lemah, yang juga disebut topologi indiskret atau trivial.

Pemeriksaan L.45 Topologi paling kuat. *Jangkar sumber:* latihan tentang topologi lebih kasar dan lebih halus, tugas kedua (baris sumber 185--191). Apa topologi paling kuat pada suatu himpunan X ? Nyatakan semua himpunan terbukanya. Ini adalah panduan pendamping asli CC BY 4.0 untuk latihan sumber, bukan materi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tidak ada topologi pada X yang dapat memuat himpunan di luar $\mathcal{P}(X)$.

Tahap 2. Periksa bahwa koleksi semua subhimpunan sendiri memenuhi penutupan gabungan dan irisan.

Jawaban. Topologi paling kuat adalah topologi diskret $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$, yaitu koleksi semua subhimpunan X .

Solusi. Koleksi $\mathcal{P}(X)$ memuat $\emptyset$ dan X , setiap gabungan sebarang subkoleksi anggotanya masih merupakan subhimpunan X , dan setiap irisan berhingga juga demikian. Jadi $\mathcal{P}(X)$ adalah topologi, disebut topologi diskret. Untuk topologi apa pun τ pada X , setiap anggota τ sudah merupakan subhimpunan X , sehingga $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Oleh karena itu tidak ada topologi yang lebih kuat daripada topologi diskret.

Pemeriksaan L.46 Topologi maksimal yang bukan diskret. *Jangkar sumber:* latihan tentang topologi lebih kasar dan lebih halus, tugas yang menampilkan $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ pada $X = \{a, b, c\}$ (baris sumber 192--210). Verifikasi bahwa σ adalah topologi dan bahwa menambahkan salah satu himpunan yang hilang langsung menghasilkan topologi diskret. Panduan ini adalah penjelasan orisinal CC BY 4.0,

bukan teks atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dari enam anggota σ , cek gabungan dan irisan pasangan yang berpotensi baru, khususnya $\{a, b\} \cap \{a, c\}$ dan $\{a\} \cup \{b\}$.

Tahap 2. Karena $\mathcal{P}(X)$ memiliki delapan himpunan, identifikasi dua subhimpunan yang belum ada.

Tahap 3. Jika salah satu dari dua himpunan itu ditambahkan, gunakan gabungan atau irisan dengan anggota yang sudah ada untuk memperoleh yang lain dan semua singleton.

Jawaban. σ adalah topologi. Subhimpunan yang hilang hanyalah $\{c\}$ dan $\{b, c\}$; menambahkan salah satunya memaksa keduanya, sehingga diperoleh $\mathcal{P}(X)$, topologi diskret.

Solusi. Koleksi σ memuat $\emptyset$ dan X . Gabungan dua anggota nontrivial hanya memberi anggota yang sudah tercantum atau X ; misalnya $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$, $\{a\} \cup \{a, c\} = \{a, c\}$, dan $\{b\} \cup \{a, c\} = X$. Irisan pasangan juga tetap di dalam σ ; contoh yang menentukan adalah $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ dan $\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$. Karena koleksi berhingga, pemeriksaan pasangan ini menjamin penutupan gabungan sebarang dan irisan berhingga. Jadi σ merupakan topologi.

Delapan subhimpunan X adalah $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; yang belum ada di σ ialah $\{c\}$ dan $\{b, c\}$. Jika $\{c\}$ ditambahkan, gabungan dengan $\{b\}$ memberi $\{b, c\}$. Jika $\{b, c\}$ yang ditambahkan, irisan dengan $\{a, c\}$ memberi $\{c\}$. Setelah $\{c\}$ tersedia, gabungan dengan singleton $\{a\}$ dan $\{b\}$ menghasilkan semua subhimpunan yang belum tercantum. Maka setiap topologi yang memuat σ secara ketat adalah $\mathcal{P}(X)$, sehingga σ maksimal di antara topologi-topologi non-diskret.

Pemeriksaan L.47 Adakah topologi maksimal non-diskret? *Jangkar sumber:* latihan tentang topologi lebih kasar dan lebih halus, pertanyaan eksistensi pertama (baris sumber 211–219). Untuk $X = \{a, b, c\}$, apakah ada topologi σ yang bukan diskret tetapi tidak memiliki topologi yang lebih kuat selain topologi diskret? Jawab dengan contoh dan pembuktian. Ini panduan pendamping asli CC BY 4.0, bukan jawaban resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Mulai dengan koleksi enam himpunan yang hanya kehilangan $\{c\}$ dan $\{b, c\}$ dari $\mathcal{P}(X)$.

Tahap 2. Verifikasi koleksi itu topologi dan bukan diskret.

Tahap 3. Setiap perluasan ketat harus menambahkan salah satu dari dua himpunan yang hilang; tunjukkan bahwa penambahan itu memaksa seluruh $\mathcal{P}(X)$.

Jawaban. Ada. Contoh $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ bukan diskret, dan setiap topologi yang lebih kuat daripadanya adalah $\mathcal{P}(X)$.

Solusi. Koleksi yang dipilih adalah topologi karena gabungan dan irisan anggotanya tetap berada di dalam koleksi (contoh kuncinya $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ dan $\{b\} \cup \{a, c\} = X$). Koleksi itu bukan diskret sebab $\{c\}$ tidak terbuka.

Misalkan ρ topologi dengan $\sigma \subsetneq \rho$. Karena hanya dua subhimpunan X yang tidak berada di σ , yaitu $\{c\}$ dan $\{b, c\}$, koleksi ρ memuat salah satunya. Jika memuat $\{c\}$, gabungan dengan $\{b\}$ memberi $\{b, c\}$; jika memuat $\{b, c\}$, irisan dengan $\{a, c\}$ memberi $\{c\}$. Dengan kedua himpunan itu, semua delapan subhimpunan X terbuka. Jadi $\rho = \mathcal{P}(X)$, membuktikan eksistensi topologi maksimal non-diskret tersebut.

Pemeriksaan L.48 Topologi minimal non-indiskret. *Jangkar sumber:* latihan tentang topologi lebih kasar dan lebih halus, pertanyaan eksistensi kedua (baris sumber 220–228). Untuk $X = \{a, b, c\}$, apakah ada topologi γ yang bukan indiskret tetapi tidak memiliki topologi yang lebih lemah selain topologi indiskret? Berikan contoh. Penjelasan ini merupakan materi orisinal CC BY 4.0, bukan teks atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Agar topologi tidak indiskret, tambahkan tepat satu subhimpunan tak kosong dan bukan X ke $\{\emptyset, X\}$.

Tahap 2. Cek bahwa koleksi tiga himpunan itu tetap tertutup terhadap gabungan dan irisan.

Tahap 3. Setiap subtopologi yang lebih lemah harus menghapus satu-satunya himpunan tambahan tersebut.

Jawaban. Ada, misalnya $\gamma = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Topologi ini bukan indiskret, sedangkan satu-satunya topologi yang benar-benar lebih lemah darinya adalah $\{\emptyset, X\}$.

Solusi. Koleksi $\gamma = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ memuat dua himpunan wajib. Gabungan dua anggota mana pun dan irisan berhingga dua anggota tetap menghasilkan salah satu dari tiga himpunan itu, jadi γ adalah topologi. Karena $\{a\}$ terbuka, topologi ini bukan topologi indiskret.

Jika $\rho \subsetneq \gamma$ juga topologi pada X , maka ρ harus tetap memuat $\emptyset$ dan X . Satu-satunya anggota γ yang dapat dihilangkan adalah $\{a\}$, sehingga $\rho = \{\emptyset, X\}$. Jadi tidak ada topologi yang lebih lemah selain topologi indiskret, sesuai yang diminta.

Pemeriksaan L.49 Keterbukaan himpunan lingkungan minimal. *Jangkar sumber:* latihan basis minimal untuk ruang hingga, tugas pertama (baris sumber 230--247). Misalkan X berhingga, τ topologi pada X , dan untuk setiap $x \in X$ tetapkan U_x sebagai irisan semua himpunan terbuka yang memuat x . Jelaskan mengapa U_x terbuka. Panduan ini adalah komponen pendamping asli CC BY 4.0, bukan jawaban resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Keluarga himpunan terbuka yang memuat x tidak kosong karena memuat X .

Tahap 2. Gunakan bahwa X berhingga untuk menyimpulkan bahwa $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ juga berhingga.

Tahap 3. Irisan yang semula tampak tak berhingga sebenarnya adalah irisan berhingga, lalu pakai aksioma topologi.

Jawaban. U_x terbuka karena hanya merupakan irisan berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam τ yang memuat x .

Solusi. Definisikan $\mathcal{N}_x = \{U \in \tau \mid x \in U\}$. Keluarga ini tidak kosong sebab $X \in \mathcal{N}_x$. Karena X berhingga, himpunan kuasanya $\mathcal{P}(X)$ berhingga; akibatnya $\mathcal{N}_x$ juga berhingga, katakanlah $\mathcal{N}_x = \{U_1, \dots, U_k\}$. Maka

$$U_x = U_1 \cap \dots \cap U_k.$$

Aksioma topologi menyatakan irisan berhingga himpunan terbuka terbuka, sehingga $U_x \in \tau$. (Keluarga ini selalu memuat setidaknya satu anggota, jadi tidak perlu memakai konvensi irisan kosong.)

Pemeriksaan L.50 Basis minimal dari lingkungan terkecil. *Jangkar sumber:* latihan basis minimal untuk ruang hingga, tugas kedua (baris sumber 248--254). Dengan U_x seperti pada panduan sebelumnya, misalkan $\mathcal{B}_{\min} = \{U_x \mid x \in X\}$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{B}_{\min}$ merupakan basis untuk τ . Ini materi pendamping orisinal CC BY 4.0, bukan teks atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk cakupan, periksa langsung bahwa $x \in U_x$.

Tahap 2. Jika $y \in U_x \cap U_z$, ingat bahwa U_x dan U_z adalah himpunan terbuka yang memuat y .

Tahap 3. Definisi U_y lalu memberi inklusi yang diperlukan untuk syarat irisan basis.

Jawaban. Setiap x berada dalam U_x . Jika $y \in U_x \cap U_z$, maka $y \in U_y \subseteq U_x \cap U_z$. Jadi $\mathcal{B}_{\min}$ memenuhi cakupan dan syarat irisan basis. Lebih jauh, untuk setiap $U \in \tau$ berlaku $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, sehingga basis ini menghasilkan tepat topologi τ .

Solusi. Dari panduan sebelumnya, setiap U_x terbuka. Selain itu, x termasuk dalam setiap himpunan yang diiris dalam definisi U_x , sehingga $x \in U_x$; keluarga $\mathcal{B}_{\min}$ mencakup X .

Ambil dua anggota basis U_x, U_z dan titik $y \in U_x \cap U_z$. Kedua himpunan tersebut terbuka dan memuat y . Karena U_y adalah irisan semua himpunan terbuka yang memuat y , ia terkandung dalam masing-masingnya:

$$y \in U_y \subseteq U_x \cap U_z.$$

Dengan demikian syarat irisan basis terpenuhi. Untuk memastikan bahwa topologi yang dibangkitkan tepat τ , ambil $U \in \tau$. Setiap $x \in U$ memiliki U_x sebagai salah satu lingkungan terbuka dalam irisan definisi U_x , sehingga $U_x \subseteq U$. Sebaliknya $x \in U_x$, maka

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Jadi setiap himpunan terbuka dalam τ merupakan gabungan anggota $\mathcal{B}_{\min}$; bersama keterbukaan setiap U_x , ini membuktikan bahwa $\mathcal{B}_{\min}$ adalah basis untuk τ .

Pemeriksaan L.51 Minimalitas basis hingga. *Jangkar sumber:* latihan basis minimal untuk ruang hingga, tugas ketiga (baris sumber 255--261). Tunjukkan bahwa jika $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk τ , maka $\mathcal{B}_{\min} \subseteq \mathcal{B}$, dengan $\mathcal{B}_{\min} = \{U_x \mid x \in X\}$. Panduan pembuktian ini adalah karya pendamping asli CC BY 4.0, bukan jawaban resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap x , karena U_x terbuka, pilih $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq U_x$.

Tahap 2. Definisi U_x sebagai irisan semua lingkungan terbuka memuat inklusi balik $U_x \subseteq B_x$.

Tahap 3. Kedua inklusi memaksa $B_x = U_x$; lakukan ini untuk semua $x \in X$.

Jawaban. Untuk setiap $x \in X$ ada $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq U_x$. Karena B_x juga terbuka dan memuat x , berlaku $U_x \subseteq B_x$. Jadi $B_x = U_x \in \mathcal{B}$, dan $\mathcal{B}_{\min} \subseteq \mathcal{B}$.

Solusi. Ambil sembarang $x \in X$. Hasil panduan sebelumnya memberi $U_x \in \tau$. Karena $\mathcal{B}$ adalah basis untuk τ , setiap himpunan terbuka adalah gabungan anggota basis; khususnya ada $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subseteq U_x$.

Namun B_x sendiri merupakan himpunan terbuka yang memuat x . Dalam irisan definisi $U_x = \bigcap \{U \in \tau \mid x \in U\}$, salah satu faktor adalah B_x ; karenanya $U_x \subseteq B_x$. Bersama inklusi sebelumnya diperoleh $U_x = B_x$, sehingga $U_x \in \mathcal{B}$. Karena x sebarang, semua anggota $\mathcal{B}_{\min}$ berada dalam $\mathcal{B}$, seperti yang harus dibuktikan.

Panduan latihan sumber, bagian ketiga

Lima panduan berikut meneruskan urutan tugas dalam *sec_top_space_exer.ptx* tepat setelah panduan *o003-c90-ch12-exer-b-10*. Panduan pertama menyelesaikan latihan basis minimal ruang hingga, panduan kedua membahas rantai topologi yang ditampilkan sumber, dan tiga panduan terakhir mencacah topologi pada himpunan berlabel dengan satu, dua, dan tiga titik. Setiap panduan adalah komponen pendamping asli berbahasa Indonesia yang diterbitkan terpisah di bawah CC BY 4.0; isinya bukan teks, terjemahan resmi, atau jawaban resmi GVSU.

Pemeriksaan L.52 Basis minimal pada empat titik. *Jangkar sumber:* latihan basis minimal untuk ruang hingga, tugas keempat (baris sumber 262--269). Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}.$$

Dengan menganggap τ suatu topologi, tentukan basis minimal tunggalnya. *Rubrik.* Hitung lingkungan terbuka terkecil setiap titik, tunjukkan bahwa koleksinya membangkitkan semua anggota τ , dan jelaskan mengapa setiap basis lain harus memuatnya. Panduan ini merupakan materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap $x \in X$, iriskan semua anggota τ yang memuat x .

Tahap 2. Perhatikan bahwa setiap himpunan terbuka tak kosong memuat a ; titik b, c, d masing-masing dapat dipisahkan dari dua titik lainnya.

Tahap 3. Gunakan hasil ruang hingga: lingkungan terbuka terkecil U_x harus menjadi anggota setiap basis untuk topologi tersebut.

Jawaban. Basis minimal tunggalnya adalah

$$\mathcal{B}_{\min} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}.$$

Solusi. Lingkungan terbuka terkecil titik a adalah $U_a = \{a\}$. Semua himpunan terbuka yang memuat b juga memuat a , dan $\{a, b\}$ sendiri terbuka, sehingga $U_b = \{a, b\}$. Dengan alasan yang sama, $U_c = \{a, c\}$ dan $U_d = \{a, d\}$. Jadi koleksi lingkungan terkecil itu tepat

$$\mathcal{B}_{\min} = \{U_a, U_b, U_c, U_d\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}.$$

Gabungan kosong menghasilkan $\emptyset$. Setiap anggota τ yang lain berbentuk $\{a\} \cup S$ untuk suatu $S \subseteq \{b, c, d\}$; himpunan itu diperoleh dengan mengambil U_a bila $S = \emptyset$, atau dengan menggabungkan U_x untuk $x \in S$. Maka koleksi tersebut membangkitkan tepat τ . Untuk basis apa pun $\mathcal{B}$ bagi τ , keterbukaan U_x memberi anggota basis B_x dengan $x \in B_x \subseteq U_x$. Karena U_x terkandung dalam setiap lingkungan terbuka titik x , juga $U_x \subseteq B_x$; jadi $B_x = U_x$. Dengan demikian semua empat anggota di atas wajib berada dalam setiap basis, yang membuktikan minimalitas sekaligus ketunggalannya.

Pemeriksaan L.53 Rantai terpanjang topologi yang ditampilkan. *Jangkar sumber:* tugas terakhir pada latihan basis minimal (baris sumber 271--334). Sumber menyebut 9 topologi tetapi menampilkan sepuluh entri. Di sini entri pertama ditafsirkan sebagai akar indiskret dan entri 2--10 sebagai sembilan topologi sasaran; tidak ada entri yang dibuang. Untuk $X = \{a, b, c\}$, beri label

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset, X\}, \\ \tau_2 &= \{\emptyset, \{a\}, X\}, \\ \tau_3 &= \{\emptyset, \{a, b\}, X\}, \\ \tau_4 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}, \\ \tau_5 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}, \\ \tau_6 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}, \\ \tau_7 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \tau_8 &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}, \\ \tau_9 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \tau_{10} &= \mathcal{P}(X).\end{aligned}$$

Untuk setiap sasaran $\tau_2, \dots, \tau_{10}$, tuliskan semua rantai terpanjang yang dimulai pada τ_1 dan berakhir pada sasaran itu, dengan urutan berdasarkan inklusi koleksi terbuka. *Rubrik.* Setiap inklusi harus ketat; tunjukkan pula mengapa tidak ada rantai yang lebih panjang di dalam sepuluh entri yang ditampilkan. Ini adalah rekonstruksi pendamping asli CC BY 4.0, bukan pembetulan atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pandang setiap τ_i sebagai himpunan yang anggotanya sendiri adalah himpunan terbuka. Buat panah hanya jika $\tau_i \subsetneq \tau_j$ dan tidak ada entri yang ditampilkan di antara keduanya.

Tahap 2. Entri τ_4 menerima panah dari τ_2 dan τ_3 ; setelah itu jalur terpanjang menuju τ_6, τ_9 , dan topologi diskret menjadi terlihat.

Tahap 3. Untuk membuktikan maksimalitas panjang, hitung secara rekursif jumlah simpul terbesar pada jalur dari τ_1 ke setiap simpul melalui relasi penutup tersebut.

Jawaban. Semua rantai terpanjang dalam daftar adalah sebagai berikut:

- 1 $\tau_2: \tau_1 \subsetneq \tau_2$.
- 2 $\tau_3: \tau_1 \subsetneq \tau_3$.
- 3 $\tau_4: \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_4$ dan $\tau_1 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4$.
- 4 $\tau_5: \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_5$.
- 5 $\tau_6: \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6$ dan $\tau_1 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6$.
- 6 $\tau_7: \tau_1 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_7$.
- 7 $\tau_8: \tau_1 \subsetneq \tau_8$.
- 8 $\tau_9: \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6 \subsetneq \tau_9$ dan $\tau_1 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6 \subsetneq \tau_9$.
- 9 $\tau_{10}: \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6 \subsetneq \tau_9 \subsetneq \tau_{10}$ dan $\tau_1 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_6 \subsetneq \tau_9 \subsetneq \tau_{10}$.

Solusi. Setelah semua pasangan diuji dengan inklusi koleksi terbuka, relasi penutup di dalam daftar ini adalah

$$\begin{aligned}\tau_1 &\prec \tau_2, \tau_3, \tau_8, \\ \tau_2 &\prec \tau_4, \tau_5, \\ \tau_3 &\prec \tau_4, \tau_7, \\ \tau_4 &\prec \tau_6, \\ \tau_5, \tau_6, \tau_7 &\prec \tau_9, \\ \tau_8, \tau_9 &\prec \tau_{10}.\end{aligned}$$

Misalnya, $\tau_4 \subsetneq \tau_6$ karena satu-satunya terbuka baru adalah $\{b\}$, sedangkan $\tau_6 \subsetneq \tau_9$ karena terbuka baru berikutnya adalah $\{b, c\}$. Sebaliknya, tidak ada panah $\tau_8 \rightarrow \tau_9$: $\{c\}$ dan $\{a, c\}$ berada di τ_8 tetapi tidak di τ_9 .

Panjang maksimum (dalam jumlah simpul) dari τ_1 berturut-turut adalah 2 untuk τ_2, τ_3, τ_8 , 3 untuk τ_4, τ_5, τ_7 , 4 untuk τ_6 , 5 untuk τ_9 , dan 6 untuk τ_{10} . Menelusuri semua pendahulu yang mencapai maksimum tersebut memberi tepat rantai-rantai pada jawaban. Karena setiap inklusi ketat di dalam poset hingga harus melewati relasi penutup, perhitungan ini sekaligus membuktikan bahwa tidak ada rantai dalam sepuluh entri yang lebih panjang.

Pemeriksaan L.54 Semua topologi pada himpunan satu titik. *Jangkar sumber:* latihan pencacahan topologi, tugas pertama (baris sumber 337--349). Tentukan semua topologi pada himpunan satu titik $X = \{a\}$. *Rubrik.* Nyatakan koleksinya dan jelaskan mengapa tidak ada pilihan lain. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Daftarkan seluruh anggota $\mathcal{P}(X)$.

Tahap 2. Kedua anggota itu wajib berada dalam setiap topologi.

Jawaban. Satu-satunya topologi adalah $\tau = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, X\}$.

Solusi. Himpunan $X = \{a\}$ hanya mempunyai dua subhimpunan, yaitu $\emptyset$ dan X . Aksioma topologi mewajibkan keduanya terbuka, sehingga setiap topologi harus sama dengan $\{\emptyset, X\}$. Koleksi ini memang tertutup terhadap semua gabungan dan irisan berhingga, jadi ia benar-benar topologi dan tidak ada kemungkinan lain.

Pemeriksaan L.55 Semua topologi pada himpunan dua titik berlabel. *Jangkar sumber:* latihan pencacahan topologi, tugas kedua (baris sumber 350--356). Tentukan semua topologi pada himpunan berlabel $X = \{a, b\}$. *Rubrik.* Daftarkan keempat koleksi secara eksplisit dan buktikan bahwa daftar itu lengkap. Materi pendamping ini asli dan berlisensi CC BY 4.0; ia bukan solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Selain $\emptyset$ dan X , hanya ada dua calon himpunan terbuka: $\{a\}$ dan $\{b\}$.

Tahap 2. Pilih tidak satu pun, tepat salah satu, atau keduanya. Setiap pilihan memenuhi aksioma topologi.

Jawaban. Keempat topologi pada $X = \{a, b\}$ adalah

$$\begin{aligned}\{\emptyset, X\}, \\ \{\emptyset, \{a\}, X\}, \\ \{\emptyset, \{b\}, X\}, \\ \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X).\end{aligned}$$

Solusi. Setiap topologi harus memuat $\emptyset$ dan X . Dua subhimpunan lain hanyalah $\{a\}$ dan $\{b\}$, sehingga ada paling banyak empat pilihan untuk keluarga terbuka tambahan: tidak satu pun, hanya $\{a\}$, hanya $\{b\}$, atau keduanya. Tiga pilihan pertama jelas tertutup terhadap gabungan dan irisan. Pada pilihan terakhir, $\{a\} \cup \{b\} = X$ dan $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, jadi aksioma juga terpenuhi. Keempat pilihan pada jawaban dengan demikian merupakan topologi, dan daftar kandidat subhimpunan tadi membuktikan bahwa tidak ada yang terlewat.

Pemeriksaan L.56 Semua 29 topologi pada himpunan tiga titik berlabel. *Jangkar sumber:* latihan pencacahan topologi, tugas ketiga (baris sumber 357--368). Tentukan semua topologi pada himpunan berlabel $X = \{a, b, c\}$. Pencacahan harus membedakan topologi yang diperoleh dengan menukar label, bukan hanya kelas homeomorfismenya. *Rubrik.* Daftarkan seluruh 29 koleksi, verifikasi pola penutupan gabungan dan irisan, dan berikan argumen kelengkapan yang mengecualikan keluarga lain. Ini merupakan solusi pendamping asli CC BY 4.0, bukan solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Singkatlah enam subhimpunan tak kosong dan bukan seluruh X sebagai $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $AB = \{a, b\}$, $AC = \{a, c\}$, $BC = \{b, c\}$.

Tahap 2. Kelompokkan topologi menurut banyaknya anggota selain $\emptyset$ dan X . Untuk dua anggota tambahan, pasangan yang mungkin harus saling termuat atau saling berkomplemen.

Tahap 3. Banyak keluarga yang mungkin untuk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 anggota tambahan berturut-turut adalah 1, 6, 9, 6, 6, 0, 1. Jumlahnya 29; tuliskan setiap hasil berlabel, bukan hanya satu wakil tiap pola.

Jawaban. Gunakan singkatan $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $AB = \{a, b\}$, $AC = \{a, c\}$, dan $BC = \{b, c\}$. Semua daftar berikut juga memuat $\emptyset$ dan X seperti yang dituliskan; setiap baris adalah satu topologi yang berbeda.

Dua himpunan terbuka (1 topologi):

$$\{\emptyset, X\}.$$

Tiga himpunan terbuka (6 topologi):

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, A, X\}, \quad \{\emptyset, B, X\}, \quad \{\emptyset, C, X\}, \\ &\{\emptyset, AB, X\}, \quad \{\emptyset, AC, X\}, \quad \{\emptyset, BC, X\}. \end{aligned}$$

Empat himpunan terbuka (9 topologi):

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, A, AB, X\}, \quad \{\emptyset, A, AC, X\}, \quad \{\emptyset, A, BC, X\}, \\ &\{\emptyset, B, AB, X\}, \quad \{\emptyset, B, AC, X\}, \quad \{\emptyset, B, BC, X\}, \\ &\{\emptyset, C, AB, X\}, \quad \{\emptyset, C, AC, X\}, \quad \{\emptyset, C, BC, X\}. \end{aligned}$$

Lima himpunan terbuka (6 topologi):

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, A, B, AB, X\}, \quad \{\emptyset, A, C, AC, X\}, \quad \{\emptyset, B, C, BC, X\}, \\ &\{\emptyset, A, AB, AC, X\}, \quad \{\emptyset, B, AB, BC, X\}, \quad \{\emptyset, C, AC, BC, X\}. \end{aligned}$$

Enam himpunan terbuka (6 topologi):

$$\begin{aligned} &\{\emptyset, A, B, AB, AC, X\}, \quad \{\emptyset, A, B, AB, BC, X\}, \\ &\{\emptyset, A, C, AB, AC, X\}, \quad \{\emptyset, A, C, AC, BC, X\}, \\ &\{\emptyset, B, C, AB, BC, X\}, \quad \{\emptyset, B, C, AC, BC, X\}. \end{aligned}$$

Tidak ada topologi dengan tepat tujuh himpunan terbuka. Dengan delapan himpunan terbuka terdapat tepat satu, yaitu topologi diskret:

$$\{\emptyset, A, B, C, AB, AC, BC, X\} = \mathcal{P}(X).$$

Solusi. Setiap topologi memuat $\emptyset$ dan X . Karena itu cukup memilih suatu keluarga $\mathcal{F} \subseteq \{A, B, C, AB, AC, BC\}$ yang tertutup terhadap setiap gabungan atau irisan yang hasilnya masih merupakan himpunan tak kosong dan bukan X . Kita klasifikasikan menurut $k = |\mathcal{F}|$.

Untuk $k = 0$ ada satu pilihan, dan untuk $k = 1$ setiap satu dari enam himpunan dapat dipilih, jadi ada enam. Untuk $k = 2$, dua anggota harus bersarang atau saling berkomplemen. Jika keduanya tidak bersarang dan bukan komplemen, irisan atau gabungannya memberi anggota nontrivial ketiga yang wajib ditambahkan.

Ada enam pasangan bersarang (sebuah singleton di dalam salah satu dari dua pasangan yang memuatnya) dan tiga pasangan komplemen, sehingga diperoleh sembilan keluarga empat-terbuka yang tercantum.

Untuk $k = 3$, penutupan menyisakan dua pola. Pola pertama memuat dua singleton dan gabungannya, yakni $\{A, B, AB\}$ beserta dua hasil permutasi label. Pola kedua memuat satu singleton dan dua pasangan yang memuatnya, yakni $\{A, AB, AC\}$ beserta dua hasil permutasi. Jadi ada enam. Memulai dari pasangan komplemen dan menambahkan anggota ketiga tidak menghasilkan pola lain: gabungan atau irisan dengan anggota ketiga memaksa anggota keempat.

Untuk $k = 4$, penutupan memaksa dua singleton yang dipilih, gabungan keduanya, serta tepat satu dari dua pasangan yang menghubungkan titik ketiga dengan salah satu singleton tersebut. Pilihan pasangan singleton ada tiga dan pilihan pasangan tambahan ada dua, sehingga ada enam keluarga; keenamnya dituliskan pada kelompok enam-terbuka. Pemeriksaan gabungan dan irisan langsung menunjukkan bahwa setiap keluarga dalam kelompok $k = 0, 1, 2, 3, 4$ memang tertutup.

Untuk $k = 5$, tepat satu dari enam himpunan nontrivial hilang. Jika yang hilang singleton, irisan dua pasangan yang memuat titik itu memaksanya terbuka; misalnya $AB \cap AC = A$. Jika yang hilang pasangan dua titik, gabungan kedua singletonnya memaksanya terbuka; misalnya $A \cup B = AB$. Maka $k = 5$ mustahil. Untuk $k = 6$ diperoleh satu-satunya topologi diskret. Dengan demikian banyaknya topologi adalah

$$1 + 6 + 9 + 6 + 6 + 0 + 1 = 29.$$

Klasifikasi ini mencakup setiap subkeluarga yang mungkin, sedangkan daftar pada jawaban memuat tepat sebanyak itu tanpa pengulangan. Jadi daftar tersebut lengkap untuk himpunan berlabel $\{a, b, c\}$, bukan sekadar sembilan kelas hingga homeomorfisme.

Panduan latihan sumber, bagian keempat

Empat panduan berikut mengikuti empat latihan mandiri pada *sec_top_space_exer.ptx*, baris sumber 371–419: topologi ekor, hukum interior, topologi titik tertentu, dan topologi titik yang dikecualikan. Setiap panduan adalah komponen pendamping asli berbahasa Indonesia yang diterbitkan di bawah CC BY 4.0. Panduan ini bukan teks, terjemahan resmi, atau jawaban resmi GVSU; pernyataan sumber diringkas hanya agar pembaca dapat memasang panduan dengan latihan yang tepat.

Pemeriksaan L.57 Topologi ekor pada bilangan bulat positif. *Jangkar sumber:* latihan tanpa ID pada baris sumber 371–379. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, definisikan $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$, lalu tetapkan $\tau = \{\emptyset, O_1, O_2, O_3, \dots\}$. Buktikan bahwa $(\mathbb{Z}^+, \tau)$ merupakan ruang topologi. *Rubrik.* Periksa $\emptyset$ dan seluruh ruang, gabungan sebarang (termasuk gabungan kosong), serta irisan berhingga. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Perhatikan bahwa $O_1 = \mathbb{Z}^+$ dan bahwa $O_j \subseteq O_i$ tepat ketika $i \leq j$.

Tahap 2. Untuk keluarga tak kosong himpunan ekor, lihat himpunan indeksnya. Setiap subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{Z}^+$ mempunyai anggota terkecil.

Tahap 3. Untuk irisan sejumlah berhingga himpunan ekor, gunakan indeks terbesar. Pisahkan kasus ketika salah satu faktor adalah $\emptyset$.

Jawaban. Ya. Gabungan tak kosong dari himpunan-himpunan O_n adalah O_m , dengan m indeks terkecil yang muncul. Irisan keluarga berhingga tak kosong yang hanya terdiri atas himpunan ekor adalah O_M , dengan M indeks terbesar yang muncul. Kasus kosong dan kasus yang melibatkan $\emptyset$ juga tetap berada dalam τ .

Solusi. Pertama, $\emptyset \in \tau$ menurut definisi dan $\mathbb{Z}^+ = O_1 \in \tau$. Jadi kedua himpunan yang diwajibkan oleh aksioma topologi sudah tersedia.

Ambil keluarga sebarang $\mathcal{U} \subseteq \tau$. Jika keluarga itu tidak memuat satu pun himpunan ekor, maka gabungannya adalah $\emptyset$. Jika $I = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid O_n \in \mathcal{U}\}$ tak kosong, prinsip urutan baik memberi $m = \min I$. Karena

$O_n \subseteq O_m$ untuk setiap $n \in I$, dan O_m sendiri muncul dalam keluarga, berlaku

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = O_m \in \tau.$$

Ini juga mencakup keluarga yang mungkin memuat $\emptyset$, yang tidak mengubah gabungan.

Untuk irisan berhingga, bila salah satu faktor adalah $\emptyset$, hasilnya $\emptyset \in \tau$. Jika semua faktor berbentuk $O_{n_1}, \dots, O_{n_k}$ dengan $k \geq 1$, ambil $M = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Sifat bersarang himpunan ekor memberi

$$O_{n_1} \cap \dots \cap O_{n_k} = O_M \in \tau.$$

Irisan keluarga kosong adalah seluruh ruang $\mathbb{Z}^+ = O_1$. Jadi τ tertutup terhadap gabungan sebarang dan irisan berhingga; akibatnya $(\mathbb{Z}^+, \tau)$ adalah ruang topologi.

Pemeriksaan L.58 Interior irisan dan gabungan. *Jangkar sumber:* latihan tanpa ID pada baris sumber 381--391. Untuk subhimpunan A, B dari ruang topologi X , tentukan hubungan antara $\text{Int}(A \cap B)$ dan $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, serta antara $\text{Int}(A \cup B)$ dan $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Verifikasi kedua hubungan tersebut. *Rubrik.* Nyatakan arah setiap inklusi, buktikan semua klaim universal, dan berikan contoh konkret bila kesamaan tidak selalu berlaku. Panduan ini adalah karya pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan fakta bahwa interior suatu himpunan adalah himpunan terbuka terbesar yang terkandung di dalam himpunan tersebut.

Tahap 2. Untuk irisan, buktikan dua inklusi: irisan dua interior merupakan himpunan terbuka di dalam $A \cap B$, sedangkan setiap himpunan terbuka di dalam $A \cap B$ juga berada di dalam kedua interior.

Tahap 3. Untuk gabungan, satu inklusi langsung berlaku. Untuk menguji inklusi balik, dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi biasa pertimbangkan bilangan rasional dan irasional.

Jawaban. Selalu berlaku

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$$

dan

$$\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B).$$

Inklusi kedua dapat ketat. Dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi Euklides, ambil $A = \mathbb{Q}$ dan $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Kedua interior di ruas kiri kosong, tetapi $\text{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}$.

Solusi. Himpunan $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ terbuka sebagai irisan berhingga dua himpunan terbuka, dan himpunan itu terkandung dalam $A \cap B$. Karena $\text{Int}(A \cap B)$ adalah himpunan terbuka terbesar di dalam $A \cap B$, diperoleh $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$.

Sebaliknya, $\text{Int}(A \cap B)$ terbuka dan terkandung baik dalam A maupun dalam B . Oleh sifat maksimal interior, $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A)$ dan $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(B)$. Jadi $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, yang bersama inklusi pertama membuktikan kesamaan.

Selanjutnya, $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ terbuka dan terkandung dalam $A \cup B$. Maka $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$. Kesamaan tidak selalu berlaku: setiap interval terbuka tak kosong di $\mathbb{R}$ memuat bilangan rasional dan irasional. Karena itu $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$. Namun $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, sehingga interior gabungannya adalah $\mathbb{R}$. Dengan demikian inklusi tersebut dapat ketat.

Pemeriksaan L.59 Topologi titik tertentu. *Jangkar sumber:* latihan *ex_particular_point_topology* pada baris sumber 393--405. Misalkan X tak kosong dan $p \in X$. Koleksi τ_p terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang memuat p . Buktikan bahwa τ_p merupakan topologi pada X . *Rubrik.* Verifikasi kedua himpunan wajib, gabungan sebarang, dan irisan berhingga, termasuk kasus keluarga kosong. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Himpunan $\emptyset$ dan X sudah masuk menurut definisi.

Tahap 2. Bila suatu gabungan anggota τ_p tidak kosong, pilih satu anggota keluarga yang tidak kosong dan tanyakan apakah gabungannya memuat p .

Tahap 3. Untuk irisan berhingga, pisahkan kasus adanya faktor $\emptyset$. Jika tidak ada, setiap faktor memuat p .

Jawaban. Ya. Setiap gabungan anggota τ_p adalah kosong atau memuat p . Setiap irisan berhingga anggotanya adalah kosong bila salah satu faktor kosong, dan jika tidak, tetap memuat p . Semua hasil tersebut kembali berada dalam τ_p .

Solusi. Menurut definisi, $\emptyset \in \tau_p$ dan $X \in \tau_p$. Ambil keluarga sebarang $\mathcal{U} \subseteq \tau_p$. Jika semua anggotanya kosong, atau jika $\mathcal{U}$ sendiri kosong, gabungannya adalah $\emptyset \in \tau_p$. Jika tidak, ada anggota tak kosong $U_0 \in \mathcal{U}$. Setiap anggota tak kosong τ_p memuat p , sehingga $p \in U_0$ dan karenanya $p \in \bigcup \mathcal{U}$. Jadi gabungan tersebut juga anggota τ_p .

Sekarang ambil sejumlah berhingga anggota τ_p . Jika salah satunya $\emptyset$, irisannya adalah $\emptyset$. Jika tidak, setiap faktor memuat p , sehingga irisannya memuat p dan termasuk dalam τ_p . Irisan keluarga kosong adalah X , yang juga berada dalam τ_p . Dengan demikian semua aksioma topologi dipenuhi, jadi τ_p adalah topologi titik tertentu pada X .

Pemeriksaan L.60 Topologi titik yang dikecualikan. *Jangkar sumber:* latihan *ex_excluded_point_topology* pada baris sumber 407--419. Misalkan X tak kosong dan $p \in X$. Koleksi $\tau_{\bar{p}}$ terdiri atas $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan X yang tidak memuat p . Buktikan bahwa $\tau_{\bar{p}}$ merupakan topologi pada X . *Rubrik.* Untuk gabungan dan irisan, pisahkan secara eksplisit kasus yang melibatkan X ; jangan menyamakan argumen ini dengan argumen topologi titik tertentu. Panduan ini adalah karya pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bila sebuah keluarga anggota $\tau_{\bar{p}}$ memuat X , gabungannya langsung X . Bila tidak, tak satu pun anggotanya memuat p .

Tahap 2. Dalam irisan berhingga, faktor X dapat diabaikan. Jika tersisa faktor yang tidak memuat p , irisannya juga tidak memuat p .

Tahap 3. Periksa secara terpisah gabungan kosong dan irisan kosong.

Jawaban. Ya. Gabungan anggota koleksi itu adalah X bila salah satu anggotanya X ; jika tidak, gabungannya tetap tidak memuat p . Irisan berhingga semua faktor X adalah X ; bila ada faktor lain, irisannya tidak memuat p . Jadi semua operasi yang diwajibkan tetap menghasilkan anggota $\tau_{\bar{p}}$.

Solusi. Koleksi tersebut memuat $\emptyset$ dan X menurut definisi. Ambil keluarga sebarang $\mathcal{U} \subseteq \tau_{\bar{p}}$. Jika $X \in \mathcal{U}$, maka $\bigcup \mathcal{U} = X$. Jika $X \notin \mathcal{U}$, setiap anggota keluarga tidak memuat p , sehingga gabungannya juga tidak memuat p . Gabungan keluarga kosong adalah $\emptyset$. Dalam semua kasus, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_{\bar{p}}$.

Untuk irisan berhingga, jika semua faktor adalah X , hasilnya X . Jika ada faktor U yang bukan X , maka $p \notin U$; karena irisan seluruh faktor terkandung dalam U , irisan itu juga tidak memuat p . Kasus adanya faktor $\emptyset$ memberi hasil $\emptyset$, dan irisan keluarga kosong adalah X . Jadi koleksi tertutup terhadap irisan berhingga dan memenuhi semua aksioma topologi. Inilah topologi titik yang dikecualikan pada X .

Panduan latihan sumber, bagian kelima

Tujuh panduan berikut mendampingi latihan *ex_digital_line_topology* dalam *sec_top_space_exer.ptx*: pembuktian bahwa koleksi yang diberikan merupakan basis, lalu enam pemeriksaan keterbukaan. Tugas pada baris sumber 460 hanya mengelompokkan keenam pemeriksaan tersebut dan tidak dihitung sebagai soal tersendiri. Setiap panduan menyediakan petunjuk bertahap, jawaban singkat, solusi lengkap, dan rubrik pemeriksaan.

Seluruh bagian ini adalah komponen pendamping asli berbahasa Indonesia yang diterbitkan secara terpisah di bawah CC BY 4.0. Bagian ini bukan teks, terjemahan resmi, atau kumpulan solusi resmi GVSU.

Pemeriksaan L.61 Koleksi lingkungan dasar pada garis digital. *Jangkar sumber:* *ex_digital_line_topology*,

tugas pertama (baris sumber 442--458). Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, definisikan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } (n) \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } (n) \text{ genap.} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa $\mathcal{B} = \{B(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan basis untuk suatu topologi pada $\mathbb{Z}$. *Rubrik.* Buktikan baik syarat cakupan maupun syarat irisan basis. Dalam kasus irisan, pisahkan kemungkinan bahwa titik yang dipilih ganjil atau genap.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, perhatikan bahwa $x \in B(x)$ tanpa bergantung pada paritasnya.

Tahap 2. Jika x ganjil dan $x \in B(m) \cap B(n)$, gunakan $B(x) = \{x\}$ sebagai lingkungan dasar yang lebih kecil.

Tahap 3. Jika x genap, buktikan terlebih dahulu bahwa satu-satunya anggota $\mathcal{B}$ yang memuat x adalah $B(x)$ sendiri.

Jawaban. Ya. Koleksi $\mathcal{B}$ mencakup $\mathbb{Z}$. Untuk titik ganjil dalam irisan dua anggota basis, singletonnya memperhalus irisan; untuk titik genap, kedua anggota basis yang beririsan di titik itu harus sama-sama $B(x)$. Jadi kedua syarat basis terpenuhi.

Solusi. Ambil sembarang $x \in \mathbb{Z}$. Jika x ganjil, maka $B(x) = \{x\}$; jika x genap, maka $B(x) = \{x-1, x, x+1\}$. Dalam kedua kasus $x \in B(x)$. Karena itu gabungan seluruh anggota $\mathcal{B}$ adalah $\mathbb{Z}$.

Sekarang misalkan $x \in B(m) \cap B(n)$. Jika x ganjil, pilih $B(x) = \{x\}$. Jelas

$$x \in B(x) \subseteq B(m) \cap B(n).$$

Jika x genap, anggota basis yang memuat x tidak dapat berpusat di bilangan ganjil, sebab anggota seperti itu merupakan singleton ganjil. Bila pusatnya genap, dua titik selain pusat pada $B(m) = \{m-1, m, m+1\}$ adalah ganjil. Oleh karena x genap dan $x \in B(m)$, haruslah $x = m$. Dengan cara yang sama, $x = n$. Jadi $B(m) = B(x) = B(n)$, dan $B(x)$ terkandung dalam irisan. Syarat irisan basis pun terpenuhi. Maka $\mathcal{B}$ membangkitkan topologi garis digital τ_{dl} pada $\mathbb{Z}$.

Pemeriksaan L.62 Apakah singleton nol terbuka? *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan pertama (baris sumber 466--472). Tentukan apakah $\{0\}$ terbuka dalam topologi garis digital τ_{dl} . *Rubrik.* Periksa lingkungan dasar yang mungkin memuat titik genap 0; jangan menyimpulkan hanya dari fakta bahwa $\{0\}$ adalah singleton.

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena 0 genap, $B(0) = \{-1, 0, 1\}$.

Tahap 2. Gunakan pembuktian basis di atas untuk memastikan bahwa tidak ada anggota basis lain yang memuat 0.

Tahap 3. Terapkan kriteria: untuk setiap titik suatu himpunan terbuka harus ada anggota basis yang memuat titik itu dan terkandung dalam himpunan tersebut.

Jawaban. Tidak. Satu-satunya anggota basis yang memuat 0 adalah $B(0) = \{-1, 0, 1\}$, dan himpunan ini tidak terkandung dalam $\{0\}$.

Solusi. Andaikan $\{0\}$ terbuka. Karena $0 \in \{0\}$, kriteria basis mengharuskan suatu $B(n)$ dengan $0 \in B(n) \subseteq \{0\}$. Pusat n tidak mungkin ganjil, sebab dalam hal itu $B(n) = \{n\}$ dan persamaan $n = 0$ akan membuat n genap. Jika n genap, titik genap yang berada dalam $\{n-1, n, n+1\}$ hanyalah n , sehingga $n = 0$. Jadi satu-satunya kemungkinan adalah $B(0) = \{-1, 0, 1\}$. Karena $B(0) \not\subseteq \{0\}$, anggota basis yang diperlukan tidak ada. Maka $\{0\}$ tidak terbuka.

Pemeriksaan L.63 Apakah singleton satu terbuka? *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan kedua (baris sumber 473--479). Tentukan apakah $\{1\}$ terbuka dalam τ_{dl} . *Rubrik.* Nyatakan anggota basis yang tepat dan tampilkan himpunan sebagai gabungan anggota basis.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tentukan paritas 1.

Tahap 2. Substitusikan $n = 1$ ke dalam definisi $B(n)$.

Jawaban. Ya. Karena 1 ganjil, berlaku $\{1\} = B(1)$, sehingga $\{1\}$ merupakan anggota basis dan karenanya terbuka.

Solusi. Bilangan 1 ganjil, jadi definisi garis digital memberikan

$$B(1) = \{1\}.$$

Setiap anggota basis terbuka dalam topologi yang dibangkitkannya. Secara ekuivalen, $\{1\}$ adalah gabungan satu anggota basis, yaitu $\bigcup\{B(1)\}$. Dengan demikian $\{1\} \in \tau_{dl}$.

Pemeriksaan L.64 Apakah dua titik genap terbuka? *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan ketiga (baris sumber 480--486). Tentukan apakah $\{0, 2\}$ terbuka dalam τ_{dl} . *Rubrik.* Cukup temukan satu titik dalam himpunan yang tidak mempunyai lingkungan dasar yang terkandung di dalamnya, tetapi nyatakan lingkungan tersebut secara eksplisit.

Petunjuk. *Tahap 1.* Mulailah dari titik 0 yang berada dalam himpunan.

Tahap 2. Satu-satunya lingkungan dasar yang memuat 0 adalah $B(0) = \{-1, 0, 1\}$.

Jawaban. Tidak. Titik 0 berada dalam $\{0, 2\}$, tetapi $B(0) = \{-1, 0, 1\}$ tidak terkandung dalam $\{0, 2\}$.

Solusi. Himpunan $U = \{0, 2\}$ memuat titik genap 0. Seperti pada panduan sebelumnya, satu-satunya anggota basis yang memuat 0 adalah $B(0) = \{-1, 0, 1\}$. Akan tetapi -1 dan 1 tidak berada dalam U , sehingga $B(0) \not\subseteq U$. Jadi tidak ada anggota basis B dengan $0 \in B \subseteq U$. Kriteria keterbukaan gagal pada titik 0, sehingga $\{0, 2\}$ tidak terbuka. (Kegagalan serupa juga terjadi pada titik genap 2.)

Pemeriksaan L.65 Blok berhingga yang terbuka. *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan keempat (baris sumber 487--493). Tentukan apakah $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ terbuka dalam τ_{dl} . *Rubrik.* Nyatakan himpunan tersebut sebagai gabungan eksplisit anggota basis dan verifikasi kedua anggota basis yang digunakan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Titik genap dalam himpunan adalah 2 dan 4.

Tahap 2. Hitung $B(2)$ dan $B(4)$, lalu ambil gabungannya.

Jawaban. Ya, karena $\{1, 2, 3, 4, 5\} = B(2) \cup B(4)$.

Solusi. Karena 2 dan 4 genap, definisi basis memberi

$$B(2) = \{1, 2, 3\}, \quad B(4) = \{3, 4, 5\}.$$

Oleh karena itu

$$B(2) \cup B(4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ruas kanan adalah gabungan anggota basis, sehingga terbuka dalam topologi yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$. Dengan demikian $\{1, 2, 3, 4, 5\} \in \tau_{dl}$.

Pemeriksaan L.66 Bilangan bulat positif. *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan kelima (baris sumber 494--500). Dengan konvensi buku $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, tentukan apakah $\mathbb{Z}^+$ terbuka dalam τ_{dl} . *Rubrik.* Konvensi bahwa $0 \notin \mathbb{Z}^+$ harus dinyatakan; berikan representasi gabungan basis yang mencakup tepat semua bilangan bulat positif.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap $k \geq 1$, hitung $B(2k)$.

Tahap 2. Periksa bahwa gabungan semua $B(2k)$ untuk $k \geq 1$ tidak memuat 0 atau bilangan negatif.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa setiap bilangan positif, baik genap maupun ganjil, muncul dalam sedikitnya satu anggota gabungan tersebut.

Jawaban. Ya. Untuk konvensi $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, berlaku $\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{k \geq 1} B(2k)$, sehingga $\mathbb{Z}^+$ terbuka.

Solusi. Di sini $\mathbb{Z}^+$ berarti $\{1, 2, 3, \dots\}$, jadi tidak memuat 0. Untuk $k \geq 1$, bilangan $2k$ genap dan

$$B(2k) = \{2k-1, 2k, 2k+1\}.$$

Semua bilangan dalam himpunan ini positif. Sebaliknya, setiap bilangan positif genap berbentuk $2k$ dan

berada dalam $B(2k)$. Setiap bilangan positif ganjil berbentuk $2k - 1$ untuk suatu $k \geq 1$ dan juga berada dalam $B(2k)$. Maka

$$\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{k \geq 1} B(2k).$$

Karena gabungan sebarang anggota basis terbuka, $\mathbb{Z}^+$ terbuka dalam τ_{dl} .

Pemeriksaan L.67 Himpunan semua bilangan bulat ganjil. *Jangkar sumber: ex_digital_line_topology*, pemeriksaan keterbukaan keenam (baris sumber 501--507). Tentukan apakah himpunan semua bilangan bulat ganjil terbuka dalam τ_{dl} . *Rubrik.* Gunakan definisi $B(n)$ untuk pusat ganjil dan tuliskan kesetaraan gabungan basis.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bila n ganjil, maka $B(n) = \{n\}$.

Tahap 2. Ambil gabungan singleton tersebut atas semua bilangan bulat ganjil n .

Jawaban. Ya. Himpunan bilangan bulat ganjil adalah $\bigcup_{n \text{ ganjil}} B(n)$, yaitu gabungan anggota basis.

Solusi. Misalkan $G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ganjil}\}$. Untuk setiap $n \in G$, definisi basis memberikan $B(n) = \{n\}$. Karena itu

$$G = \bigcup_{n \in G} B(n).$$

Gabungan di ruas kanan hanya memuat titik ganjil karena setiap sukunya singleton ganjil, dan setiap titik ganjil muncul sebagai pusat salah satu suku. Jadi kesetaraan tersebut tepat. Karena G merupakan gabungan anggota basis, G terbuka dalam topologi garis digital.

Panduan latihan sumber, bagian keenam

Lima panduan berikut mengikuti latihan topologi Zariski *ex_TS_Zariski* dalam *sec_top_space_exer.ptx*, baris sumber 512--579. Setiap panduan adalah komponen pendamping asli berbahasa Indonesia yang diterbitkan di bawah CC BY 4.0. Panduan ini bukan teks, terjemahan resmi, atau jawaban resmi GVSU; pernyataan sumber diringkas hanya untuk memasang bantuan belajar dengan tugas yang tepat.

Pemeriksaan L.68 Himpunan nol berupa dua garis vertikal. *Jangkar sumber: ex_TS_Zariski*, tugas pertama (baris sumber 536--542). Deskripsikan $Z(f)$ dalam $\mathbb{R}^2$ untuk $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 1$. *Rubrik.* Selesaikan persamaan nol dan jelaskan peran kedua koordinat secara geometris. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Faktorkan $x_1^2 - 1$.

Tahap 2. Persamaan tersebut tidak membatasi x_2 .

Tahap 3. Gambarkan setiap nilai yang mungkin untuk x_1 dengan x_2 bebas.

Jawaban. Himpunan nolnya adalah

$$Z(f) = \{(-1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Jadi $Z(f)$ merupakan gabungan dua garis vertikal $x_1 = -1$ dan $x_1 = 1$.

Solusi. Sebuah titik $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ berada dalam $Z(f)$ tepat ketika

$$x_1^2 - 1 = (x_1 - 1)(x_1 + 1) = 0.$$

Karena $\mathbb{R}$ tidak mempunyai pembagi nol, kondisi ini ekuivalen dengan $x_1 = 1$ atau $x_1 = -1$. Variabel x_2 sama sekali tidak muncul dalam persamaan, sehingga nilainya boleh berupa sembarang $t \in \mathbb{R}$. Oleh sebab itu

$$Z(f) = \{(-1, t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

yaitu dua garis vertikal yang sejajar.

Pemeriksaan L.69 Garis nol bersama tiga polinom linear. Jangkar sumber: *ex_TS_Zariski*, tugas kedua (baris sumber 543--551). Dalam $\mathbb{R}^3$, deskripsikan $Z(E)$ untuk

$$E = \{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3\}.$$

Rubrik. Selesaikan ketiga persamaan secara bersamaan, parametrisasikan seluruh himpunan solusi, dan periksa kembali setiap persamaan. Ini adalah panduan pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jumlahkan persamaan pertama dan kedua untuk menentukan x_1 .

Tahap 2. Substitusikan nilai itu ke persamaan pertama untuk memperoleh hubungan antara x_2 dan x_3 .

Tahap 3. Gunakan satu parameter bebas dan pastikan persamaan ketiga tidak menambahkan syarat baru.

Jawaban. Himpunan nol bersama tersebut adalah garis

$$Z(E) = \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Solusi. Titik (x_1, x_2, x_3) berada dalam $Z(E)$ tepat ketika memenuhi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Menjumlahkan dua persamaan pertama menghasilkan $2x_1 = 0$, jadi $x_1 = 0$. Persamaan pertama lalu menjadi $x_2 + x_3 = 0$, atau $x_3 = -x_2$.

Tetapkan $t = x_2$. Semua calon solusi berbentuk $(0, t, -t)$. Substitusi ke persamaan ketiga memberi $3(0) + t - t = 0$, sehingga tidak ada syarat tambahan. Sebaliknya, setiap titik $(0, t, -t)$ membuat ketiga polinom bernilai nol. Dengan demikian, $Z(E) = \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Pemeriksaan L.70 Komplemen himpunan nol sebagai basis. Jangkar sumber: *ex_TS_Zariski*, tugas ketiga (baris sumber 552--563). Untuk $f \in \mathcal{P}_n$, tulis $D(f) = \mathbb{R}^n \setminus Z(f)$. Buktikan bahwa $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in \mathcal{P}_n\}$ merupakan basis bagi suatu topologi pada $\mathbb{R}^n$. *Rubrik.* Buktikan bahwa anggota basis mencakup seluruh ruang dan bahwa irisan dua anggota basis memenuhi syarat irisan basis. Panduan ini adalah karya pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung himpunan nol polinom konstan 1.

Tahap 2. Untuk dua polinom f, g , sebuah titik gagal berada dalam $Z(f)$ dan $Z(g)$ tepat ketika hasil kali $f(x)g(x)$ tidak nol.

Tahap 3. Simpulkan identitas $D(f) \cap D(g) = D(fg)$; identitas ini lebih kuat daripada syarat irisan yang diminta dalam definisi basis.

Jawaban. Karena $Z(1) = \emptyset$, berlaku $D(1) = \mathbb{R}^n$, sehingga anggota $\mathcal{B}$ mencakup seluruh ruang. Selain itu,

$$D(f) \cap D(g) = D(fg) \in \mathcal{B}.$$

Jadi $\mathcal{B}$ memenuhi kedua aksioma basis.

Solusi. Polinom konstan 1 tidak mempunyai titik nol. Karena itu $Z(1) = \emptyset$ dan $D(1) = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$. Khususnya, setiap titik $x \in \mathbb{R}^n$ berada dalam setidaknya satu anggota $\mathcal{B}$.

Ambil $D(f), D(g) \in \mathcal{B}$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x &\in D(f) \cap D(g) \\ \iff f(x) \neq 0 \text{ dan } g(x) \neq 0 \\ \iff f(x)g(x) \neq 0 \\ \iff x &\in D(fg). \end{aligned}$$

Ekuivalensi tengah menggunakan fakta bahwa $\mathbb{R}$ tidak mempunyai pembagi nol. Karena $fg \in \mathcal{P}_n$, himpunan $D(fg)$ adalah anggota $\mathcal{B}$. Jadi untuk setiap titik dalam irisan dua anggota basis terdapat anggota basis yang

memuat titik itu dan terkandung dalam irisan tersebut; bahkan anggota itu sama dengan seluruh irisan. Maka $\mathcal{B}$ merupakan basis bagi topologi Zariski pada $\mathbb{R}^n$.

Pemeriksaan L.71 Sumbu koordinat tidak terbuka secara Zariski. *Jangkar sumber: ex_TS_Zariski, tugas keempat (baris sumber 564--571).* Dalam $\mathbb{R}^2$ dengan topologi Zariski, tentukan apakah

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = 0\}$$

terbuka, dan buktikan jawaban Anda. *Rubrik.* Jangan menyimpulkan “tidak terbuka” hanya karena S tertutup. Gunakan anggota basis $D(f)$ di sekitar titik asal dan sifat polinom yang memiliki tak berhingga banyak akar. Panduan ini adalah materi pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan S terbuka. Karena $(0, 0) \in S$ dan himpunan $D(f)$ membentuk basis, akan ada f dengan $(0, 0) \in D(f) \subseteq S$.

Tahap 2. Inklusi tersebut memaksa $f(x, y) = 0$ untuk semua $x \neq 0$ dan $y \neq 0$, tetapi $f(0, 0) \neq 0$.

Tahap 3. Tetapkan dahulu $y \neq 0$ dan pandang $f(x, y)$ sebagai polinom satu variabel dalam x . Setelah itu tetapkan x dan gunakan argumen yang sama dalam variabel y .

Jawaban. Tidak. Jika S terbuka, suatu lingkungan basis $D(f)$ dari $(0, 0)$ harus terkandung dalam S . Hal ini memaksa f lenyap pada semua titik dengan kedua koordinat tidak nol, sehingga argumen akar polinom satu variabel memaksa f menjadi polinom nol. Itu bertentangan dengan $(0, 0) \in D(f)$, yang mensyaratkan $f(0, 0) \neq 0$.

Solusi. Andaikan, untuk memperoleh kontradiksi, bahwa S terbuka. Titik asal berada dalam S . Karena himpunan-himpunan $D(f)$ merupakan basis, terdapat $f \in \mathcal{P}_2$ dengan

$$(0, 0) \in D(f) \subseteq S.$$

Keanggotaan pertama berarti $f(0, 0) \neq 0$. Sementara itu, bila $x \neq 0$ dan $y \neq 0$, titik (x, y) tidak berada pada salah satu sumbu, sehingga $(x, y) \notin S$ dan karenanya $(x, y) \notin D(f)$. Jadi $f(x, y) = 0$ untuk semua $x \neq 0$ dan $y \neq 0$.

Tetapkan sembarang $y_0 \neq 0$. Polinom satu variabel $p_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ bernilai nol untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karena polinom satu variabel tak nol hanya mempunyai berhingga banyak akar, p_{y_0} harus merupakan polinom nol. Maka $f(x, y_0) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan setiap $y_0 \neq 0$.

Sekarang tetapkan sembarang $x_0 \in \mathbb{R}$. Polinom satu variabel $q_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ bernilai nol untuk semua $y \neq 0$, sehingga ia juga polinom nol. Khususnya $f(x_0, 0) = 0$. Karena x_0 sebarang, f bernilai nol di seluruh $\mathbb{R}^2$, termasuk $f(0, 0) = 0$. Ini bertentangan dengan $f(0, 0) \neq 0$. Jadi S tidak terbuka dalam topologi Zariski. Fakta tambahan bahwa $S = Z(x_1 x_2)$ memang menunjukkan bahwa S tertutup, tetapi fakta itu sendiri bukan alasan ketidakterbukaannya.

Pemeriksaan L.72 Topologi Zariski pada garis adalah topologi kofinit. *Jangkar sumber: ex_TS_Zariski, tugas kelima (baris sumber 572--579).* Buktikan bahwa topologi Zariski pada $\mathbb{R}$ sama dengan topologi kofinit: setiap himpunan terbuka Zariski harus terbuka kofinit dan sebaliknya. *Rubrik.* Tangani polinom nol, polinom tak nol, himpunan terbuka kosong, dan komplemen berhingga sebarang. Panduan ini adalah karya pendamping asli CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU.

Petunjuk. *Tahap 1.* Himpunan nol polinom satu variabel tak nol di $\mathbb{R}$ berhingga, sedangkan $D(0) = \emptyset$.

Tahap 2. Gabungan tak kosong dari himpunan-himpunan kofinit tetap kofinit karena komplemen gabungan terkandung dalam komplemen salah satu sukunya.

Tahap 3. Jika $F \subseteq \mathbb{R}$ berhingga, bangun polinom yang himpunan akarnya tepat F dengan mengalikan faktor $x - a$ untuk $a \in F$.

Jawaban. Setiap anggota basis Zariski $D(f)$ adalah kosong bila $f = 0$, atau mempunyai komplemen berhingga bila $f \neq 0$. Sebaliknya, untuk setiap himpunan berhingga $F \subseteq \mathbb{R}$, polinom $p_F(x) = \prod_{a \in F} (x - a)$ memenuhi $\mathbb{R} \setminus F = D(p_F)$. Karena itu kedua koleksi himpunan terbuka sama.

Solusi. Mula-mula ambil anggota basis Zariski $D(f)$. Jika f adalah polinom nol, maka $Z(f) = \mathbb{R}$ dan $D(f) = \emptyset$. Jika f tak nol, teorema akar polinom satu variabel menyatakan bahwa $Z(f)$ berhingga, sehingga $D(f) = \mathbb{R} \setminus Z(f)$ bersifat kofinit.

Himpunan terbuka Zariski adalah gabungan anggota-anggota basis itu. Gabungan kosong adalah $\emptyset$. Jika sebuah gabungan tidak kosong, pilih satu anggota basis tak kosong $D(f_0)$ di dalam gabungan tersebut. Komplemen seluruh gabungan terkandung dalam $\mathbb{R} \setminus D(f_0) = Z(f_0)$, yang berhingga. Jadi setiap himpunan terbuka Zariski adalah kosong atau kofinit, dan karenanya terbuka dalam topologi kofinit.

Sebaliknya, misalkan U terbuka kofinit. Kasus $U = \emptyset$ sudah diberikan oleh $D(0)$. Jika $U = \mathbb{R} \setminus F$ untuk suatu himpunan berhingga F , definisikan

$$p_F(x) = \prod_{a \in F} (x - a).$$

Bila $F = \emptyset$, hasil kali kosong adalah 1 dan $D(p_F) = \mathbb{R}$. Bila F tak kosong, tepat titik-titik $a \in F$ yang menjadi akar p_F , sehingga $Z(p_F) = F$ dan $D(p_F) = \mathbb{R} \setminus F = U$. Jadi setiap himpunan terbuka kofinit adalah terbuka Zariski. Kedua topologi tersebut sama.

Panduan latihan sumber, bagian ketujuh

Tujuh panduan berikut mendampingi latihan benar-salah pada *sec_top_space_exer.ptx*, baris sumber 581--651. Setiap jawaban benar disertai pembuktian, sedangkan setiap jawaban salah disertai contoh tandingan konkret. Panduan ini merupakan komponen asli CC BY 4.0 yang terpisah; panduan ini bukan materi, terjemahan resmi, atau solusi resmi Steven Schlicker maupun GVSU.

Pemeriksaan L.73 Koleksi lima himpunan. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 591--596. Tentukan benar atau salah: koleksi $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, d, f\}, \{d, f\}, X\}$ merupakan topologi pada $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. *Rubrik.* Periksa kedua himpunan wajib serta semua hasil gabungan dan irisan yang tidak langsung sepele.

Petunjuk. *Tahap 1.* Namai $A = \{a, b\}$ dan $B = \{d, f\}$.

Tahap 2. Amati bahwa $A \cap B = \emptyset$ dan $A \cup B = \{a, b, d, f\}$.

Tahap 3. Setiap anggota selain X adalah salah satu dari $\emptyset, A, B, A \cup B$.

Jawaban. Benar. Koleksi itu tertutup terhadap gabungan sebarang dan irisan berhingga.

Solusi. Koleksi memuat $\emptyset$ dan X . Dengan notasi pada petunjuk, empat anggota selain X membentuk topologi partisi pada $A \cup B$: gabungan yang mungkin adalah $\emptyset, A, B, A \cup B$, dan irisan yang mungkin juga salah satu dari keempat himpunan itu karena $A \cap B = \emptyset$. Menambahkan X tidak menimbulkan hasil baru: gabungan yang memuat X adalah X , sedangkan irisan dengan X tidak mengubah faktor lainnya. Jadi semua gabungan sebarang dan irisan berhingga tetap berada dalam koleksi. Pernyataan benar.

Pemeriksaan L.74 Bilangan bulat dalam topologi kofinit. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 598--603. Tentukan benar atau salah: $\mathbb{Z}$ terbuka dalam $\mathbb{R}$ yang diberi topologi komplemen berhingga. *Rubrik.* Gunakan definisi topologi kofinit dan tampilkan sifat komplemen yang menentukan jawaban.

Petunjuk. *Tahap 1.* Himpunan terbuka tak kosong dalam topologi ini harus mempunyai komplemen berhingga.

Tahap 2. Periksa kardinalitas $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Jawaban. Salah. Komplemen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tidak berhingga.

Solusi. Dalam topologi kofinit pada $\mathbb{R}$, sebuah himpunan terbuka tepat ketika himpunan itu kosong atau komplemennya berhingga. Himpunan $\mathbb{Z}$ tidak kosong, sedangkan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tidak berhingga; misalnya, semua bilangan $n + \frac{1}{2}$ untuk $n \in \mathbb{Z}$ termasuk di dalamnya. Jadi $\mathbb{Z}$ bukan himpunan terbuka dan pernyataan salah.

Pemeriksaan L.75 Menguji basis yang diberikan. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 605–613. Tentukan benar atau salah: pada $X = \{a, b, c, d\}$, koleksi $\mathcal{B} = \{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ merupakan basis untuk topologi $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$. *Rubrik.* Verifikasi bahwa gabungan anggota basis menghasilkan tepat semua anggota τ , atau gunakan syarat basis dan identifikasi topologi yang dibangkitkan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Keempat himpunan basis menutupi X .

Tahap 2. Irisan yang perlu diperhatikan adalah $\{a, b\} \cap \{b, c, d\} = \{b\}$ dan $\{c\} \cap \{b, c, d\} = \{c\}$.

Tahap 3. Daftarkan semua gabungan berbeda dari anggota $\mathcal{B}$.

Jawaban. Benar. Gabungan anggota $\mathcal{B}$ menghasilkan tepat delapan himpunan dalam daftar τ .

Solusi. Koleksi $\mathcal{B}$ menutupi X , sebab $\{a, b\} \cup \{b, c, d\} = X$. Untuk dua anggota basis yang beririsan dan titik pada irisannya, terdapat anggota basis yang memuat titik itu dan berada di dalam irisan: semua kasus inklusi langsung bersifat sepele, sedangkan irisan tak-sepele mengecil menjadi $\{b\}$ atau $\{c\}$, yang keduanya anggota basis. Jadi $\mathcal{B}$ memang basis suatu topologi.

Gabungan-gabungan berbeda yang dihasilkan adalah $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, dan X . Daftar ini tepat sama dengan τ . Maka pernyataan benar.

Pemeriksaan L.76 Ruang diskret selalu termetriskan. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 615–622. Tentukan benar atau salah: jika X tak kosong dan τ adalah topologi diskret, maka (X, τ) termetriskan. *Rubrik.* Berikan metrik eksplisit dan buktikan bahwa setiap subhimpunan terbuka dalam topologi metriknya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan metrik diskret: jarak nol untuk titik yang sama dan satu untuk titik yang berbeda.

Tahap 2. Bola berjari-jari $1/2$ di sekitar x adalah $\{x\}$.

Jawaban. Benar. Metrik diskret menghasilkan topologi diskret.

Solusi. Definisikan $d(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d(x, y) = 1$ jika $x \neq y$. Fungsi ini memenuhi aksioma metrik. Untuk pertidaksamaan segitiga, jika $x = z$ ruas kiri nol; jika $x \neq z$, paling sedikit satu dari $x \neq y$ atau $y \neq z$ berlaku, sehingga ruas kanan sekurang-kurangnya $1 = d(x, z)$. Untuk setiap $x \in X$, berlaku $B_d(x, 1/2) = \{x\}$. Jadi setiap singleton terbuka, dan setiap subhimpunan $A \subseteq X$ adalah gabungan singleton $\bigcup_{x \in A} \{x\}$, sehingga terbuka. Topologi metrik yang dihasilkan adalah topologi diskret τ . Pernyataan benar.

Pemeriksaan L.77 Titik interior dalam ruang berhingga. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 624–634. Tentukan benar atau salah: b adalah titik interior dari $A = \{a, b, d\}$ dalam (X, τ) , dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

Rubrik. Tunjukkan satu lingkungan terbuka dari b yang seluruhnya berada di dalam A , atau buktikan bahwa lingkungan semacam itu tidak ada.

Petunjuk. *Tahap 1.* Cari anggota daftar topologi yang memuat b .

Tahap 2. Bandingkan $\{a, b\}$ dengan A .

Jawaban. Benar, karena $b \in \{a, b\} \subseteq A$ dan $\{a, b\}$ terbuka.

Solusi. Menurut daftar τ pada soal, $U = \{a, b\}$ adalah himpunan terbuka. Himpunan ini memuat b dan memenuhi $U \subseteq \{a, b, d\} = A$. Jadi ada lingkungan terbuka dari b yang terkandung dalam A . Berdasarkan definisi titik interior, $b \in \text{Int}(A)$; pernyataan benar.

Pemeriksaan L.78 Gabungan dua topologi. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 636–642. Tentukan benar atau salah: jika τ_1 dan τ_2 topologi pada X , maka $\tau_1 \cup \tau_2$ selalu topologi pada X . *Rubrik.* Jika salah, berikan dua topologi eksplisit dan satu operasi topologi yang gagal pada gabungannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil $X = \{a, b, c\}$.

Tahap 2. Bandingkan $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ dan $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

Tahap 3. Uji gabungan himpunan terbuka $\{a\}$ dan $\{b\}$.

Jawaban. Salah. Dalam contoh pada petunjuk, $\{a\}$ dan $\{b\}$ berada dalam gabungan kedua topologi, tetapi $\{a, b\}$ tidak.

Solusi. Pada $X = \{a, b, c\}$, masing-masing koleksi $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ dan $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ adalah topologi: hanya ada satu himpunan terbuka tak-sepele di masing-masing koleksi, sehingga aksioma gabungan dan irisan langsung terpenuhi. Namun $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ memuat $\{a\}$ dan $\{b\}$ tetapi tidak memuat gabungannya $\{a, b\}$. Koleksi itu tidak tertutup terhadap gabungan dan bukan topologi. Jadi pernyataan salah.

Pemeriksaan L.79 Irisan dua topologi. *Jangkar sumber:* tugas pada baris sumber 644–650. Tentukan benar atau salah: jika τ_1 dan τ_2 topologi pada X , maka $\tau_1 \cap \tau_2$ selalu topologi pada X . *Rubrik.* Verifikasi ketiga aksioma untuk himpunan yang menjadi anggota kedua topologi sekaligus.

Petunjuk. *Tahap 1.* Kedua topologi memuat $\emptyset$ dan X .

Tahap 2. Jika setiap U_i berada dalam kedua topologi, maka gabungannya berada di mana?

Tahap 3. Terapkan argumen yang sama pada irisan berhingga.

Jawaban. Benar. Setiap aksioma topologi diwarisi oleh irisan koleksi kedua topologi.

Solusi. Karena $\emptyset, X \in \tau_1$ dan $\emptyset, X \in \tau_2$, kedua himpunan itu berada dalam $\tau_1 \cap \tau_2$. Ambil keluarga sebarang $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_1 \cap \tau_2$. Setiap U_i berada dalam τ_1 dan τ_2 ; karena keduanya topologi, $\bigcup_{i \in I} U_i$ berada dalam keduanya, jadi berada dalam irisannya. Demikian pula, irisan berhingga anggota $\tau_1 \cap \tau_2$ berada dalam masing-masing topologi dan karenanya dalam $\tau_1 \cap \tau_2$. Semua aksioma dipenuhi, jadi pernyataan benar.

Pemeriksaan penguasaan Bab 12

Delapan pemeriksaan berikut memadukan aksioma topologi, basis, lingkungan, interior, dan ketermetrikan dalam persoalan baru yang tidak mengulang tugas sumber. Materi ini ditulis secara mandiri dalam bahasa Indonesia untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0; materi ini bukan teks, terjemahan, atau solusi resmi GVSU. Cobalah setiap soal sebelum membuka petunjuk. Jawaban menyatakan hasil utama, sedangkan solusi memberikan penutupan matematis lengkap.

Pemeriksaan L.80 Mengapa irisan hanya berhingga. Jelaskan mengapa irisan setiap koleksi berhingga himpunan terbuka dalam ruang topologi tetap terbuka. Kemudian, dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi Euklides, tetapkan $U_n = (-1/n, 1/n)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Tentukan $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dan buktikan bahwa hasilnya tidak terbuka. Jelaskan peran contoh ini dalam aksioma topologi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan aksioma irisan berhingga secara langsung; bila aksioma dinyatakan hanya untuk dua himpunan, gunakan induksi.

Tahap 2. Titik 0 berada dalam semua U_n . Untuk $x \neq 0$, pilih n sehingga $1/n < |x|$.

Tahap 3. Uji apakah ada interval terbuka berpusat di 0 yang termuat dalam himpunan satu titik.

Jawaban. Irisan berhingga terbuka berdasarkan aksioma topologi, tetapi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\},$$

yang tidak terbuka dalam topologi Euklides. Jadi “berhingga” dalam aksioma irisan tidak dapat diganti dengan “sebarang”.

Solusi. Aksioma topologi menyatakan bahwa irisan berhingga anggota topologi kembali menjadi anggota topologi. Jika versi aksioma yang digunakan hanya menyebut dua himpunan, kasus k himpunan mengikuti dengan induksi: andaikan irisan k himpunan terbuka bersifat terbuka, lalu iriskan hasil itu dengan himpunan terbuka ke- $k+1$. Irisan keluarga kosong adalah seluruh ruang, yang juga terbuka.

Jelas $0 \in U_n$ untuk setiap n . Sebaliknya, ambil $x \neq 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $n > 1/|x|$, sehingga $1/n < |x|$. Maka $x \notin (-1/n, 1/n)$. Jadi satu-satunya titik yang berada dalam semua U_n adalah 0.

Himpunan $\{0\}$ tidak terbuka dalam topologi Euklides. Untuk setiap $r > 0$, interval $(-r, r)$ memuat, misalnya, $r/2 \neq 0$, sehingga tidak terkandung dalam $\{0\}$. Dengan demikian irisan terhingga himpunan terbuka dapat gagal terbuka. Contoh ini menunjukkan bahwa pembatasan pada irisan berhingga merupakan bagian esensial dari definisi topologi.

Pemeriksaan L.81 Geometri global topologi kofinit. Misalkan X himpunan tak berhingga dan τ_{FC} topologi kofinit pada X . Buktikan bahwa setiap dua himpunan terbuka tak kosong beririsan. Untuk setiap $A \subseteq X$, tentukan $\text{Int}(A)$. Akhirnya, buktikan bahwa τ_{FC} bukan topologi diskret dan bukan topologi indiskret.

Petunjuk. *Tahap 1.* Komplemen irisan dua himpunan adalah gabungan kedua komplemennya. Gabungan dua himpunan berhingga tetap berhingga.

Tahap 2. Jika A memuat himpunan terbuka tak kosong O , bandingkan $X \setminus A$ dengan $X \setminus O$.

Tahap 3. Bandingkan keterbukaan $\{x\}$ dan $X \setminus \{x\}$ untuk sembarang $x \in X$.

Jawaban. Dua himpunan terbuka kofinit tak kosong selalu beririsan. Selain itu,

$$\text{Int}(A) = \begin{cases} A & \text{jika } A = \emptyset \text{ atau } X \setminus A \text{ berhingga,} \\ \emptyset & \text{selain itu.} \end{cases}$$

Topologi ini bukan diskret karena himpunan satu titik tidak terbuka, dan bukan indiskret karena $X \setminus \{x\}$ merupakan himpunan terbuka sejati.

Solusi. Ambil dua himpunan terbuka tak kosong U, V . Komplemen $X \setminus U$ dan $X \setminus V$ berhingga. Hukum De Morgan memberi

$$X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V),$$

sehingga komplemen $U \cap V$ berhingga. Jika $U \cap V = \emptyset$, komplemennya adalah seluruh X , yang akan berhingga; ini bertentangan dengan hipotesis. Jadi $U \cap V \neq \emptyset$.

Jika $A = \emptyset$ atau $X \setminus A$ berhingga, maka A sendiri terbuka dan karenanya $\text{Int}(A) = A$. Sekarang andaikan A tidak terbuka. Bila terdapat himpunan terbuka tak kosong $O \subseteq A$, maka $X \setminus A \subseteq X \setminus O$. Ruas kanan berhingga, sehingga $X \setminus A$ juga berhingga dan A terbuka, sebuah kontradiksi. Jadi tidak ada himpunan terbuka tak kosong di dalam A , dan $\text{Int}(A) = \emptyset$.

Untuk $x \in X$, komplemen $\{x\}$ tak berhingga, sehingga $\{x\}$ tidak terbuka; maka topologi tidak diskret. Sebaliknya, $X \setminus \{x\}$ mempunyai komplemen berhingga dan merupakan himpunan terbuka yang bukan $\emptyset$ maupun X . Jadi topologi juga tidak indiskret.

Pemeriksaan L.82 Kehalusan mengubah data lokal. Misalkan τ_1 dan τ_2 topologi pada X dengan $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Untuk setiap $A \subseteq X$, buktikan $\text{Int}_{\tau_1}(A) \subseteq \text{Int}_{\tau_2}(A)$. Untuk setiap $x \in X$, buktikan pula bahwa setiap lingkungan τ_1 dari x adalah lingkungan τ_2 dari x . Berikan satu contoh yang membuat kedua inklusi tersebut ketat.

Petunjuk. *Tahap 1.* Interior τ_1 dari A adalah himpunan τ_1 -terbuka yang terkandung dalam A .

Tahap 2. Sebuah lingkungan memuat suatu himpunan terbuka yang memuat titik pusatnya. Gunakan inklusi topologi pada himpunan terbuka saksi tersebut.

Tahap 3. Pada himpunan dengan sedikitnya dua titik, bandingkan topologi indiskret dan diskret untuk himpunan satu titik.

Jawaban. Topologi yang lebih halus mempunyai interior yang lebih besar dan lebih banyak lingkungan: $\text{Int}_{\tau_1}(A) \subseteq \text{Int}_{\tau_2}(A)$ dan $\mathcal{N}_{\tau_1}(x) \subseteq \mathcal{N}_{\tau_2}(x)$. Kedua inklusi ketat untuk topologi indiskret dan diskret dengan $A = \{x\}$ pada ruang yang memiliki sedikitnya dua titik.

Solusi. Himpunan $\text{Int}_{\tau_1}(A)$ bersifat τ_1 -terbuka dan terkandung dalam A . Karena $\tau_1 \subseteq \tau_2$, himpunan itu juga τ_2 -terbuka. Interior τ_2 adalah himpunan τ_2 -terbuka terbesar di dalam A , sehingga $\text{Int}_{\tau_1}(A) \subseteq \text{Int}_{\tau_2}(A)$.

Jika N merupakan lingkungan τ_1 dari x , ada $O \in \tau_1$ dengan $x \in O \subseteq N$. Inklusi topologi memberi $O \in \tau_2$, sehingga himpunan terbuka yang sama membuktikan bahwa N adalah lingkungan τ_2 dari x .

Ambil X dengan sedikitnya dua titik, pilih $x \in X$, dan tetapkan $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ serta $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$. Untuk $A = \{x\}$, berlaku $\text{Int}_{\tau_1}(A) = \emptyset$ tetapi $\text{Int}_{\tau_2}(A) = \{x\}$. Himpunan $\{x\}$ sendiri adalah lingkungan τ_2 dari x , tetapi bukan lingkungan τ_1 , sebab satu-satunya himpunan τ_1 -terbuka yang memuat x adalah X , yang tidak terkandung dalam $\{x\}$. Jadi kedua inklusi dapat ketat.

Pemeriksaan L.83 Dua basis, satu topologi. Misalkan $\mathcal{B}$ dan $\mathcal{C}$ basis pada himpunan X . Buktikan bahwa keduanya membangkitkan topologi yang sama jika dan hanya jika berlaku dua syarat pemurnian lokal berikut:

1. untuk setiap $x \in B \in \mathcal{B}$, terdapat $C \in \mathcal{C}$ dengan $x \in C \subseteq B$;
2. untuk setiap $x \in C \in \mathcal{C}$, terdapat $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B \subseteq C$.

Kemudian gunakan kriteria ini untuk membuktikan bahwa semua interval terbuka (a, b) dan semua interval terbuka (p, q) dengan $p, q \in \mathbb{Q}$ membangkitkan topologi Euklides yang sama pada $\mathbb{R}$. Verifikasi bahwa koleksi kedua memang basis.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika syarat pemurnian dari $\mathcal{B}$ ke $\mathcal{C}$ berlaku, tulis setiap $B \in \mathcal{B}$ sebagai gabungan unsur-unsur $\mathcal{C}$.

Tahap 2. Untuk arah perlu, ingat bahwa anggota basis terbuka dalam topologi yang dibangkitkannya dan gunakan pencirian terbuka dengan unsur basis di sekitar setiap titik.

Tahap 3. Gunakan kerapatan $\mathbb{Q}$ untuk memilih $a < p < x < q < b$ ketika $x \in (a, b)$.

Jawaban. Pemurnian lokal dua arah ekuivalen dengan kesamaan topologi yang dibangkitkan. Interval berujung rasional membentuk basis, dan setiap interval real dapat dimurnikan di setiap titik oleh interval berujung rasional. Arah sebaliknya langsung karena setiap interval berujung rasional juga interval terbuka real. Jadi kedua basis menghasilkan topologi Euklides.

Solusi. Andaikan syarat pertama berlaku. Untuk setiap $B \in \mathcal{B}$ dan setiap $x \in B$, pilih $C_x \in \mathcal{C}$ dengan $x \in C_x \subseteq B$. Maka $B = \bigcup_{x \in B} C_x$, sehingga setiap anggota $\mathcal{B}$ terbuka dalam topologi yang dibangkitkan $\mathcal{C}$. Setiap himpunan terbuka yang dibangkitkan $\mathcal{B}$ adalah gabungan anggota $\mathcal{B}$, jadi juga terbuka dalam topologi $\mathcal{C}$. Dengan demikian $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau_{\mathcal{C}}$. Syarat kedua memberi inklusi balik dengan argumen yang sama.

Sebaliknya, andaikan $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{C}}$. Jika $x \in B \in \mathcal{B}$, himpunan B terbuka dalam topologi $\mathcal{C}$. Karena $\mathcal{C}$ basis, ada $C \in \mathcal{C}$ dengan $x \in C \subseteq B$. Ini memberi syarat pertama; menukar peran kedua basis memberi syarat kedua.

Sekarang tetapkan $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ dan $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$. Setiap $x \in \mathbb{R}$ berada dalam interval berujung rasional karena terdapat $p, q \in \mathbb{Q}$ dengan $p < x < q$. Jika x berada dalam irisan dua interval berujung rasional, kerapatan bilangan rasional menyediakan $r, s \in \mathbb{Q}$ sehingga $\max(p_1, p_2) < r < x < s < \min(q_1, q_2)$. Maka $x \in (r, s)$ dan interval ini terkandung dalam irisan. Jadi $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ adalah basis.

Karena $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, setiap anggota basis rasional sudah merupakan anggota basis Euklides. Sebaliknya, jika $x \in (a, b)$, pilih bilangan rasional p, q dengan $a < p < x < q < b$. Maka $x \in (p, q) \subseteq (a, b)$. Kriteria pemurnian lokal dua arah membuktikan bahwa kedua basis membangkitkan topologi yang sama.

Pemeriksaan L.84 Interior dibaca langsung dari basis. Misalkan $\mathcal{B}$ basis untuk topologi pada X dan $A \subseteq X$. Buktikan rumus

$$\text{Int}(A) = \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\}.$$

Kemudian gunakan basis interval berujung rasional pada $\mathbb{R}$ untuk menghitung interior $A = [0, 1] \cup \{2\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gabungan semua unsur basis yang termuat dalam A adalah himpunan terbuka yang termuat dalam A .

Tahap 2. Jika $x \in \text{Int}(A)$, gunakan sifat basis pada himpunan terbuka $\text{Int}(A)$ untuk menemukan unsur basis yang memuat x dan termuat dalam A .

Tahap 3. Titik-titik $(0, 1)$ mempunyai interval kecil berujung rasional di dalam A ; uji secara terpisah titik $0, 1, 2$.

Jawaban. Interior adalah tepat gabungan semua unsur basis yang terkandung dalam himpunan tersebut. Untuk $A = [0, 1] \cup \{2\}$ dalam topologi Euklides,

$$\text{Int}(A) = (0, 1).$$

Solusi. Tetapkan $U = \bigcup\{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\}$. Himpunan U terbuka sebagai gabungan unsur basis dan memenuhi $U \subseteq A$. Karena $\text{Int}(A)$ adalah himpunan terbuka terbesar yang terkandung dalam A , diperoleh $U \subseteq \text{Int}(A)$.

Sebaliknya, ambil $x \in \text{Int}(A)$. Interior itu terbuka, dan $\mathcal{B}$ adalah basis, sehingga terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq \text{Int}(A) \subseteq A$. Maka B_x muncul dalam gabungan yang mendefinisikan U , sehingga $x \in U$. Jadi $\text{Int}(A) \subseteq U$, dan kedua inklusi membuktikan rumus tersebut.

Untuk setiap $x \in (0, 1)$, kerapatan $\mathbb{Q}$ memberi $p, q \in \mathbb{Q}$ dengan $0 < p < x < q < 1$. Maka interval basis (p, q) memuat x dan termuat dalam A . Jadi $(0, 1) \subseteq \text{Int}(A)$. Tidak ada interval terbuka yang memuat 0 atau 1 dan tetap termuat dalam $[0, 1]$, sedangkan setiap interval terbuka yang memuat 2 juga memuat titik selain 2 di luar A . Titik di luar A tentu bukan titik interior. Karena itu $\text{Int}(A) = (0, 1)$.

Pemeriksaan L.85 Metrik terpotong, topologi tetap. Misalkan (X, d) ruang metrik dan definisikan $\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Buktikan bahwa ρ merupakan metrik pada X dan bahwa d serta ρ membangkitkan topologi yang sama. Jelaskan informasi jarak apa yang hilang ketika d diganti oleh ρ .

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk pertidaksamaan segitiga, gunakan $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dan buktikan $\min\{1, a + b\} \leq \min\{1, a\} + \min\{1, b\}$ bagi $a, b \geq 0$.

Tahap 2. Jika $0 < r \leq 1$, bandingkan langsung $B_d(x, r)$ dan $B_\rho(x, r)$.

Tahap 3. Dalam pembuktian keterbukaan, selalu perkecil radius menjadi paling besar $1/2$ sebelum membandingkan bola.

Jawaban. Fungsi ρ memenuhi semua aksioma metrik. Untuk $0 < r \leq 1$, berlaku $B_\rho(x, r) = B_d(x, r)$; karena bola beradius kecil membentuk basis lokal, kedua metrik menghasilkan topologi yang sama. Pemotongan menghapus perbedaan semua jarak yang semula lebih besar daripada atau sama dengan 1 , tetapi tidak mengubah struktur terbuka lokal.

Solusi. Jelas $\rho(x, y) \geq 0$, simetris, dan $\rho(x, y) = 0$ tepat ketika $d(x, y) = 0$, yakni ketika $x = y$. Untuk pertidaksamaan segitiga, tulis $a = d(x, y)$ dan $b = d(y, z)$. Dari pertidaksamaan segitiga bagi d ,

$$\rho(x, z) \leq \min\{1, a + b\} \leq \min\{1, a\} + \min\{1, b\}.$$

Untuk membuktikan pertidaksamaan kedua, jika $a \geq 1$ atau $b \geq 1$, ruas kanan sedikitnya 1 , sedangkan ruas kiri paling besar 1 . Jika $a, b < 1$, ruas kanan adalah $a + b$ dan ruas kiri paling besar $a + b$. Jadi $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, dan ρ merupakan metrik.

Untuk $0 < r \leq 1$, kondisi $\rho(x, y) < r$ ekuivalen dengan $d(x, y) < r$. Memang, bila minimum $\min\{1, d(x, y)\}$ lebih kecil daripada $r \leq 1$, nilai minimum itu tidak mungkin berasal dari 1 ; arah sebaliknya langsung. Jadi $B_\rho(x, r) = B_d(x, r)$ untuk semua radius tersebut.

Jika U terbuka terhadap d dan $x \in U$, pilih $\epsilon > 0$ dengan $B_d(x, \epsilon) \subseteq U$, lalu tetapkan $r = \min\{\epsilon, 1/2\}$. Bola $B_\rho(x, r) = B_d(x, r)$ termuat dalam U , sehingga U terbuka terhadap ρ . Argumen yang sama dengan peran metrik ditukar memberi arah balik. Maka topologinya sama. Namun setiap jarak $d(x, y) \geq 1$ menjadi tepat 1 di bawah ρ ; data jarak skala besar itu hilang meskipun data keterbukaan lokal tetap.

Pemeriksaan L.86 Ruang hingga termetriskan harus diskret. Buktikan bahwa topologi yang diinduksi oleh metrik apa pun pada himpunan hingga X adalah topologi diskret. Kemudian konstruksikan metrik yang menginduksi topologi diskret dan simpulkan bahwa suatu topologi pada himpunan hingga termetriskan jika dan hanya jika topologi itu diskret.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $x \in X$ dengan $X \setminus \{x\} \neq \emptyset$, ambil minimum jarak positif dari x ke semua titik lain.

Tahap 2. Bola dengan radius setengah minimum tersebut hanya memuat x . Gunakan gabungan himpunan satu titik untuk menangani subhimpunan sebarang.

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, gunakan metrik yang bernilai 0 pada pasangan titik yang sama dan 1 pada pasangan titik yang berbeda.

Jawaban. Pada himpunan hingga, setiap titik mempunyai jarak positif minimum ke titik-titik lain, sehingga setiap himpunan satu titik terbuka dan topologinya diskret. Sebaliknya, metrik diskret menginduksi topologi diskret. Jadi topologi hingga termetriskan tepat ketika diskret.

Solusi. Misalkan d metrik pada himpunan hingga X . Jika $X = \emptyset$ atau $X = \{x\}$, topologinya langsung diskret. Jika X mempunyai lebih dari satu titik, untuk setiap $x \in X$ himpunan berhingga $\{d(x, y) \mid y \in X, y \neq x\}$ terdiri atas bilangan positif dan karena itu mempunyai minimum positif δ_x . Bola $B_d(x, \delta_x/2)$ tidak dapat memuat titik $y \neq x$, jadi bola itu sama dengan $\{x\}$.

Dengan demikian setiap himpunan satu titik terbuka. Setiap $A \subseteq X$ adalah gabungan $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, sehingga setiap subhimpunan terbuka. Topologi metrik tersebut adalah topologi diskret. Akibatnya, topologi nondiskret pada himpunan hingga tidak mungkin diinduksi oleh metrik.

Untuk arah sebaliknya, definisikan

$$d_{\text{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y, \\ 1 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

Ini merupakan metrik, dan $B_{d_{\text{disc}}}(x, 1/2) = \{x\}$. Maka semua himpunan satu titik, dan selanjutnya semua subhimpunan, terbuka. Jadi topologi diskret memang termetriskan, yang melengkapi ekuivalensi.

Pemeriksaan L.87 Lingkungan menentukan topologi. Misalkan τ dan σ dua topologi pada himpunan X . Untuk setiap $x \in X$, andaikan sebuah subhimpunan $N \subseteq X$ merupakan lingkungan τ dari x jika dan hanya jika ia merupakan lingkungan σ dari x . Buktikan bahwa $\tau = \sigma$. Dengan kata lain, seluruh data lingkungan menentukan topologi secara tunggal.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil $U \in \tau$. Untuk setiap $x \in U$, himpunan U sendiri merupakan lingkungan τ dari x .

Tahap 2. Gunakan hipotesis untuk memilih himpunan σ -terbuka V_x dengan $x \in V_x \subseteq U$.

Tahap 3. Tulis U sebagai gabungan semua V_x , lalu ulangi argumen dengan peran kedua topologi ditukar.

Jawaban. Setiap $U \in \tau$ merupakan lingkungan σ dari setiap titiknya, sehingga U adalah gabungan himpunan-himpunan σ -terbuka dan karenanya $U \in \sigma$. Ini memberi $\tau \subseteq \sigma$; simetri memberi inklusi balik.

Solusi. Ambil sembarang $U \in \tau$. Untuk setiap $x \in U$, himpunan U adalah himpunan τ -terbuka yang memuat x , sehingga U merupakan lingkungan τ dari x . Berdasarkan hipotesis, U juga merupakan lingkungan σ dari x . Oleh definisi lingkungan, terdapat $V_x \in \sigma$ dengan $x \in V_x \subseteq U$.

Setiap V_x termuat dalam U , sedangkan setiap titik $x \in U$ berada dalam V_x . Karena itu

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x.$$

Gabungan sebarang himpunan σ -terbuka bersifat σ -terbuka, sehingga $U \in \sigma$. Maka $\tau \subseteq \sigma$.

Hipotesis kesamaan lingkungan bersifat simetris. Mengulangi argumen dengan τ dan σ ditukar menghasilkan $\sigma \subseteq \tau$. Oleh sebab itu $\tau = \sigma$, jadi data semua lingkungan memang menentukan topologi secara unik.

Lampiran M

Panduan Belajar Mandiri Bab 13: Himpunan Tertutup dalam Ruang Topologi

Komponen ini mendampingi Bab 13, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Panduan disusun dalam urutan sumber untuk seluruh 76 unit belajar mandiri. Tujuh tugas induk yang hanya mengelompokkan subpertanyaan dipertahankan sebagai konteks dan tidak dihitung sebagai pertanyaan tersendiri. Delapan pemeriksaan penguasaan orisinal memadukan gagasan bab tanpa menggandakan tugas sumber.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0; teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0.

Panduan Belajar Mandiri: Mengenali Himpunan Tertutup

Panduan ini mendampingi pertanyaan nonlatihan pada bagian pendahuluan himpunan tertutup. Gunakan fakta bahwa suatu subhimpunan bersifat tertutup tepat ketika komplementnya terbuka.

Pemeriksaan M.1 Himpunan Tertutup pada Ruang Berhingga Pertama. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Daftarkan semua himpunan tertutup dalam (X, τ) .

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil setiap himpunan terbuka $O \in \tau$.

Tahap 2. Hitung komplementnya $X \setminus O$.

Tahap 3. Hilangkan pengulangan dan periksa bahwa daftar memuat $\emptyset$ serta X .

Jawaban. Himpunan tertutupnya ialah $\emptyset$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, dan X .

Solusi. Komplemen dari $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X$ berturut-turut adalah $X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \emptyset$. Karena himpunan tertutup adalah komplemen himpunan terbuka, kelima himpunan tersebut merupakan seluruh daftar himpunan tertutup.

Pemeriksaan M.2 Himpunan Tertutup pada Ruang Berhingga Kedua. Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$. Daftarkan semua himpunan tertutup dalam (X, τ) .

Petunjuk. *Tahap 1.* Pasangkan setiap anggota τ dengan komplementnya dalam X .

Tahap 2. Perhatikan secara khusus komplemen $\{c, d\}$ dan $\{a, c, d\}$.

Tahap 3. Pastikan tidak menukar peran himpunan terbuka dengan himpunan tertutup.

Jawaban. Himpunan tertutupnya ialah $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b, e, f\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{b, c, d, e, f\}$, dan X .

Solusi. Komplemen keenam himpunan terbuka, dalam urutan yang diberikan, adalah X , $\{b, c, d, e, f\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{b, e, f\}$, $\{a\}$, dan $\emptyset$. Inilah seluruh himpunan tertutup karena setiap himpunan tertutup harus muncul sebagai komplemen salah satu anggota τ .

Pemeriksaan M.3 Himpunan Tertutup pada Topologi Tiga Anggota. Pada $X = \mathbb{R}$, diberikan $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}\}$. Daftarkan semua himpunan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ada tepat tiga himpunan terbuka yang perlu diperiksa.

Tahap 2. Komplemen $\{0\}$ dalam $\mathbb{R}$ adalah $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tahap 3. Sertakan komplemen $\emptyset$ dan komplemen $\mathbb{R}$.

Jawaban. Himpunan tertutupnya tepat $\emptyset$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan $\mathbb{R}$.

Solusi. Komplemen $\emptyset$ adalah $\mathbb{R}$, komplemen $\{0\}$ adalah $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan komplemen $\mathbb{R}$ adalah $\emptyset$. Tidak ada himpunan tertutup lain karena tidak ada himpunan terbuka lain dalam τ .

Pemeriksaan M.4 Semua Subhimpunan pada Topologi Diskret. Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Daftarkan semua himpunan tertutup dan tentukan nama topologi ini.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bandingkan daftar τ dengan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$.

Tahap 2. Komplemen setiap subhimpunan dari X juga merupakan subhimpunan dari X .

Tahap 3. Ingat nama topologi yang menjadikan setiap subhimpunan terbuka.

Jawaban. Semua delapan subhimpunan dari X tertutup. Topologi tersebut adalah topologi diskret.

Solusi. Daftar yang diberikan sama dengan $\mathcal{P}(X)$, sehingga setiap subhimpunan terbuka. Komplemen setiap subhimpunan juga berada dalam $\mathcal{P}(X) = \tau$; akibatnya setiap subhimpunan juga tertutup. Sifat bahwa semua subhimpunan terbuka mencirikan topologi diskret.

Pemeriksaan M.5 Himpunan Tertutup pada Topologi Indiskret. Misalkan $X = \mathbb{Z}^+$ dan $\tau = \{\emptyset, X\}$, yaitu topologi indiskret atau trivial. Daftarkan semua himpunan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hanya ada dua himpunan terbuka.

Tahap 2. Kedua himpunan itu saling berkomplemen.

Tahap 3. Tidak ada komplemen lain yang dapat menghasilkan himpunan tertutup tambahan.

Jawaban. Himpunan tertutupnya hanya $\emptyset$ dan $X = \mathbb{Z}^+$.

Solusi. Komplemen $\emptyset$ adalah X , sedangkan komplemen X adalah $\emptyset$. Karena keduanya merupakan satu-satunya himpunan terbuka, keduanya pula merupakan satu-satunya himpunan tertutup.

Pemeriksaan M.6 Menemukan Himpunan Buka-Tutup Tak Trivial. Dengan menggunakan lima ruang topologi sebelumnya, temukan jika mungkin suatu himpunan yang sekaligus terbuka dan tertutup, tetapi bukan $\emptyset$ ataupun seluruh ruang.

Petunjuk. *Tahap 1.* Sebuah himpunan terbuka juga tertutup tepat ketika komplemennya terbuka.

Tahap 2. Periksa ruang kedua, yang memiliki $\{a\}$ dan komplemennya sebagai anggota topologi.

Tahap 3. Satu contoh sah sudah cukup; ruang diskret juga menyediakan banyak contoh.

Jawaban. Dalam ruang kedua, $\{a\}$ merupakan contoh karena $\{a\} \in \tau$ dan $X \setminus \{a\} = \{b, c, d, e, f\} \in \tau$.

Solusi. Keanggotaan $\{a\} \in \tau$ menunjukkan bahwa $\{a\}$ terbuka. Karena komplemennya, $\{b, c, d, e, f\}$, juga terbuka, $\{a\}$ tertutup. Himpunan ini tidak kosong dan tidak sama dengan X , sehingga memenuhi semua syarat. Jawaban lain dinilai benar apabila keterbukaan himpunan dan keterbukaan komplemennya diperiksa dalam ruang yang sama.

Pemeriksaan M.7 Menemukan Himpunan Tertutup yang Tidak Terbuka. Dengan menggunakan lima ruang topologi sebelumnya, temukan jika mungkin suatu himpunan yang tertutup tetapi tidak terbuka.

Petunjuk. *Tahap 1.* Cari himpunan yang tidak tercantum dalam topologi.

Tahap 2. Periksa apakah komplementnya justru tercantum dalam topologi.

Tahap 3. Pada ruang pertama, perhatikan komplemen $\{a, b\}$.

Jawaban. Dalam ruang pertama, $\{c, d\}$ tertutup tetapi tidak terbuka.

Solusi. Himpunan $\{c, d\}$ tidak termasuk dalam $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, jadi tidak terbuka. Namun, komplementnya adalah $\{a, b\} \in \tau$, sehingga $\{c, d\}$ tertutup. Contoh lain dapat diterima jika kedua pemeriksaan ini diberikan.

Pemeriksaan M.8 Menemukan Himpunan Terbuka yang Tidak Tertutup. Dengan menggunakan lima ruang topologi sebelumnya, temukan jika mungkin suatu himpunan yang terbuka tetapi tidak tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih anggota topologi yang bukan $\emptyset$ ataupun X .

Tahap 2. Hitung komplementnya.

Tahap 3. Jika komplemen itu tidak terbuka, himpunan semula tidak tertutup.

Jawaban. Dalam ruang pertama, $\{a\}$ terbuka tetapi tidak tertutup.

Solusi. Himpunan $\{a\}$ tercantum dalam τ , jadi terbuka. Komplementnya adalah $\{b, c, d\}$, yang tidak tercantum dalam τ . Karena komplementnya tidak terbuka, $\{a\}$ tidak tertutup.

Pemeriksaan M.9 Menemukan Himpunan yang Tidak Terbuka dan Tidak Tertutup. Dengan menggunakan lima ruang topologi sebelumnya, temukan jika mungkin suatu himpunan yang tidak terbuka dan juga tidak tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Agar tidak terbuka, himpunan tidak boleh berada dalam τ .

Tahap 2. Agar tidak tertutup, komplementnya juga tidak boleh berada dalam τ .

Tahap 3. Uji $\{a, c\}$ pada ruang pertama.

Jawaban. Dalam ruang pertama, $\{a, c\}$ tidak terbuka dan tidak tertutup.

Solusi. Himpunan $\{a, c\}$ tidak berada dalam topologi ruang pertama, sehingga tidak terbuka. Komplementnya adalah $\{b, d\}$, yang juga tidak berada dalam topologi. Jadi $\{a, c\}$ tidak tertutup. Argumen yang lengkap untuk contoh lain harus memeriksa kedua ketidakanggotaan tersebut.

Pemeriksaan M.10 Apakah Setiap Himpunan Beranggota Tunggal Tertutup? Dalam ruang Euklides, setiap himpunan beranggota tunggal tertutup. Tentukan apakah hal itu tetap berlaku untuk $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, dan jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Uji masing-masing dari $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ melalui komplementnya.

Tahap 2. Komplemen $\{a\}$ adalah $\{b, c\}$.

Tahap 3. Bandingkan $\{b, c\}$ dengan daftar anggota τ .

Jawaban. Tidak. Himpunan $\{a\}$ tidak tertutup, sedangkan $\{b\}$ dan $\{c\}$ tertutup.

Solusi. Komplemen $\{a\}$ adalah $\{b, c\}$, yang tidak terbuka; maka $\{a\}$ tidak tertutup. Sebaliknya, $X \setminus \{b\} = \{a, c\}$ dan $X \setminus \{c\} = \{a, b\}$ keduanya berada dalam τ . Jadi dua himpunan beranggota tunggal terakhir tertutup. Satu contoh kegagalan, yaitu $\{a\}$, cukup untuk menyangkal pernyataan umum.

Panduan Belajar Mandiri: Gabungan Himpunan Tertutup

Panduan ini menggunakan topologi komplemen berhingga τ_{FC} pada $\mathbb{Z}$: suatu himpunan tak kosong terbuka tepat ketika komplementnya berhingga.

Pemeriksaan M.11 Kardinalitas Himpunan Tertutup. Dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$, tentukan apa yang harus berlaku bagi kardinalitas setiap himpunan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Misalkan C tertutup; maka $\mathbb{Z} \setminus C$ terbuka.

Tahap 2. Pisahkan kasus $\mathbb{Z} \setminus C = \emptyset$ dari kasus komplementnya tak kosong.

Tahap 3. Pada kasus kedua, terapkan definisi topologi komplemen berhingga kepada $\mathbb{Z} \setminus C$.

Jawaban. Setiap himpunan tertutup adalah berhingga atau sama dengan seluruh $\mathbb{Z}$. Sebaliknya, setiap subhimpunan berhingga dan $\mathbb{Z}$ sendiri memang tertutup.

Solusi. Jika $C = \mathbb{Z}$, maka C tertutup karena komplementnya $\emptyset$ terbuka. Jika $C \neq \mathbb{Z}$, himpunan $O = \mathbb{Z} \setminus C$ tak kosong. Karena C tertutup, O terbuka; definisi τ_{FC} lalu menyatakan bahwa $\mathbb{Z} \setminus O = C$ berhingga. Sebaliknya, jika C berhingga, maka $\mathbb{Z} \setminus C$ tak kosong dan berkomplemen berhingga, sehingga terbuka. Jadi C tertutup.

Pemeriksaan M.12 Gabungan Tak Berhingga Dapat Gagal Tertutup. Untuk $n \geq 3$, misalkan $C_n = \{2, 3, \dots, n\}$. Tentukan apakah $\bigcup_{n \geq 3} C_n$ tertutup dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$, dan jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tuliskan secara eksplisit anggota gabungan tersebut.

Tahap 2. Tentukan apakah gabungan itu berhingga dan apakah sama dengan $\mathbb{Z}$.

Tahap 3. Gunakan klasifikasi himpunan tertutup pada topologi komplemen berhingga.

Jawaban. Tidak. Gabungannya adalah $\{2, 3, 4, \dots\}$, suatu subhimpunan tak berhingga yang bukan seluruh $\mathbb{Z}$.

Solusi. Setiap bilangan bulat $k \geq 2$ berada dalam C_n untuk suatu $n \geq \max\{3, k\}$, sedangkan tidak ada bilangan bulat kurang dari 2 yang berada dalam salah satu C_n . Maka

$$\bigcup_{n \geq 3} C_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 2\}.$$

Himpunan ini tak berhingga dan merupakan subhimpunan sejati dari $\mathbb{Z}$. Karena himpunan tertutup sejati dalam topologi komplemen berhingga harus berhingga, gabungan tersebut tidak tertutup. Contoh ini juga menunjukkan mengapa ketertutupan hanya dijamin untuk gabungan berhingga dari himpunan-himpunan tertutup.

Panduan Belajar Mandiri: Titik Limit dan Limit Barisan

Untuk menentukan titik limit suatu himpunan A , uji apakah setiap lingkungan terbuka dari titik yang sedang diperiksa bertemu dengan A pada suatu titik lain. Jika sebuah basis diberikan, cukup menguji lingkungan-lingkungan basis yang memuat titik tersebut.

Pemeriksaan M.13 Titik Limit pada Topologi Berhingga Pertama. Tentukan semua titik limit dari $A = \{c, d\}$ dalam $X = \{a, b, c, d\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Cari lingkungan terbuka terkecil yang tersedia untuk masing-masing titik.

Tahap 2. Titik a memiliki lingkungan $\{a\}$, dan titik b memiliki lingkungan $\{b\}$.

Tahap 3. Satu-satunya lingkungan terbuka yang memuat c atau d adalah X .

Jawaban. Himpunan titik limitnya adalah $A' = \{c, d\}$.

Solusi. Lingkungan $\{a\}$ tidak bertemu A , sehingga a bukan titik limit. Demikian pula, $\{b\}$ menunjukkan bahwa b bukan titik limit. Setiap lingkungan terbuka dari c adalah X , dan X memuat titik $d \in A \setminus \{c\}$. Jadi c titik limit. Dengan menukar peran c dan d , diperoleh bahwa d juga titik limit.

Pemeriksaan M.14 Titik Limit pada Topologi Berhingga Kedua. Tentukan semua titik limit dari $A = \{a, b\}$ dalam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, X\}.$$

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan $\{b\}$ untuk menguji b dan $\{d, e, f\}$ untuk menguji d, e, f .

Tahap 2. Setiap lingkungan terbuka dari a memuat b .

Tahap 3. Setiap lingkungan terbuka dari c memuat paling sedikit satu titik dari A .

Jawaban. Himpunan titik limitnya adalah $A' = \{a, c\}$.

Solusi. Lingkungan terbuka $\{b\}$ tidak memuat titik $A \setminus \{b\} = \{a\}$, jadi b bukan titik limit. Himpunan $\{d, e, f\}$ adalah lingkungan dari masing-masing d, e, f dan tidak bertemu A , sehingga ketiga titik itu bukan titik limit. Setiap lingkungan dari a memuat $\{a, b, c\}$ dan karenanya memuat $b \neq a$. Setiap lingkungan dari c juga memuat $\{a, b, c\}$, sehingga bertemu A . Jadi tepat a dan c merupakan titik limit.

Pemeriksaan M.15 Titik Limit pada Ruang Diskret. Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dilengkapi topologi diskret. Tentukan semua titik limit dari $A = \{a, b\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam topologi diskret, setiap himpunan beranggota tunggal terbuka.

Tahap 2. Untuk setiap $x \in X$, gunakan $\{x\}$ sebagai lingkungan uji.

Tahap 3. Periksa irisan $\{x\} \cap (A \setminus \{x\})$.

Jawaban. Tidak ada titik limit; $A' = \emptyset$.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, himpunan $\{x\}$ adalah lingkungan terbuka dari x . Lingkungan ini tidak memuat titik mana pun dari $A \setminus \{x\}$. Jadi setiap titik memiliki satu lingkungan yang menggagalkan syarat titik limit, sehingga $A' = \emptyset$.

Pemeriksaan M.16 Titik Limit pada Topologi Garis Digital. Pada $\mathbb{Z}$, misalkan τ memiliki basis $\{B(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, dengan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Tentukan semua titik limit dari $A = \{-1, 0, 1\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap bilangan ganjil memiliki lingkungan basis beranggota tunggal.

Tahap 2. Jika n genap, satu-satunya anggota basis yang memuat n adalah $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$.

Tahap 3. Cari semua bilangan genap n untuk mana $B(n)$ bertemu $A \setminus \{n\}$.

Jawaban. Himpunan titik limitnya adalah $A' = \{-2, 0, 2\}$.

Solusi. Jika n ganjil, lingkungan $B(n) = \{n\}$ tidak bertemu $A \setminus \{n\}$; jadi tidak ada titik ganjil yang merupakan titik limit. Jika n genap, cukup menguji $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$. Untuk $n = -2, 0, 2$, himpunan ini bertemu $A \setminus \{n\}$, masing-masing pada -1 , pada -1 atau 1 , dan pada 1 . Untuk setiap bilangan genap lain, $B(n)$ tidak bertemu A . Maka tepat $-2, 0, 2$ merupakan titik limit.

Pemeriksaan M.17 Limit Barisan Konstan Dapat Tidak Tunggal. Tinjau $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Tentukan semua limit dari masing-masing barisan konstan (a) , (b) , dan (c) .

Petunjuk. *Tahap 1.* Barisan konstan (p) konvergen ke x tepat ketika setiap lingkungan terbuka dari x memuat p .

Tahap 2. Gunakan lingkungan $\{c\}$ untuk menguji konvergensi ke c .

Tahap 3. Perhatikan bahwa setiap himpunan terbuka tak kosong dalam τ memuat c .

Jawaban. Barisan (a) hanya berlimit a ; barisan (b) hanya berlimit b ; barisan (c) berlimit a, b , dan c .

Solusi. Lingkungan terbuka terkecil yang relevan bagi a adalah $\{a, c\}$, bagi b adalah $\{b, c\}$, dan bagi c adalah $\{c\}$. Setiap lingkungan dari a memuat a dan c , sehingga (a) dan (c) konvergen ke a . Setiap lingkungan

dari b memuat b dan c , sehingga (b) dan (c) konvergen ke b . Hanya (c) yang akhirnya berada dalam lingkungan $\{c\}$, sehingga hanya (c) yang konvergen ke c . Jika hasil dikelompokkan menurut barisannya, diperoleh daftar pada jawaban.

Panduan Belajar Mandiri: Tutupan sebagai Himpunan Tertutup Terkecil

Pada seluruh panduan ini, (X, τ) adalah ruang topologi, $A \subseteq X$, dan A' menyatakan himpunan titik limit A .

Pemeriksaan M.18 Makna “Tertutup Terkecil”. Nyatakan tepat apa saja yang harus dibuktikan untuk menunjukkan bahwa $\bar{A}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Pisahkan syarat “tertutup”, “memuat A ”, dan “terkecil”.

Tahap 2. “Terkecil” diukur dengan relasi inklusi, bukan dengan kardinalitas.

Tahap 3. Kuantifikasikan syarat terakhir terhadap setiap himpunan tertutup lain yang memuat A .

Jawaban. Harus dibuktikan bahwa $A \subseteq \bar{A}$, $\bar{A}$ tertutup, dan untuk setiap himpunan tertutup C dengan $A \subseteq C$ berlaku $\bar{A} \subseteq C$.

Solusi. Dua syarat pertama menyatakan bahwa $\bar{A}$ sendiri merupakan salah satu subhimpunan tertutup yang memuat A . Syarat ketiga menyatakan bahwa subhimpunan itu termuat dalam setiap calon lain. Karena urutan yang digunakan adalah inklusi, ketiga syarat tersebut tepat mengungkapkan bahwa $\bar{A}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil yang memuat A .

Pemeriksaan M.19 Mengurangi Inklusi Tutupan ke Titik Limit. Andaikan C tertutup dan $A \subseteq C$. Jelaskan mengapa, untuk membuktikan $\bar{A} \subseteq C$, cukup membuktikan $A' \subseteq C$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan identitas $\bar{A} = A \cup A'$.

Tahap 2. Salah satu dari dua bagian gabungan itu sudah diketahui termuat dalam C .

Tahap 3. Gunakan fakta bahwa gabungan dua subhimpunan dari C tetap merupakan subhimpunan dari C .

Jawaban. Karena $\bar{A} = A \cup A'$ dan $A \subseteq C$ sudah diketahui, satu-satunya inklusi yang masih perlu dibuktikan adalah $A' \subseteq C$.

Solusi. Jika $A' \subseteq C$, maka kedua himpunan A dan A' termuat dalam C . Oleh karena itu, $A \cup A' \subseteq C$. Identitas $\bar{A} = A \cup A'$ kemudian memberikan $\bar{A} \subseteq C$. Tidak diperlukan syarat tambahan terhadap titik-titik A karena inklusinya sudah menjadi asumsi.

Pemeriksaan M.20 Menempatkan Titik Limit di dalam Himpunan Tertutup. Andaikan C tertutup, $A \subseteq C$, dan $x \in A'$. Tentukan apa yang dapat disimpulkan tentang x , beserta alasannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan sebaliknya bahwa $x \notin C$.

Tahap 2. Karena C tertutup, $X \setminus C$ adalah lingkungan terbuka dari x .

Tahap 3. Bandingkan lingkungan itu dengan syarat $x \in A'$ dan inklusi $A \subseteq C$.

Jawaban. Harus berlaku $x \in C$.

Solusi. Andaikan $x \notin C$. Maka $X \setminus C$ terbuka dan memuat x . Karena $A \subseteq C$, lingkungan ini tidak bertemu A , sehingga tentu tidak bertemu $A \setminus \{x\}$. Hal itu bertentangan dengan $x \in A'$, yang mengharuskan setiap lingkungan dari x memuat suatu titik A selain x . Jadi $x \in C$.

Pemeriksaan M.21 Pembuktian Lengkap Sifat Minimal Tutupan. Lengkapilah pembuktian bahwa jika C adalah subhimpunan tertutup dari X yang memuat A , maka $\bar{A} \subseteq C$. Sertakan kaitannya dengan pernyataan bahwa $\bar{A}$ merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil sebarang $x \in \bar{A} = A \cup A'$.

Tahap 2. Jika $x \in A$, gunakan $A \subseteq C$; jika $x \in A'$, gunakan komplement terbuka $X \setminus C$ untuk memperoleh kontradiksi bila $x \notin C$.

Tahap 3. Gabungkan inklusi ini dengan fakta bahwa $\overline{A}$ tertutup dan memuat A .

Jawaban. Setiap $x \in \overline{A}$ berada dalam A atau A' ; kedua kasus memberi $x \in C$. Jadi $\overline{A} \subseteq C$.

Solusi. Ambil sebarang $x \in \overline{A} = A \cup A'$. Jika $x \in A$, maka $x \in C$ karena $A \subseteq C$. Jika $x \in A'$ tetapi $x \notin C$, himpunan $X \setminus C$ merupakan lingkungan terbuka dari x yang tidak bertemu A . Ini bertentangan dengan definisi titik limit. Maka dalam kasus kedua pun $x \in C$. Jadi $\overline{A} \subseteq C$.

Selain itu, $A \subseteq \overline{A}$ langsung dari $\overline{A} = A \cup A'$, dan $\overline{A}$ tertutup. Karena $\overline{A}$ termuat dalam setiap himpunan tertutup C yang memuat A , tutupan itu adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A .

Panduan Belajar Mandiri: Menentukan Batas Himpunan

Sebuah titik berada pada batas A jika setiap lingkungan terbukanya bertemu dengan A dan juga dengan $X \setminus A$. Secara ekuivalen, $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$.

Pemeriksaan M.22 Batas pada Topologi Berhingga Pertama. Tentukan batas $A = \{c, d\}$ dalam $X = \{a, b, c, d\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Titik a dan b masing-masing memiliki lingkungan beranggota tunggal yang tidak bertemu A .

Tahap 2. Satu-satunya lingkungan terbuka yang memuat c atau d adalah X .

Tahap 3. Uji apakah X bertemu dengan A dan komplementnya.

Jawaban. $\text{Bdry}(A) = \{c, d\}$.

Solusi. Lingkungan $\{a\}$ dan $\{b\}$ tidak bertemu A , sehingga a dan b bukan titik batas. Setiap lingkungan dari c atau d adalah X . Himpunan X bertemu $A = \{c, d\}$ dan $X \setminus A = \{a, b\}$. Jadi c dan d adalah titik batas, sehingga $\text{Bdry}(A) = \{c, d\}$.

Pemeriksaan M.23 Batas pada Topologi Berhingga Kedua. Tentukan batas $A = \{a, b\}$ dalam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, X\}.$$

Petunjuk. *Tahap 1.* Lingkungan $\{b\}$ tidak bertemu $X \setminus A$.

Tahap 2. Lingkungan $\{d, e, f\}$ tidak bertemu A .

Tahap 3. Periksa a dan c menggunakan lingkungan $\{a, b, c\}$.

Jawaban. $\text{Bdry}(A) = \{a, c\}$.

Solusi. Himpunan $\{b\}$ adalah lingkungan dari b yang seluruhnya berada dalam A , jadi b bukan titik batas. Himpunan $\{d, e, f\}$ adalah lingkungan dari masing-masing d, e, f dan tidak bertemu A , sehingga ketiganya bukan titik batas. Setiap lingkungan dari a atau c memuat $\{a, b, c\}$, yang bertemu A pada a atau b dan bertemu $X \setminus A$ pada c . Karena itu, $\text{Bdry}(A) = \{a, c\}$.

Pemeriksaan M.24 Batas pada Ruang Diskret. Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dilengkapi topologi diskret. Tentukan batas $A = \{a, b\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap titik $x \in X$ memiliki lingkungan terbuka $\{x\}$.

Tahap 2. Jika $x \in A$, lingkungan itu tidak bertemu komplement A .

Tahap 3. Jika $x \notin A$, lingkungan itu tidak bertemu A .

Jawaban. $\text{Bdry}(A) = \emptyset$.

Solusi. Untuk $x \in A$, lingkungan $\{x\}$ tidak bertemu $X \setminus A$. Untuk $x \in X \setminus A$, lingkungan $\{x\}$ tidak bertemu A . Jadi tidak ada titik yang setiap lingkungannya bertemu kedua sisi. Dengan demikian, $\text{Bdry}(A) = \emptyset$.

Pemeriksaan M.25 Batas Bilangan Bulat dalam Topologi Komplemen Berhingga. Lengkapi $\mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga τ_{FC} . Tentukan batas subhimpunan $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap lingkungan terbuka tak kosong dalam topologi ini memiliki komplemen berhingga.

Tahap 2. Baik $\mathbb{Z}$ maupun $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ merupakan himpunan tak berhingga.

Tahap 3. Himpunan yang berkomplemen berhingga tidak dapat menghindari seluruh anggota salah satu himpunan tak berhingga tersebut.

Jawaban. Setiap bilangan real adalah titik batas; $\text{Bdry}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$.

Solusi. Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$ dan sebarang lingkungan terbuka O dari x . Komplemen $\mathbb{R} \setminus O$ berhingga. Karena $\mathbb{Z}$ tak berhingga, O harus bertemu $\mathbb{Z}$. Karena $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ juga tak berhingga, O harus bertemu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Jadi setiap lingkungan dari setiap x bertemu kedua sisi, sehingga setiap $x \in \mathbb{R}$ merupakan titik batas dan $\text{Bdry}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$.

Panduan Belajar Mandiri: Aksioma Separasi dan Ruang Hausdorff

Panduan ini mengembangkan alasan di balik sifat Hausdorff: titik-titik berbeda dapat ditempatkan dalam himpunan terbuka yang saling lepas.

Pemeriksaan M.26 Lingkungan Saling Lepas Memaksa Limit Tunggal. Dalam ruang metrik (X, d) , misalkan $x \neq y$. Jelaskan mengapa x dan y tidak dapat sekaligus menjadi limit dari barisan yang sama apabila terdapat bola terbuka saling lepas $B(x, r)$ dan $B(y, s)$ dengan $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan suatu barisan (z_n) konvergen ke x dan ke y .

Tahap 2. Konvergensi ke masing-masing titik membuat suku-suku barisan akhirnya berada dalam masing-masing bola.

Tahap 3. Gunakan indeks yang lebih besar dari kedua ambang konvergensi.

Jawaban. Setelah suatu indeks tertentu, setiap suku harus berada sekaligus dalam kedua bola, bertentangan dengan irisan kedua bola yang kosong.

Solusi. Andaikan $z_n \rightarrow x$ dan $z_n \rightarrow y$. Karena $B(x, r)$ lingkungan dari x , terdapat N_x sehingga $z_n \in B(x, r)$ untuk setiap $n \geq N_x$. Demikian pula, terdapat N_y sehingga $z_n \in B(y, s)$ untuk setiap $n \geq N_y$. Untuk $n \geq \max\{N_x, N_y\}$, diperoleh $z_n \in B(x, r) \cap B(y, s)$, padahal irisan itu kosong. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa kedua titik tidak dapat menjadi limit dari barisan yang sama.

Pemeriksaan M.27 Membangun Bola Terbuka Saling Lepas. Dalam ruang metrik (X, d) , misalkan $x \neq y$. Tunjukkan bahwa terdapat $r, s > 0$ sehingga bola terbuka $B(x, r)$ dan $B(y, s)$ saling lepas.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tetapkan $\delta = d(x, y)$; karena $x \neq y$, maka $\delta > 0$.

Tahap 2. Pilih kedua jari-jari lebih kecil daripada $\delta/2$, misalnya $r = s = \delta/3$.

Tahap 3. Jika suatu titik berada dalam kedua bola, terapkan ketaksamaan segitiga.

Jawaban. Pilihan $r = s = d(x, y)/3$ menghasilkan $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$.

Solusi. Misalkan $\delta = d(x, y) > 0$ dan pilih $r = s = \delta/3$. Jika ada $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$, ketaksamaan segitiga memberikan

$$\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + s = \frac{2\delta}{3},$$

yang mustahil. Jadi tidak ada titik dalam irisan kedua bola, sehingga bola-bola tersebut saling lepas.

Pemeriksaan M.28 Mengapa Contoh Tiga Titik Bukan Hausdorff. Kembali ke ruang pada [Kegiatan 13.4](#): $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Untuk $x \neq c$, jelaskan mengapa tidak ada himpunan terbuka saling lepas O_x dan O_c yang masing-masing memuat x dan c .

Petunjuk. *Tahap 1.* Daftarkan himpunan terbuka tak kosong yang memuat a dan yang memuat b .

Tahap 2. Perhatikan satu titik yang berada dalam setiap himpunan terbuka tak kosong pada topologi ini.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa titik tersebut harus berada dalam $O_x \cap O_c$.

Jawaban. Setiap himpunan terbuka tak kosong memuat c . Karena itu, $c \in O_x \cap O_c$, sehingga irisan tersebut tidak pernah kosong.

Solusi. Jika $x = a$, setiap himpunan terbuka yang memuat x adalah $\{a, c\}$ atau X ; keduanya memuat c . Jika $x = b$, setiap himpunan terbuka yang memuat x adalah $\{b, c\}$ atau X ; keduanya juga memuat c . Sementara itu, setiap O_c tentu memuat c . Jadi dalam kedua kasus $c \in O_x \cap O_c$, sehingga pasangan lingkungan terbuka saling lepas tidak ada.

Pemeriksaan M.29 Topologi Diskret Selalu Hausdorff. Misalkan X sebarang himpunan dan τ topologi diskret pada X . Tentukan apakah (X, τ) Hausdorff dan berikan alasannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil dua titik berbeda $x, y \in X$.

Tahap 2. Dalam topologi diskret, setiap subhimpunan, khususnya himpunan beranggota tunggal, terbuka.

Tahap 3. Gunakan $\{x\}$ dan $\{y\}$ sebagai lingkungan pemisah.

Jawaban. Ya, setiap ruang diskret adalah ruang Hausdorff.

Solusi. Untuk titik berbeda $x, y \in X$, himpunan $\{x\}$ dan $\{y\}$ terbuka dalam topologi diskret. Keduanya masing-masing memuat x dan y , serta $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Jadi syarat Hausdorff terpenuhi. Jika X memiliki kurang dari dua titik, syarat tersebut terpenuhi secara trivial.

Pemeriksaan M.30 Ruang Hausdorff Berhingga Bersifat Diskret. Misalkan (X, τ) Hausdorff dan $X = \{x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ berhingga. Tentukan apakah $\{x\}$ terbuka dan simpulkan bentuk τ .

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap i , gunakan sifat Hausdorff untuk memilih lingkungan terbuka U_i dari x yang tidak memuat x_i .

Tahap 2. Ambil irisan berhingga $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Tahap 3. Setelah setiap himpunan beranggota tunggal diketahui terbuka, tuliskan sebarang subhimpunan sebagai gabungannya.

Jawaban. Ya, $\{x\}$ terbuka. Karena argumen berlaku untuk setiap $x \in X$, semua himpunan beranggota tunggal terbuka dan $\tau = \mathcal{P}(X)$; jadi topologinya diskret.

Solusi. Untuk setiap $i = 1, \dots, n$, sifat Hausdorff memberikan himpunan terbuka saling lepas U_i dan V_i dengan $x \in U_i$ dan $x_i \in V_i$. Karena keduanya saling lepas, $x_i \notin U_i$. Irisan berhingga $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ terbuka dan memuat x . Untuk setiap i , himpunan U termuat dalam U_i , sehingga tidak memuat x_i . Jadi $U = \{x\}$.

Titik x dipilih sebarang, maka setiap himpunan beranggota tunggal dalam X terbuka. Setiap subhimpunan $A \subseteq X$ adalah gabungan himpunan-himpunan beranggota tunggal $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, sehingga terbuka. Dengan demikian $\tau = \mathcal{P}(X)$ dan ruang tersebut diskret.

Panduan latihan Bab 13, bagian pertama

Bagian ini memberi dukungan bertahap untuk sepuluh unit soal mandiri pertama pada latihan tentang himpunan tertutup dan batas. Urutannya mengikuti urutan soal yang dilihat pembaca pada sumber.

Pemeriksaan M.31 Ruang Hausdorff berhingga. *Acuan sumber:* latihan 1. Tentukan dengan tepat ruang topologi berhingga mana yang Hausdorff, lalu buktikan karakterisasi tersebut. *Rubrik:* jawaban lengkap harus membuktikan kedua arah dan menjelaskan tempat digunakannya keberhinggaan.

Petunjuk. Tetapkan $x \in X$. Untuk setiap $y \neq x$, gunakan sifat Hausdorff untuk memilih lingkungan terbuka saling lepas bagi x dan y , kemudian iriskan semua lingkungan yang memuat x .

Jawaban. Tepat ruang diskret berhingga yang Hausdorff. Dengan kata lain, suatu ruang topologi berhingga Hausdorff jika dan hanya jika topologinya adalah topologi diskret.

Solusi. Andaikan X berhingga dan Hausdorff. Tetapkan $x \in X$. Untuk setiap $y \in X \setminus \{x\}$, pilih himpunan terbuka U_y dan V_y dengan $x \in U_y$, $y \in V_y$, serta $U_y \cap V_y = \emptyset$. Karena hanya ada berhingga banyak y , himpunan $U = \bigcap_{y \neq x} U_y$ terbuka. Himpunan ini memuat x dan tidak memuat satu pun $y \neq x$, sehingga $U = \{x\}$. Jadi setiap singleton terbuka, dan setiap subhimpunan X terbuka sebagai gabungan singleton. Topologinya diskret.

Sebaliknya, dalam ruang diskret, dua titik berbeda x dan y mempunyai lingkungan terbuka saling lepas $\{x\}$ dan $\{y\}$. Jadi ruang itu Hausdorff. Argumen ini juga mencakup ruang kosong dan ruang satu titik, dengan syarat pemisahan terpenuhi secara vakum.

Pemeriksaan M.32 Tutupan sebagai himpunan beserta batasnya. *Acuan sumber:* latihan 2. Untuk ruang topologi (X, τ) dan $A \subseteq X$, buktikan $\bar{A} = A \cup \text{Bdry}(A)$. *Rubrik:* setiap inklusi harus dibuktikan dari sifat lingkungan tutupan dan batas, bukan hanya dari gambar intuitif.

Petunjuk. Untuk inklusi yang tidak langsung, ambil $x \in \bar{A} \setminus A$. Setiap lingkungannya sudah bertemu A ; mengapa lingkungan yang sama pasti bertemu A^c ?

Jawaban. Identitas tersebut berlaku untuk setiap subhimpunan dalam setiap ruang topologi.

Solusi. Jelas $A \subseteq \bar{A}$. Jika $x \in \text{Bdry}(A)$, setiap lingkungan x bertemu A ; maka $x \in \bar{A}$. Jadi $A \cup \text{Bdry}(A) \subseteq \bar{A}$.

Sebaliknya, ambil $x \in \bar{A}$. Jika $x \in A$, maka $x \in A \cup \text{Bdry}(A)$. Jika $x \notin A$, setiap lingkungan x bertemu A karena $x \in \bar{A}$, dan juga bertemu A^c karena lingkungan itu memuat $x \in A^c$. Jadi $x \in \text{Bdry}(A)$. Ini membuktikan inklusi sebaliknya dan karenanya kesamaan.

Pemeriksaan M.33 Batas kosong dan himpunan buka-tutup. *Acuan sumber:* latihan 3. Untuk A di suatu ruang topologi, buktikan bahwa $\text{Bdry}(A) = \emptyset$ jika dan hanya jika A terbuka sekaligus tertutup. *Rubrik:* kedua implikasi harus menangani A dan komplementnya secara eksplisit.

Petunjuk. Jika tidak ada titik batas, setiap titik di A mempunyai lingkungan yang gagal bertemu salah satu dari A dan A^c . Karena lingkungan itu memuat titik tersebut, tentukan sisi mana yang dapat dihindarkannya.

Jawaban. $\text{Bdry}(A) = \emptyset$ tepat ketika A dan A^c keduanya terbuka; ini setara dengan A terbuka sekaligus tertutup.

Solusi. Andaikan $\text{Bdry}(A) = \emptyset$. Jika $x \in A$, maka x bukan titik batas. Ada lingkungan terbuka U dari x yang tidak bertemu A^c , sebab setiap lingkungan otomatis bertemu A di x . Jadi $U \subseteq A$ dan A terbuka. Dengan argumen yang sama untuk setiap $x \in A^c$, himpunan A^c terbuka. Maka A juga tertutup.

Sebaliknya, andaikan A dan A^c terbuka. Titik dalam A mempunyai lingkungan A yang tidak bertemu A^c , sedangkan titik dalam A^c mempunyai lingkungan A^c yang tidak bertemu A . Tidak ada titik yang setiap lingkungannya bertemu kedua sisi, sehingga $\text{Bdry}(A) = \emptyset$.

Pemeriksaan M.34 Interval dalam topologi titik tertentu. *Acuan sumber:* latihan 4, tugas pertama. Pada $\mathbb{R}$ dengan topologi titik tertentu τ_p , $p = 0$, dan $A = (0, 1]$, tentukan $\bar{A}$, $\text{Int}(A)$, serta $\text{Bdry}(A)$. *Rubrik:* setiap nilai harus disertai alasan berdasarkan bentuk himpunan terbuka atau tertutup dalam τ_p .

Petunjuk. Setiap himpunan terbuka tak kosong memuat 0, sedangkan A tidak memuat 0. Periksa juga apakah A^c terbuka.

Jawaban. $\text{Int}(A) = \emptyset$, $\bar{A} = A = (0, 1]$, dan $\text{Bdry}(A) = A = (0, 1]$.

Solusi. Karena setiap himpunan terbuka tak kosong dalam τ_p memuat 0, tidak ada himpunan terbuka tak kosong yang termuat dalam A . Jadi $\text{Int}(A) = \emptyset$. Komplemen A^c memuat 0, sehingga A^c terbuka dan A tertutup. Maka $\overline{A} = A$. Akhirnya, $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A) = A$.

Pemeriksaan M.35 Interval dalam topologi titik yang dikecualikan. *Acuan sumber:* latihan 4, tugas kedua. Pada $\mathbb{R}$ dengan topologi titik yang dikecualikan $\tau_{\overline{p}}$, $p = 0$, dan $A = (0, 1]$, tentukan $\overline{A}$, $\text{Int}(A)$, serta $\text{Bdry}(A)$. *Rubrik:* jawaban harus membenarkan keterbukaan A dan menjelaskan satu-satunya titik tambahan dalam tutupannya.

Petunjuk. Himpunan yang tidak memuat 0 terbuka. Himpunan tertutup tak kosong yang bukan seluruh ruang harus memuat 0.

Jawaban. $\text{Int}(A) = A = (0, 1]$, $\overline{A} = A \cup \{0\} = [0, 1]$, dan $\text{Bdry}(A) = \{0\}$.

Solusi. Karena $0 \notin A$, himpunan A terbuka, sehingga $\text{Int}(A) = A$. Himpunan $A \cup \{0\}$ tertutup: komplemennya tidak memuat 0, jadi terbuka. Setiap himpunan tertutup yang memuat A harus pula memuat 0, karena setiap himpunan tertutup tak kosong memuat 0. Oleh sebab itu, $\overline{A} = A \cup \{0\} = [0, 1]$. Maka $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A) = \{0\}$.

Pemeriksaan M.36 Basis topologi limit bawah. *Acuan sumber:* latihan tentang garis Sorgenfrey, tugas pertama. Untuk $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b \text{ di } \mathbb{R}\}$, buktikan bahwa $\mathcal{B}$ merupakan basis bagi suatu topologi τ_{ℓ} pada $\mathbb{R}$. *Rubrik:* verifikasi harus mencakup sifat menutupi ruang dan syarat irisan dua unsur basis.

Petunjuk. Untuk $x \in [a, b) \cap [c, d)$, pertimbangkan interval basis yang berawal di x dan berakhir di $\min\{b, d\}$.

Jawaban. Ya. Koleksi interval setengah terbuka tersebut menutupi $\mathbb{R}$ dan memenuhi aksioma irisan basis, sehingga menentukan topologi limit bawah τ_{ℓ} .

Solusi. Setiap $x \in \mathbb{R}$ berada dalam $[x, x+1)$, jadi $\mathcal{B}$ menutupi $\mathbb{R}$. Sekarang ambil $x \in [a, b) \cap [c, d)$. Karena $x < b$ dan $x < d$, berlaku $x < e = \min\{b, d\}$. Unsur basis $[x, e)$ memuat x dan memenuhi $[x, e) \subseteq [a, b) \cap [c, d)$. Kedua aksioma basis terpenuhi, maka gabungan sebarang unsur $\mathcal{B}$ membentuk topologi τ_{ℓ} .

Pemeriksaan M.37 Interval Euklides terbuka pada garis Sorgenfrey. *Acuan sumber:* latihan tentang garis Sorgenfrey, tugas kedua. Buktikan bahwa setiap interval Euklides (a, b) terbuka dalam topologi limit bawah. *Rubrik:* tampilkan (a, b) sebagai gabungan unsur basis atau berikan unsur basis lokal di setiap titiknya.

Petunjuk. Untuk setiap $x \in (a, b)$, interval $[x, b)$ merupakan unsur basis dan termuat dalam (a, b) .

Jawaban. Setiap (a, b) terbuka dalam τ_{ℓ} .

Solusi. Jika $x \in (a, b)$, maka $[x, b) \in \mathcal{B}$, $x \in [x, b)$, dan $[x, b) \subseteq (a, b)$. Dengan demikian setiap titik dalam (a, b) mempunyai lingkungan basis yang termuat di dalamnya. Secara setara, $(a, b) = \bigcup_{x \in (a, b)} [x, b)$, sehingga (a, b) terbuka dalam topologi limit bawah.

Pemeriksaan M.38 Perbandingan topologi limit bawah dan topologi Euklides. *Acuan sumber:* latihan tentang garis Sorgenfrey, tugas ketiga. Tentukan apakah topologi limit bawah pada $\mathbb{R}$ benar-benar lebih halus daripada topologi metrik Euklides, dan berikan alasan. *Rubrik:* buktikan inklusi kedua topologi dan berikan satu saksi bahwa inklusi itu ketat.

Petunjuk. Gunakan keterbukaan semua interval (a, b) untuk satu inklusi. Lalu uji apakah $[0, 1)$ terbuka dalam topologi Euklides.

Jawaban. Ya. Topologi Euklides termuat secara ketat dalam topologi limit bawah.

Solusi. Setiap interval basis Euklides (a, b) terbuka dalam τ_{ℓ} . Karena setiap himpunan terbuka Euklides merupakan gabungan interval seperti itu, diperoleh $\tau_E \subseteq \tau_{\ell}$. Inklusi ini ketat: $[0, 1)$ adalah unsur basis topologi limit bawah, tetapi tidak terbuka dalam topologi Euklides karena tidak ada interval Euklides yang memuat 0 dan sekaligus termuat dalam $[0, 1)$. Jadi $\tau_E \subsetneq \tau_{\ell}$.

Pemeriksaan M.39 Interval basis yang buka-tutup. *Acuan sumber:* latihan tentang garis Sorgenfrey, tugas keempat. Untuk $a < b$, tentukan apakah $[a, b]$ buka-tutup dalam $(\mathbb{R}, \tau_{\ell\ell})$, lalu buktikan jawaban. *Rubrik:* buktikan keterbukaan himpunan dan komplementnya.

Petunjuk. Himpunan $[a, b]$ sendiri adalah unsur basis. Tulis komplementnya sebagai $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ dan cari lingkungan basis bagi setiap titik pada kedua bagian tersebut.

Jawaban. Ya, setiap $[a, b]$ dengan $a < b$ buka-tutup dalam garis Sorgenfrey.

Solusi. Karena $[a, b]$ merupakan unsur basis, himpunan itu terbuka. Komplementnya adalah $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Jika $x < a$, maka $[x, a)$ merupakan lingkungan basis yang termuat dalam $(-\infty, a)$. Jika $x \geq b$, maka $[x, x+1)$ merupakan lingkungan basis yang termuat dalam $[b, \infty)$. Jadi komplement $[a, b]$ terbuka, sehingga $[a, b]$ juga tertutup dan karenanya buka-tutup.

Pemeriksaan M.40 Kerapatan bilangan rasional. *Acuan sumber:* latihan tentang himpunan rapat, tugas pertama. Buktikan bahwa $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides. *Rubrik:* tunjukkan bahwa setiap himpunan terbuka Euklides tak kosong bertemu $\mathbb{Q}$; jika menggunakan kerapatan aritmetis $\mathbb{Q}$, berikan pembenaran singkat.

Petunjuk. Setiap himpunan terbuka tak kosong memuat suatu interval (a, b) . Pilih $n \in \mathbb{N}$ cukup besar sehingga $n(b-a) > 1$, lalu cari bilangan bulat di antara na dan nb .

Jawaban. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$; jadi $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ Euklides.

Solusi. Ambil himpunan terbuka tak kosong $O \subseteq \mathbb{R}$. Ada $x \in O$ dan interval (a, b) dengan $x \in (a, b) \subseteq O$. Pilih bilangan asli n sehingga $n(b-a) > 1$. Karena interval (na, nb) panjangnya lebih dari 1, ada $m \in \mathbb{Z}$ dengan $na < m < nb$. Maka $m/n \in \mathbb{Q} \cap (a, b) \subseteq \mathbb{Q} \cap O$. Jadi setiap himpunan terbuka tak kosong bertemu $\mathbb{Q}$, yang setara dengan $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Panduan latihan Bab 13, bagian kedua

Bagian ini melanjutkan urutan sumber dengan unit soal mandiri 11 sampai 20. Setiap jawaban singkat diikuti pembuktian atau rubrik penilaian yang dapat digunakan secara mandiri.

Pemeriksaan M.41 Bilangan bulat tidak rapat dalam garis nyata. *Acuan sumber:* latihan tentang himpunan rapat, tugas kedua. Tentukan apakah $\mathbb{Z}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi metrik Euklides, dan buktikan jawaban. *Rubrik:* berikan suatu himpunan terbuka tak kosong yang tidak bertemu $\mathbb{Z}$, atau hitungutupan $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. Cari interval terbuka yang terletak ketat di antara dua bilangan bulat berurutan.

Jawaban. Tidak. Misalnya, $(1/4, 3/4)$ adalah himpunan terbuka tak kosong yang tidak bertemu $\mathbb{Z}$.

Solusi. Interval $(1/4, 3/4)$ terbuka dan tak kosong dalam topologi Euklides, tetapi tidak memuat bilangan bulat. Jika $\mathbb{Z}$ rapat, setiap himpunan terbuka tak kosong harus bertemu $\mathbb{Z}$. Contoh tandingan ini menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}$ tidak rapat. Bahkan $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, sebab untuk setiap $x \notin \mathbb{Z}$ dapat dipilih interval terbuka kecil di sekitar x yang tidak memuat bilangan bulat.

Pemeriksaan M.42 Kriteria himpunan rapat melalui himpunan terbuka. *Acuan sumber:* latihan tentang himpunan rapat, tugas ketiga, dengan ruang latar X . Untuk $A \subseteq X$, buktikan bahwa A rapat dalam X jika dan hanya jika $A \cap O \neq \emptyset$ untuk setiap himpunan terbuka tak kosong $O \subseteq X$. *Rubrik:* buktikan kedua arah dan pertahankan kuantor “setiap himpunan terbuka tak kosong”.

Petunjuk. Untuk satu arah, andaikan ada himpunan terbuka tak kosong yang tidak bertemu A . Untuk arah lain, uji setiap lingkungan dari titik sebarang $x \in X$.

Jawaban. Kriteria itu benar: $\overline{A} = X$ tepat ketika setiap himpunan terbuka tak kosong di X bertemu A .

Solusi. Andaikan $\overline{A} = X$. Jika ada himpunan terbuka tak kosong O dengan $O \cap A = \emptyset$, pilih $x \in O$. Himpunan O adalah lingkungan terbuka x yang tidak bertemu A , bertentangan dengan $x \in \overline{A}$. Jadi setiap

O seperti itu bertemu A .

Sebaliknya, andaikan setiap himpunan terbuka tak kosong bertemu A . Ambil $x \in X$ dan sebarang lingkungan N dari x . Ada himpunan terbuka O dengan $x \in O \subseteq N$. Karena O tak kosong, $O \cap A \neq \emptyset$, sehingga $N \cap A \neq \emptyset$. Maka $x \in \bar{A}$. Karena x sebarang, $\bar{A} = X$.

Pemeriksaan M.43 Tiga daerah yang saling lepas. *Acuan sumber:* latihan dekomposisi ruang, tugas pertama. Untuk $A \subseteq X$, buktikan bahwa $\text{Int}(A)$, $\text{Bdry}(A)$, dan $\text{Int}(A^c)$ saling lepas. *Rubrik:* periksa ketiga irisan berpasangan, baik secara langsung maupun melalui satu argumen yang mencakup semuanya.

Petunjuk. Titik interior A mempunyai lingkungan yang termuat dalam A ; lingkungan ini tidak dapat bertemu A^c . Bandingkan hal tersebut dengan definisi titik batas.

Jawaban. Ketiga himpunan tersebut saling lepas: setiap irisan dari dua himpunan yang berbeda di antaranya adalah kosong.

Solusi. Karena $A \cap A^c = \emptyset$, jelas $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(A^c) = \emptyset$. Jika $x \in \text{Int}(A)$, ada lingkungan terbuka $U \subseteq A$ dari x . Lingkungan ini tidak bertemu A^c , sehingga $x \notin \text{Bdry}(A)$. Jadi $\text{Int}(A) \cap \text{Bdry}(A) = \emptyset$. Demikian pula, jika $x \in \text{Int}(A^c)$, ada lingkungan x yang tidak bertemu A , sehingga $x \notin \text{Bdry}(A)$. Jadi irisan pasangan terakhir juga kosong.

Pemeriksaan M.44 Dekomposisi ruang oleh interior dan batas. *Acuan sumber:* latihan dekomposisi ruang, tugas kedua. Buktikan $X = \text{Int}(A) \cup \text{Bdry}(A) \cup \text{Int}(A^c)$. *Rubrik:* klasifikasikan titik sebarang $x \in X$ dan jelaskan mengapa titik di luar kedua interior harus merupakan titik batas.

Petunjuk. Ambil x yang tidak termasuk $\text{Int}(A)$ maupun $\text{Int}(A^c)$. Apa yang dapat disimpulkan tentang pertemuan setiap lingkungannya dengan A dan A^c ?

Jawaban. Setiap titik di X berada tepat di salah satu dari $\text{Int}(A)$, $\text{Bdry}(A)$, dan $\text{Int}(A^c)$; khususnya, gabungan ketiganya adalah X .

Solusi. Ambil $x \in X$. Jika $x \in \text{Int}(A)$ atau $x \in \text{Int}(A^c)$, pernyataan langsung berlaku. Andaikan x tidak berada di salah satu pun dari kedua interior tersebut. Karena $x \notin \text{Int}(A)$, tidak ada lingkungan x yang termuat dalam A ; jadi setiap lingkungan x bertemu A^c . Karena $x \notin \text{Int}(A^c)$, setiap lingkungan x juga bertemu A . Maka $x \in \text{Bdry}(A)$. Jadi ketiga himpunan itu menutupi X ; bersama hasil tugas sebelumnya, ketiganya bahkan membentuk partisi.

Pemeriksaan M.45 Sifat Hausdorff diwariskan kepada subruang. *Acuan sumber:* latihan tentang subruang Hausdorff. Buktikan bahwa setiap subruang dari ruang Hausdorff juga Hausdorff. *Rubrik:* mulai dari dua titik berbeda dalam subruang dan hasilkan lingkungan terbuka subruang yang saling lepas.

Petunjuk. Jika $Y \subseteq X$ dan U, V terbuka di X , maka $U \cap Y$ dan $V \cap Y$ terbuka dalam topologi subruang.

Jawaban. Ya. Sifat Hausdorff diwariskan kepada subruang.

Solusi. Misalkan Y subruang dari ruang Hausdorff X , dan ambil titik berbeda $y_1, y_2 \in Y$. Karena X Hausdorff, ada himpunan terbuka $U, V \subseteq X$ dengan $y_1 \in U$, $y_2 \in V$, dan $U \cap V = \emptyset$. Himpunan $U \cap Y$ dan $V \cap Y$ terbuka di Y , masing-masing memuat y_1 dan y_2 , serta saling lepas. Jadi Y Hausdorff.

Pemeriksaan M.46 Sifat Hausdorff topologi titik tertentu. *Acuan sumber:* latihan tentang topologi titik, tugas pertama. Misalkan X tak kosong dengan sedikitnya dua unsur, $p \in X$, dan τ_p topologi titik tertentu. Tentukan apakah (X, τ_p) Hausdorff. *Rubrik:* pilih sepasang titik yang relevan dan analisis semua lingkungan tak kosongnya.

Petunjuk. Setiap himpunan terbuka tak kosong memuat titik tertentu p . Dapatkah dua himpunan terbuka tak kosong saling lepas?

Jawaban. Tidak. Jika $|X| \geq 2$, topologi titik tertentu bukan Hausdorff.

Solusi. Pilih $q \in X \setminus \{p\}$. Setiap lingkungan terbuka U dari p tak kosong dan memuat p . Setiap lingkungan terbuka V dari q juga tak kosong, sehingga menurut definisi τ_p , himpunan V memuat p . Jadi $p \in U \cap V$ untuk setiap pilihan U, V . Titik berbeda p dan q tidak dapat dipisahkan oleh lingkungan terbuka saling lepas; maka ruang itu tidak Hausdorff.

Pemeriksaan M.47 Sifat Hausdorff topologi titik yang dikecualikan. *Acuan sumber:* latihan tentang topologi titik, tugas kedua. Misalkan X tak kosong dengan sedikitnya dua unsur, $p \in X$, dan $\tau_{\overline{p}}$ topologi titik yang dikecualikan. Tentukan apakah $(X, \tau_{\overline{p}})$ Hausdorff. *Rubrik:* identifikasi seluruh lingkungan terbuka p dan gunakan titik lain sebagai pasangan uji.

Petunjuk. Dalam topologi ini, satu-satunya himpunan terbuka yang memuat p adalah X .

Jawaban. Tidak. Jika $|X| \geq 2$, topologi titik yang dikecualikan bukan Hausdorff.

Solusi. Pilih $q \in X \setminus \{p\}$. Satu-satunya lingkungan terbuka dari p adalah X , karena semua himpunan terbuka sejati tidak memuat p . Setiap lingkungan terbuka V dari q memenuhi $X \cap V = V \neq \emptyset$. Jadi p dan q tidak mempunyai lingkungan terbuka saling lepas, sehingga ruang tersebut tidak Hausdorff.

Pemeriksaan M.48 Himpunan tertutup memuat batasnya. *Acuan sumber:* latihan tentang batas dan ketertutupan. Untuk $C \subseteq X$, buktikan bahwa C tertutup jika dan hanya jika C memuat batasnya. *Rubrik:* buktikan kedua implikasi dan kaitkan kondisi $\text{Bdry}(C) \subseteq C$ denganutupan C .

Petunjuk. Gunakan identitas $\overline{C} = C \cup \text{Bdry}(C)$ dari latihan sebelumnya.

Jawaban. C tertutup tepat ketika $\text{Bdry}(C) \subseteq C$.

Solusi. Jika C tertutup, maka $\overline{C} = C$. Karena $\text{Bdry}(C) \subseteq \overline{C}$, diperoleh $\text{Bdry}(C) \subseteq C$. Sebaliknya, jika $\text{Bdry}(C) \subseteq C$, maka $\overline{C} = C \cup \text{Bdry}(C) = C$. Suatu himpunan sama dengan tutupannya jika dan hanya jika tertutup, jadi C tertutup.

Pemeriksaan M.49 Titik terasing dan singleton terbuka dalam subruang. *Acuan sumber:* latihan tentang titik terasing, tugas pertama. Untuk $A \subseteq X$ dan $a \in A$, buktikan bahwa a titik terasing dari A jika dan hanya jika $\{a\}$ terbuka dalam subruang A . *Rubrik:* kedua arah harus menerjemahkan secara tepat antara lingkungan di X dan himpunan terbuka dalam topologi subruang.

Petunjuk. Himpunan terbuka dalam A berbentuk $O \cap A$ untuk suatu O terbuka di X . Dari lingkungan yang tidak harus terbuka, ambil himpunan terbuka yang termuat di dalamnya.

Jawaban. Keduanya setara: a terasing dalam A tepat ketika singleton $\{a\}$ terbuka dalam A .

Solusi. Jika a terasing dalam A , ada lingkungan N dari a dengan $N \cap A = \{a\}$. Pilih himpunan terbuka O di X dengan $a \in O \subseteq N$. Maka $O \cap A = \{a\}$, sehingga $\{a\}$ terbuka dalam subruang A .

Sebaliknya, jika $\{a\}$ terbuka dalam A , ada himpunan terbuka $O \subseteq X$ dengan $O \cap A = \{a\}$. Himpunan O adalah lingkungan a di X yang beririsan dengan A hanya di a . Jadi a titik terasing dari A .

Pemeriksaan M.50 Klasifikasi titik batas dalam ruang topologi. *Acuan sumber:* latihan tentang titik terasing, tugas kedua. Tentukan apakah dalam sebarang ruang topologi setiap titik batas dari A merupakan titik limit atau titik terasing dari A , lalu buktikan jawaban. *Rubrik:* jawaban dinilai dari pembagian kasus $x \in A$ dan $x \notin A$, serta penggunaan definisi titik limit dan titik terasing tanpa mengandaikan metrik.

Petunjuk. Jika titik batas x tidak berada di A , setiap pertemuan lingkungan dengan A otomatis terjadi di titik selain x . Jika $x \in A$, tanyakan apakah semua lingkungan bertemu $A \setminus \{x\}$.

Jawaban. Ya. Dalam setiap ruang topologi, setiap titik batas A adalah titik limit A atau titik terasing A .

Solusi. Ambil $x \in \text{Bdry}(A)$. Jika $x \notin A$, setiap lingkungan x bertemu A , dan setiap titik pertemuan berbeda dari x . Jadi setiap lingkungan bertemu $A \setminus \{x\}$, sehingga x adalah titik limit.

Sekarang andaikan $x \in A$. Jika setiap lingkungan x bertemu $A \setminus \{x\}$, maka x titik limit. Jika tidak, ada lingkungan N dari x dengan $N \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Karena $x \in N \cap A$, diperoleh $N \cap A = \{x\}$, sehingga x titik terasing. Pembuktian ini hanya memakai definisi lingkungan dan berlaku tanpa asumsi metrik.

Panduan latihan Bab 13, bagian ketiga

Bagian ini mencakup unit soal mandiri 21 sampai 25 dalam urutan sumber. Dua tugas induk yang hanya mengelompokkan subsoal tidak dihitung sebagai unit tersendiri.

Pemeriksaan M.51 Interior bilangan bulat genap dalam topologi kelipatan. *Acuan sumber:* latihan pada $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan basis $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, kelompok $A = \mathbb{E}$, subsoal pertama. Di sini $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dan $\mathbb{E} = 2\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat genap. Tentukan $\text{Int}(A)$. *Rubrik:* nilai interior harus disertai unsur basis yang membuktikan keterbukaan setiap titik kandidat.

Petunjuk. Perhatikan bahwa $A = 2\mathbb{Z}$ sendiri merupakan salah satu unsur basis.

Jawaban. $\text{Int}(A) = A = 2\mathbb{Z} = \mathbb{E}$.

Solusi. Karena $2 \in \mathbb{Z}$, himpunan $2\mathbb{Z}$ merupakan unsur basis topologi τ , sehingga $A = 2\mathbb{Z}$ terbuka. Interior suatu himpunan terbuka adalah himpunan itu sendiri. Jadi $\text{Int}(A) = A$.

Pemeriksaan M.52 Tutupan bilangan bulat genap dalam topologi kelipatan. *Acuan sumber:* latihan pada $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan basis $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, kelompok $A = \mathbb{E} = 2\mathbb{Z}$, subsoal kedua. Tentukan $\overline{A}$. *Rubrik:* uji lingkungan titik sebarang di $\mathbb{Z}$ dan gunakan satu titik yang termuat dalam setiap unsur basis.

Petunjuk. Setiap unsur basis $a\mathbb{Z}$ memuat 0, dan $0 \in A$.

Jawaban. $\overline{A} = \mathbb{Z}$; himpunan bilangan bulat genap rapat dalam topologi ini.

Solusi. Ambil $x \in \mathbb{Z}$ dan sebarang lingkungan U dari x . Ada unsur basis $a\mathbb{Z}$ dengan $x \in a\mathbb{Z} \subseteq U$. Setiap $a\mathbb{Z}$ memuat 0, dan $0 \in 2\mathbb{Z} = A$. Jadi $U \cap A \neq \emptyset$. Karena ini berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, semua titik berada dalam tutupan A , sehingga $\overline{A} = \mathbb{Z}$.

Pemeriksaan M.53 Interior bilangan asli dalam topologi kelipatan. *Acuan sumber:* latihan pada $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan basis $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, kelompok $B = \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$, subsoal pertama. Tentukan $\text{Int}(B)$. *Rubrik:* jelaskan mengapa tidak satu pun lingkungan terbuka tak kosong dapat termuat dalam B .

Petunjuk. Setiap unsur basis, dan karenanya setiap himpunan terbuka tak kosong, memuat 0, sedangkan $0 \notin B$.

Jawaban. $\text{Int}(B) = \emptyset$.

Solusi. Setiap unsur basis $a\mathbb{Z}$ memuat 0. Karena setiap himpunan terbuka tak kosong adalah gabungan tak kosong dari unsur-unsur basis, setiap himpunan terbuka tak kosong juga memuat 0. Namun $0 \notin B$. Jadi tidak ada himpunan terbuka tak kosong yang termuat dalam B , dan akibatnya $\text{Int}(B) = \emptyset$.

Pemeriksaan M.54 Tutupan bilangan asli dalam topologi kelipatan. *Acuan sumber:* latihan pada $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan basis $\{a\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, kelompok $B = \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$, subsoal kedua. Tentukan $\overline{B}$. *Rubrik:* tangani 0 dan setiap $x \neq 0$ secara terpisah; untuk titik tak nol, buktikan bahwa setiap lingkungan basisnya bertemu B .

Petunjuk. Singleton $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ adalah unsur basis. Jika $x \neq 0$ dan $x \in a\mathbb{Z}$, maka $a \neq 0$ dan $|a| \in a\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.

Jawaban. $\overline{B} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Solusi. Karena $0\mathbb{Z} = \{0\}$ adalah lingkungan terbuka 0 yang tidak bertemu B , titik 0 tidak berada dalam $\overline{B}$. Sekarang ambil $x \neq 0$ dan sebarang lingkungan U dari x . Pilih unsur basis $a\mathbb{Z}$ dengan $x \in a\mathbb{Z} \subseteq U$. Karena $x \neq 0$, harus berlaku $a \neq 0$. Bilangan positif $|a|$ merupakan kelipatan bulat dari a , sehingga $|a| \in a\mathbb{Z} \cap B \subseteq U \cap B$. Jadi setiap $x \neq 0$ berada dalam $\overline{B}$. Kesimpulannya, $\overline{B} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pemeriksaan M.55 Verifikasi basis topologi Titik Asal Ganda. *Acuan sumber:* latihan topologi Titik Asal Ganda, tugas pertama. Misalkan $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$, dengan $0^* \notin \mathbb{R}^2$. Koleksi kandidat basis terdiri dari bola-bola terbuka Euklides standar yang berpusat di setiap titik selain 0 dan 0^* , bersama, untuk setiap $r > 0$,

$$N(0, r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{r^2}, y > 0 \right\} \cup \{0\}$$

dan

$$N(0^*, r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{r^2}, y < 0 \right\} \cup \{0^*\}$$

Buktikan bahwa koleksi tersebut benar-benar merupakan basis bagi suatu topologi pada X . *Rubrik:* verifikasi harus membuktikan sifat menutupi X dan, untuk titik di irisan dua kandidat unsur basis, menghasilkan unsur

basis yang lebih kecil. Kasus titik biasa, 0, dan 0^* harus terlihat.

Petunjuk. Jauh dari kedua titik asal, semua bagian planar kandidat basis terbuka secara Euklides. Pada 0 atau 0^* , besarkan parameter r agar jari-jari $1/r$ mengecil dan masuk ke dalam kedua himpunan yang sedang diiriskan.

Jawaban. Ya. Koleksi itu menutupi X dan memenuhi syarat irisan basis, sehingga menentukan topologi Titik Asal Ganda.

Solusi. Koleksi tersebut menutupi X : titik 0 berada dalam setiap $N(0, r)$, titik 0^* berada dalam setiap $N(0^*, r)$, dan setiap $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ berada dalam bola Euklides yang berpusat di q .

Ambil dua unsur kandidat basis B_1, B_2 dan $q \in B_1 \cap B_2$. Jika $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, bagian planar setiap B_i yang memuat q terbuka secara Euklides di sekitar q . Karena itu ada bola Euklides cukup kecil yang berpusat di q , memuat q , dan termuat dalam $B_1 \cap B_2$. Bola ini merupakan unsur kandidat basis.

Jika $q = 0^*$, kedua B_i harus berbentuk $N(0^*, r_i)$. Dengan $t = \max\{r_1, r_2\}$, berlaku $0^* \in N(0^*, t) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Terakhir, misalkan $q = 0$. Unsur kandidat basis yang memuat 0 dapat berupa $N(0, r)$ atau bola Euklides biasa yang juga memuat 0. Setiap bola biasa di antara B_1, B_2 memuat suatu cakram Euklides berjari-jari $\epsilon_i > 0$ yang berpusat di 0. Pilih $t > 0$ sedemikian sehingga $1/t \leq \epsilon_i$ untuk setiap bola biasa yang muncul, dan $t \geq r_i$ untuk setiap himpunan khusus $N(0, r_i)$ yang muncul. Maka $0 \in N(0, t) \subseteq B_1 \cap B_2$. Jadi aksioma irisan basis terpenuhi dalam semua kasus, dan koleksi itu merupakan basis.

Panduan latihan Bab 13, bagian keempat

Bagian ini memberi dukungan bertahap untuk prompt latihan 26 sampai 35 menurut peta prompt sumber Bab 13.

Pemeriksaan M.56 Sifat Hausdorff topologi Titik Asal Ganda. *Jangkar sumber:* prompt 26. Pada $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$, kandidat basis memuat bola-bola Euklides yang berpusat di titik biasa dan, untuk $r > 0$, himpunan

$$N(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1/r^2, y > 0\} \cup \{0\}$$

serta

$$N(0^*, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1/r^2, y < 0\} \cup \{0^*\}$$

Tentukan apakah topologi Titik Asal Ganda ini Hausdorff dan buktikan jawaban. *Rubrik:* pisahkan semua jenis pasangan: dua titik biasa, kedua titik asal, dan satu titik asal dengan satu titik biasa.

Petunjuk. Lingkungan khusus kedua titik asal berada pada setengah bidang yang berlawanan. Untuk titik biasa q , pilih radius yang lebih kecil daripada sebagian tetap dari $\|q\|$.

Jawaban. Ya, topologi Titik Asal Ganda yang diberikan merupakan ruang Hausdorff.

Solusi. Dua titik biasa yang berbeda dapat dipisahkan oleh bola Euklides kecil yang saling lepas dan tidak berpusat di titik asal. Titik 0 dan 0^* dipisahkan oleh $N(0, r)$ dan $N(0^*, s)$, sebab yang pertama hanya memuat titik planar dengan $y > 0$ beserta 0, sedangkan yang kedua hanya memuat titik planar dengan $y < 0$ beserta 0^* .

Tinggal pasangan satu titik asal dan titik biasa $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tetapkan $\delta = \|q\| > 0$. Pilih r dengan $1/r < \delta/3$. Bola Euklides $B(q, \delta/3)$ terpisah dari cakram berjari-jari $1/r$ di sekitar 0, sehingga terpisah dari $N(0, r)$; argumen yang sama memakai $N(0^*, r)$ untuk 0^* . Semua pasangan titik berbeda mempunyai lingkungan terbuka saling lepas, jadi ruang itu Hausdorff.

Pemeriksaan M.57 Himpunan berhingga bersifat tertutup dalam topologi Zariski. *Jangkar sumber:* prompt 27. Buktikan bahwa setiap himpunan berhingga merupakan himpunan tertutup dalam $\mathbb{R}^n$ dengan topologi Zariski. *Rubrik:* realisasikan himpunan beranggota tunggal sebagai himpunan nol polinom dan gunakan kestabilan himpunan tertutup terhadap gabungan berhingga.

Petunjuk. Untuk $a = (a_1, \dots, a_n)$, pertimbangkan $f_a(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$.

Jawaban. Setiap himpunan beranggota tunggal, dan karenanya setiap gabungan berhingga himpunan-himpunan demikian, merupakan himpunan tertutup Zariski.

Solusi. Untuk $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, definisikan $f_a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$. Karena bekerja di atas $\mathbb{R}$, berlaku $f_a(x) = 0$ jika dan hanya jika $x_i = a_i$ untuk setiap i . Jadi $Z(f_a) = \{a\}$, sehingga setiap himpunan beranggota tunggal merupakan himpunan tertutup Zariski. Jika $F = \{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$, maka F adalah gabungan berhingga himpunan-himpunan beranggota tunggal yang tertutup dan karena itu tertutup. Himpunan kosong juga tertutup, misalnya sebagai $Z(1) = \emptyset$.

Pemeriksaan M.58 Topologi Zariski bukan Hausdorff. *Jangkar sumber:* prompt 28. Untuk $n \geq 1$, buktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ dengan topologi Zariski bukan Hausdorff. Gunakan basis yang terdiri dari $D(f) = \mathbb{R}^n \setminus Z(f)$, dengan f polinom dalam n variabel. *Rubrik:* buktikan bahwa dua himpunan terbuka Zariski tak kosong selalu beririsan, lalu terapkan pada dua titik berbeda.

Petunjuk. Jika $D(f)$ dan $D(g)$ tak kosong, maka f dan g bukan polinom nol dan $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

Jawaban. Untuk $n \geq 1$, ruang Zariski $\mathbb{R}^n$ bukan Hausdorff; bahkan setiap dua himpunan terbuka tak kosongnya beririsan.

Solusi. Ambil himpunan terbuka Zariski tak kosong U, V . Masing-masing memuat unsur basis tak kosong, katakan $D(f) \subseteq U$ dan $D(g) \subseteq V$. Karena kedua unsur basis tak kosong, f dan g bukan polinom nol. Gelanggang polinom $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ merupakan daerah integral, sehingga fg bukan polinom nol. Polinom real bukan nol tidak lenyap di seluruh $\mathbb{R}^n$; akibatnya $D(fg)$ tak kosong. Karena $D(fg) = D(f) \cap D(g)$, diperoleh $U \cap V \neq \emptyset$.

Untuk $n \geq 1$, ruang $\mathbb{R}^n$ mempunyai dua titik berbeda. Jika ruang itu Hausdorff, kedua titik tersebut mempunyai lingkungan terbuka tak kosong yang saling lepas, bertentangan dengan hasil di atas. Jadi ruang Zariski ini bukan Hausdorff.

Pemeriksaan M.59 Titik limit dan titik batas himpunan tiga titik pada garis digital. *Jangkar sumber:* prompt 29. Pada $(\mathbb{Z}, \tau_{dl})$, basisnya diberikan oleh

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Untuk $A = \{-1, 0, 1\}$, tentukan titik limit dan titik batas A . Tentukan pula apakah setiap titik limit merupakan titik batas dan apakah setiap titik batas merupakan titik limit. *Rubrik:* uji lingkungan basis minimal di titik ganjil dan genap, serta jawab kedua implikasi secara terpisah.

Petunjuk. Titik ganjil mempunyai lingkungan beranggota tunggal. Untuk titik genap n , cukup uji $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$.

Jawaban. Himpunan titik limit A adalah $\{-2, 0, 2\}$, sedangkan $\text{Bdry}(A) = \{-2, 2\}$. Jadi tidak setiap titik limit merupakan titik batas, tetapi setiap titik batas A merupakan titik limit.

Solusi. Setiap titik ganjil n mempunyai lingkungan terbuka $\{n\}$, sehingga tidak ada titik ganjil yang menjadi titik limit A . Untuk titik genap, lingkungan basis minimalnya adalah $B(n)$. Himpunan ini bertemu $A \setminus \{n\}$ tepat untuk $n = -2, 0, 2$: pada -2 pertemuannya memuat -1 , pada 0 memuat -1 dan 1 , dan pada 2 memuat 1 . Jadi titik limitnya adalah $\{-2, 0, 2\}$.

Untuk menjadi titik batas, lingkungan minimal harus bertemu A dan A^c . Himpunan $B(-2)$ dan $B(2)$ memenuhi kedua syarat. Sebaliknya, $B(0) = A$ tidak bertemu A^c , sedangkan himpunan beranggota tunggal di -1 dan 1 juga termuat dalam A ; semua lingkungan minimal lainnya tidak bertemu A . Maka $\text{Bdry}(A) = \{-2, 2\}$. Titik 0 menyangkal implikasi dari titik limit ke titik batas, sedangkan kedua titik batas yang ada memang titik limit.

Pemeriksaan M.60 Penutupan himpunan tiga titik pada garis digital. *Jangkar sumber:* prompt 30. Pada garis digital dengan basis $B(n) = \{n\}$ untuk n ganjil dan $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$ untuk n genap, ambil $A = \{-1, 0, 1\}$. Tentukan $\bar{A}$ dan tuliskan $\mathbb{Z} \setminus \bar{A}$ sebagai gabungan himpunan terbuka. *Rubrik:* hitung

penutupan melalui lingkungan basis dan berikan formula gabungan yang benar-benar menutupi seluruh komplemen.

Petunjuk. Gabungkan A dengan titik limit yang ditemukan sebelumnya. Untuk komplemennya, perhatikan himpunan $B(2k)$ ketika $|k| \geq 2$.

Jawaban. $\bar{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, dan

$$\mathbb{Z} \setminus \bar{A} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k| \geq 2}} B(2k)$$

Solusi. Titik A tentu berada dalam penutupannya. Di luar A , tepat -2 dan 2 yang setiap lingkungan basisnya bertemu A . Jadi $\bar{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Komplemennya adalah semua bilangan bulat dengan nilai mutlak sedikitnya 3. Untuk $|k| \geq 2$, himpunan basis $B(2k) = \{2k-1, 2k, 2k+1\}$ termuat dalam komplemen. Sebaliknya, setiap bilangan bulat bernilai mutlak sedikitnya 3 berada dalam salah satu himpunan tersebut. Karena setiap $B(2k)$ terbuka, formula gabungan pada jawaban juga membuktikan bahwa komplemen penutupan terbuka.

Pemeriksaan M.61 Titik limit dan titik batas himpunan beranggota tunggal pada garis digital.

Jangkar sumber: prompt 31. Pada garis digital dengan basis $B(n) = \{n\}$ untuk n ganjil dan $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$ untuk n genap, ambil $B = \{0\}$. Tentukan titik limit dan titik batas B , lalu putuskan kedua implikasi antara kedua jenis titik tersebut. *Rubrik:* uji $B(n)$ di titik genap dan lingkungan beranggota tunggal di titik ganjil; implikasi vakum harus disebutkan sebagai vakum.

Petunjuk. Tidak ada lingkungan yang dapat bertemu $B \setminus \{0\} = \emptyset$ di 0. Namun $B(0) = \{-1, 0, 1\}$ bertemu B dan B^c .

Jawaban. Himpunan titik limit B kosong dan $\text{Bdry}(B) = \{0\}$. Karena itu setiap titik limit merupakan titik batas secara vakum, tetapi tidak setiap titik batas merupakan titik limit.

Solusi. Titik ganjil mempunyai lingkungan beranggota tunggal, jadi bukan titik limit B . Untuk titik genap $n \neq 0$, himpunan $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$ tidak memuat 0; untuk $n = 0$, tidak mungkin ada pertemuan dengan $B \setminus \{0\} = \emptyset$. Jadi B tidak mempunyai titik limit.

Lingkungan minimal $B(0) = \{-1, 0, 1\}$ bertemu B di 0 dan bertemu B^c di $-1, 1$, sehingga $0 \in \text{Bdry}(B)$. Setiap titik lain mempunyai lingkungan basis yang tidak memuat 0, sehingga bukan titik batas. Maka $\text{Bdry}(B) = \{0\}$, yang memberi kedua jawaban implikasi tersebut.

Pemeriksaan M.62 Penutupan himpunan beranggota tunggal pada garis digital. *Jangkar sumber:* prompt 32. Pada topologi garis digital yang sama, ambil $B = \{0\}$. Tentukan $\bar{B}$ dan tuliskan $\mathbb{Z} \setminus \bar{B}$ sebagai gabungan himpunan-himpunan terbuka. *Rubrik:* verifikasi penutupan melalui lingkungan dan beri gabungan terbuka yang mencakup titik ganjil serta genap tak nol.

Petunjuk. Gunakan himpunan terbuka beranggota tunggal pada titik ganjil dan $B(n)$ pada titik genap $n \neq 0$.

Jawaban. $\bar{B} = \{0\}$, dan

$$\mathbb{Z} \setminus \bar{B} = \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ ganjil}}} \{n\} \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ n \text{ genap}}} B(n) \right)$$

Solusi. Titik 0 berada dalam penutupan B . Jika n ganjil, lingkungan terbuka $\{n\}$ tidak bertemu B . Jika n genap dan tak nol, maka $|n| \geq 2$ dan $B(n) = \{n-1, n, n+1\}$ juga tidak memuat 0. Jadi setiap titik selain 0 mempunyai lingkungan terbuka yang menghindari B , sehingga $\bar{B} = \{0\}$. Gabungan pada jawaban memuat tepat semua titik ganjil dan semua titik genap tak nol; setiap sukunya merupakan unsur terbuka, sehingga merupakan penyajian terbuka dari komplemen.

Pemeriksaan M.63 Setiap ruang metrik bersifat reguler. *Jangkar sumber:* prompt 33 dalam latihan *ex_Metric_space_regular*. Untuk ruang metrik (X, d) , buktikan bahwa ruang tersebut reguler. Anda boleh

menggunakan fakta bahwa untuk himpunan tertutup tak kosong C dan $x \notin C$, berlaku $d(x, C) > 0$. *Rubrik:* pisahkan titik dari himpunan tertutup dengan dua himpunan terbuka saling lepas; sertakan sifat T_1 jika definisi reguler yang digunakan mensyaratkannya.

Petunjuk. Ambil $\delta = d(x, C)$, lalu bandingkan $B(x, \delta/3)$ dengan gabungan bola $B(c, \delta/3)$ untuk $c \in C$.

Jawaban. Setiap ruang metrik bersifat reguler: titik di luar himpunan tertutup dapat dipisahkan dari himpunan tersebut oleh lingkungan terbuka saling lepas.

Solusi. Misalkan C tertutup dan $x \notin C$. Jika C kosong, pemisahan langsung. Jika tidak, tetapkan $\delta = d(x, C) > 0$. Definisikan $U = B(x, \delta/3)$ dan $V = \bigcup_{c \in C} B(c, \delta/3)$. Keduanya terbuka, $x \in U$, dan $C \subseteq V$. Jika $z \in U \cap V$, ada $c \in C$ dengan $d(z, c) < \delta/3$, sehingga $d(x, c) \leq d(x, z) + d(z, c) < 2\delta/3$. Ini bertentangan dengan $\delta \leq d(x, c)$. Maka $U \cap V = \emptyset$.

Selain itu, setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup dalam ruang metrik: untuk $y \neq x$, bola $B(y, d(x, y)/2)$ menghindari x , sehingga $X \setminus \{x\}$ terbuka. Jadi pembuktian memenuhi pula konvensi bahwa ruang reguler harus bersifat T_1 .

Pemeriksaan M.64 Setiap ruang metrik bersifat normal. *Jangkar sumber:* prompt 34 dalam latihan *ex Metric_space_regular*. Buktikan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang normal. *Rubrik:* untuk dua himpunan tertutup saling lepas, konstruksi harus tetap bekerja ketika jarak global antara kedua himpunan adalah nol.

Petunjuk. Untuk himpunan tertutup saling lepas C, D , gunakan $U = \{x \mid d(x, C) < d(x, D)\}$ dan tukar C, D untuk mendefinisikan V .

Jawaban. Setiap ruang metrik bersifat normal; dua himpunan tertutup saling lepas selalu mempunyai lingkungan terbuka yang saling lepas.

Solusi. Misalkan C, D tertutup dan saling lepas; kasus ketika salah satunya kosong bersifat langsung. Fungsi jarak ke himpunan bersifat Lipschitz dan karenanya kontinu. Jadi himpunan

$$U = \{x \in X \mid d(x, C) < d(x, D)\}, \quad V = \{x \in X \mid d(x, D) < d(x, C)\}$$

terbuka. Jika $c \in C$, maka $d(c, C) = 0$ dan $d(c, D) > 0$ karena D tertutup serta $c \notin D$; jadi $C \subseteq U$. Demikian pula $D \subseteq V$. Ketaksamaan yang mendefinisikan U dan V tidak mungkin berlaku sekaligus, sehingga $U \cap V = \emptyset$. Ruang metrik juga T_1 , maka syarat normal terpenuhi di bawah kedua konvensi umum.

Pemeriksaan M.65 Topologi K bersifat Hausdorff. *Jangkar sumber:* prompt 35. Misalkan $K = \{1/k \mid k \text{ bilangan bulat positif}\}$, dan τ_K mempunyai basis yang terdiri dari semua interval terbuka (a, b) serta semua $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ Hausdorff. *Rubrik:* gunakan hubungan antara τ_K dan topologi Euklides atau konstruksi lingkungan terpisah secara langsung.

Petunjuk. Setiap himpunan terbuka Euklides tetap terbuka dalam τ_K .

Jawaban. Ya, $(\mathbb{R}, \tau_K)$ merupakan ruang Hausdorff.

Solusi. Basis τ_K memuat semua interval terbuka biasa, sehingga τ_K lebih halus daripada topologi Euklides. Untuk $x \neq y$, pilih interval Euklides terbuka saling lepas U dan V yang masing-masing memuat x dan y . Kedua interval itu juga terbuka dalam τ_K . Jadi pasangan titik berbeda dapat dipisahkan dalam topologi τ_K , dan ruang tersebut Hausdorff.

Panduan latihan Bab 13, bagian kelima

Bagian ini memberi dukungan bertahap untuk prompt latihan 36 sampai 45 menurut peta prompt sumber Bab 13.

Pemeriksaan M.66 Topologi K tidak reguler. *Jangkar sumber:* prompt 36. Untuk $K = \{1/k \mid k \text{ bilangan bulat positif}\}$, topologi τ_K pada $\mathbb{R}$ mempunyai basis semua interval (a, b) dan semua himpunan $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak reguler dan simpulkan bahwa ruang itu tidak termetriskan. *Rubrik:*

buktikan bahwa K tertutup, lalu tunjukkan bahwa titik $0 \notin K$ tidak dapat dipisahkan dari K oleh himpunan terbuka saling lepas.

Petunjuk. Setiap lingkungan 0 memuat $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K$. Lingkungan terbuka dari $1/n \in K$ harus memuat interval terbuka biasa di sekitar $1/n$.

Jawaban. Ruang $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak reguler, sebab 0 dan himpunan tertutup K tidak mempunyai lingkungan terbuka saling lepas. Karena setiap ruang metrik reguler, ruang ini tidak termetriskan.

Solusi. Komplemen $\mathbb{R} \setminus K$ terbuka: jika $x \notin K$, himpunan basis $(x-1, x+1) \setminus K$ memuat x dan termuat dalam komplemen. Jadi K tertutup, sedangkan $0 \notin K$.

Ambil sebarang lingkungan terbuka U dari 0 . Dari bentuk basis, ada $\epsilon > 0$ sehingga $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K \subseteq U$. Ambil sebarang himpunan terbuka V yang memuat K . Pilih n cukup besar sehingga $0 < 1/n < \epsilon/2$. Karena $1/n \in V \cap K$, himpunan V memuat unsur basis yang mengandung $1/n$. Unsur ini harus interval terbuka biasa: himpunan berbentuk $(a, b) \setminus K$ tidak memuat titik K . Interval tersebut beririsan dengan $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K$, misalnya pada suatu titik irasional yang cukup dekat dengan $1/n$. Maka $U \cap V \neq \emptyset$.

Jadi titik 0 dan himpunan tertutup K tidak dapat dipisahkan, sehingga ruang ini tidak reguler. Jika topologi tersebut berasal dari suatu metrik, ruangnya harus reguler; kontradiksi. Maka $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak termetriskan.

Pemeriksaan M.67 Karakterisasi ruang T_1 dengan himpunan beranggota tunggal tertutup.

Jangkar sumber: prompt 37 dalam latihan *ex_T_1_2_3*. Buktikan bahwa ruang topologi X bersifat T_1 jika dan hanya jika setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup. *Rubrik:* buktikan kedua arah menggunakan pasangan titik berbeda dan komplemen himpunan beranggota tunggal.

Petunjuk. Jika X bersifat T_1 , untuk setiap $y \neq x$ pilih himpunan terbuka yang memuat y tetapi tidak memuat x , lalu gabungkan semuanya.

Jawaban. Ruang X bersifat T_1 tepat ketika setiap himpunan beranggota tunggal $\{x\}$ bersifat tertutup.

Solusi. Andaikan X bersifat T_1 dan tetapkan $x \in X$. Untuk setiap $y \neq x$, ada himpunan terbuka U_y yang memuat y tetapi tidak memuat x . Maka $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ terbuka, sehingga $\{x\}$ tertutup.

Sebaliknya, andaikan setiap himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup. Untuk dua titik berbeda x, y , himpunan $X \setminus \{y\}$ terbuka, memuat x , dan tidak memuat y ; demikian pula $X \setminus \{x\}$ memuat y tetapi tidak memuat x . Inilah syarat T_1 .

Pemeriksaan M.68 Hierarki aksioma pemisahan. *Jangkar sumber:* prompt 38 dalam latihan *ex_T_1_2_3*. Tunjukkan bahwa setiap ruang T_2 merupakan ruang T_1 , setiap ruang T_3 merupakan ruang T_2 , dan setiap ruang T_4 merupakan ruang T_3 . *Rubrik:* jelaskan ketiga implikasi dari definisi: Hausdorff, reguler bersama T_1 , dan normal bersama T_1 .

Petunjuk. Untuk $T_2 \Rightarrow T_1$, buktikan bahwa himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup. Untuk dua implikasi berikutnya, pisahkan satu titik dari himpunan beranggota tunggal yang tertutup, lalu pisahkan himpunan tersebut dari himpunan tertutup lain.

Jawaban. Berlaku rantai implikasi $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Solusi. Jika X bersifat T_2 dan $x \in X$, untuk setiap $y \neq x$ ada lingkungan terbuka V_y dari y yang saling lepas dengan suatu lingkungan terbuka dari x ; khususnya $x \notin V_y$. Gabungan semua V_y adalah $X \setminus \{x\}$, jadi himpunan beranggota tunggal bersifat tertutup dan X bersifat T_1 .

Jika X bersifat T_3 , ruang itu T_1 dan reguler. Untuk $x \neq y$, himpunan beranggota tunggal $\{y\}$ bersifat tertutup. Regularitas memisahkan x dari $\{y\}$ dengan himpunan terbuka saling lepas, sehingga X bersifat T_2 .

Jika X bersifat T_4 , ruang itu T_1 dan normal. Untuk titik x di luar himpunan tertutup C , himpunan beranggota tunggal $\{x\}$ juga bersifat tertutup. Normalitas memisahkan $\{x\}$ dan C dengan himpunan terbuka saling lepas. Maka X reguler dan T_1 , yaitu bersifat T_3 .

Pemeriksaan M.69 Topologi komplemen berhingga: T_1 , bukan T_2 . *Jangkar sumber:* prompt 39 dalam latihan *ex_not_T_1_2_3*. Buktikan bahwa $\mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga merupakan

ruang T_1 , tetapi bukan ruang T_2 . *Rubrik:* gunakan ketertutupan himpunan beranggota tunggal untuk bagian T_1 dan sifat irisan dua himpunan terbuka tak kosong untuk menyangkal T_2 .

Petunjuk. Komplemen setiap himpunan beranggota tunggal terbuka karena himpunan itu berhingga. Selain itu, komplemen irisan dua himpunan terbuka kofinit adalah gabungan dua himpunan berhingga.

Jawaban. Garis nyata bertopologi komplemen berhingga bersifat T_1 , tetapi tidak Hausdorff dan karena itu bukan T_2 .

Solusi. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, himpunan beranggota tunggal $\{x\}$ tertutup karena komplemennya terbuka menurut definisi topologi komplemen berhingga. Jadi ruang itu bersifat T_1 .

Jika U, V terbuka dan tak kosong, maka U^c dan V^c berhingga. Karena $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ berhingga sedangkan $\mathbb{R}$ tak berhingga, irisan $U \cap V$ tidak mungkin kosong. Jadi tidak ada dua lingkungan terbuka tak kosong yang saling lepas. Dua titik berbeda tidak dapat dipisahkan, sehingga ruang itu bukan T_2 .

Pemeriksaan M.70 Ruang $\mathbb{R}_K$: T_2 , tetapi bukan T_3 . *Jangkar sumber:* prompt 40 dalam latihan *ex_not_T_1_2_3*. Definisikan $K = \{1/k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ dan beri $\mathbb{R}_K = \mathbb{R}$ topologi dengan basis semua interval terbuka biasa serta semua $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa $\mathbb{R}_K$ bersifat T_2 , tetapi bukan T_3 . *Rubrik:* buktikan sifat Hausdorff dari kehalusan topologi dan ulangi pemisahan gagal antara 0 dan himpunan tertutup K .

Petunjuk. Topologi ini lebih halus daripada topologi Euklides. Untuk kegagalan regularitas, setiap lingkungan 0 memuat interval kecil yang dikurangi K , sedangkan lingkungan titik $1/n$ memuat interval biasa.

Jawaban. Ruang $\mathbb{R}_K$ bersifat T_2 , tetapi tidak reguler; karena itu ruang tersebut bukan T_3 .

Solusi. Semua interval Euklides terbuka juga terbuka dalam $\mathbb{R}_K$. Lingkungan Euklides saling lepas yang memisahkan dua bilangan real berbeda tetap terbuka dalam topologi ini. Jadi $\mathbb{R}_K$ Hausdorff, yaitu bersifat T_2 .

Himpunan K tertutup karena $\mathbb{R} \setminus K$ merupakan gabungan himpunan basis berbentuk $(a, b) \setminus K$, dan $0 \notin K$. Ambil lingkungan terbuka U dari 0 dan lingkungan terbuka V dari K . Ada $\epsilon > 0$ dengan $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K \subseteq U$. Pilih $1/n < \epsilon/2$. Karena V memuat $1/n \in K$, V memuat interval terbuka biasa di sekitar $1/n$; interval itu bertemu $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K$. Maka $U \cap V \neq \emptyset$. Jadi 0 dan himpunan tertutup K tidak dapat dipisahkan, sehingga $\mathbb{R}_K$ tidak reguler dan bukan T_3 .

Pemeriksaan M.71 Apakah setiap titik limit merupakan titik batas? *Jangkar sumber:* prompt 41. Nilai pernyataan: “Setiap titik limit dari suatu subhimpunan A dalam ruang topologi X juga merupakan titik batas A .” *Rubrik:* jika salah, berikan ruang, himpunan, dan titik konkret, lalu verifikasi definisi titik limit dan kegagalan definisi titik batas.

Petunjuk. Titik interior suatu himpunan dapat sekaligus menjadi titik limit. Uji 0 dalam $A = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides.

Jawaban. Salah. Pada $\mathbb{R}$ Euklides, 0 adalah titik limit $A = (-1, 1)$, tetapi bukan titik batas A .

Solusi. Setiap lingkungan Euklides dari 0 memuat titik $A \setminus \{0\}$, sehingga 0 merupakan titik limit $A = (-1, 1)$. Namun $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ adalah lingkungan 0 yang termuat seluruhnya dalam A , sehingga tidak bertemu A^c . Jadi $0 \notin \text{Bdry}(A)$. Contoh ini menyangkal pernyataan.

Pemeriksaan M.72 Apakah setiap titik batas merupakan titik limit? *Jangkar sumber:* prompt 42. Nilai pernyataan: “Setiap titik batas dari suatu subhimpunan A dalam ruang topologi X juga merupakan titik limit A .” *Rubrik:* jika salah, berikan titik batas yang terasing dan periksa kedua definisi secara langsung.

Petunjuk. Pertimbangkan himpunan beranggota tunggal $A = \{0\}$ dalam garis nyata Euklides.

Jawaban. Salah. Dalam $\mathbb{R}$ Euklides, $0 \in \text{Bdry}(\{0\})$, tetapi 0 bukan titik limit $\{0\}$.

Solusi. Setiap lingkungan 0 bertemu $A = \{0\}$ di 0 dan juga memuat bilangan real bukan nol, sehingga bertemu A^c . Maka $0 \in \text{Bdry}(A)$. Akan tetapi $A \setminus \{0\} = \emptyset$, jadi tidak ada lingkungan yang dapat bertemu himpunan tersebut. Dengan demikian 0 bukan titik limit A , dan pernyataan itu salah.

Pemeriksaan M.73 Kesamaan interior dan penutupan. *Jangkar sumber:* prompt 43. Nilai pernyataan: jika $A \subseteq X$ dan $\text{Int}(A) = \bar{A}$, maka A terbuka sekaligus tertutup. *Rubrik:* gunakan dua inklusi universal yang menempatkan A di antara interior dan penutupannya.

Petunjuk. Selalu berlaku $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \bar{A}$.

Jawaban. Benar. Kondisi tersebut memaksa $\text{Int}(A) = A = \bar{A}$.

Solusi. Untuk setiap subhimpunan A , berlaku $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Jika kedua ujungnya sama, semua himpunan dalam rantai inklusi itu sama: $\text{Int}(A) = A = \bar{A}$. Kesamaan $A = \text{Int}(A)$ menyatakan bahwa A terbuka, sedangkan $A = \bar{A}$ menyatakan bahwa A tertutup. Jadi pernyataan benar.

Pemeriksaan M.74 Interior dan penutupan tidak menentukan himpunan. *Jangkar sumber:* prompt 44. Nilai pernyataan: jika $\bar{A} = \bar{B}$ dan $\text{Int}(A) = \text{Int}(B)$, maka $A = B$. *Rubrik:* jika salah, berikan dua himpunan berbeda dalam ruang konkret dan hitung kedua interior serta kedua penutupannya.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$ Euklides, bandingkan bilangan rasional dengan bilangan irasional.

Jawaban. Salah. Ambil $A = \mathbb{Q}$ dan $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dalam $\mathbb{R}$ Euklides.

Solusi. Himpunan rasional dan irasional keduanya rapat dalam $\mathbb{R}$, sebab setiap interval terbuka memuat bilangan dari kedua jenis. Jadi $\bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}$. Tidak ada interval terbuka yang seluruhnya rasional atau seluruhnya irasional, sehingga $\text{Int}(A) = \text{Int}(B) = \emptyset$. Namun $A \neq B$ —bahkan keduanya saling lepas. Maka kesamaan interior dan penutupan tidak menentukan himpunan.

Pemeriksaan M.75 Penutupan tidak selalu mempertahankan irisan. *Jangkar sumber:* prompt 45. Nilai pernyataan $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ untuk sebarang subhimpunan A, B dari ruang topologi X . *Rubrik:* jika salah, berikan dua himpunan konkret dan hitung kedua ruas; sebutkan inklusi yang selalu benar.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$ Euklides, gunakan $A = (0, 1)$ dan $B = (1, 2)$.

Jawaban. Salah. Untuk $A = (0, 1)$ dan $B = (1, 2)$, $\overline{A \cap B} = \emptyset$, tetapi $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.

Solusi. Kedua interval tersebut tidak beririsan, sehingga $A \cap B = \emptyset$ dan $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Di sisi lain, $\bar{A} = [0, 1]$ dan $\bar{B} = [1, 2]$, sehingga $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$. Jadi kesamaan yang dinyatakan salah. Inklusi $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ selalu benar karena $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$.

Panduan latihan Bab 13, bagian keenam

Bagian ini memuat tepat prompt latihan terakhir, yaitu prompt 46 menurut peta prompt sumber Bab 13.

Pemeriksaan M.76 Penutupan mempertahankan gabungan berhingga. *Jangkar sumber:* prompt 46. Nilai pernyataan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ untuk sebarang subhimpunan A, B dari ruang topologi X . *Rubrik:* buktikan kedua inklusi menggunakan monotonisitas penutupan dan sifat gabungan berhingga himpunan tertutup.

Petunjuk. Himpunan $\overline{A \cup B}$ tertutup dan memuat $A \cup B$. Untuk inklusi sebaliknya, gunakan $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$.

Jawaban. Benar. Penutupan dari gabungan dua himpunan sama dengan gabungan kedua penutupannya.

Solusi. Dari $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$, monotonisitas penutupan memberi $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ dan $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Maka $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Sebaliknya, $\bar{A}$ dan $\bar{B}$ tertutup, sehingga gabungan berhingga $\bar{A} \cup \bar{B}$ tertutup. Gabungan ini memuat $A \cup B$. Karena $\overline{A \cup B}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat $A \cup B$, diperoleh $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Kedua inklusi membuktikan kesamaan.

Pemeriksaan penguasaan Bab 13

Delapan pemeriksaan berikut memadukan himpunan tertutup, titik limit, tutupan, batas, kerapatan, dan aksioma separasi dalam persoalan baru. Materi ini ditulis mandiri dalam bahasa Indonesia untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0; materi ini bukan teks, terjemahan, atau solusi resmi GVSU. Kerjakan setiap soal sebelum membuka petunjuk. Jawaban menyatakan hasil utama, sedangkan solusi memberikan uraian matematis lengkap.

Pemeriksaan M.77 Aljabar himpunan tertutup dan syarat gabungan berhingga. Dalam ruang topologi X , buktikan langsung dari hukum De Morgan bahwa irisan sebarang himpunan tertutup dan gabungan berhingga himpunan tertutup bersifat tertutup. Kemudian, dalam $\mathbb{R}$ dengan topologi Euklides, gunakan $C_n = \{1/n\}$ untuk menunjukkan bahwa gabungan terhitung himpunan tertutup tidak harus tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil komplemen dan tukar irisan dengan gabungan.

Tahap 2. Untuk kasus berhingga, gunakan bahwa irisan berhingga himpunan terbuka tetap terbuka.

Tahap 3. Tentukan titik limit dari $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ yang tidak termasuk di dalamnya.

Jawaban. Jika semua C_α tertutup, maka $X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha)$ terbuka. Untuk $C_1, \dots, C_n$, komplemen gabungannya adalah irisan berhingga komplemen yang terbuka. Namun, $\bigcup_{n \geq 1} C_n = \{1/n : n \geq 1\}$ tidak memuat titik limitnya 0, sehingga tidak tertutup.

Solusi. Misalkan $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ keluarga himpunan tertutup. Setiap $X \setminus C_\alpha$ terbuka, sehingga

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus C_\alpha)$$

terbuka. Jadi irisannya tertutup. Jika $C_1, \dots, C_n$ tertutup, maka

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus C_k)$$

terbuka karena hanya merupakan irisan berhingga. Jadi gabungan berhingga tersebut tertutup.

Setiap C_n adalah himpunan beranggota tunggal, maka tertutup dalam $\mathbb{R}$. Tetapkan $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$. Setiap lingkungan Euklides dari 0 memuat $1/n$ untuk semua n yang cukup besar, sehingga 0 merupakan titik limit dari C . Akan tetapi $0 \notin C$. Karena himpunan tertutup harus memuat semua titik limitnya, C tidak tertutup. Dengan demikian kata “berhingga” tidak dapat dihapus dari teorema gabungan.

Pemeriksaan M.78 Tutupan sebagai himpunan tertutup terkecil. Untuk $A \subseteq X$, misalkan

$$F_A = \bigcap \{C \subseteq X \mid C \text{ tertutup dan } A \subseteq C\}.$$

Buktikan bahwa $F_A = \overline{A}$. Turunkan dari hasil ini bahwa $A \subseteq B$ mengakibatkan $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ dan bahwa $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Irisan pada definisi F_A tertutup dan memuat A .

Tahap 2. Setiap himpunan tertutup yang memuat A juga memuat semua titik limit A .

Tahap 3. Gunakan sifat minimal yang baru dibuktikan, bukan perhitungan titik demi titik.

Jawaban. F_A adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A , dan sifat yang sama mencirikan $\overline{A}$; jadi keduanya sama. Monotonisitas dan idempotensi tutupan langsung mengikuti sifat minimal ini.

Solusi. Keluarga pada definisi F_A tidak kosong karena memuat X . Irisan sebarang himpunan tertutup bersifat tertutup, sehingga F_A tertutup; setiap himpunan dalam keluarga itu memuat A , maka $A \subseteq F_A$. Jadi F_A adalah salah satu himpunan tertutup yang memuat A .

Jika C tertutup dan $A \subseteq C$, ambil $x \in A'$. Setiap lingkungan x bertemu $A \setminus \{x\} \subseteq C \setminus \{x\}$, sehingga $x \in C'$. Karena C tertutup, berlaku $C' \subseteq C$, jadi $x \in C$. Karena $\overline{A}$ terdiri atas A beserta titik-titik limitnya, berlaku $\overline{A} \subseteq C$. Ini benar untuk setiap C dalam keluarga tersebut, jadi $\overline{A} \subseteq F_A$. Sebaliknya, $\overline{A}$ sendiri tertutup dan memuat A , sehingga muncul dalam keluarga yang diiris dan memberi $F_A \subseteq \overline{A}$.

Jika $A \subseteq B$, setiap himpunan tertutup yang memuat B juga memuat A . Khususnya $\overline{B}$ adalah himpunan tertutup yang memuat A , maka minimalitas memberi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Karena $\overline{A}$ sudah tertutup, himpunan tertutup terkecil yang memuatnya adalah dirinya sendiri. Jadi $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Pemeriksaan M.79 Tiga wajah batas. Untuk $A \subseteq X$, buktikan identitas

$$\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \text{Int}(A).$$

Gunakan identitas ini untuk membuktikan bahwa $\text{Bdry}(A)$ tertutup, bahwa $\text{Bdry}(A) = \text{Bdry}(X \setminus A)$, dan bahwa $\text{Bdry}(A) = \emptyset$ jika dan hanya jika A buka-tutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Titik batas adalah titik yang setiap lingkungannya bertemu A dan komplementnya.

Tahap 2. Gunakan $X \setminus \text{Int}(A) = \overline{X \setminus A}$.

Tahap 3. Jika batas kosong, bandingkan $\overline{A}$ dengan $\text{Int}(A)$ dan A .

Jawaban. Kedua rumus mengikuti langsung dari pencirian lingkungan. Batas tertutup karena merupakan irisan dua himpunan tertutup; rumusnya simetris terhadap A dan komplementnya. Batas kosong tepat ketika $\overline{A} = \text{Int}(A) = A$, yaitu ketika A sekaligus terbuka dan tertutup.

Solusi. Titik x berada dalam $\overline{A}$ jika dan hanya jika setiap lingkungan x bertemu A . Demikian pula, $x \in \overline{X \setminus A}$ jika dan hanya jika setiap lingkungannya bertemu $X \setminus A$. Kedua syarat berlaku sekaligus tepat ketika x merupakan titik batas A . Maka $\text{Bdry}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Sebuah titik tidak berada dalam $\text{Int}(A)$ tepat ketika setiap lingkungannya bertemu $X \setminus A$. Jadi $X \setminus \text{Int}(A) = \overline{X \setminus A}$, dan

$$\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap (X \setminus \text{Int}(A)) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A).$$

Bentuk irisan membuktikan ketertutupan. Menukar A dengan komplementnya hanya menukar kedua faktor, sehingga batasnya sama.

Jika A buka-tutup, maka $\overline{A} = A = \text{Int}(A)$, jadi batasnya kosong. Sebaliknya, jika batas kosong, maka $\overline{A} \setminus \text{Int}(A) = \emptyset$, sehingga $\overline{A} \subseteq \text{Int}(A)$. Selalu berlaku $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$; ketiganya karena itu sama. Persamaan $A = \text{Int}(A)$ menyatakan bahwa A terbuka, dan $A = \overline{A}$ menyatakan bahwa A tertutup.

Pemeriksaan M.80 Ketunggalan limit dan alasan Hausdorff diperlukan. Buktikan bahwa barisan dalam ruang Hausdorff memiliki paling banyak satu limit. Kemudian ambil $X = \{p, q\}$ dengan topologi indiskret dan tunjukkan bahwa setiap barisan dalam X konvergen ke p sekaligus ke q . Jelaskan tepat di mana bukti pertama gagal pada contoh kedua.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika dua limit berbeda, pisahkan keduanya dengan dua himpunan terbuka yang saling lepas.

Tahap 2. Setelah suatu indeks tertentu, suku barisan harus berada dalam kedua himpunan terbuka tersebut.

Tahap 3. Dalam topologi indiskret, satu-satunya himpunan terbuka yang memuat sebuah titik adalah X .

Jawaban. Dua limit berbeda dalam ruang Hausdorff akan mempunyai lingkungan terbuka saling lepas, sedangkan ekor barisan harus berada dalam keduanya, sebuah kontradiksi. Dalam ruang indiskret, setiap lingkungan terbuka yang relevan adalah X , sehingga syarat konvergensi terpenuhi untuk setiap titik dan pemisahan yang diperlukan tidak ada.

Solusi. Andaikan (x_n) konvergen ke dua titik berbeda x dan y dalam ruang Hausdorff. Ada himpunan terbuka saling lepas U, V dengan $x \in U$ dan $y \in V$. Konvergensi ke x memberi N_U sehingga $x_n \in U$ untuk $n \geq N_U$. Konvergensi ke y memberi N_V sehingga $x_n \in V$ untuk $n \geq N_V$. Jika $n \geq \max\{N_U, N_V\}$, maka $x_n \in U \cap V$, bertentangan dengan $U \cap V = \emptyset$.

Sekarang gunakan topologi $\{\emptyset, X\}$ pada $X = \{p, q\}$. Satu-satunya himpunan terbuka yang memuat p adalah X , dan setiap suku setiap barisan berada dalam X . Jadi definisi konvergensi ke p dipenuhi, bahkan dengan indeks sejak suku pertama. Argumen yang sama berlaku untuk q . Bukti ketunggalan gagal tepat pada langkah memilih lingkungan terbuka saling lepas bagi p dan q ; ruang indiskret bukan Hausdorff.

Pemeriksaan M.81 T_1 tidak menjamin sifat Hausdorff. Misalkan X himpunan tak berhingga dengan topologi komplement berhingga. Buktikan bahwa X merupakan ruang T_1 , tetapi bukan ruang Hausdorff. Nyatakan pula apa yang terjadi pada barisan konstan dalam ruang ini.

Petunjuk. Tahap 1. Ruang bersifat T_1 jika setiap himpunan beranggota tunggal tertutup.

Tahap 2. Dua himpunan terbuka tak kosong dalam topologi komplement berhingga tidak dapat saling lepas.

Tahap 3. Uji konvergensi barisan yang semua sukunya sama dengan x terhadap lingkungan titik $y \neq x$ yang tidak memuat x .

Jawaban. Setiap himpunan beranggota tunggal tertutup, maka ruang dengan topologi komplement berhingga bersifat T_1 . Dua himpunan terbuka tak kosong selalu beririsan, sehingga dua titik berbeda tidak dapat dipisahkan secara Hausdorff. Walaupun ruang tidak Hausdorff, barisan konstan pada x hanya konvergen ke x karena sifat T_1 menyediakan lingkungan setiap $y \neq x$ yang mengecualikan x .

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, komplement $X \setminus \{x\}$ mempunyai komplement berhingga, sehingga terbuka dalam topologi komplement berhingga. Maka $\{x\}$ tertutup. Karena ini berlaku untuk semua x , ruang tersebut bersifat T_1 .

Jika U dan V terbuka tak kosong, komplement keduanya berhingga. Andaikan $U \cap V = \emptyset$. Hukum De Morgan memberi $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, gabungan dua himpunan berhingga. Ini akan membuat X berhingga, sebuah kontradiksi. Jadi tidak ada dua himpunan terbuka tak kosong yang saling lepas, dan ruang tidak Hausdorff.

Barisan konstan $x_n = x$ jelas konvergen ke x . Untuk $y \neq x$, himpunan $X \setminus \{x\}$ adalah lingkungan terbuka dari y yang tidak memuat satu pun suku barisan. Maka barisan tidak konvergen ke y . Jadi kegagalan Hausdorff tidak dengan sendirinya memaksa setiap barisan mempunyai banyak limit.

Pemeriksaan M.82 Garis Sorgenfrey lebih halus secara ketat. Pada $\mathbb{R}$, misalkan τ_E topologi Euklides dan $\tau_{\ell\ell}$ topologi limit bawah dengan basis semua interval $[a, b)$. Buktikan bahwa $\tau_{\ell\ell}$ lebih halus secara ketat daripada τ_E . Buktikan pula bahwa setiap interval basis $[a, b)$ bersifat buka-tutup dalam $\tau_{\ell\ell}$.

Petunjuk. Tahap 1. Untuk $x \in (a, b)$, pilih interval setengah terbuka kecil yang memuat x dan tetap berada dalam (a, b) .

Tahap 2. Himpunan $[0, 1)$ terbuka dalam topologi limit bawah tetapi bukan dalam topologi Euklides.

Tahap 3. Tulis komplement $[a, b)$ sebagai gabungan dua himpunan yang terbuka dalam topologi limit bawah.

Jawaban. Setiap interval Euklides merupakan gabungan interval basis limit bawah, sehingga $\tau_E \subseteq \tau_{\ell\ell}$. Inklusi ketat karena $[0, 1)$ tidak terbuka dalam topologi Euklides. Selain itu,

$$\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty),$$

dan kedua ruas di kanan terbuka dalam topologi limit bawah; maka $[a, b)$ juga tertutup.

Solusi. Ambil interval Euklides (a, b) dan $x \in (a, b)$. Karena $x < b$, interval basis $[x, b)$ memuat x dan berada dalam (a, b) . Jadi setiap titik (a, b) mempunyai anggota basis limit bawah yang berada di dalam interval tersebut. Maka setiap interval Euklides terbuka dalam $\tau_{\ell\ell}$, dan akibatnya $\tau_E \subseteq \tau_{\ell\ell}$.

Himpunan $[0, 1)$ sendiri merupakan anggota basis, sehingga terbuka dalam $\tau_{\ell\ell}$. Himpunan itu tidak terbuka dalam topologi Euklides: setiap interval Euklides yang memuat 0 juga memuat bilangan negatif. Jadi inklusi topologi bersifat ketat.

Untuk interval basis umum, $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Kita mempunyai $(-\infty, a) = \bigcup_{x < a} [x, a)$ dan $[b, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [b, b+n)$. Keduanya gabungan anggota basis, jadi terbuka. Komplement $[a, b)$ terbuka, sehingga $[a, b)$ tertutup sekaligus terbuka.

Pemeriksaan M.83 Tiga pencirian kerapatan. Untuk $A \subseteq X$, buktikan ekuivalensi berikut:

1. A rapat dalam X ;

2. $\bar{A} = X$;
3. setiap himpunan terbuka tak kosong dalam X beririsan dengan A .

Gunakan hasil ini untuk membuktikan bahwa $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$ bertopologi Euklides, sedangkan $\mathbb{Z}$ tidak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan definisi “rapat” dan pencirianutupan melalui lingkungan.

Tahap 2. Jika ada himpunan terbuka tak kosong yang tidak bertemu A , pilih satu titik di dalamnya.

Tahap 3. Gunakan kerapatan bilangan rasional dalam setiap interval real; untuk $\mathbb{Z}$, cari interval terbuka di antara dua bilangan bulat berturutan.

Jawaban. Kerapatan didefinisikan oleh $\bar{A} = X$. Persamaan ini berlaku tepat ketika setiap lingkungan dari setiap titik dalam X bertemu A , yang ekuivalen dengan tidak adanya himpunan terbuka tak kosong yang menghindari A . Setiap interval terbuka real memuat bilangan rasional, tetapi $(1/4, 3/4)$ tidak memuat bilangan bulat.

Solusi. Pernyataan pertama dan kedua sama menurut definisi kerapatan. Andaikan $\bar{A} = X$ dan O terbuka tak kosong. Pilih $x \in O$. Karena $x \in \bar{A}$, setiap lingkungan x , khususnya O , bertemu A . Jadi $O \cap A \neq \emptyset$.

Sebaliknya, andaikan setiap himpunan terbuka tak kosong bertemu A . Untuk sembarang $x \in X$, setiap lingkungan N dari x memuat himpunan terbuka tak kosong O dengan $x \in O \subseteq N$. Hipotesis memberi $O \cap A \neq \emptyset$, maka $N \cap A \neq \emptyset$. Jadi $x \in \bar{A}$. Karena x sembarang, $\bar{A} = X$.

Setiap himpunan terbuka tak kosong dalam topologi Euklides memuat interval terbuka tak kosong, dan setiap interval demikian memuat bilangan rasional. Maka $\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$. Sebaliknya, interval terbuka $(1/4, 3/4)$ tidak bertemu $\mathbb{Z}$. Pencirian ketiga menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}$ tidak rapat.

Pemeriksaan M.84 Ruang metrik bersifat reguler dan normal. Misalkan (X, d) ruang metrik. Pertama, untuk himpunan tertutup tak kosong C dan $x \notin C$, bangun dua himpunan terbuka saling lepas yang masing-masing memuat x dan C . Kemudian, untuk dua himpunan tertutup tak kosong dan saling lepas A, B , gunakan fungsi jarak ke himpunan untuk membuktikan bahwa X bersifat normal. Tangani kasus salah satu himpunan kosong secara terpisah dan jelaskan mengapa tidak aman mengandaikan $d(A, B) > 0$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena C tertutup dan $x \notin C$, $\delta = d(x, C) > 0$. Bandingkan bola berjari-jari $\delta/3$ di x dengan gabungan bola yang sesuai di titik-titik C .

Tahap 2. Untuk normalitas, tetapkan $U = \{z : d(z, A) < d(z, B)\}$ dan $V = \{z : d(z, B) < d(z, A)\}$.

Tahap 3. Fungsi $z \mapsto d(z, A)$ kontinu dan bahkan Lipschitz. Carilah contoh dua himpunan tertutup saling lepas yang makin mendekat di tak hingga.

Jawaban. Ruang metrik bersifat reguler dengan memisahkan x dan C menggunakan jarak positif $d(x, C)$. Untuk normalitas, himpunan U dan V di atas terbuka, saling lepas, dan masing-masing memuat A dan B . Dua himpunan tertutup saling lepas dapat mempunyai jarak infimum nol, jadi satu jari-jari seragam tidak selalu tersedia.

Solusi. Karena C tertutup dan $x \notin C$, pencirian jarak ke himpunan memberi $\delta = d(x, C) > 0$. Tetapkan $U = B(x, \delta/3)$ dan $V = \bigcup_{c \in C} B(c, \delta/3)$. Keduanya terbuka, $x \in U$, dan $C \subseteq V$. Jika $z \in U \cap V$, ada $c \in C$ dengan $d(x, z) < \delta/3$ dan $d(z, c) < \delta/3$. Ketaksamaan segitiga memberi $d(x, c) < 2\delta/3 < \delta$, bertentangan dengan definisi δ . Maka $U \cap V = \emptyset$, dan ruang bersifat reguler.

Jika salah satu dari A, B kosong, pisahkan keduanya dengan $\emptyset$ dan X . Untuk dua himpunan tertutup tak kosong dan saling lepas A, B , fungsi $f(z) = d(z, A) - d(z, B)$ kontinu karena masing-masing fungsi jarak kontinu. Maka $U = f^{-1}((-\infty, 0))$ dan $V = f^{-1}((0, \infty))$ terbuka dan jelas saling lepas. Jika $a \in A$, maka $d(a, A) = 0$, sedangkan $d(a, B) > 0$ karena B tertutup dan $a \notin B$. Jadi $a \in U$. Dengan cara yang sama, $B \subseteq V$. Ini membuktikan normalitas.

Tidak selalu berlaku $d(A, B) > 0$. Dalam $\mathbb{R}^2$, ambil $A = \{(t, 0) : t \geq 1\}$ dan $B = \{(t, 1/t) : t \geq 1\}$. Kedua himpunan tertutup dan saling lepas, tetapi jarak antara $(t, 0)$ dan $(t, 1/t)$ menuju nol. Jadi pemisahan normal harus memakai jarak titik-ke-himpunan yang berubah terhadap titik, bukan satu jarak global positif.

Lampiran N

Panduan Belajar Mandiri Bab 14: Kekontinuan dan Homeomorfisme

Komponen ini mendampingi Bab 14, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Panduan mengikuti urutan sumber untuk seluruh 81 unit belajar mandiri. Tiga tugas induk yang hanya mengelompokkan subpertanyaan dipertahankan sebagai konteks dan tidak dihitung sebagai pertanyaan tersendiri. Delapan pemeriksaan penguasaan orisinal memadukan gagasan bab tanpa menggandakan tugas sumber.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0; teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0.

Panduan Belajar Mandiri: Pengantar Kekontinuan Topologis

Sepuluh panduan ini mendampingi tugas-tugas awal tentang fungsi kontinu, pemetaan terbuka, dan pemetaan tertutup. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu gunakan petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Materi ini ditulis secara terpisah sebagai konten pendamping CC BY 4.0.

Pemeriksaan N.1 Kekontinuan di Titik 4. Misalkan $(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\})$ dan $(Y, \tau_Y) = (\{2, 4, 6, 8\}, \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}, Y\})$. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(x) = 2x$. Apakah f kontinu di 4?

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung $f(4)$.

Tahap 2. Daftarkan himpunan terbuka dalam Y yang memuat $f(4)$.

Tahap 3. Ambil prapeta dari himpunan terbuka tersebut dan uji apakah hasilnya merupakan lingkungan bagi 4.

Jawaban. Ya. Fungsi f kontinu di 4.

Solusi. Kita mempunyai $f(4) = 8$. Satu-satunya himpunan terbuka dalam Y yang memuat 8 adalah Y sendiri. Karena setiap lingkungan bagi 8 harus memuat suatu himpunan terbuka yang memuat 8, satu-satunya lingkungan bagi 8 juga Y . Prapetanya adalah $f^{-1}(Y) = X$, dan X merupakan lingkungan bagi 4. Jadi syarat kekontinuan di 4 terpenuhi.

Pemeriksaan N.2 Menguji Kekontinuan pada Seluruh Ruang. Misalkan dua ruang topologi berikut diberikan:

$$(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}),$$

$$(Y, \tau_Y) = (\{2, 4, 6, 8\}, \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}, Y\}).$$

Untuk $f : X \rightarrow Y$ yang diberikan oleh $f(x) = 2x$, tentukan apakah f merupakan fungsi kontinu.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan pencerian melalui prapeta setiap himpunan terbuka dalam kodomain.

Tahap 2. Pilih himpunan terbuka $\{6\}$ dalam Y .

Tahap 3. Hitung $f^{-1}(\{6\})$ dan bandingkan dengan daftar anggota τ_X .

Jawaban. Tidak. Himpunan $\{6\}$ terbuka dalam Y , tetapi $f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$ tidak terbuka dalam X .

Solusi. Pencerian kekontinuan mensyaratkan agar prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y terbuka dalam X . Karena $f(3) = 6$ dan tidak ada titik lain yang dipetakan ke 6, berlaku $f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$. Himpunan $\{3\}$ tidak tercantum dalam τ_X . Satu kegagalan ini sudah membuktikan bahwa f tidak kontinu, meskipun fungsi tersebut kontinu di titik 4 seperti pada panduan sebelumnya.

Pemeriksaan N.3 Membuktikan Kekontinuan pada Ruang Berhingga. Misalkan $(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\})$ dan $(Y, \tau_Y) = (\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, Y\})$. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ melalui $f(1) = a$, $f(2) = c$, dan $f(3) = f(4) = b$. Tunjukkan bahwa f kontinu.

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena Y berhingga, periksa keempat anggota τ_Y satu per satu.

Tahap 2. Hitung khususnya $f^{-1}(\{a\})$ dan $f^{-1}(\{a, c\})$.

Tahap 3. Pastikan seluruh prapeta yang diperoleh merupakan anggota τ_X .

Jawaban. Fungsi f kontinu karena prapeta $\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, Y$ berturut-turut adalah $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X$, semuanya terbuka dalam X .

Solusi. Himpunan terbuka dalam kodomain tepat $\emptyset, \{a\}, \{a, c\}$, dan Y . Dari nilai-nilai fungsi diperoleh $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{a\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2\}$, dan $f^{-1}(Y) = X$. Keempat hasil tersebut berada dalam τ_X . Oleh karena itu, pencerian melalui prapeta himpunan terbuka menunjukkan bahwa f kontinu.

Pemeriksaan N.4 Fungsi Kontinu yang Bukan Pemetaan Terbuka. Misalkan $(X, \tau_X) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\})$ dan $(Y, \tau_Y) = (\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, Y\})$. Untuk fungsi kontinu $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(1) = a$, $f(2) = c$, dan $f(3) = f(4) = b$, temukan suatu himpunan terbuka O dalam X yang citranya $f(O)$ tidak terbuka dalam Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih salah satu himpunan beranggota tunggal yang terbuka dalam X .

Tahap 2. Hitung citra $f(\{2\})$.

Tahap 3. Bandingkan citra itu dengan daftar anggota τ_Y .

Jawaban. Ambil $O = \{2\}$. Himpunan ini terbuka dalam X , sedangkan $f(O) = \{c\}$ tidak terbuka dalam Y .

Solusi. Karena $\{2\} \in \tau_X$, himpunan $O = \{2\}$ terbuka. Nilai $f(2) = c$ memberi $f(O) = \{c\}$. Akan tetapi, $\{c\}$ bukan salah satu dari $\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, Y$, sehingga tidak terbuka dalam Y . Contoh ini juga memperlihatkan bahwa kekontinuan mengatur prapeta himpunan terbuka, bukan menjamin citra himpunan terbuka selalu terbuka.

Pemeriksaan N.5 Merumuskan Pemetaan Tertutup. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut **pemetaan terbuka** jika $f(O)$ terbuka dalam Y setiap kali O terbuka dalam X . Tuliskan definisi yang serupa bagi **pemetaan tertutup**.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ganti jenis himpunan yang diuji dalam domain.

Tahap 2. Ganti pula sifat yang harus dimiliki citranya dalam kodomain.

Tahap 3. Tetap gunakan citra $f(C)$, bukan prapeta $f^{-1}(C)$.

Jawaban. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ merupakan pemetaan tertutup jika $f(C)$ tertutup dalam Y untuk setiap himpunan tertutup C dalam X .

Solusi. Definisi analog diperoleh dengan mengganti kata “terbuka” oleh “tertutup” pada domain dan kodomain: untuk setiap $C \subseteq X$, jika C tertutup dalam X , maka $f(C)$ harus tertutup dalam Y . Penggu-

naan citra langsung $f(C)$ penting; persyaratan mengenai prapeta himpunan tertutup merupakan pencirian kekontinuan, bukan definisi pemetaan tertutup.

Pemeriksaan N.6 Menentukan Titik-Titik Kekontinuan. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, X\}$. Definisikan $f : X \rightarrow X$ dengan $f(x) = |x - 3| + 1$. Di titik mana saja f kontinu? Apakah f merupakan fungsi kontinu?

Petunjuk. *Tahap 1.* Buat daftar nilai $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.

Tahap 2. Untuk setiap titik x , periksa prapeta himpunan-himpunan terbuka yang memuat $f(x)$.

Tahap 3. Perhatikan $f^{-1}(\{1\})$ saat menguji titik 3 dan $f^{-1}(\{3, 5\})$ saat menguji titik 5.

Jawaban. Fungsi f kontinu tepat di titik 1, 2, dan 4. Fungsi tersebut tidak kontinu pada seluruh X karena gagal kontinu di 3 dan 5.

Solusi. Nilai fungsi berturut-turut adalah $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2$, dan $f(5) = 3$. Untuk memeriksa kekontinuan di suatu titik, cukup memeriksa prapeta setiap himpunan terbuka yang memuat nilai fungsi di titik itu.

Di 1, himpunan terbuka tak trivial yang memuat $f(1) = 3$ adalah $\{3, 5\}$ dan $\{1, 3, 5\}$. Prapetanya masing-masing $\{1, 5\}$ dan $\{1, 3, 5\}$. Himpunan pertama merupakan lingkungan bagi 1 karena memuat himpunan terbuka $\{1\}$, sedangkan himpunan kedua terbuka. Jadi f kontinu di 1. Satu-satunya himpunan terbuka yang memuat 2 adalah X ; karena $f(2) = f(4) = 2$ dan $f^{-1}(X) = X$, fungsi kontinu di 2 dan 4.

Di 3, himpunan terbuka $\{1\}$ memuat $f(3) = 1$, tetapi $f^{-1}(\{1\}) = \{3\}$ bukan lingkungan bagi 3. Di 5, himpunan terbuka $\{3, 5\}$ memuat $f(5) = 3$, tetapi $f^{-1}(\{3, 5\}) = \{1, 5\}$ bukan lingkungan bagi 5. Maka titik-titik kekontinuan tepat $\{1, 2, 4\}$, sehingga f bukan fungsi kontinu.

Pemeriksaan N.7 Identitas dari Topologi Komplemen Berhingga. Misalkan $f : (\mathbb{Z}, \tau_{FC}) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_E)$ diberikan oleh $f(n) = n$, dengan τ_{FC} topologi komplemen berhingga. Apakah f kontinu? Jika tidak, berikan satu titik tertentu tempat f tidak kontinu dan jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pada $\mathbb{Z}$ dengan metrik Euklides, setiap himpunan beranggota tunggal terbuka.

Tahap 2. Uji lingkungan $\{0\}$ dari $f(0) = 0$.

Tahap 3. Tentukan apakah $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ merupakan lingkungan bagi 0 dalam topologi komplemen berhingga.

Jawaban. Fungsi f tidak kontinu di 0; bahkan, fungsi ini tidak kontinu di titik mana pun dalam $\mathbb{Z}$.

Solusi. Dalam $(\mathbb{Z}, d_E)$, bola berjari-jari $1/2$ di sekitar 0 adalah $\{0\}$, sehingga $\{0\}$ merupakan lingkungan terbuka bagi $f(0) = 0$. Prapetanya adalah $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Himpunan ini bukan lingkungan bagi 0 dalam τ_{FC} : setiap himpunan terbuka tak kosong dalam topologi tersebut mempunyai komplemen berhingga dan karena itu tidak dapat termuat dalam $\{0\}$. Jadi f tidak kontinu di 0. Argumen yang sama dengan $\{n\}$ berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, sehingga tidak ada titik kekontinuan.

Pemeriksaan N.8 Identitas Menuju Topologi Komplemen Berhingga. Misalkan $f : (\mathbb{Z}, d_E) \rightarrow (\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ diberikan oleh $f(n) = n$, dengan τ_{FC} topologi komplemen berhingga. Apakah f kontinu? Jika tidak, berikan satu titik tertentu tempat f tidak kontinu dan jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Topologi yang diinduksi oleh d_E pada $\mathbb{Z}$ adalah topologi diskret.

Tahap 2. Untuk setiap $O \in \tau_{FC}$, gunakan sifat fungsi identitas untuk menghitung $f^{-1}(O)$.

Tahap 3. Tanyakan apakah subhimpunan hasil prapeta selalu terbuka dalam domain diskret.

Jawaban. Ya. Fungsi identitas $f : (\mathbb{Z}, d_E) \rightarrow (\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ kontinu.

Solusi. Setiap himpunan beranggota tunggal $\{n\}$ terbuka dalam $(\mathbb{Z}, d_E)$, misalnya sebagai bola berjari-jari $1/2$. Karena setiap subhimpunan $\mathbb{Z}$ merupakan gabungan himpunan beranggota tunggal, topologi domain bersifat diskret. Sekarang ambil sembarang $O \in \tau_{FC}$. Karena f fungsi identitas, $f^{-1}(O) = O$, dan subhimpunan ini terbuka dalam domain diskret. Jadi prapeta setiap himpunan terbuka dalam kodomain terbuka dalam domain, sehingga f kontinu.

Pemeriksaan N.9 Menguji Kekontinuan dengan Basis. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ dan misalkan $\mathcal{B}$ suatu basis bagi topologi pada Y . Apakah syarat bahwa $f^{-1}(B)$ terbuka dalam X untuk setiap $B \in \mathcal{B}$ cukup untuk menyimpulkan bahwa f kontinu? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil sembarang himpunan terbuka O dalam Y .

Tahap 2. Nyatakan O sebagai gabungan anggota-anggota basis yang termuat di dalamnya.

Tahap 3. Gunakan fakta bahwa prapeta mempertahankan gabungan dan bahwa gabungan himpunan terbuka tetap terbuka.

Jawaban. Ya. Setiap himpunan terbuka merupakan gabungan anggota basis, sehingga prapetanya merupakan gabungan prapeta anggota basis yang terbuka.

Solusi. Ambil sembarang $O \in \tau_Y$. Sifat basis memberi $O = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ untuk suatu keluarga $B_\alpha \in \mathcal{B}$ dengan $B_\alpha \subseteq O$. Prapeta mempertahankan gabungan, jadi

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha).$$

Menurut asumsi, setiap $f^{-1}(B_\alpha)$ terbuka dalam X ; gabungannya juga terbuka. Dengan demikian prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y terbuka dalam X , sehingga pencirian kekontinuan menyatakan bahwa f kontinu.

Pemeriksaan N.10 Sasaran Pembuktian Kekontinuan. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ dan asumsikan bahwa $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X setiap kali O terbuka dalam Y . Menurut definisi, apa yang perlu ditunjukkan untuk membuktikan bahwa f merupakan fungsi kontinu?

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat bahwa kekontinuan fungsi berarti kekontinuan di setiap titik domain.

Tahap 2. Pilih sembarang $a \in X$ dan sembarang lingkungan N bagi $f(a)$.

Tahap 3. Nyatakan sifat lingkungan yang harus dipenuhi oleh $f^{-1}(N)$.

Jawaban. Perlu ditunjukkan bahwa untuk setiap $a \in X$ dan setiap lingkungan N bagi $f(a)$ dalam Y , himpunan $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X .

Solusi. Definisi menyatakan bahwa f kontinu di a tepat ketika prapeta setiap lingkungan bagi $f(a)$ merupakan lingkungan bagi a . Karena yang hendak dibuktikan adalah kekontinuan fungsi pada seluruh domain, ambil $a \in X$ secara sembarang, lalu ambil sembarang lingkungan N bagi $f(a)$. Sasaran pembuktiannya adalah menunjukkan bahwa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a . Jika sasaran ini tercapai untuk pilihan sembarang tersebut, f kontinu di setiap titik dan karena itu merupakan fungsi kontinu.

Panduan Belajar Mandiri: Kekontinuan dan Ekuivalensi

Panduan ini mendampingi pertanyaan nonlatihan tentang pembuktian kekontinuan, ekuivalensi metrik dan topologis, serta relasi ekuivalensi. Pada setiap soal, perhatikan dengan cermat sifat yang harus dipertahankan oleh fungsi yang digunakan.

Pemeriksaan N.11 Menafsirkan Suatu Lingkungan. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu fungsi dan andaikan $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X setiap kali O terbuka dalam Y . Misalkan $a \in X$ dan andaikan N suatu lingkungan bagi $f(a)$ dalam Y . Apa yang dapat disimpulkan dari fakta bahwa N merupakan lingkungan?

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat definisi lingkungan suatu titik dalam ruang topologi.

Tahap 2. Cari suatu himpunan terbuka yang berada di antara titik $f(a)$ dan himpunan N .

Tahap 3. Nyatakan kesimpulan itu sebagai rantai keanggotaan dan inklusi.

Jawaban. Terdapat himpunan terbuka O dalam Y sedemikian sehingga $f(a) \in O \subseteq N$.

Solusi. Menurut definisi, suatu himpunan merupakan lingkungan bagi sebuah titik jika himpunan itu memuat suatu himpunan terbuka yang memuat titik tersebut. Karena N merupakan lingkungan bagi $f(a)$,

ada $O \in \tau_Y$ dengan $f(a) \in O$ dan $O \subseteq N$. Pada tahap ini belum perlu disimpulkan bahwa N sendiri terbuka.

Pemeriksaan N.12 Prapeta Suatu Lingkungan. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu fungsi yang memenuhi: $f^{-1}(O)$ terbuka dalam X untuk setiap himpunan terbuka O dalam Y . Jika $a \in X$ dan N merupakan lingkungan bagi $f(a)$, jelaskan mengapa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a dalam X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih O terbuka dengan $f(a) \in O \subseteq N$.

Tahap 2. Terapkan asumsi soal kepada O , bukan langsung kepada N .

Tahap 3. Ambil prapeta pada rantai $f(a) \in O \subseteq N$.

Jawaban. Himpunan $f^{-1}(N)$ memuat himpunan terbuka $f^{-1}(O)$ yang memuat a ; karena itu $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a .

Solusi. Karena N merupakan lingkungan bagi $f(a)$, terdapat $O \in \tau_Y$ dengan $f(a) \in O \subseteq N$. Asumsi mengenai f memberikan $f^{-1}(O) \in \tau_X$. Selain itu, $f(a) \in O$ menyiratkan $a \in f^{-1}(O)$, sedangkan $O \subseteq N$ menyiratkan $f^{-1}(O) \subseteq f^{-1}(N)$. Jadi $f^{-1}(N)$ memuat suatu himpunan terbuka yang memuat a , tepat seperti yang disyaratkan oleh definisi lingkungan bagi a .

Pemeriksaan N.13 Menyelesaikan Bukti Kekontinuan. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu fungsi dan andaikan prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y terbuka dalam X . Untuk setiap $a \in X$ dan setiap lingkungan N bagi $f(a)$, telah ditunjukkan bahwa $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan bagi a . Jelaskan bagaimana hal ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontinu.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bandingkan kesimpulan yang telah diperoleh dengan definisi kontinu di a .

Tahap 2. Perhatikan bahwa a dipilih secara sebarang.

Tahap 3. Gunakan definisi kontinu pada seluruh ruang X .

Jawaban. Kesimpulan tersebut membuktikan bahwa f kontinu di setiap $a \in X$; oleh karena itu f kontinu pada X .

Solusi. Untuk titik sebarang $a \in X$, prapeta setiap lingkungan N bagi $f(a)$ telah terbukti merupakan lingkungan bagi a . Ini persis definisi bahwa f kontinu di a . Karena pilihan a tidak dibatasi, pernyataan itu berlaku pada setiap titik X . Jadi f kontinu. Dengan demikian, bersama arah sebaliknya, diperoleh pencerian bahwa f kontinu jika dan hanya jika prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y terbuka dalam X .

Pemeriksaan N.14 Dua Interval dengan Metrik Euklides. Misalkan $X = ((0, 1), d_X)$ dan $Y = ((0, 2), d_Y)$, dengan d_X dan d_Y keduanya metrik Euklides. Apakah mungkin menemukan bijeksi $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan sifat-sifat metrik, yaitu memenuhi $d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))$ untuk semua $a, b \in (0, 1)$? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan bijeksi yang mempertahankan jarak itu ada.

Tahap 2. Pilih dua titik dalam $(0, 2)$ yang jaraknya lebih besar daripada 1.

Tahap 3. Gunakan surjektivitas untuk mengambil prapeta kedua titik tersebut dalam $(0, 1)$.

Jawaban. Tidak. Setiap dua titik dalam $(0, 1)$ berjarak kurang dari 1, sedangkan $(0, 2)$ memiliki pasangan titik yang berjarak lebih dari 1.

Solusi. Andaikan terdapat bijeksi $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan jarak. Ambil, misalnya, $u = \frac{1}{4}$ dan $v = \frac{7}{4}$ dalam $(0, 2)$. Karena f surjektif, terdapat $a, b \in (0, 1)$ dengan $f(a) = u$ dan $f(b) = v$. Pelestarian jarak akan memberikan

$$|a - b| = d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b)) = |u - v| = \frac{3}{2}.$$

Namun, $|a - b| < 1$ untuk semua $a, b \in (0, 1)$. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa tidak ada bijeksi yang mempertahankan jarak; kedua ruang tersebut tidak ekuivalen secara metrik.

Pemeriksaan N.15 Menyesuaikan Metrik dengan Peregangan. Misalkan $X = ((0, 1), d_X)$ dan $Y = ((0, 2), d_Y)$, dengan $d_X(a, b) = 2|a - b|$ dan $d_Y = d_E$. Anda boleh mengasumsikan bahwa d_X merupakan suatu metrik. Apakah mungkin menemukan bijeksi $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan sifat-sifat metrik? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Cari fungsi sederhana yang memetakan $(0, 1)$ tepat ke $(0, 2)$.

Tahap 2. Periksa secara terpisah bahwa fungsi tersebut bijektif.

Tahap 3. Hitung $d_Y(f(a), f(b))$ dan bandingkan dengan $d_X(a, b)$.

Jawaban. Ya. Fungsi $f(x) = 2x$ adalah bijeksi dari $(0, 1)$ ke $(0, 2)$ dan mempertahankan jarak.

Solusi. Definisikan $f : (0, 1) \rightarrow (0, 2)$ dengan $f(x) = 2x$. Fungsi ini injektif, dan untuk setiap $y \in (0, 2)$ berlaku $y/2 \in (0, 1)$ serta $f(y/2) = y$, sehingga f surjektif. Untuk semua $a, b \in (0, 1)$,

$$d_Y(f(a), f(b)) = |2a - 2b| = 2|a - b| = d_X(a, b).$$

Jadi f merupakan isometri, dan kedua ruang tersebut ekuivalen secara metrik.

Pemeriksaan N.16 Topologi Metrik Taksi dan Metrik Maksimum. Apakah $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan pemetaan identitas pada himpunan dasar $\mathbb{R}^2$.

Tahap 2. Untuk dua titik, tuliskan jarak taksi sebagai jumlah dua selisih koordinat mutlak dan jarak maksimum sebagai nilai terbesar di antaranya.

Tahap 3. Batasi masing-masing jarak dengan kelipatan tetap dari jarak lainnya.

Jawaban. Ya. Pemetaan identitas merupakan homeomorfisme karena $d_M(p, q) \leq d_T(p, q) \leq 2d_M(p, q)$ untuk semua $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Solusi. Tuliskan $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, dan $r_i = |p_i - q_i|$. Maka $d_T(p, q) = r_1 + r_2$ dan $d_M(p, q) = \max\{r_1, r_2\}$. Karena setiap r_i tidak melebihi nilai maksimumnya,

$$d_M(p, q) \leq d_T(p, q) \leq 2d_M(p, q).$$

Jadi kedua metrik saling membatasi dengan konstanta positif 1 dan 2. Teorema perbandingan metrik kemudian menunjukkan bahwa pemetaan identitas dari salah satu ruang ke ruang lainnya dan inversnya kontinu. Karena pemetaan identitas juga bijektif, ia merupakan homeomorfisme. Jadi kedua ruang itu ekuivalen secara topologis.

Pemeriksaan N.17 Topologi Metrik Euklides dan Metrik Taksi. Apakah $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_T)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan pemetaan identitas pada $\mathbb{R}^2$.

Tahap 2. Terapkan $\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v|$.

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, kuadratkan dan gunakan $2|uv| \leq u^2 + v^2$.

Jawaban. Ya. Untuk semua $p, q \in \mathbb{R}^2$ berlaku $d_E(p, q) \leq d_T(p, q) \leq \sqrt{2}d_E(p, q)$, sehingga pemetaan identitas merupakan homeomorfisme.

Solusi. Misalkan selisih koordinat p dan q adalah u dan v . Ketaksamaan pertama mengikuti dari $\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v|$. Selanjutnya,

$$(|u| + |v|)^2 = u^2 + 2|uv| + v^2 \leq 2(u^2 + v^2),$$

sehingga $|u| + |v| \leq \sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}$. Oleh karena itu,

$$d_E(p, q) \leq d_T(p, q) \leq \sqrt{2}d_E(p, q).$$

Teorema perbandingan metrik menjamin bahwa pemetaan identitas dan inversnya kontinu. Pemetaan ini bijektif, maka merupakan homeomorfisme; kedua ruang itu ekuivalen secara topologis.

Pemeriksaan N.18 Dugaan untuk Metrik Euklides dan Metrik Maksimum. Apakah Anda menduga bahwa $(\mathbb{R}^2, d_E)$ dan $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ekuivalen secara topologis? Jelaskan tanpa melakukan perhitungan ataupun perbandingan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bayangkan bentuk bola terbuka untuk kedua metrik tersebut.

Tahap 2. Tanyakan apakah cakram terbuka dapat dideformasi menjadi persegi terbuka tanpa merobek atau merekatkan bidang.

Tahap 3. Ingat bahwa topologi memperhatikan struktur himpunan terbuka, bukan nilai jarak yang persis.

Jawaban. Ya. Secara geometris, lingkungan berbentuk cakram dan lingkungan berbentuk persegi menggambarkan struktur terbuka yang sama pada bidang.

Solusi. Dugaan yang wajar adalah bahwa kedua ruang tersebut ekuivalen secara topologis. Bola terbuka metrik Euklides tampak sebagai cakram, sedangkan bola terbuka metrik maksimum tampak sebagai persegi dengan sisi sejajar sumbu. Cakram dapat diregangkan menjadi persegi, dan sebaliknya, tanpa membuat lubang, merobek, atau merekatkan bidang. Perubahan bentuk ini tidak mengubah gagasan bahwa setiap titik memiliki lingkungan terbuka yang dapat dibuat sekecil yang diinginkan. Karena ekuivalensi topologis mengabaikan nilai jarak yang tepat dan mempertahankan struktur terbuka, gambaran tersebut mendukung jawaban ya. Ini merupakan penjelasan kualitatif sebagaimana diminta; pembuktian formal dapat diberikan secara terpisah melalui pemetaan identitas.

Pemeriksaan N.19 Ekuivalensi Metrik sebagai Relasi Ekuivalensi. Jelaskan mengapa ekuivalensi metrik merupakan relasi ekuivalensi pada setiap himpunan terpilih yang terdiri atas ruang-ruang metrik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk sifat refleksif, gunakan pemetaan identitas suatu ruang metrik.

Tahap 2. Untuk sifat simetris, ambil invers suatu isometri.

Tahap 3. Untuk sifat transitif, komposisikan dua isometri.

Jawaban. Relasi ini refleksif, simetris, dan transitif: pemetaan identitas adalah isometri, invers isometri adalah isometri, dan komposisi isometri juga merupakan isometri.

Solusi. Pada suatu himpunan ruang-ruang metrik, definisikan $X \sim Y$ jika terdapat isometri dari X ke Y . Untuk setiap ruang (X, d_X) , pemetaan identitas i_X bijektif dan memenuhi $d_X(i_X(x), i_X(y)) = d_X(x, y)$; jadi $X \sim X$ dan relasi ini refleksif.

Jika $f : X \rightarrow Y$ suatu isometri, maka $f^{-1} : Y \rightarrow X$ bijektif. Untuk $u, v \in Y$, tuliskan $u = f(x)$ dan $v = f(y)$. Pelestarian jarak oleh f memberikan

$$d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d_X(x, y) = d_Y(u, v).$$

Jadi f^{-1} isometri dan relasi ini simetris.

Terakhir, jika $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ isometri, maka $g \circ f$ bijektif dan, untuk semua $x, y \in X$,

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) = d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Jadi $g \circ f$ isometri dan relasi ini transitif. Ketiga sifat tersebut membuktikan bahwa ekuivalensi metrik merupakan relasi ekuivalensi.

Pemeriksaan N.20 Ekuivalensi Topologis sebagai Relasi Ekuivalensi. Jelaskan mengapa ekuivalensi topologis merupakan relasi ekuivalensi pada setiap himpunan terpilih yang terdiri atas ruang-ruang topologi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tunjukkan bahwa pemetaan identitas merupakan homeomorfisme.

Tahap 2. Tukar arah suatu homeomorfisme dengan mengambil inversnya.

Tahap 3. Gunakan kekontinuan komposisi untuk dua homeomorfisme berurutan.

Jawaban. Relasi ini refleksif, simetris, dan transitif: identitas adalah homeomorfisme, invers homeomorfisme adalah homeomorfisme, dan komposisi homeomorfisme juga merupakan homeomorfisme.

Solusi. Pada suatu himpunan ruang-ruang topologi, definisikan $X \sim Y$ jika terdapat homeomorfisme $f : X \rightarrow Y$. Pemetaan identitas $i_X : X \rightarrow X$ adalah bijeksi kontinu dan inversnya adalah i_X sendiri, yang juga kontinu. Jadi $X \sim X$; relasi ini refleksif.

Jika $f : X \rightarrow Y$ homeomorfisme, definisinya menyatakan bahwa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kontinu. Pemetaan f^{-1} bijektif, dan inversnya, yaitu f , juga kontinu. Maka f^{-1} merupakan homeomorfisme, sehingga relasi ini simetris.

Jika $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ homeomorfisme, komposisi $g \circ f : X \rightarrow Z$ bijektif dan kontinu. Inversnya adalah $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, yang kontinu sebagai komposisi dua fungsi kontinu. Jadi $g \circ f$ merupakan homeomorfisme dan relasi ini transitif. Oleh karena itu, ekuivalensi topologis merupakan relasi ekuivalensi.

Panduan Belajar Mandiri: Invarian Topologis

Panduan ini mendampingi lima pertanyaan klasifikasi tentang sifat yang dipertahankan oleh homeomorfisme. Gunakan bahwa homeomorfisme adalah bijeksi yang memetakan himpunan terbuka pada kedua arah.

Pemeriksaan N.21 Topologi Indiskret. Tentukan apakah sifat “ X memiliki topologi indiskret” merupakan invarian topologis. Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme.

Tahap 2. Ambil sebarang himpunan terbuka V dalam Y dan periksa $f^{-1}(V)$.

Tahap 3. Gunakan bahwa satu-satunya himpunan terbuka dalam X adalah $\emptyset$ dan X .

Jawaban. Ya. Topologi indiskret merupakan invarian topologis.

Solusi. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme dan X memiliki topologi indiskret. Jika V terbuka dalam Y , kekontinuan f memberi $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Jadi $f^{-1}(V) = \emptyset$ atau $f^{-1}(V) = X$. Karena f bijektif, masing-masing kemungkinan memberi $V = \emptyset$ atau $V = Y$. Dengan demikian Y juga memiliki topologi indiskret.

Pemeriksaan N.22 Topologi Diskret. Tentukan apakah sifat “ X memiliki topologi diskret” merupakan invarian topologis. Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil sebarang $V \subseteq Y$.

Tahap 2. Karena X diskret, $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X .

Tahap 3. Gunakan kekontinuan f^{-1} , atau fakta bahwa homeomorfisme merupakan pemetaan terbuka.

Jawaban. Ya. Topologi diskret merupakan invarian topologis.

Solusi. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme dan X diskret. Untuk sebarang $V \subseteq Y$, prapeta $f^{-1}(V)$ adalah himpunan bagian dari X , sehingga terbuka. Karena fungsi invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kontinu, prapeta himpunan terbuka $f^{-1}(V)$ di bawah f^{-1} , yaitu $f(f^{-1}(V)) = V$, terbuka dalam Y . Jadi setiap himpunan bagian dari Y terbuka dan Y diskret.

Pemeriksaan N.23 Topologi Komplemen Hingga. Tentukan apakah sifat “ X memiliki topologi komplemen hingga” merupakan invarian topologis. Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat bahwa himpunan tak kosong terbuka tepat ketika komplemennya berhingga.

Tahap 2. Bijeksi memetakan komplemen: $Y \setminus f(U) = f(X \setminus U)$.

Tahap 3. Bijeksi mempertahankan keberhinggaan dan homeomorfisme memetakan himpunan terbuka.

Jawaban. Ya. Topologi komplemen hingga merupakan invarian topologis.

Solusi. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme dan X memiliki topologi komplemen hingga. Untuk $V \subseteq Y$, himpunan V terbuka dalam Y tepat ketika $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Jika $V \neq \emptyset$, hal ini ekuivalen dengan keberhinggaan $X \setminus f^{-1}(V)$. Bijektivitas memberi $f(X \setminus f^{-1}(V)) = Y \setminus V$, sehingga kondisi itu ekuivalen dengan keberhinggaan $Y \setminus V$. Jadi himpunan terbuka pada Y tepat merupakan $\emptyset$ dan himpunan dengan komplemen berhingga.

Pemeriksaan N.24 Keanggotaan Bilangan Dua. Tentukan apakah sifat “himpunan dasar X memuat bilangan 2” merupakan invarian topologis. Berikan bukti atau contoh penyangkal.

Petunjuk. *Tahap 1.* Topologi tidak bergantung pada nama elemen himpunan dasar.

Tahap 2. Bandingkan dua ruang satu titik.

Tahap 3. Gunakan satu-satunya bijeksi antara $\{2\}$ dan $\{3\}$.

Jawaban. Tidak. Keanggotaan elemen bernama 2 bukan invarian topologis.

Solusi. Ambil $X = \{2\}$ dan $Y = \{3\}$, masing-masing dengan topologi satu-satunya $\{\emptyset, X\}$ dan $\{\emptyset, Y\}$. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(2) = 3$ adalah homeomorfisme, sebab setiap fungsi antara dua ruang satu titik bersifat kontinu pada kedua arah. Namun $2 \in X$ sedangkan $2 \notin Y$. Jadi sifat tersebut tidak dipertahankan oleh homeomorfisme.

Pemeriksaan N.25 Tepat Tiga Belas Elemen. Tentukan apakah sifat “ X memuat tepat 13 elemen” merupakan invarian topologis. Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap homeomorfisme merupakan bijeksi.

Tahap 2. Bijeksi mempertahankan kardinalitas.

Tahap 3. Topologi khusus pada kedua ruang tidak diperlukan.

Jawaban. Ya. Memiliki tepat 13 elemen merupakan invarian topologis.

Solusi. Jika $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme, maka f adalah bijeksi. Apabila X memiliki tepat 13 elemen, pembatasan kodomain dan injektivitas-surjektivitas f menunjukkan bahwa Y juga memiliki tepat 13 elemen. Jadi sifat kardinalitas ini dipertahankan oleh setiap homeomorfisme.

Panduan latihan Bab 14, bagian pertama

Bagian ini memberi dukungan bertahap untuk sepuluh unit soal mandiri pertama pada latihan tentang ekuivalensi metrik, homeomorfisme, dan kekontinuan. Urutannya mengikuti urutan soal pada sumber; uraian jawaban dan solusi di sini merupakan materi pendamping yang ditulis secara terpisah.

Pemeriksaan N.26 Isometri juga mempertahankan jarak pada arah invers. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik yang ekuivalen secara metrik, dan misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu bijeksi sedemikian sehingga

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

untuk semua $x, y \in X$. Buktikan bahwa

$$d_Y(u, v) = d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$$

untuk semua u dan v dalam Y .

Petunjuk. Untuk $u, v \in Y$, tetapkan $x = f^{-1}(u)$ dan $y = f^{-1}(v)$, lalu terapkan persamaan pelestarian jarak kepada x dan y .

Jawaban. Persamaan tersebut berlaku karena $f(f^{-1}(u)) = u$ dan $f(f^{-1}(v)) = v$.

Solusi. Ambil sebarang $u, v \in Y$. Karena f bijektif, $x = f^{-1}(u)$ dan $y = f^{-1}(v)$ terdefinisi dan berada dalam X . Gunakan sifat pelestarian jarak pada pasangan x, y :

$$d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d_Y(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = d_Y(u, v).$$

Karena u dan v sebarang, persamaan berlaku untuk semua pasangan titik dalam Y . Jadi invers isometri itu juga mempertahankan jarak.

Pemeriksaan N.27 Homeomorfisme mempertahankan titik limit. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme, dan $A \subseteq X$. Jika x merupakan titik limit dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik limit dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Ambil lingkungan sebarang V bagi $f(x)$. Prapetanya adalah lingkungan bagi x ; gunakan sifat titik limit, kemudian gunakan keinjektifan f untuk mempertahankan ketaksamaan titik.

Jawaban. Ya. Setiap lingkungan bagi $f(x)$ memuat suatu titik $f(A)$ yang berbeda dari $f(x)$.

Solusi. Ambil lingkungan sebarang V bagi $f(x)$ dalam Y . Karena f kontinu, $f^{-1}(V)$ merupakan lingkungan bagi x . Titik x adalah titik limit A , sehingga terdapat $a \in A$ dengan $a \neq x$ dan $a \in f^{-1}(V)$. Akibatnya, $f(a) \in f(A) \cap V$. Karena suatu homeomorfisme adalah injektif, $a \neq x$ memberikan $f(a) \neq f(x)$. Jadi setiap lingkungan V bagi $f(x)$ bertemu $f(A) \setminus \{f(x)\}$. Menurut definisi, $f(x)$ merupakan titik limit dari $f(A)$.

Pemeriksaan N.28 Homeomorfisme mempertahankan titik interior. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme, dan $A \subseteq X$. Jika x merupakan titik interior dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik interior dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Pilih himpunan terbuka U dengan $x \in U \subseteq A$. Jelaskan mengapa $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ terbuka.

Jawaban. Ya. Homeomorfisme membawa lingkungan terbuka yang termuat dalam A ke lingkungan terbuka yang termuat dalam $f(A)$.

Solusi. Karena x merupakan titik interior A , terdapat himpunan terbuka $U \subseteq X$ dengan $x \in U \subseteq A$. Invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kontinu, sehingga prapeta himpunan terbuka U di bawah f^{-1} terbuka dalam Y . Prapeta ini adalah

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U).$$

Selain itu, $f(x) \in f(U) \subseteq f(A)$. Jadi $f(A)$ memuat lingkungan terbuka $f(U)$ dari $f(x)$, yang berarti $f(x)$ merupakan titik interior dari $f(A)$.

Pemeriksaan N.29 Homeomorfisme mempertahankan titik batas. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme, dan $A \subseteq X$. Jika x merupakan titik batas dari A , apakah $f(x)$ harus merupakan titik batas dari $f(A)$? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Untuk lingkungan V bagi $f(x)$, lingkungan $f^{-1}(V)$ bagi x bertemu A dan $X \setminus A$. Gunakan keinjektifan untuk menentukan citra titik dari komplemen itu.

Jawaban. Ya. Setiap lingkungan bagi $f(x)$ bertemu $f(A)$ dan $Y \setminus f(A)$.

Solusi. Ambil lingkungan sebarang V bagi $f(x)$. Kekontinuan f membuat $f^{-1}(V)$ menjadi lingkungan bagi x . Karena x titik batas A , terdapat $a \in f^{-1}(V) \cap A$ dan $b \in f^{-1}(V) \cap (X \setminus A)$. Maka $f(a) \in V \cap f(A)$.

Di sisi lain, $f(b) \in V$ tetapi $f(b) \notin f(A)$. Memang, jika $f(b) = f(c)$ untuk suatu $c \in A$, keinjektifan f akan memberikan $b = c \in A$, bertentangan dengan $b \notin A$. Jadi $f(b) \in V \cap (Y \setminus f(A))$. Setiap lingkungan V bertemu kedua $f(A)$ dan komplemennya; dengan demikian $f(x)$ merupakan titik batas dari $f(A)$.

Pemeriksaan N.30 Ekuivalensi metrik mengakibatkan ekuivalensi topologis. Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) merupakan ruang metrik yang ekuivalen secara metrik. Tunjukkan bahwa X dan Y ekuivalen secara topologis jika menggunakan topologi metriknya.

Petunjuk. Ambil isometri $f : X \rightarrow Y$. Dalam pembuktian ϵ - δ untuk f maupun f^{-1} , pilihan $\delta = \epsilon$ sudah cukup.

Jawaban. Setiap isometri adalah homeomorfisme terhadap topologi yang diinduksi oleh metrik; jadi kedua ruang tersebut ekuivalen secara topologis.

Solusi. Ekuivalensi metrik menyediakan bijeksi $f : X \rightarrow Y$ dengan $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$. Tetapkan $x \in X$ dan $\epsilon > 0$. Jika $d_X(x, y) < \delta$ dengan $\delta = \epsilon$, maka

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \epsilon.$$

Jadi f kontinu di setiap x .

Karena f bijektif, inversnya terdefinisi. Untuk semua $u, v \in Y$, pelestarian jarak pada arah invers memberikan $d_X(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d_Y(u, v)$. Argumen yang sama, kembali dengan $\delta = \epsilon$, menunjukkan bahwa f^{-1} kontinu. Dengan demikian f adalah bijeksi kontinu dengan invers kontinu, yaitu homeomorfisme antara topologi-topologi metrik pada X dan Y .

Pemeriksaan N.31 Pencirian kekontinuan melalui himpunan tertutup. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) merupakan ruang topologi, dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Buktikan bahwa f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(C)$ merupakan himpunan tertutup dalam X setiap kali C merupakan himpunan tertutup dalam Y .

Petunjuk. Gunakan kesamaan $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ dan ubah himpunan tertutup menjadi komplemen himpunan terbuka pada kedua arah bukti.

Jawaban. Pernyataan itu benar: pencirian prapeta himpunan tertutup setara dengan pencirian prapeta himpunan terbuka karena prapeta mempertahankan komplemen.

Solusi. Andaikan f kontinu dan ambil himpunan tertutup $C \subseteq Y$. Himpunan $Y \setminus C$ terbuka, sehingga $f^{-1}(Y \setminus C)$ terbuka dalam X . Akan tetapi,

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C).$$

Jadi komplemen $f^{-1}(C)$ terbuka, dan karenanya $f^{-1}(C)$ tertutup dalam X .

Sebaliknya, andaikan prapeta setiap himpunan tertutup dalam Y tertutup dalam X . Ambil himpunan terbuka $O \subseteq Y$. Komplemennya $C = Y \setminus O$ tertutup, sehingga $f^{-1}(C)$ tertutup. Maka

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$$

terbuka dalam X . Prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y dengan demikian terbuka dalam X , yang membuktikan kekontinuan f .

Pemeriksaan N.32 Komposisi fungsi kontinu. Misalkan (X, τ_X) , (Y, τ_Y) , dan (Z, τ_Z) merupakan ruang topologi. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu. Buktikan bahwa $g \circ f : X \rightarrow Z$ merupakan fungsi kontinu.

Petunjuk. Untuk himpunan terbuka $O \subseteq Z$, gunakan $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ dan terapkan kekontinuan kedua fungsi secara berurutan.

Jawaban. Komposisi $g \circ f$ kontinu karena prapeta setiap himpunan terbuka di bawah komposisi itu terbuka dalam X .

Solusi. Ambil sebarang himpunan terbuka $O \subseteq Z$. Karena g kontinu, $g^{-1}(O)$ terbuka dalam Y . Karena f kontinu, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ terbuka dalam X . Identitas prapeta komposisi memberikan

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)).$$

Jadi prapeta setiap himpunan terbuka dalam Z di bawah $g \circ f$ terbuka dalam X . Berdasarkan pencirian kekontinuan dengan himpunan terbuka, $g \circ f$ kontinu.

Pemeriksaan N.33 Menguji kekontinuan setelah prakomposisi dengan homeomorfisme. Misalkan (X, τ_X) , (Y, τ_Y) , dan (Z, τ_Z) merupakan ruang topologi. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu homeomorfisme dan $h : (Y, \tau_Y) \rightarrow (Z, \tau_Z)$ suatu fungsi. Buktikan bahwa h kontinu jika dan hanya jika $h \circ f$ kontinu.

Petunjuk. Satu arah mengikuti kekontinuan komposisi. Untuk arah sebaliknya, tuliskan $h = (h \circ f) \circ f^{-1}$.

Jawaban. Kedua pernyataan setara karena f dan f^{-1} kontinu, sedangkan komposisi fungsi-fungsi kontinu selalu kontinu.

Solusi. Jika h kontinu, maka f juga kontinu karena merupakan homeomorfisme. Oleh teorema komposisi, $h \circ f : X \rightarrow Z$ kontinu.

Sebaliknya, andaikan $h \circ f$ kontinu. Invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kontinu menurut definisi homeomorfisme. Karena f bijektif,

$$(h \circ f) \circ f^{-1} = h \circ (f \circ f^{-1}) = h.$$

Ruas kiri adalah komposisi dua fungsi kontinu, sehingga h kontinu. Kedua implikasi membuktikan ekuivalensi yang diminta.

Pemeriksaan N.34 Menguji kekontinuan setelah pascakomposisi dengan homeomorfisme. Misalkan (X, τ_X) , (Y, τ_Y) , dan (Z, τ_Z) merupakan ruang topologi. Misalkan $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ suatu homeomorfisme dan $k : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_X)$ suatu fungsi. Buktikan bahwa k kontinu jika dan hanya jika $f \circ k$ kontinu.

Petunjuk. Satu arah menggunakan komposisi $f \circ k$. Untuk arah sebaliknya, susun kembali $k = f^{-1} \circ (f \circ k)$.

Jawaban. Kedua pernyataan setara karena komposisi dengan homeomorfisme dapat dibatalkan secara kontinu menggunakan f^{-1} .

Solusi. Jika k kontinu, kekontinuan f menunjukkan bahwa komposisi $f \circ k : Z \rightarrow Y$ kontinu.

Sebaliknya, andaikan $f \circ k$ kontinu. Karena f homeomorfisme, $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kontinu. Selain itu,

$$f^{-1} \circ (f \circ k) = (f^{-1} \circ f) \circ k = k.$$

Jadi k adalah komposisi dua fungsi kontinu dan karenanya kontinu. Ini membuktikan kedua arah pernyataan.

Pemeriksaan N.35 Kontinu tepat di satu titik pada ruang berhingga. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, X\}$. Temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di satu titik, atau tunjukkan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.

Petunjuk. Perhatikan bahwa $\{a\}$ dan $\{b\}$ terbuka. Tentukan apa akibatnya bagi kekontinuan sebarang fungsi pada titik a dan b di domain.

Jawaban. Fungsi seperti itu tidak ada. Setiap fungsi $f : X \rightarrow X$ kontinu setidaknya di dua titik, yaitu a dan b .

Solusi. Titik a terisolasi karena singleton $\{a\}$ terbuka. Ambil sebarang fungsi $f : X \rightarrow X$ dan sebarang lingkungan N bagi $f(a)$. Karena $f(a) \in N$, berlaku $a \in f^{-1}(N)$. Dengan demikian $f^{-1}(N)$ memuat himpunan terbuka $\{a\}$, sehingga merupakan lingkungan bagi a . Menurut definisi, f kontinu di a .

Argumen yang sama berlaku bagi b , sebab $\{b\}$ juga terbuka. Jadi, apa pun nilai-nilai fungsi f , fungsi itu selalu kontinu di a dan b . Akibatnya tidak mungkin ada fungsi dari X ke X yang kontinu tepat di satu titik.

Panduan latihan Bab 14, bagian kedua

Bagian ini mengikuti urutan sumber untuk sepuluh unit soal mandiri berikutnya. Setiap unit menyajikan petunjuk bertahap, jawaban singkat, dan pembuktian lengkap yang dapat diperiksa secara mandiri.

Pemeriksaan N.36 Fungsi yang kontinu tepat di dua titik. *Acuan soal sumber:* pada $X = \{a, b, c, d\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, X\}$, temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di dua titik, atau buktikan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.

Petunjuk. Lingkungan terbuka terkecil dari a, b, c, d berturut-turut adalah $\{a\}, \{b\}, X, \{b, d\}$. Pada ruang berhingga ini, f kontinu di x tepat ketika citra lingkungan terkecil x termuat dalam lingkungan terkecil $f(x)$.

Jawaban. Ambil $f(a) = f(b) = f(c) = a$ dan $f(d) = b$. Fungsi ini kontinu tepat di a dan b .

Solusi. Tuliskan N_x untuk lingkungan terbuka terkecil x . Karena topologi ini berhingga, $N_a = \{a\}$, $N_b = \{b\}$, $N_c = X$, dan $N_d = \{b, d\}$; kriteria kontinuitas di satu titik adalah $f(N_x) \subseteq N_{f(x)}$.

Untuk fungsi yang diberikan, $f(N_a) = \{a\} \subseteq N_a$ dan $f(N_b) = \{a\} \subseteq N_a$, sehingga f kontinu di a dan b . Di pihak lain, $f(N_c) = \{a, b\} \not\subseteq N_a$ dan $f(N_d) = \{a, b\} \not\subseteq N_b$. Jadi f tidak kontinu di c maupun d , dan tepat dua titik kontinuitas telah diperoleh.

Pemeriksaan N.37 Fungsi yang kontinu tepat di tiga titik. *Acuan soal sumber:* untuk ruang $X = \{a, b, c, d\}$ dan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, X\}$, temukan fungsi $f : X \rightarrow X$ yang kontinu tepat di tiga titik, atau buktikan bahwa fungsi seperti itu tidak ada.

Petunjuk. Gunakan lagi lingkungan terkecil $N_a = \{a\}$, $N_b = \{b\}$, $N_c = X$, dan $N_d = \{b, d\}$. Memetakan suatu titik ke c memudahkan kontinuitas di titik itu karena $N_c = X$.

Jawaban. Ambil $f(a) = f(b) = f(c) = a$ dan $f(d) = c$. Fungsi ini kontinu tepat di a, b, d .

Solusi. Kriteria $f(N_x) \subseteq N_{f(x)}$ memberikan $f(N_a) = \{a\} \subseteq N_a$ dan $f(N_b) = \{a\} \subseteq N_a$. Selain itu, $f(N_d) = f(\{b, d\}) = \{a, c\} \subseteq N_c = X$. Jadi f kontinu di a, b, d .

Akan tetapi, $f(N_c) = f(X) = \{a, c\}$, sedangkan $N_{f(c)} = N_a = \{a\}$. Inklusi yang diperlukan gagal, sehingga f tidak kontinu di c . Dengan demikian tepat tiga titik kontinuitas diperoleh.

Pemeriksaan N.38 Grafik fungsi kontinu homeomorfik dengan garis. *Acuan soal sumber:* untuk fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, buktikan bahwa grafik $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}^2$, homeomorfik dengan $\mathbb{R}$ bertopologi Euklides.

Petunjuk. Gunakan pemetaan $g(x) = (x, f(x))$. Inversnya pada Γ_f adalah pembatasan proyeksi koordinat pertama.

Jawaban. Ya. Pemetaan $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_f$ dengan $g(x) = (x, f(x))$ adalah suatu homeomorfisme.

Solusi. Pemetaan $g(x) = (x, f(x))$ kontinu karena kedua fungsi koordinatnya, yakni identitas dan f , kontinu. Definisi grafik menunjukkan bahwa g memetakan $\mathbb{R}$ ke Γ_f secara bijektif. Inversnya adalah $g^{-1} = \pi_1|_{\Gamma_f}$, yaitu pembatasan proyeksi kontinu $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pada subruang Γ_f . Karena g dan inversnya kontinu, g merupakan homeomorfisme.

Pemeriksaan N.39 Grafik fungsi tak kontinu tidak selalu berupa garis. *Acuan soal sumber:* jika syarat kontinuitas pada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dihilangkan, tentukan apakah grafik Γ_f tetap harus homeomorfik dengan $\mathbb{R}$, dan buktikan konjektur Anda.

Petunjuk. Cari fungsi lompatan yang grafiknya terpisah menjadi dua bagian pada dua ketinggian yang berbeda. Bandingkan keterhubungan grafik itu dengan keterhubungan $\mathbb{R}$.

Jawaban. Tidak. Fungsi $f(x) = 0$ untuk $x \leq 0$ dan $f(x) = 1$ untuk $x > 0$ mempunyai grafik tak terhubung, jadi grafiknya tidak homeomorfik dengan $\mathbb{R}$.

Solusi. Untuk fungsi tersebut, tuliskan $A = \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ dan $B = \{(x, 1) \mid x > 0\}$. Maka $\Gamma_f = A \cup B$, dan kedua bagian itu tak kosong. Himpunan A adalah irisan grafik dengan himpunan terbuka $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1/2\}$, sedangkan B adalah irisan grafik dengan himpunan terbuka $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1/2\}$. Jadi A dan B merupakan himpunan terbuka yang saling lepas dalam Γ_f dan membentuk pemisahan grafik. Karena $\mathbb{R}$ terhubung sedangkan Γ_f tidak, keduanya tidak homeomorfik.

Pemeriksaan N.40 Identitas antara dua topologi titik khusus. *Acuan soal sumber:* tetapkan $p \in \mathbb{R}$. Tentukan apakah fungsi identitas $i(x) = x$ merupakan homeomorfisme dari topologi titik tertentu $(\mathbb{R}, \tau_p)$ ke topologi titik yang dikecualikan $(\mathbb{R}, \tau_{\overline{p}})$, dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Uji prapeta himpunan $\mathbb{R} \setminus \{p\}$. Himpunan itu terbuka dalam topologi titik yang dikecualikan, tetapi bagaimana statusnya dalam topologi titik tertentu?

Jawaban. Bukan. Fungsi identitas tersebut bahkan tidak kontinu.

Solusi. Himpunan $U = \mathbb{R} \setminus \{p\}$ tidak memuat p , sehingga U terbuka dalam $\tau_{\overline{p}}$. Karena i adalah identitas, $i^{-1}(U) = U$. Namun U tak kosong, bukan seluruh $\mathbb{R}$, dan tidak memuat p ; oleh karena itu U tidak terbuka dalam τ_p . Prapeta suatu himpunan terbuka gagal menjadi terbuka, maka i tidak kontinu dan tidak mungkin menjadi homeomorfisme.

Pemeriksaan N.41 Dua topologi titik khusus tidak homeomorfik. *Acuan soal sumber:* ketika titik khususnya $p = 0$, tentukan apakah $(\mathbb{R}, \tau_p)$ homeomorfik dengan $(\mathbb{R}, \tau_{\overline{p}})$, dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Hitung singleton yang tertutup dalam masing-masing ruang. Sifat “singleton ini tertutup” dipertahankan oleh homeomorfisme.

Jawaban. Tidak. Dalam topologi titik tertentu semua singleton selain $\{p\}$ tertutup, sedangkan dalam topologi titik yang dikecualikan hanya $\{p\}$ yang tertutup.

Solusi. Dalam $(\mathbb{R}, \tau_p)$, singleton $\{x\}$ tertutup tepat ketika komplementnya terbuka. Jika $x \neq p$, komplement itu memuat p dan karenanya terbuka; jika $x = p$, komplementnya tak kosong dan tidak memuat p , sehingga tidak terbuka. Jadi semua singleton kecuali $\{p\}$ tertutup.

Sebaliknya, dalam $(\mathbb{R}, \tau_{\bar{p}})$, komplement $\{p\}$ tidak memuat p dan terbuka. Untuk $x \neq p$, himpunan $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ memuat p tetapi bukan seluruh ruang, sehingga tidak terbuka. Maka hanya $\{p\}$ yang merupakan singleton tertutup. Homeomorfisme memberikan bijeksi antara singleton tertutup, sedangkan kedua ruang memiliki jumlah singleton tertutup yang berbeda. Karena itu tidak ada homeomorfisme di antara keduanya.

Pemeriksaan N.42 Membenamkan interval terbuka dalam garis nyata. *Acuan soal sumber:* tunjukkan bahwa interval terbuka $X = (0, 1)$ bertopologi Euklides dapat ditanamkan dalam $\mathbb{R}$ bertopologi Euklides.

Petunjuk. Perhatikan pemetaan inklusi $j : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dan topologi subruang pada citranya.

Jawaban. Pemetaan inklusi $j(x) = x$ adalah pembenaman $(0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Solusi. Citra inklusi adalah subruang $(0, 1)$ dari $\mathbb{R}$. Topologi pada domain memang topologi subruang Euklides itu. Jadi $j : (0, 1) \rightarrow j((0, 1))$ bijektif, kontinu, dan inversnya adalah identitas pada $(0, 1)$, yang juga kontinu. Dengan demikian j merupakan homeomorfisme ke suatu subruang dari $\mathbb{R}$, sehingga merupakan pembenaman.

Pemeriksaan N.43 Saling tertanam tanpa homeomorfisme. *Acuan soal sumber:* berikan ruang topologi A dan B yang tidak homeomorfik, tetapi A dapat ditanamkan dalam B dan B dapat ditanamkan dalam A .

Petunjuk. Bandingkan $A = (0, 1)$ dan $B = (0, 1]$. Untuk membedakan keduanya, periksa keterhubungan ruang setelah satu titik dihapus.

Jawaban. Ambil $A = (0, 1)$ dan $B = (0, 1]$ dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}$. Keduanya saling tertanam, tetapi tidak homeomorfik.

Solusi. Inklusi $A \hookrightarrow B$ adalah pembenaman. Pemetaan $h : B \rightarrow A$ yang diberikan oleh $h(x) = (x + 1)/3$ merupakan homeomorfisme dari B ke subruang $(1/3, 2/3] \subseteq A$, sehingga juga suatu pembenaman.

Akan tetapi, setiap titik $x \in A$ merupakan titik pemutus: $A \setminus \{x\} = (0, x) \cup (x, 1)$ tidak terhubung. Di ruang B , titik 1 bukan titik pemutus karena $B \setminus \{1\} = (0, 1)$ terhubung. Jika ada homeomorfisme $q : B \rightarrow A$, pembatasannya akan memberi homeomorfisme dari $B \setminus \{1\}$ ke $A \setminus \{q(1)\}$, bertentangan dengan keterhubungan ruang pertama dan ketakterhubungan ruang kedua. Jadi A dan B tidak homeomorfik.

Pemeriksaan N.44 Semua topologi pada himpunan dua elemen. *Acuan soal sumber:* untuk $X = \{a, b\}$, temukan semua topologi yang berbeda pada X dan jelaskan mengapa daftarnya lengkap.

Petunjuk. Setiap topologi wajib memuat $\emptyset$ dan X . Satu-satunya himpunan bagian lain adalah $\{a\}$ dan $\{b\}$; pertimbangkan apakah tidak satu pun, tepat satu, atau keduanya dimasukkan.

Jawaban. Tepat ada empat topologi: $\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X)$.

Solusi. Karena X hanya memiliki empat himpunan bagian, sesudah $\emptyset$ dan X yang wajib dimasukkan, keputusan yang tersisa hanyalah memasukkan atau tidak memasukkan masing-masing dari $\{a\}$ dan $\{b\}$. Keempat pilihan itu menghasilkan daftar pada jawaban. Masing-masing daftar tertutup terhadap gabungan sebarang dan irisan berhingga. Tidak ada himpunan bagian lain yang dapat ditambahkan, sehingga daftar tersebut lengkap.

Pemeriksaan N.45 Kelas homeomorfisme ruang dua elemen. *Acuan soal sumber:* tentukan kelas-kelas homeomorfisme yang berbeda di antara semua ruang topologi pada himpunan $X = \{a, b\}$, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Bandingkan jumlah himpunan terbuka. Untuk dua topologi yang masing-masing mempunyai tepat satu singleton terbuka, uji bijeksi yang menukar a dan b .

Jawaban. Ada tiga kelas: topologi indiskret, topologi diskret, dan satu kelas Sierpiński yang memuat kedua topologi dengan tepat satu singleton terbuka.

Solusi. Homeomorfisme menginduksi bijeksi antara koleksi himpunan terbuka, sehingga jumlah himpunan terbuka dipertahankan. Topologi indiskret mempunyai dua himpunan terbuka, topologi diskret mempunyai empat, dan masing-masing topologi $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ serta $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ mempunyai tiga. Karena itu tiga jenis jumlah tersebut tidak mungkin saling homeomorfik. Bijeksi $s : X \rightarrow X$ yang menukar a dan b membawa singleton terbuka pada topologi pertama ke singleton terbuka pada topologi kedua; s dan inversnya membawa himpunan terbuka ke himpunan terbuka. Jadi kedua topologi tiga-himpunan itu homeomorfik dan seluruh daftar terbagi menjadi tepat tiga kelas.

Panduan latihan Bab 14, bagian ketiga

Bagian ini mendampingi butir latihan 21 sampai 30 dalam urutan sumber, yaitu sepuluh topologi pertama dalam tugas klasifikasi 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$. Notasi $\tau_1, \dots, \tau_{29}$ di bawah mengikuti urutan daftar pada bab utama. Dukungan belajar ini ditulis secara terpisah sebagai konten pendamping CC BY 4.0.

Pemeriksaan N.46 Kelas topologi indiskret. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi pertama $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_1 dan buktikan bahwa daftar tersebut lengkap.

Petunjuk. Homeomorfisme mempertahankan banyaknya himpunan terbuka. Hitung anggota τ_1 , lalu cari topologi lain dalam daftar yang mempunyai jumlah yang sama.

Jawaban. Kelas homeomorfisme τ_1 hanya beranggotakan τ_1 sendiri.

Solusi. Topologi τ_1 mempunyai tepat dua himpunan terbuka, yaitu $\emptyset$ dan X . Setiap homeomorfisme membawa koleksi himpunan terbuka secara bijektif ke koleksi himpunan terbuka, sehingga ruang yang homeomorfik dengan (X, τ_1) juga harus mempunyai tepat dua himpunan terbuka. Di antara 29 topologi yang diberikan, hanya τ_1 yang mempunyai sifat ini. Jadi kelasnya adalah $\{\tau_1\}$. Setiap permutasi X merupakan automorfisme ruang indiskret ini, tetapi tidak menghasilkan topologi lain dalam daftar.

Pemeriksaan N.47 Satu himpunan terbuka beranggota dua: kasus pertama. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi kedua $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_2 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Relabel titik-titik a, b, c . Kardinalitas satu-satunya himpunan terbuka yang tak kosong dan proper harus tetap dua.

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$, dengan himpunan terbuka proper tak kosong masing-masing $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, dan $\{b, c\}$.

Solusi. Tiga topologi yang dimaksud adalah $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, dan $\tau_4 = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$. Pertukaran b dan c membawa τ_2 ke τ_3 , sedangkan pertukaran a dan c membawa τ_2 ke τ_4 . Karena permutasi ini membawa seluruh koleksi himpunan terbuka ke koleksi pasangannya, keduanya merupakan homeomorfisme.

Sebaliknya, ruang yang homeomorfik dengan τ_2 harus mempunyai tepat tiga himpunan terbuka dan satu-satunya himpunan terbuka proper tak kosong harus beranggota dua. Dalam daftar sumber, tepat τ_2, τ_3, τ_4 yang memenuhi kedua invarian ini. Jadi tidak ada anggota kelas yang terlewat.

Pemeriksaan N.48 Satu himpunan terbuka beranggota dua: kasus kedua. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi ketiga $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_3 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Suatu permutasi dapat mengirim subhimpunan dua elemen $\{a, c\}$ ke sembarang subhimpunan dua elemen lain dari X .

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$, yaitu topologi dengan tepat satu himpunan terbuka proper tak kosong yang beranggota dua.

Solusi. Anggota kelas tersebut ialah $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, dan $\tau_4 = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$. Pertukaran b dengan c mengirim τ_3 ke τ_2 , dan pertukaran a dengan b mengirim τ_3 ke τ_4 . Jadi ketiganya saling homeomorfik melalui pelabelan ulang titik.

Banyaknya himpunan terbuka dan kardinalitas masing-masing himpunan terbuka dipertahankan oleh homeomorfisme. Karena τ_3 mempunyai tepat tiga himpunan terbuka dengan pola kardinalitas 0, 2, 3, setiap anggota kelasnya dalam daftar harus mempunyai pola yang sama. Hanya ketiga topologi di atas yang demikian, sehingga daftar kelas tersebut lengkap.

Pemeriksaan N.49 Satu himpunan terbuka beranggota dua: kasus ketiga. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi keempat $\tau_4 = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_4 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Bandingkan struktur topologi, bukan nama titik. Ada tiga pilihan subhimpunan beranggota dua dalam himpunan tiga elemen.

Jawaban. Kelas homeomorfisme τ_4 adalah $\{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

Solusi. Selain $\tau_4 = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$, kelas ini memuat $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ dan $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$. Pertukaran a dengan c membawa $\{b, c\}$ ke $\{a, b\}$, sedangkan pertukaran a dengan b membawanya ke $\{a, c\}$. Kedua permutasi membawa $\emptyset$ ke $\emptyset$ dan X ke X , sehingga memberi homeomorfisme yang diperlukan.

Setiap topologi yang homeomorfik dengan τ_4 harus memiliki tepat satu himpunan terbuka proper tak kosong, dan himpunan itu harus beranggota dua. Tiga pilihan yang tercantum di atas menghabiskan semua subhimpunan dua elemen dari X ; karena itu kelasnya lengkap.

Pemeriksaan N.50 Satu singleton terbuka: kasus pertama. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi kelima $\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_5 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Kirim titik tunggal yang terbuka ke a , b , atau c . Kardinalitas himpunan terbuka proper membedakan kelas ini dari kelas τ_2 .

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_5, \tau_6, \tau_7\}$, dengan singleton terbuka masing-masing $\{a\}$, $\{b\}$, dan $\{c\}$.

Solusi. Ketiga topologi tersebut adalah $\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\tau_6 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, dan $\tau_7 = \{\emptyset, \{c\}, X\}$. Pertukaran a dengan b mengirim τ_5 ke τ_6 ; pertukaran a dengan c mengirimnya ke τ_7 . Maka ketiganya homeomorfik.

Suatu anggota lain dari kelas harus mempunyai tepat tiga himpunan terbuka dengan satu-satunya himpunan proper tak kosong berukuran satu. Ada tepat tiga pilihan singleton pada X , dan semuanya sudah muncul di atas. Topologi τ_2, τ_3, τ_4 tidak termasuk karena himpunan terbuka propernya berukuran dua, suatu invarian di bawah homeomorfisme.

Pemeriksaan N.51 Satu singleton terbuka: kasus kedua. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi keenam $\tau_6 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_6 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Pertukaran a dan b memindahkan singleton terbuka ke $\{a\}$; pertukaran b dan c memindahkannya ke $\{c\}$.

Jawaban. Kelas homeomorfisme τ_6 adalah $\{\tau_5, \tau_6, \tau_7\}$.

Solusi. Kelas yang diklaim terdiri dari $\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\tau_6 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, dan $\tau_7 = \{\emptyset, \{c\}, X\}$. Pertukaran a dengan b membawa τ_6 ke τ_5 , dan pertukaran b dengan c membawanya ke τ_7 . Jadi ketiganya saling homeomorfik.

Homeomorfisme mempertahankan jumlah himpunan terbuka beserta kardinalitasnya. Topologi τ_6 memiliki pola 0, 1, 3; dalam daftar 29 topologi, tepat tiga topologi di atas yang mempunyai pola tersebut. Maka tidak ada anggota kelas lainnya.

Pemeriksaan N.52 Satu singleton terbuka: kasus ketiga. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi ketujuh $\tau_7 = \{\emptyset, \{c\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_7 dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Nama titik tidak bersifat topologis. Relabel c sebagai a atau b , lalu gunakan ukuran singleton sebagai invarian.

Jawaban. Kelas homeomorfisme τ_7 adalah $\{\tau_5, \tau_6, \tau_7\}$.

Solusi. Selain $\tau_7 = \{\emptyset, \{c\}, X\}$, kelas ini memuat $\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ dan $\tau_6 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$. Pertukaran a dengan c memberi homeomorfisme dari τ_7 ke τ_5 , sedangkan pertukaran b dengan c memberi homeomorfisme ke τ_6 .

Setiap topologi yang homeomorfik dengan τ_7 harus mempunyai tepat satu himpunan terbuka proper tak kosong, dan himpunan itu harus berupa singleton. Ketiga singleton pada X sudah menghasilkan tiga topologi yang tercantum. Dengan demikian kelas tersebut lengkap.

Pemeriksaan N.53 Rantai singleton–himpunan dua elemen: kasus pertama. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi kedelapan $\tau_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_8 dan buktikan bahwa daftar tersebut lengkap.

Petunjuk. Catat bukan hanya ukuran dua himpunan terbuka proper, tetapi juga relasi $\{a\} \subsetneq \{a, b\}$. Hitung semua pasangan $S \subsetneq D$ dengan $|S| = 1$ dan $|D| = 2$.

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_8, \tau_9, \tau_{11}, \tau_{13}, \tau_{15}, \tau_{16}\}$. Keenamnya mempunyai empat himpunan terbuka yang membentuk rantai $\emptyset \subsetneq S \subsetneq D \subsetneq X$ dengan $|S| = 1$ dan $|D| = 2$.

Solusi. Keenam anggota kelas, dalam urutan sumber, adalah $\tau_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\tau_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\tau_{11} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\tau_{13} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\tau_{15} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\tau_{16} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Masing-masing ditentukan oleh suatu bendera terurut $S \subsetneq D$, dengan S singleton terbuka dan D himpunan terbuka beranggota dua. Setiap bendera seperti itu dapat dibawa ke bendera lain oleh permutasi X ; permutasi tersebut membawa keempat himpunan terbuka ke keempat himpunan terbuka pasangannya, sehingga merupakan homeomorfisme. Sebagai contoh, pertukaran b dan c membawa τ_8 ke τ_9 .

Untuk kelengkapan, ada tiga pilihan bagi S . Setelah S dipilih, ada dua pilihan bagi D yang memuatnya. Jadi terdapat tepat $3 \cdot 2 = 6$ bendera, dan keenamnya sudah tercantum. Relasi ketercakupan serta kardinalitas dipertahankan oleh homeomorfisme, sehingga tidak ada topologi dengan struktur lain yang dapat masuk ke kelas ini.

Pemeriksaan N.54 Rantai singleton–himpunan dua elemen: kasus kedua. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi kesembilan $\tau_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_9 dan buktikan bahwa daftar tersebut lengkap.

Petunjuk. Struktur pentingnya adalah bendera $\{a\} \subsetneq \{a, c\}$. Relabel pasangan “titik singleton, titik kedua dalam himpunan dua elemen” dengan semua kemungkinan.

Jawaban. Kelas homeomorfisme τ_9 adalah $\{\tau_8, \tau_9, \tau_{11}, \tau_{13}, \tau_{15}, \tau_{16}\}$.

Solusi. Seluruh anggotanya ialah $\tau_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\tau_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\tau_{11} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\tau_{13} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\tau_{15} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\tau_{16} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$. Pertukaran b dengan c , misalnya, mengirim τ_9 ke τ_8 .

Secara umum, pilih gambar singleton $\{a\}$; ada tiga pilihan. Lalu pilih gambar titik c yang menambah singleton itu menjadi himpunan dua elemen; ada dua pilihan tersisa. Setiap pilihan menentukan permutasi yang membawa τ_9 ke salah satu dari enam topologi di atas. Sebaliknya, suatu homeomorfisme harus mempertahankan pola empat himpunan terbuka dan rantai kardinalitas 0, 1, 2, 3. Karena semua $3 \cdot 2 = 6$ kemungkinan sudah terdaftar, kelas ini lengkap.

Pemeriksaan N.55 Singleton dan komplemennya yang sama-sama terbuka. Dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, pertimbangkan topologi kesepuluh $\tau_{10} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Tentukan seluruh anggota kelas homeomorfisme yang memuat τ_{10} dan buktikan bahwa daftar tersebut lengkap.

Petunjuk. Kedua himpunan terbuka proper tak kosong saling lepas dan saling berkomplemen. Pilih titik mana yang menjadi singleton terbuka.

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_{10}, \tau_{12}, \tau_{14}\}$, yaitu topologi yang terdiri dari $\emptyset$, suatu singleton, komplemen singleton tersebut, dan X .

Solusi. Ketiga anggota kelas adalah $\tau_{10} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\tau_{12} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\tau_{14} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$. Pertukaran a dengan b membawa τ_{10} ke τ_{12} , dan pertukaran a dengan c membawanya ke

τ_{14} . Jadi ketiganya saling homeomorfik.

Dalam τ_{10} , dua himpunan terbuka proper tak kosong mempunyai ukuran satu dan dua, tetapi keduanya saling lepas; dengan demikian masing-masing adalah komplement yang lain. Relasi ini dipertahankan oleh homeomorfisme. Ada tepat tiga pilihan singleton dalam X , dan setiap pilihan menentukan komplementnya secara tunggal, sehingga hanya tiga topologi di atas yang mungkin. Ini juga membedakan kelas tersebut dari kelas τ_8 , tempat singleton justru termuat dalam himpunan terbuka beranggota dua.

Panduan latihan Bab 14, bagian keempat

Bagian ini mendampingi sepuluh topologi berikutnya dalam klasifikasi 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$. Dua topologi pada himpunan berhingga ini homeomorfik tepat ketika suatu permutasi titik membawa seluruh keluarga himpunan terbuka yang satu ke keluarga yang lain. Klasifikasi lengkap menghasilkan sembilan kelas homeomorfisme; panduan berikut mengidentifikasi orbit permutasi untuk setiap topologi dalam blok ini. Uraian pendamping ini ditulis secara terpisah.

Pemeriksaan N.56 Kelas rantai dari singleton $\{b\}$ ke $\{a, b\}$. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Catat bahwa dua himpunan terbuka tak trivial mempunyai ukuran 1 dan 2, dan singleton itu termuat dalam doubleton. Relabeli pasangan titik terurut yang menentukan rantai tersebut.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas enam topologi $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Topologi ini mempunyai tepat satu singleton terbuka, yaitu $\{b\}$, dan tepat satu doubleton terbuka, yaitu $\{a, b\}$; selain itu $\{b\} \subset \{a, b\}$. Secara umum, setiap relabelingnya berbentuk

$$\tau_{x,y} = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, X\},$$

dengan $x, y \in X$ dan $x \neq y$. Ada $3 \cdot 2 = 6$ pasangan terurut seperti itu, dan keenam pilihannya memberikan persis enam topologi dalam jawaban.

Untuk dua pasangan terurut (x, y) dan (x', y') , pilih permutasi yang mengirim x ke x' , y ke y' , dan titik sisanya ke titik sisanya. Permutasi itu mengirim setiap anggota $\tau_{x,y}$ ke anggota yang bersesuaian dalam $\tau_{x',y'}$, sehingga merupakan homeomorfisme. Sebaliknya, homeomorfisme mempertahankan ukuran himpunan terbuka dan relasi inklusi. Jadi citra singleton terbuka harus tetap termuat dalam citra doubleton terbuka, dan tidak ada topologi di luar enam bentuk tersebut yang dapat masuk ke kelas ini.

Pemeriksaan N.57 Singleton terbuka dan komplementnya. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Kedua himpunan terbuka tak trivial saling berkomplement. Pilih titik mana yang menjadi satu-satunya singleton terbuka, lalu permutasikan ketiga kemungkinan pilihan itu.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$.

Solusi. Topologi yang diberikan mempunyai tepat satu singleton terbuka $\{b\}$ dan satu doubleton terbuka $\{a, c\}$, dan keduanya saling lepas serta saling berkomplement. Setiap relabeling mempunyai bentuk

$$\sigma_x = \{\emptyset, \{x\}, X \setminus \{x\}, X\},$$

dengan $x \in X$. Tiga pilihan untuk x menghasilkan tepat tiga topologi yang tercantum dalam jawaban.

Jika $x, x' \in X$, setiap permutasi yang mengirim x ke x' juga mengirim komplement $\{x\}$ ke komplement $\{x'\}$; jadi permutasi itu merupakan homeomorfisme dari σ_x ke $\sigma_{x'}$. Sebaliknya, homeomorfisme harus mengirim singleton terbuka yang unik ke singleton terbuka yang unik dan mempertahankan komplement. Karena itu orbit ini tidak memiliki anggota lain. Secara khusus, kelas ini berbeda dari kelas rantai, sebab di sini singleton tidak termuat dalam doubleton terbuka.

Pemeriksaan N.58 Kelas rantai dari singleton $\{b\}$ ke $\{b, c\}$. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Pandang b sebagai titik pertama dan c sebagai titik kedua dalam pasangan terurut yang menghasilkan $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, X\}$.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas enam topologi $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Di luar $\emptyset$ dan X , topologi ini mempunyai rantai $\{b\} \subset \{b, c\}$. Relabeling sebarang ditentukan oleh citra titik b dan citra titik c ; keduanya harus berbeda. Karena ada enam pasangan terurut titik berbeda, orbit relabelingnya adalah keenam topologi dalam jawaban. Misalnya, pertukaran a dengan c mengirim topologi ini ke $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

Setiap pasangan terurut dapat dikirim ke pasangan lain oleh suatu permutasi X , dan permutasi itu membawa singleton serta doubleton pembentuk rantai ke singleton serta doubleton sasaran. Sebaliknya, banyaknya himpunan terbuka dari setiap ukuran dan inklusi singleton ke doubleton dipertahankan oleh homeomorfisme. Maka hanya keenam topologi rantai tersebut yang berada dalam kelas yang sama.

Pemeriksaan N.59 Singleton $\{c\}$ dan doubleton komplementnya. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Himpunan $\{c\}$ adalah satu-satunya singleton terbuka, sedangkan $\{a, b\} = X \setminus \{c\}$. Relabeli titik khusus c .

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$.

Solusi. Topologi ini berbentuk $\sigma_c = \{\emptyset, \{c\}, X \setminus \{c\}, X\}$. Jika suatu permutasi mengirim c ke $x \in X$, citra topologinya adalah $\sigma_x = \{\emptyset, \{x\}, X \setminus \{x\}, X\}$. Untuk $x = a, b, c$, diperoleh tepat tiga topologi dalam jawaban, dan setiap permutasi tersebut adalah homeomorfisme ke citranya.

Tidak ada anggota lain dalam kelas ini. Memang, homeomorfisme mempertahankan fakta bahwa terdapat tepat satu singleton terbuka dan tepat satu doubleton terbuka, serta bahwa keduanya saling berkomplemen. Ciri ini menentukan tiga topologi σ_x di antara daftar 29 topologi.

Pemeriksaan N.60 Kelas rantai dari singleton $\{c\}$ ke $\{a, c\}$. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Topologi ini ditentukan oleh pasangan terurut (c, a) . Tentukan semua citra pasangan itu di bawah keenam permutasi X .

Jawaban. Kelasnya terdiri atas enam topologi $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Dua himpunan terbuka tak trivial membentuk rantai $\{c\} \subset \{a, c\}$. Untuk permutasi $p : X \rightarrow X$, citra topologi adalah

$$p(\tau) = \{\emptyset, \{p(c)\}, \{p(a), p(c)\}, X\}.$$

Pasangan $(p(c), p(a))$ dapat menjadi pasangan terurut mana pun dari dua titik berbeda. Enam kemungkinan itu menghasilkan persis enam topologi yang dicantumkan dalam jawaban, sehingga semuanya homeomorfik.

Sebarang homeomorfisme harus mengirim satu-satunya singleton terbuka ke singleton terbuka dan satu-satunya doubleton terbuka ke doubleton terbuka, sekaligus mempertahankan inklusinya. Oleh sebab itu citranya harus tetap berbentuk $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, X\}$ dengan $x \neq y$. Tidak ada topologi lain dalam orbit ini.

Pemeriksaan N.61 Kelas rantai dari singleton $\{c\}$ ke $\{b, c\}$. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Relabeling ditentukan oleh citra c , yang membentuk singleton, dan citra b , yang melengkapi singleton menjadi doubleton.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas enam topologi $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Topologi yang diberikan mempunyai pola $\emptyset \subset \{c\} \subset \{b, c\} \subset X$. Jika p suatu permutasi X , polanya berubah menjadi $\emptyset \subset \{p(c)\} \subset \{p(b), p(c)\} \subset X$. Keenam kemungkinan pasangan terurut $(p(c), p(b))$ menghasilkan keenam topologi dalam jawaban. Sebaliknya, setiap pasangan terurut titik berbeda dapat dicapai oleh suatu permutasi, sehingga keenamnya memang homeomorfik.

Banyaknya himpunan terbuka menurut ukuran adalah $(1, 1, 1, 1)$ untuk ukuran $0, 1, 2, 3$, dan singleton terbukanya termuat dalam doubleton terbuka. Ukuran serta inklusi dipertahankan oleh setiap homeomorfisme. Ciri-ciri ini memaksa setiap anggota kelas berbentuk rantai yang sama, sehingga daftar enam anggota itu lengkap.

Pemeriksaan N.62 Singleton pusat $\{a\}$ dalam dua doubleton terbuka. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Titik a dikenali secara topologis sebagai singleton terbuka yang merupakan irisan kedua doubleton terbuka. Relabeli titik khusus ini.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, dengan y, z sebagai dua titik lain, definisikan

$$\rho_x = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}.$$

Topologi pada soal adalah ρ_a . Permutasi yang mengirim a ke x mengirim kedua titik sisanya ke y, z dalam suatu urutan dan membawa ρ_a ke ρ_x . Jadi tiga topologi dalam jawaban semuanya homeomorfik.

Dalam setiap ρ_x terdapat tepat satu singleton terbuka dan tepat dua doubleton terbuka; kedua doubleton itu beririsan tepat pada singleton tersebut. Homeomorfisme mempertahankan ukuran dan irisan, sehingga harus mengirim titik khusus x ke titik khusus pada topologi sasaran. Hanya ada tiga pilihan bagi titik itu, maka ketiga topologi yang terdaftar membentuk seluruh kelas.

Pemeriksaan N.63 Singleton pusat $\{b\}$ dalam dua doubleton terbuka. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Kedua doubleton terbuka beririsan pada $\{b\}$. Gunakan citra titik irisan itu untuk menentukan seluruh orbit permutasi.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Topologi ini mempunyai singleton terbuka unik $\{b\}$ dan kedua doubleton yang memuatnya. Jika permutasi p mengirim b ke x , maka citra kedua doubleton adalah dua doubleton yang memuat x . Jadi citra topologinya ialah $\rho_x = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}$, dengan $\{y, z\} = X \setminus \{x\}$. Tiga pilihan $x = a, b, c$ menghasilkan persis tiga topologi dalam jawaban.

Sebaliknya, setiap pilihan titik pusat dapat dicapai oleh suatu permutasi, sehingga ketiganya homeomorfik. Sebuah homeomorfisme harus mempertahankan adanya satu singleton terbuka, dua doubleton terbuka, dan fakta bahwa irisan kedua doubleton adalah singleton itu. Karena struktur tersebut hanya bergantung pada pilihan titik pusat, tidak ada anggota kelas tambahan.

Pemeriksaan N.64 Singleton pusat $\{c\}$ dalam dua doubleton terbuka. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Relabeli c , satu-satunya titik yang singletonnya terbuka dan yang terletak dalam kedua doubleton terbuka.

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Topologi ini adalah $\rho_c = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Permutasi yang mengirim c ke a atau b mengirimnya masing-masing ke dua topologi lain dalam jawaban. Sebagai contoh, pertukaran a dan c menghasilkan $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$, yang sama dengan anggota pertama karena urutan penulisan himpunan terbuka tidak penting.

Singleton terbuka unik merupakan irisan dari dua doubleton terbuka. Ciri tersebut dipertahankan oleh setiap homeomorfisme dan menentukan satu titik pusat. Karena hanya ada tiga pilihan titik pusat, orbitnya berukuran tiga dan tepat sama dengan daftar pada jawaban.

Pemeriksaan N.65 Dua singleton terbuka dan gabungannya. Misalkan $X = \{a, b, c\}$. Dalam klasifikasi 29 topologi pada X , tentukan kelas homeomorfisme yang memuat $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, identifikasi semua anggotanya, dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Topologi ini ditentukan oleh pasangan tak terurut titik yang singletonnya terbuka. Ada berapa subhimpunan dua elemen dalam X ?

Jawaban. Kelasnya terdiri atas $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$, dan $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$.

Solusi. Untuk subhimpunan dua elemen $S = \{x, y\} \subset X$, definisikan

$$\eta_S = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, S, X\}.$$

Topologi pada soal adalah $\eta_{\{a, b\}}$. Sebuah permutasi p mengirimnya ke $\eta_{p(S)}$. Terdapat $\binom{3}{2} = 3$ pilihan untuk S , yang menghasilkan tepat tiga topologi dalam jawaban. Karena setiap dua subhimpunan berukuran dua dapat saling dikirim oleh suatu permutasi, ketiganya homeomorfik.

Sebuah homeomorfisme harus mempertahankan fakta bahwa terdapat tepat dua singleton terbuka dan bahwa gabungan keduanya adalah satu-satunya doubleton terbuka. Karena struktur itu sepenuhnya menentukan pasangan tak terurut S , setiap anggota kelas harus berbentuk η_S . Maka daftar tiga anggota tersebut lengkap. Kelas ini berbeda dari kelas tiga anggota sebelumnya, yang hanya mempunyai satu singleton terbuka dan dua doubleton terbuka.

Panduan latihan Bab 14, bagian kelima

Sembilan unit pertama melanjutkan soal klasifikasi semua topologi pada $X = \{a, b, c\}$. Tuliskan τ_k untuk topologi ke- k dalam urutan sumber. Sebagai acuan bagi pembuktian di bawah, $\tau_{20} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ dan $\tau_{23} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$. Pelabelan ulang ketiga titik menghasilkan partisi orbit

$$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{8, 9, 11, 13, 15, 16\}, \{10, 12, 14\}, \{17, 18, 19\}, \{20, 21, 22\}, \{23, 24, 25, 26, 27, 28\}, \{29\}.$$

Jadi, terdapat tepat sembilan kelas homeomorfisme. Daftar ini dapat diperiksa tanpa menebak: dua topologi pada himpunan berhingga yang sama homeomorfik tepat ketika suatu permutasi titik membawa seluruh koleksi himpunan terbuka yang satu ke koleksi yang lain.

Pemeriksaan N.66 Topologi ke-21 pada tiga titik. *Acuan soal sumber:* dalam klasifikasi 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$, tentukan kelas homeomorfisme dari $\tau_{21} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ dan berikan justifikasi.

Petunjuk. Bandingkan dengan τ_{20} dan tukarkan label b dan c . Untuk memastikan kelasnya tidak lebih besar, hitung banyak himpunan terbuka beranggota satu dan beranggota dua.

Jawaban. Topologi τ_{21} berada dalam kelas $\{\tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22}\}$.

Solusi. Permutasi yang menetapkan a dan menukar b dengan c membawa himpunan terbuka $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ dari τ_{20} berturut-turut ke $\{a\}, \{c\}, \{a, c\}$. Jadi permutasi itu merupakan homeomorfisme dari τ_{20} ke τ_{21} . Setiap topologi dalam orbit ini mempunyai tepat lima himpunan terbuka: dua singleton terbuka dan satu himpunan terbuka beranggota dua, selain $\emptyset$ dan X . Pemeriksaan daftar 29 topologi menunjukkan bahwa hanya nomor 20, 21, dan 22 yang mempunyai profil tersebut. Maka kelas yang dinyatakan di atas tepat.

Pemeriksaan N.67 Topologi ke-22 pada tiga titik. *Acuan soal sumber:* tentukan kelas homeomorfisme dari $\tau_{22} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$ dalam daftar 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$.

Petunjuk. Terapkan perlabelan ulang $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, dan $c \mapsto a$ pada τ_{20} .

Jawaban. Topologi τ_{22} berada dalam kelas $\{\tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22}\}$.

Solusi. Siklus $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$ membawa $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ ke $\{b\}, \{c\}, \{b, c\}$, sehingga membawa τ_{20} tepat ke τ_{22} . Jadi kedua ruang homeomorfik. Seperti pada unit sebelumnya, profil kardinalitas himpunan terbukanya adalah dua singleton dan satu pasangan, dengan total lima himpunan terbuka. Nomor 20, 21, dan 22 adalah seluruh topologi dalam daftar yang memiliki profil ini, sehingga tidak ada anggota kelas lain.

Pemeriksaan N.68 Topologi ke-23 dan orbit enam elemennya. *Acuan soal sumber:* tentukan kelas homeomorfisme dari $\tau_{23} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ di antara 29 topologi pada $X = \{a, b, c\}$.

Petunjuk. Terapkan keenam permutasi a, b, c . Citra yang berbeda adalah tepat topologi nomor 23 sampai 28.

Jawaban. Kelasnya adalah $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Setiap permutasi titik menghasilkan homeomorfisme dari (X, τ_{23}) ke ruang yang koleksi himpunan terbukanya merupakan citra τ_{23} . Keenam permutasi menghasilkan enam koleksi berbeda, yakni nomor 23 sampai 28. Masing-masing mempunyai tepat enam himpunan terbuka, dengan dua singleton dan dua himpunan beranggota dua selain $\emptyset$ dan X . Dalam daftar 29 topologi, hanya keenam topologi tersebut yang mempunyai enam himpunan terbuka. Karena homeomorfisme mempertahankan banyaknya himpunan terbuka, tidak ada topologi lain yang dapat masuk ke orbit ini. Jadi kelas yang dituliskan pada jawaban tepat.

Pemeriksaan N.69 Topologi ke-24 pada orbit enam elemen. *Acuan soal sumber:* klasifikasikan $\tau_{24} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ hingga homeomorfisme.

Petunjuk. Tukarkan a dan b dalam τ_{23} sambil menetapkan c .

Jawaban. Topologi ini berada dalam kelas $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Transposisi $a \leftrightarrow b$ membawa himpunan terbuka tak trivial $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ dari τ_{23} ke $\{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}$, yaitu tepat himpunan terbuka tak trivial τ_{24} . Maka transposisi itu adalah homeomorfisme. Seluruh orbitnya adalah nomor 23–28; orbit tersebut lengkap karena keenamnya adalah satu-satunya topologi dalam daftar yang memiliki enam himpunan terbuka.

Pemeriksaan N.70 Topologi ke-25 pada orbit enam elemen. *Acuan soal sumber:* klasifikasikan $\tau_{25} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$ hingga homeomorfisme.

Petunjuk. Tukarkan b dan c dalam τ_{23} .

Jawaban. Topologi ini berada dalam kelas $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Transposisi $b \leftrightarrow c$ membawa $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ ke $\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}$. Jadi citra τ_{23} adalah τ_{25} , dan permutasi itu merupakan homeomorfisme. Kelengkapan kelas nomor 23–28 kembali mengikuti fakta bahwa keenam topologi inilah seluruh topologi dengan enam himpunan terbuka dalam daftar.

Pemeriksaan N.71 Topologi ke-26 pada orbit enam elemen. *Acuan soal sumber:* klasifikasikan $\tau_{26} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ hingga homeomorfisme.

Petunjuk. Pada τ_{23} , terapkan permutasi $a \mapsto c$, $b \mapsto a$, dan $c \mapsto b$.

Jawaban. Topologi ini berada dalam kelas $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Permutasi $a \mapsto c$, $b \mapsto a$, $c \mapsto b$ membawa singleton terbuka $\{a\}, \{b\}$ ke $\{c\}, \{a\}$ dan membawa pasangan terbuka $\{a, b\}, \{a, c\}$ ke $\{a, c\}, \{b, c\}$. Karena itu koleksi citranya adalah tepat τ_{26} . Argumen jumlah himpunan terbuka menunjukkan bahwa orbit nomor 23–28 ini tidak mempunyai anggota tambahan.

Pemeriksaan N.72 Topologi ke-27 pada orbit enam elemen. *Acuan soal sumber:* klasifikasikan $\tau_{27} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, X\}$ hingga homeomorfisme.

Petunjuk. Gunakan siklus $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$ pada τ_{23} .

Jawaban. Topologi ini berada dalam kelas $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Siklus yang diberikan membawa $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ ke $\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}$. Maka siklus itu memetakan τ_{23} ke τ_{27} dan merupakan homeomorfisme. Keenam topologi nomor 23–28 membentuk seluruh kelas karena semuanya, dan hanya mereka, mempunyai enam himpunan terbuka dalam daftar.

Pemeriksaan N.73 Topologi ke-28 pada orbit enam elemen. *Acuan soal sumber:* klasifikasikan $\tau_{28} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$ hingga homeomorfisme.

Petunjuk. Tukarkan a dan c dalam τ_{23} sambil menetapkan b .

Jawaban. Topologi ini berada dalam kelas $\{\tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{25}, \tau_{26}, \tau_{27}, \tau_{28}\}$.

Solusi. Transposisi $a \leftrightarrow c$ membawa $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ ke $\{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$. Ini adalah koleksi himpunan terbuka tak trivial τ_{28} , sehingga transposisi tersebut merupakan homeomorfisme dari τ_{23} . Argumen jumlah himpunan terbuka membuktikan bahwa kelasnya tepat nomor 23–28.

Pemeriksaan N.74 Topologi ke-29: ruang diskret. *Acuan soal sumber:* tentukan kelas homeomorfisme topologi diskret $\tau_{29} = \mathcal{P}(X)$ pada $X = \{a, b, c\}$ di antara 29 topologi yang terdaftar.

Petunjuk. Banyaknya himpunan terbuka dipertahankan oleh homeomorfisme. Berapa banyak himpunan terbuka dalam topologi diskret pada tiga titik?

Jawaban. Kelasnya hanya $\{\tau_{29}\}$ dalam daftar ini.

Solusi. Topologi diskret pada tiga titik memuat semua $2^3 = 8$ himpunan bagian sebagai himpunan terbuka. Homeomorfisme membawa koleksi himpunan terbuka secara bijektif ke koleksi himpunan terbuka ruang sasaran, sehingga ruang yang homeomorfik dengannya juga harus mempunyai delapan himpunan terbuka. Di antara 29 topologi pada himpunan tetap X , hanya $\tau_{29} = \mathcal{P}(X)$ yang mempunyai delapan himpunan terbuka. Jadi orbitnya merupakan singleton.

Pemeriksaan N.75 Aksioma separasi merupakan sifat topologis. *Acuan soal sumber:* tunjukkan bahwa sifat T_i merupakan sifat topologis untuk setiap indeks i yang didefinisikan dalam teks, yakni $i = 1, 2, 3, 4$.

Petunjuk. Jika $h : X \rightarrow Y$ homeomorfisme, maka h membawa himpunan terbuka ke himpunan terbuka dan himpunan tertutup ke himpunan tertutup. Tarik titik atau himpunan tertutup di Y kembali ke X , gunakan sifat separasi di X , lalu ambil citra lingkungan yang diperoleh.

Jawaban. Benar. Homeomorfisme mempertahankan sifat T_1 , Hausdorff (T_2), reguler, dan normal; karena itu ia juga mempertahankan gabungan syarat yang mendefinisikan T_3 dan T_4 .

Solusi. Misalkan $h : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme. Karena h^{-1} kontinu, h membawa setiap himpunan terbuka di X ke himpunan terbuka di Y . Dengan mengambil komplemen, h juga membawa himpunan tertutup ke himpunan tertutup.

Jika X bersifat T_1 dan $y_1 \neq y_2$ di Y , terapkan sifat T_1 pada $h^{-1}(y_1) \neq h^{-1}(y_2)$. Citra oleh h dari himpunan terbuka pemisah yang diperoleh memberikan himpunan terbuka di Y yang memuat satu titik tetapi tidak memuat titik lainnya. Jika X bersifat T_2 , cara yang sama membawa dua lingkungan terbuka saling lepas di X ke dua lingkungan terbuka saling lepas di Y .

Selanjutnya, andaikan X reguler. Untuk himpunan tertutup $C \subseteq Y$ dan titik $y \notin C$, himpunan $h^{-1}(C)$ tertutup dan $h^{-1}(y) \notin h^{-1}(C)$. Pisahkan keduanya dengan himpunan terbuka saling lepas di X ; citranya adalah himpunan terbuka saling lepas di Y yang memuat C dan y . Jadi Y reguler. Jika X normal, tarik kembali dua himpunan tertutup saling lepas di Y , pisahkan keduanya di X , lalu ambil citra himpunan terbuka pemisah. Ini membuktikan bahwa Y normal.

Menurut definisi sumber, T_3 berarti reguler sekaligus T_1 , dan T_4 berarti normal sekaligus T_1 . Karena setiap komponen syarat dipertahankan, T_3 dan T_4 juga dipertahankan. Menerapkan argumen yang sama pada homeomorfisme invers h^{-1} memberi implikasi sebaliknya. Jadi untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4$, X bersifat T_i jika dan hanya jika Y bersifat T_i ; inilah arti sifat topologis.

Panduan latihan Bab 14, bagian keenam

Enam panduan terakhir ini mengikuti butir latihan 51 sampai 56 dalam urutan sumber. Untuk setiap pernyataan, “benar” berarti selalu benar; jawaban “salah” harus disertai contoh penyangkal konkret. Dukungan belajar ini ditulis secara terpisah sebagai konten pendamping CC BY 4.0.

Pemeriksaan N.76 Fungsi kontinu belum tentu terbuka. Tentukan benar atau salah: jika $f : X \rightarrow Y$ merupakan fungsi kontinu antara ruang topologi X dan Y , maka $f(U)$ terbuka dalam Y untuk setiap himpunan terbuka U dalam X . Berikan bukti atau contoh penyangkal sesuai jawaban Anda.

Petunjuk. Kekontinuan mengatur prapeta himpunan terbuka, bukan citranya. Pertimbangkan fungsi konstan pada $\mathbb{R}$ dengan topologi biasa.

Jawaban. Salah. Fungsi konstan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, kontinu, tetapi citra himpunan terbuka $(-1, 1)$ adalah singleton $\{0\}$, yang tidak terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Solusi. Beri domain dan kodomain $\mathbb{R}$ topologi Euklides, lalu definisikan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Untuk setiap himpunan terbuka $V \subseteq \mathbb{R}$, prapeta $f^{-1}(V)$ sama dengan $\mathbb{R}$ jika $0 \in V$, dan sama dengan $\emptyset$ jika $0 \notin V$. Kedua kemungkinan itu terbuka, sehingga f kontinu.

Namun, untuk himpunan terbuka $U = (-1, 1)$ berlaku $f(U) = \{0\}$. Singleton ini tidak terbuka dalam topologi Euklides pada $\mathbb{R}$. Jadi fungsi kontinu tidak harus merupakan pemetaan terbuka, dan pernyataan tersebut salah.

Pemeriksaan N.77 Fungsi kuadrat pada topologi komplemen berhingga. Misalkan τ_{FC} topologi komplemen berhingga pada $\mathbb{R}$. Tentukan benar atau salah: fungsi $f : (\mathbb{R}, \tau_{FC}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{FC})$ yang diberikan oleh $f(x) = x^2$ bersifat kontinu. Jelaskan jawaban Anda.

Petunjuk. Jika O terbuka tak kosong, tulis $O = \mathbb{R} \setminus F$ dengan F berhingga. Setiap persamaan $x^2 = y$ mempunyai paling banyak dua penyelesaian real.

Jawaban. Benar. Prapeta setiap himpunan berhingga di bawah $x \mapsto x^2$ berhingga, sehingga prapeta setiap himpunan terbuka komplemen berhingga kembali terbuka.

Solusi. Prapeta $\emptyset$ adalah $\emptyset$, jadi cukup memeriksa himpunan terbuka tak kosong. Ambil $O \in \tau_{FC}$ tak kosong. Ada himpunan berhingga $F \subseteq \mathbb{R}$ sehingga $O = \mathbb{R} \setminus F$. Karena prapeta mempertahankan komplemen,

$$f^{-1}(O) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(F).$$

Untuk setiap $y \in F$, serat $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = y\}$ mempunyai paling banyak dua anggota. Maka $f^{-1}(F)$, sebagai gabungan berhingga dari serat-serat tersebut, juga berhingga. Akibatnya $f^{-1}(O)$ mempunyai komplemen berhingga dan terbuka dalam domain. Prapeta setiap himpunan terbuka dengan demikian terbuka, jadi f kontinu dan pernyataannya benar.

Pemeriksaan N.78 Pemetaan terbuka bijektif belum tentu homeomorfisme. Tentukan benar atau salah: jika $f : X \rightarrow Y$ bijektif dan $f(U)$ terbuka dalam Y untuk setiap himpunan terbuka U dalam X , maka f merupakan homeomorfisme. Berikan bukti atau contoh penyangkal sesuai jawaban Anda.

Petunjuk. Kebijektifan dan sifat terbuka menjamin kekontinuan f^{-1} , tetapi belum menjamin kekontinuan f . Bandingkan topologi indiskret dan diskret pada himpunan dua elemen yang sama.

Jawaban. Salah. Identitas dari himpunan dua elemen bertopologi indiskret ke himpunan yang sama bertopologi diskret bersifat bijektif dan terbuka, tetapi tidak kontinu.

Solusi. Ambil $S = \{0, 1\}$, $X = (S, \{\emptyset, S\})$, dan $Y = (S, \mathcal{P}(S))$. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ sebagai fungsi identitas. Fungsi ini bijektif. Himpunan terbuka dalam X hanya $\emptyset$ dan S ; citranya di bawah f adalah $\emptyset$ dan S , yang keduanya terbuka dalam ruang diskret Y . Jadi f merupakan pemetaan terbuka.

Meskipun demikian, $\{0\}$ terbuka dalam Y , sedangkan $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ tidak terbuka dalam X . Maka f tidak kontinu dan karena itu bukan homeomorfisme. Contoh ini menunjukkan bahwa asumsi pada pernyataan hanya membuat fungsi invers kontinu; kekontinuan fungsi asal masih dapat gagal.

Pemeriksaan N.79 Bijeksi antara ruang diskret. Tentukan benar atau salah: jika X dan Y merupakan ruang topologi diskret dan $f : X \rightarrow Y$ bijektif, maka X dan Y homeomorfik. Jelaskan jawaban Anda.

Petunjuk. Dalam ruang diskret, setiap subhimpunan terbuka. Periksa kekontinuan f dan fungsi inversnya langsung dari definisi melalui prapeta.

Jawaban. Benar. Setiap bijeksi antara dua ruang diskret kontinu dan mempunyai invers yang juga kontinu, sehingga merupakan homeomorfisme.

Solusi. Ambil sembarang himpunan terbuka $V \subseteq Y$. Prapetanya $f^{-1}(V)$ adalah suatu subhimpunan X , dan setiap subhimpunan X terbuka karena topologi X diskret. Jadi f kontinu. Karena f bijektif, terdapat fungsi invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Untuk setiap himpunan terbuka $U \subseteq X$, prapeta U di bawah f^{-1} adalah $f(U)$, yang merupakan suatu subhimpunan Y dan karenanya terbuka dalam topologi diskret Y . Jadi f^{-1} juga kontinu. Dengan demikian f merupakan homeomorfisme, sehingga pernyataan tersebut benar.

Pemeriksaan N.80 Irisan dua relasi ekuivalensi. Misalkan S suatu himpunan dan R_1 serta R_2 relasi ekuivalensi pada S . Tentukan benar atau salah: $R = R_1 \cap R_2$ juga merupakan relasi ekuivalensi pada S . Jelaskan jawaban Anda.

Petunjuk. Periksa sifat refleksif, simetris, dan transitif satu per satu. Jika suatu pasangan berada dalam irisan, pasangan itu berada dalam kedua relasi.

Jawaban. Benar. Irisan $R_1 \cap R_2$ mewarisi sifat refleksif, simetris, dan transitif dari kedua relasi ekuivalensi tersebut.

Solusi. Untuk refleksivitas, ambil $x \in S$. Karena R_1 dan R_2 refleksif, $(x, x) \in R_1$ dan $(x, x) \in R_2$. Jadi $(x, x) \in R_1 \cap R_2 = R$.

Untuk simetri, andaikan $(x, y) \in R$. Pasangan itu berada dalam R_1 dan R_2 . Simetri masing-masing relasi memberi $(y, x) \in R_1$ dan $(y, x) \in R_2$, sehingga $(y, x) \in R$.

Untuk transitivitas, andaikan $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$. Kedua pasangan berada dalam masing-masing R_i . Karena setiap R_i transitif, $(x, z) \in R_1$ dan $(x, z) \in R_2$; maka $(x, z) \in R$. Ketiga syarat relasi ekuivalensi terpenuhi, jadi pernyataannya benar.

Pemeriksaan N.81 Gabungan dua relasi ekuivalensi. Misalkan S suatu himpunan dan R_1 serta R_2 relasi ekuivalensi pada S . Tentukan benar atau salah: $R = R_1 \cup R_2$ juga merupakan relasi ekuivalensi pada S . Berikan bukti atau contoh penyangkal sesuai jawaban Anda.

Petunjuk. Pada $S = \{1, 2, 3\}$, ambil satu relasi yang menyatukan 1 dengan 2 dan relasi lain yang menyatukan 2 dengan 3. Uji transitivitas gabungannya.

Jawaban. Salah. Gabungan dua relasi ekuivalensi tetap refleksif dan simetris, tetapi dapat gagal transitif.

Solusi. Ambil $S = \{1, 2, 3\}$ dan definisikan

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

serta

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Relasi R_1 adalah relasi ekuivalensi dari partisi $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, sedangkan R_2 berasal dari partisi $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Jadi keduanya memang relasi ekuivalensi.

Dalam gabungan $R_1 \cup R_2$, berlaku $(1, 2) \in R_1 \cup R_2$ dan $(2, 3) \in R_1 \cup R_2$. Namun $(1, 3) \notin R_1 \cup R_2$. Dengan demikian gabungan tersebut tidak transitif dan bukan relasi ekuivalensi. Satu contoh penyangkal ini membuktikan bahwa pernyataan umum tersebut salah.

Pemeriksaan penguasaan Bab 14

Delapan pemeriksaan berikut memadukan kekontinuan, pemetaan terbuka dan tertutup, kesetaraan metrik, isometri, homeomorfisme, relasi ekuivalensi, dan invarian topologis dalam persoalan baru. Materi ini ditulis mandiri dalam bahasa Indonesia untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0; materi ini bukan teks, terjemahan, atau solusi resmi GVSU. Kerjakan setiap soal sebelum membuka petunjuk.

Pemeriksaan N.82 Dua pencirian kekontinuan. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ fungsi antara ruang topologi. Buktikan bahwa dua pernyataan berikut ekuivalen: (i) f kontinu di setiap titik menurut definisi lingkungan; (ii) untuk setiap himpunan terbuka $V \subseteq Y$, prapeta $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk arah (i) ke (ii), mulai dari suatu $x \in f^{-1}(V)$.

Tahap 2. Gunakan kekontinuan di x untuk memperoleh himpunan terbuka yang berada di dalam prapeta.

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, masukkan himpunan terbuka di antara $f(x)$ dan lingkungannya.

Jawaban. Kekontinuan titik demi titik membuat setiap titik prapeta suatu himpunan terbuka menjadi titik interior prapeta tersebut. Sebaliknya, prapeta terbuka dari suatu himpunan terbuka yang berada di dalam lingkungan $f(x)$ menjadi lingkungan x yang berada di dalam prapeta lingkungan semula.

Solusi. Andaikan f kontinu di setiap titik dan V terbuka dalam Y . Untuk $x \in f^{-1}(V)$, himpunan V merupakan lingkungan $f(x)$. Kekontinuan di x menyatakan bahwa $f^{-1}(V)$ merupakan lingkungan x . Jadi ada himpunan terbuka U_x dengan $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Karena ini berlaku bagi setiap $x \in f^{-1}(V)$, berlaku

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x,$$

sehingga prapeta tersebut terbuka.

Sebaliknya, andaikan prapeta setiap himpunan terbuka bersifat terbuka. Ambil $x \in X$ dan lingkungan N dari $f(x)$. Ada himpunan terbuka V dengan $f(x) \in V \subseteq N$. Maka $f^{-1}(V)$ terbuka, memuat x , dan berada di dalam $f^{-1}(N)$. Jadi $f^{-1}(N)$ merupakan lingkungan x . Dengan demikian f kontinu di x , dan x tadi sembarang.

Pemeriksaan N.83 Komposisi dan pembatasan fungsi kontinu. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ kontinu. Buktikan bahwa $g \circ f : X \rightarrow Z$ kontinu. Jika $A \subseteq X$ diberi topologi subruang, buktikan pula bahwa pembatasan $f|_A : A \rightarrow Y$ kontinu.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung prapeta $(g \circ f)^{-1}(W)$.

Tahap 2. Untuk pembatasan, hitung $(f|_A)^{-1}(V)$.

Tahap 3. Ingat bentuk umum himpunan terbuka dalam topologi subruang.

Jawaban. Untuk W terbuka dalam Z , prapeta komposisi adalah $f^{-1}(g^{-1}(W))$, yang terbuka. Untuk V terbuka dalam Y , prapeta di bawah pembatasan adalah $A \cap f^{-1}(V)$, yang terbuka dalam A .

Solusi. Ambil himpunan terbuka $W \subseteq Z$. Karena g kontinu, $g^{-1}(W)$ terbuka dalam Y . Karena f kontinu, $f^{-1}(g^{-1}(W))$ terbuka dalam X . Identitas

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

kemudian membuktikan kekontinuan komposisi.

Untuk pembatasan, jika $V \subseteq Y$ terbuka, maka

$$(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V).$$

Himpunan $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Menurut definisi topologi subruang, irisannya dengan A terbuka dalam A . Maka $f|_A$ kontinu.

Pemeriksaan N.84 Bijeksi kontinu belum tentu homeomorfisme. Ambil himpunan S dengan sedikitnya dua elemen. Misalkan S_d adalah S bertopologi diskret dan S_i adalah S bertopologi indiskret. Tunjukkan bahwa fungsi identitas $\text{id} : S_d \rightarrow S_i$ kontinu dan bijektif, tetapi bukan homeomorfisme. Kemudian buktikan bahwa bijeksi kontinu $f : X \rightarrow Y$ merupakan homeomorfisme jika dan hanya jika f merupakan pemetaan terbuka; tunjukkan bahwa kondisi “terbuka” dapat diganti dengan “tertutup”.

Petunjuk. Tahap 1. Periksa hanya dua himpunan terbuka pada kodomain indiskret.

Tahap 2. Hubungkan kekontinuan f^{-1} dengan prapeta di bawah f^{-1} .

Tahap 3. Untuk bijeksi, citra komplemen adalah komplemen citra.

Jawaban. Identitas dari ruang diskret ke ruang indiskret kontinu, tetapi inversnya tidak kontinu karena suatu himpunan bagian sejati tak kosong terbuka di S_d dan tidak terbuka di S_i . Bagi bijeksi, kekontinuan invers tepat berarti bahwa citra setiap himpunan terbuka terbuka; dengan mengambil komplemen, hal ini ekuivalen dengan citra setiap himpunan tertutup bersifat tertutup.

Solusi. Satu-satunya himpunan terbuka dalam S_i adalah $\emptyset$ dan S ; prapetanya di bawah identitas adalah himpunan yang sama dan keduanya terbuka dalam S_d . Jadi identitas tersebut kontinu dan jelas bijektif. Pilih $A \subset S$ yang tak kosong dan sejati. Himpunan A terbuka dalam S_d , tetapi prapetanya di bawah fungsi invers, yaitu A , tidak terbuka dalam S_i . Jadi invers tidak kontinu dan fungsi bukan homeomorfisme.

Sekarang misalkan $f : X \rightarrow Y$ bijektif dan kontinu. Untuk setiap $U \subseteq X$, berlaku $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. Karena itu f^{-1} kontinu jika dan hanya jika $f(U)$ terbuka untuk setiap U terbuka, yakni jika dan hanya jika f merupakan pemetaan terbuka.

Jika $C \subseteq X$ tertutup, bijektivitas memberi $f(X \setminus C) = Y \setminus f(C)$. Dengan mengambil komplemen, citra semua himpunan terbuka terbuka jika dan hanya jika citra semua himpunan tertutup tertutup. Jadi syarat pemetaan terbuka dapat diganti dengan syarat pemetaan tertutup.

Pemeriksaan N.85 Perbandingan metrik dan topologi yang sama. Misalkan d dan e metrik pada himpunan X . Jika ada konstanta $c, C > 0$ sehingga

$$c d(x, y) \leq e(x, y) \leq C d(x, y)$$

untuk semua $x, y \in X$, buktikan bahwa kedua metrik menginduksi topologi yang sama. Lalu, pada $\mathbb{R}$, tetapkan $e(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$. Buktikan bahwa e memang metrik dan menginduksi topologi Euklides, walaupun tidak ada batas bawah global $c|x - y| \leq e(x, y)$ dengan $c > 0$.

Petunjuk. Tahap 1. Bandingkan $B_d(x, r/C)$, $B_e(x, r)$, dan $B_e(x, cr)$.

Tahap 2. Fungsi $\phi(t) = t/(1 + t)$ naik dan subaditif; lalu pecahkan $\phi(t) < r$ untuk $0 < r < 1$.

Tahap 3. Biarkan $|x - y|$ menuju tak hingga untuk menguji batas bawah global.

Jawaban. Inklusi bola $B_d(x, r/C) \subseteq B_e(x, r)$ dan $B_e(x, cr) \subseteq B_d(x, r)$ memberi topologi yang sama. Fungsi $\phi(t) = t/(1 + t)$ naik dan subaditif, sehingga komposisinya dengan metrik Euklides merupakan metrik. Jika $0 < r < 1$, maka $B_e(x, r) = B_d(x, r/(1 - r))$. Namun rasio $e(x, y)/|x - y| = 1/(1 + |x - y|)$ menuju nol.

Solusi. Jika $d(x, y) < r/C$, maka $e(x, y) \leq C d(x, y) < r$; jadi $B_d(x, r/C) \subseteq B_e(x, r)$. Jika $e(x, y) < cr$, maka $c d(x, y) \leq e(x, y) < cr$, sehingga $d(x, y) < r$; jadi $B_e(x, cr) \subseteq B_d(x, r)$. Di setiap titik, setiap bola dari salah satu metrik memuat bola dari metrik lain. Karena bola membentuk basis, topologi yang diinduksi sama.

Untuk contoh pada $\mathbb{R}$, tetapkan $\phi(t) = t/(1 + t)$ untuk $t \geq 0$. Sifat tak negatif, simetri, dan pemisahan titik bagi $e(x, y) = \phi(|x - y|)$ langsung mengikuti sifat nilai mutlak. Fungsi ϕ naik. Selain itu, untuk $a, b \geq 0$,

$$\phi(a) + \phi(b) - \phi(a + b) = \frac{ab(2 + a + b)}{(1 + a)(1 + b)(1 + a + b)} \geq 0.$$

Maka ketaksamaan segitiga bagi nilai mutlak, sifat naik, dan subaditivitas memberi $e(x, z) \leq e(x, y) + e(y, z)$. Jadi e memang metrik.

Sekarang tulis $t = |x - y|$. Jika $0 < r < 1$, maka

$$\frac{t}{1 + t} < r \iff t < \frac{r}{1 - r}.$$

Jadi $B_e(x, r) = B_d(x, r/(1-r))$, dengan d metrik Euklides. Sebaliknya, untuk setiap $s > 0$, pilihan $r = s/(1+s)$ memberi $B_d(x, s) = B_e(x, r)$. Maka kedua keluarga bola menghasilkan topologi yang sama.

Andaikan ada $c > 0$ dengan $c|x-y| \leq e(x, y)$ untuk semua pasangan. Untuk $x = 0$ dan $y = t > 0$, pembagian oleh t memberi $c \leq 1/(1+t)$. Ruas kanan menuju nol ketika t menuju tak hingga, sebuah kontradiksi. Jadi perbandingan dua arah dengan konstanta global cukup, tetapi bukan syarat perlu bagi kesamaan topologi.

Pemeriksaan N.86 Isometri sebagai homeomorfisme pada citranya. Misalkan $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ memenuhi $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ untuk semua $x, x' \in X$. Buktikan bahwa f injektif dan merupakan homeomorfisme dari X ke subruang $f(X)$. Simpulkan bahwa isometri surjektif adalah homeomorfisme, lalu jelaskan mengapa inklusi $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ tidak menjadi homeomorfisme ke $\mathbb{R}$ walaupun merupakan isometri pada metrik Euklides.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $f(x) = f(x')$, bandingkan jaraknya.

Tahap 2. Hitung citra bola $B_{d_X}(x, r)$ di dalam subruang $f(X)$.

Tahap 3. Homeomorfisme ke seluruh kodomain harus surjektif.

Jawaban. Pelestarian jarak membuat f injektif dan memetakan setiap bola di X dengan bola subruang berjari-jari sama di $f(X)$. Karena itu f dan inversnya pada citra kontinu. Inklusi $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ tidak surjektif, jadi bukan homeomorfisme ke seluruh $\mathbb{R}$.

Solusi. Jika $f(x) = f(x')$, maka $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0$, sehingga $x = x'$. Jadi f injektif. Beri $f(X)$ metrik subruang dari Y . Untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$, pelestarian jarak dan definisi citra memberi

$$f(B_{d_X}(x, r)) = B_{d_Y}(f(x), r) \cap f(X).$$

Maka f memetakan basis bola pada X dengan basis bola pada $f(X)$. Akibatnya $f : X \rightarrow f(X)$ kontinu dan terbuka; sebagai bijeksi ke citranya, inversnya juga kontinu. Jadi f merupakan homeomorfisme ke $f(X)$.

Jika f surjektif, maka $f(X) = Y$, sehingga hasil tadi langsung memberi homeomorfisme $X \rightarrow Y$. Inklusi $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ mempertahankan jarak Euklides, tetapi citranya hanya $\mathbb{Z}$, bukan seluruh $\mathbb{R}$. Ia adalah homeomorfisme dari $\mathbb{Z}$ ke subruang $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, bukan homeomorfisme ke kodomain $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan N.87 Relasi ekuivalensi yang ditentukan oleh suatu surjeksi. Misalkan $q : X \rightarrow Y$ surjektif dan definisikan $x \sim x'$ jika dan hanya jika $q(x) = q(x')$. Buktikan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi, bahwa kelas $[x]$ tepat sama dengan serat $q^{-1}(\{q(x)\})$, dan bahwa aturan $\bar{q}([x]) = q(x)$ menentukan bijeksi $\bar{q} : X/\sim \rightarrow Y$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan refleksivitas, simetri, dan transitivitas kesamaan di Y .

Tahap 2. Buktikan aturan bagi $\bar{q}$ tidak bergantung pada wakil kelas.

Tahap 3. Gunakan surjektivitas q untuk surjektivitas $\bar{q}$.

Jawaban. Kesamaan nilai q mewarisi ketiga sifat relasi ekuivalensi. Definisi kelas memberi $[x] = q^{-1}(\{q(x)\})$. Kesamaan kelas menjamin $\bar{q}$ terdefinisi dengan baik dan injektif, sedangkan surjektivitas q memberi surjektivitas $\bar{q}$.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, berlaku $q(x) = q(x)$, maka $x \sim x$. Jika $x \sim x'$, maka $q(x) = q(x')$; simetri kesamaan memberi $q(x') = q(x)$, maka $x' \sim x$. Jika $x \sim x'$ dan $x' \sim x''$, maka $q(x) = q(x') = q(x'')$, sehingga $x \sim x''$. Jadi $\sim$ relasi ekuivalensi.

Menurut definisi,

$$[x] = \{z \in X : q(z) = q(x)\} = q^{-1}(\{q(x)\}).$$

Jika $[x] = [x']$, maka $x \sim x'$, sehingga $q(x) = q(x')$. Karena itu nilai $\bar{q}([x])$ tidak bergantung pada wakil dan aturan tersebut terdefinisi dengan baik.

Jika $\bar{q}([x]) = \bar{q}([x'])$, maka $q(x) = q(x')$, sehingga $x \sim x'$ dan $[x] = [x']$; jadi $\bar{q}$ injektif. Untuk setiap $y \in Y$, surjektivitas q memberi $x \in X$ dengan $q(x) = y$. Maka $\bar{q}([x]) = y$, jadi $\bar{q}$ surjektif dan karena itu bijektif.

Pemeriksaan N.88 Homeomorfisme memadankan seluruh topologi. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ homeomorfisme. Buktikan bahwa aturan $U \mapsto f(U)$ merupakan bijeksi dari keluarga himpunan terbuka pada X ke keluarga himpunan terbuka pada Y dan mempertahankan gabungan sebarang serta irisan berhingga. Simpulkan bahwa banyaknya himpunan terbuka merupakan invarian topologis. Gunakan hasil itu untuk membuktikan bahwa tiga topologi pada $\{0, 1\}$, yaitu topologi indiskret, topologi $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$, dan topologi diskret, saling tidak homeomorfik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan kekontinuan invers untuk menunjukkan bahwa f terbuka.

Tahap 2. Citra di bawah fungsi selalu mempertahankan gabungan; bijektivitas diperlukan untuk irisan.

Tahap 3. Hitung banyaknya himpunan terbuka pada ketiga ruang dua titik.

Jawaban. Homeomorfisme dan inversnya mengirim himpunan terbuka ke himpunan terbuka, sehingga keduanya memberikan bijeksi antara dua topologi. Bijeksi tersebut mempertahankan operasi himpunan yang diminta. Ketiga ruang dua titik memiliki berturut-turut 2, 3, dan 4 himpunan terbuka, sehingga tidak ada dua yang homeomorfik.

Solusi. Jika U terbuka dalam X , maka $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ terbuka dalam Y karena f^{-1} kontinu. Sebaliknya, setiap himpunan terbuka V dalam Y adalah citra $f(f^{-1}(V))$ dari himpunan terbuka $f^{-1}(V)$ dalam X . Jadi aturan citra bersifat surjektif pada keluarga himpunan terbuka; injektivitasnya mengikuti injektivitas f atau keberadaan aturan invers $V \mapsto f^{-1}(V)$.

Untuk sebarang keluarga $\{U_\alpha\}$, selalu berlaku $f(\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcup_\alpha f(U_\alpha)$. Karena f injektif, untuk keluarga berhingga juga berlaku $f(U_1 \cap \dots \cap U_n) = f(U_1) \cap \dots \cap f(U_n)$. Maka struktur topologi, termasuk kardinalitas keluarga himpunan terbuka, dipertahankan.

Topologi indiskret pada $\{0, 1\}$ memiliki dua himpunan terbuka. Topologi $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ memiliki tiga, sedangkan topologi diskret memiliki empat. Karena jumlah ini berbeda pada setiap pasangan, tidak ada homeomorfisme di antara pasangan mana pun.

Pemeriksaan N.89 Ruang terbatas yang homeomorfik dengan garis real. Buktikan bahwa fungsi

$$h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \tan(\pi(x - 1/2))$$

merupakan homeomorfisme dengan topologi Euklides. Tulis inversnya secara eksplisit. Jelaskan mengapa contoh ini menunjukkan bahwa “terbatas sebagai himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dengan metrik Euklides” bukan invarian topologis.

Petunjuk. *Tahap 1.* Peta linear $x \mapsto \pi(x - 1/2)$ memadankan $(0, 1)$ dengan $(-\pi/2, \pi/2)$.

Tahap 2. Fungsi tangen kontinu dan naik ketat pada interval tersebut.

Tahap 3. Gunakan fungsi arctangen untuk menulis invers kontinu.

Jawaban. Fungsi h bijektif dan kontinu, dengan invers $h^{-1}(y) = 1/2 + \arctan(y)/\pi$ yang kontinu. Jadi $(0, 1)$ homeomorfik dengan $\mathbb{R}$, walaupun yang pertama terbatas dan yang kedua tidak terbatas dalam metrik Euklides.

Solusi. Peta $a(x) = \pi(x - 1/2)$ merupakan bijeksi kontinu dari $(0, 1)$ ke $(-\pi/2, \pi/2)$, dengan invers kontinu $a^{-1}(t) = 1/2 + t/\pi$. Pada interval $(-\pi/2, \pi/2)$, fungsi tangen kontinu, naik ketat, dan nilainya menuju $-\infty$ serta $+\infty$ di kedua ujung. Karena itu tangen merupakan bijeksi ke $\mathbb{R}$. Komposisinya dengan a adalah h , sehingga h bijektif dan kontinu.

Menyelesaikan $y = \tan(\pi(x - 1/2))$ memberi

$$h^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y).$$

Fungsi arctangen kontinu pada $\mathbb{R}$, maka invers tersebut kontinu. Jadi h homeomorfisme. Himpunan $(0, 1)$ terbatas dalam metrik Euklides, sedangkan $\mathbb{R}$ tidak. Homeomorfisme tidak mempertahankan ukuran jarak atau kedudukan suatu ruang sebagai himpunan bagian dari ruang metrik luar. Maka keterbatasan Euklides semacam itu bukan sifat topologis.

Lampiran O

Panduan Belajar Mandiri Bab 15: Subruang

Komponen ini mendampingi Bab 15, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Panduan mengikuti urutan sumber untuk seluruh 30 unit belajar mandiri. Dua tugas induk yang hanya mengelompokkan subpertanyaan dipertahankan sebagai konteks dan tidak dihitung sebagai pertanyaan tersendiri. Delapan pemeriksaan penguasaan orisinal memadukan gagasan bab dalam persoalan baru tanpa mengandakan unit sumber.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University, tidak menyatakan dukungan mereka, dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0. Teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tersebut tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Panduan Belajar Mandiri: Subruang dan Topologi Relatif I

Sepuluh panduan ini mendampingi tugas-tugas awal Bab 15 tentang topologi subruang, contoh-contoh berhingga, keterbukaan relatif, dan basis terinduksi. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan O.1 Membuktikan Aksioma Topologi Subruang. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dan A suatu subhimpunan tak kosong dari X . Definisikan

$$\tau_A = \{O \cap A \mid O \in \tau\}.$$

Tunjukkan bahwa τ_A merupakan topologi pada A .

Catatan konvensi. Buku sumber mensyaratkan subruang tidak kosong. Banyak konvensi modern juga mengizinkan $A = \emptyset$ sebagai subruang, dengan topologi $\{\emptyset\}$; panduan ini tetap mengikuti konvensi tak kosong dari buku sumber.

Petunjuk. *Tahap 1.* Nyatakan $\emptyset$ dan A sebagai irisan A dengan anggota τ .

Tahap 2. Untuk $U_i = A \cap O_i$, distribusikan A terhadap gabungan $\bigcup_i O_i$.

Tahap 3. Lakukan hal serupa untuk irisan berhingga dan gunakan aksioma topologi pada τ .

Jawaban. Ya. Himpunan $\emptyset$ dan A berada dalam τ_A , sedangkan gabungan sebarang dan irisan berhingga anggota τ_A kembali berbentuk $A \cap O$ dengan $O \in \tau$.

Solusi. Karena $\emptyset, X \in \tau$, berlaku $\emptyset = A \cap \emptyset \in \tau_A$ dan $A = A \cap X \in \tau_A$. Selanjutnya, misalkan $U_i \in \tau_A$ untuk setiap $i \in I$. Pilih $O_i \in \tau$ sehingga $U_i = A \cap O_i$. Hukum distributif memberi

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right).$$

Karena $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$, gabungan tersebut berada dalam τ_A .

Untuk irisan, jika $U = A \cap O$ dan $V = A \cap P$ dengan $O, P \in \tau$, maka

$$U \cap V = A \cap (O \cap P).$$

Karena $O \cap P \in \tau$, berlaku $U \cap V \in \tau_A$. Argumen yang sama, atau induksi, menangani setiap irisan berhingga. Jadi ketiga aksioma topologi terpenuhi dan τ_A merupakan topologi pada A .

Pemeriksaan O.2 Dua Topologi Subruang Berhingga. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Untuk $A = \{b, c\}$, daftarkan anggota topologi subruang τ_A . Kemudian ambil $Z = \{a, b\}$; tentukan τ_Z dan beri nama topologi tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Irisankan setiap anggota τ dengan A , lalu hapus hasil yang berulang.

Tahap 2. Ulangi prosedur yang sama untuk Z .

Tahap 3. Bandingkan τ_Z dengan himpunan kuasa $\mathcal{P}(Z)$.

Jawaban. Diperoleh $\tau_A = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$ dan $\tau_Z = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \mathcal{P}(Z)$. Jadi τ_Z adalah topologi diskret pada Z .

Solusi. Untuk $A = \{b, c\}$, irisan berturut-turut dari $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X$ dengan A adalah $\emptyset, \emptyset, \{b\}, \{b\}, A$. Setelah menghapus pengulangan, diperoleh $\tau_A = \{\emptyset, \{b\}, A\}$.

Untuk $Z = \{a, b\}$, irisan-irisan yang berbeda adalah $\emptyset, \{a\}, \{b\}, Z$. Keempatnya tepat seluruh subhimpunan dari himpunan beranggota dua Z . Dengan demikian $\tau_Z = \mathcal{P}(Z)$, yaitu topologi diskret.

Pemeriksaan O.3 Subruang dari Topologi Indiskret. Ambil $X = \mathbb{R}$ dengan topologi indiskret $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Tentukan topologi subruang pada $[1, 2]$, lalu generalisasikan hasilnya untuk sebarang subhimpunan tak kosong dari suatu ruang bertopologi indiskret.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hanya ada dua himpunan terbuka ambien yang perlu diiris dengan $[1, 2]$.

Tahap 2. Hitung $[1, 2] \cap \emptyset$ dan $[1, 2] \cap \mathbb{R}$.

Tahap 3. Ganti $[1, 2]$ oleh subhimpunan tak kosong sebarang $A \subseteq X$.

Jawaban. Topologi subruang pada $[1, 2]$ adalah $\{\emptyset, [1, 2]\}$. Secara umum, setiap subruang tak kosong A dari ruang indiskret mewarisi topologi indiskret $\{\emptyset, A\}$.

Solusi. Menurut definisi, anggota topologi subruang adalah irisan subruang dengan anggota topologi ambien. Dalam kasus ini, $[1, 2] \cap \emptyset = \emptyset$ dan $[1, 2] \cap \mathbb{R} = [1, 2]$; tidak ada hasil lain. Jadi topologinya $\{\emptyset, [1, 2]\}$.

Jika ruang umum X bertopologi indiskret dan A adalah subruang tak kosong, satu-satunya irisan yang mungkin ialah $A \cap \emptyset = \emptyset$ dan $A \cap X = A$. Karena itu topologi subruang pada A juga indiskret.

Pemeriksaan O.4 Subruang dari Topologi Diskret. Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ bertopologi diskret. Tentukan topologi subruang pada $A = \{a, b, d\}$, lalu generalisasikan hasilnya untuk sebarang subruang tak kosong dari ruang diskret.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam topologi diskret, setiap subhimpunan dari X terbuka.

Tahap 2. Untuk suatu $S \subseteq A$, pilih himpunan terbuka ambien yang irisannya dengan A tepat S .

Tahap 3. Daftarkan seluruh delapan subhimpunan dari $A = \{a, b, d\}$.

Jawaban. Topologi subruangnya adalah

$$\tau_A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\} = \mathcal{P}(A).$$

Setiap subruang tak kosong dari ruang diskret juga diskret.

Solusi. Ambil sembarang $S \subseteq A$. Karena X diskret, himpunan S sendiri terbuka sebagai subhimpunan dari X . Selain itu, $A \cap S = S$. Jadi setiap subhimpunan S dari A berada dalam τ_A . Sebaliknya, setiap anggota τ_A tentu merupakan subhimpunan dari A . Maka $\tau_A = \mathcal{P}(A)$, yang untuk $A = \{a, b, d\}$ memberi delapan himpunan yang tercantum pada jawaban. Argumen tersebut berlaku untuk setiap subruang tak kosong dari ruang diskret.

Pemeriksaan O.5 Keterbukaan Relatif Tidak Menjamin Keterbukaan Ambien. Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}.$$

Untuk subruang $A = \{a, b, e\}$, tentukan semua himpunan terbuka dalam A . Apakah setiap himpunan tersebut juga terbuka dalam X ? Jelaskan.

Petunjuk. Tahap 1. Hitung $A \cap O$ bagi keenam anggota $O \in \tau$.

Tahap 2. Hapus hasil irisan yang berulang.

Tahap 3. Bandingkan hasil yang tersisa satu per satu dengan daftar asli τ .

Jawaban. Diperoleh $\tau_A = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}, A\}$. Tidak semuanya terbuka dalam X : $\{b, e\}$ dan $A = \{a, b, e\}$ bukan anggota τ .

Solusi. Irisan A dengan anggota-anggota τ berturut-turut adalah $\emptyset, \{a\}, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, A$. Karena itu himpunan terbuka yang berbeda dalam subruang tepat $\emptyset, \{a\}, \{b, e\}, A$. Dua yang pertama juga terbuka dalam X , sedangkan $\{b, e\}$ dan A tidak tercantum dalam τ . Contoh ini menunjukkan bahwa “terbuka dalam A ” berarti terbuka relatif terhadap A , bukan harus terbuka dalam ruang ambien X .

Pemeriksaan O.6 Subruang Berhingga dari Topologi Komplemen Berhingga. Misalkan $X = \mathbb{Z}$ bertopologi komplemen berhingga τ_{FC} , dan ambil $A = \{0, 19, 37, 5284\}$. Tentukan topologi subruang pada A dan generalisasikan hasilnya untuk sebarang subruang berhingga tak kosong dari $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. Tahap 1. Ambil sembarang $S \subseteq A$.

Tahap 2. Himpunan $A \setminus S$ berhingga; pertimbangkan himpunan ambien $O = \mathbb{Z} \setminus (A \setminus S)$.

Tahap 3. Hitung $A \cap O$ dan simpulkan apakah setiap subhimpunan S terbuka relatif.

Jawaban. $\tau_A = \mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$, sehingga topologi subruang pada A diskret. Secara umum, setiap subruang berhingga tak kosong dari ruang komplemen berhingga adalah diskret.

Solusi. Pilih sembarang $S \subseteq A$. Karena A berhingga, $F = A \setminus S$ juga berhingga. Himpunan $O = \mathbb{Z} \setminus F$ mempunyai komplemen berhingga, sehingga $O \in \tau_{FC}$. Selanjutnya,

$$A \cap O = A \cap (\mathbb{Z} \setminus (A \setminus S)) = S.$$

Jadi setiap subhimpunan S dari A terbuka dalam topologi subruang. Dengan demikian $\tau_A = \mathcal{P}(A)$. Pembuktian hanya menggunakan keberhinggaan A , sehingga berlaku bagi setiap subruang berhingga tak kosong dari $\mathbb{Z}$ bertopologi komplemen berhingga.

Pemeriksaan O.7 Subruang Tak Berhingga dari Topologi Komplemen Berhingga. Misalkan $X = \mathbb{Z}$ bertopologi komplemen berhingga τ_{FC} . Tentukan topologi subruang pada himpunan bilangan bulat genap $A = 2\mathbb{Z}$, lalu generalisasikan hasilnya untuk sebarang subruang tak berhingga dari $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. Tahap 1. Jika $O = \mathbb{Z} \setminus F$ dengan F berhingga, tulis $A \cap O$ sebagai komplemen relatif di dalam A .

Tahap 2. Periksa bahwa komplemen relatif yang diperoleh selalu berhingga.

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, mulai dengan $U \subseteq A$ yang mempunyai komplemen berhingga dalam A .

Jawaban. Subruang $A = 2\mathbb{Z}$ mewarisi topologi komplemen berhingga: himpunan terbukanya adalah $\emptyset$ serta semua $U \subseteq A$ dengan $A \setminus U$ berhingga. Hasil yang sama berlaku untuk setiap subruang tak berhingga dari $\mathbb{Z}$.

Solusi. Jika $O = \emptyset$, maka $A \cap O = \emptyset$. Jika $O \neq \emptyset$ terbuka dalam topologi komplemen berhingga, tulis $O = \mathbb{Z} \setminus F$ untuk suatu himpunan berhingga $F \subseteq \mathbb{Z}$. Maka

$$A \cap O = A \setminus (A \cap F),$$

dan $A \cap F$ berhingga. Jadi setiap himpunan terbuka relatif yang tak kosong mempunyai komplemen berhingga dalam A .

Sebaliknya, misalkan $U \subseteq A$ dan $A \setminus U$ berhingga. Ambil $F = A \setminus U$ sebagai subhimpunan berhingga dari $\mathbb{Z}$. Himpunan $O = \mathbb{Z} \setminus F$ terbuka dalam τ_{FC} , dan $A \cap O = U$. Jadi topologi terinduksi pada A tepat topologi komplemen berhingga. Tidak ada bagian argumen yang khusus bagi bilangan genap selain ketakberhinggaan A .

Pemeriksaan O.8 Mendefinisikan Himpunan Tertutup Relatif. Misalkan (A, τ_A) suatu subruang dari ruang topologi X . Dengan menggunakan definisi himpunan tertutup melalui komplemen, definisikan kapan suatu subhimpunan $C \subseteq A$ disebut **tertutup relatif** dalam A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Komplemen harus diambil terhadap ruang tempat keterbukaan diuji.

Tahap 2. Ruang yang dimaksud sekarang adalah A , bukan X .

Tahap 3. Tuliskan syarat pada $A \setminus C$ menggunakan τ_A .

Jawaban. Himpunan $C \subseteq A$ tertutup relatif dalam A jika dan hanya jika komplemen relatifnya $A \setminus C$ berada dalam τ_A , yaitu terbuka relatif dalam A .

Solusi. Definisi umum menyatakan bahwa suatu subhimpunan ruang topologi tertutup jika komplemennya di dalam ruang tersebut terbuka. Karena ruang yang sedang dipandang adalah (A, τ_A) , komplemen C bukan $X \setminus C$, melainkan $A \setminus C$. Jadi

$$C \text{ tertutup relatif dalam } A \iff A \setminus C \in \tau_A.$$

Pemeriksaan O.9 Mencirikan Himpunan Tertutup Relatif. Misalkan A suatu subruang tak kosong dari ruang topologi X . Buktikan bahwa $C \subseteq A$ tertutup relatif dalam A jika dan hanya jika terdapat himpunan tertutup $F \subseteq X$ sedemikian sehingga $C = A \cap F$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika C tertutup relatif, tulis $A \setminus C = A \cap O$ untuk suatu O terbuka dalam X .

Tahap 2. Ambil $F = X \setminus O$ dan gunakan hukum De Morgan relatif terhadap A .

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, mulai dari $C = A \cap F$ dan periksa bahwa $A \setminus C$ terbuka relatif.

Jawaban. Pencirian tersebut benar. Komplemen relatif mengubah irisan dengan himpunan terbuka ambient menjadi irisan dengan komplemen tertutupnya, dan sebaliknya.

Solusi. Andaikan C tertutup relatif dalam A . Maka $A \setminus C$ terbuka relatif, sehingga terdapat himpunan terbuka O dalam X dengan $A \setminus C = A \cap O$. Letakkan $F = X \setminus O$. Himpunan F tertutup dalam X , dan

$$C = A \setminus (A \cap O) = A \cap (X \setminus O) = A \cap F.$$

Sebaliknya, andaikan $C = A \cap F$ untuk suatu himpunan tertutup F dalam X . Karena $X \setminus F$ terbuka dalam X , berlaku

$$A \setminus C = A \setminus (A \cap F) = A \cap (X \setminus F),$$

yang terbuka relatif dalam A . Maka C tertutup relatif. Kedua arah telah terbukti.

Pemeriksaan O.10 Menentukan Calon Basis Subruang. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dengan basis $\mathcal{B}$, dan misalkan A suatu subruang dari X . Definisikan secara alami suatu koleksi $\mathcal{B}_A$ yang menjadi calon basis untuk topologi subruang pada A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Himpunan terbuka relatif diperoleh dengan mengirisakan himpunan terbuka ambien dengan A .

Tahap 2. Ganti himpunan terbuka ambien umum oleh anggota basis $B \in \mathcal{B}$.

Tahap 3. Kumpulkan semua irisan $B \cap A$ tersebut dalam satu keluarga.

Jawaban. Calon alaminya adalah

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Solusi. Karena setiap himpunan terbuka dalam X dibangun sebagai gabungan anggota-anggota $\mathcal{B}$, irisan anggota basis dengan A merupakan blok dasar alami bagi himpunan terbuka relatif. Oleh sebab itu kita definisikan $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$. Irisan kosong tidak menimbulkan masalah: jika muncul sebagai anggota koleksi, ia dapat dihapus tanpa mengubah gabungan yang dihasilkan. Panduan berikutnya membuktikan bahwa koleksi ini memang membangkitkan tepat topologi subruang.

Panduan Belajar Mandiri: Basis Subruang dan Interval Terbuka

Enam panduan ini melanjutkan dukungan belajar mandiri Bab 15: satu pembuktian basis terinduksi dan lima langkah pembuktian homeomorfisme antara garis real dan interval terbuka. Gunakan petunjuk, jawaban, dan solusi hanya setelah mencoba tugas utama secara mandiri.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan O.11 Membuktikan Basis bagi Topologi Subruang. Misalkan (X, τ) suatu ruang topologi dengan basis $\mathcal{B}$, dan misalkan A suatu subruang dari X . Untuk

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\},$$

buktikan bahwa $\mathcal{B}_A$ merupakan basis bagi topologi terinduksi τ_A pada A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $x \in A$, gunakan sifat basis $\mathcal{B}$ untuk mencari $B \in \mathcal{B}$ yang memuat x .

Tahap 2. Jika $x \in (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A)$, cari $B_3 \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Tahap 3. Tunjukkan pula bahwa setiap $A \cap O$, dengan O terbuka dalam X , merupakan gabungan anggota $\mathcal{B}_A$.

Jawaban. Ya. Keluarga $\mathcal{B}_A$ memenuhi kedua kriteria basis pada A , dan gabungan anggota-anggotanya tepat menghasilkan seluruh himpunan $A \cap O$ dengan $O \in \tau$.

Solusi. Pertama, ambil $x \in A$. Karena $\mathcal{B}$ basis bagi X , terdapat $B \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B$. Maka $x \in B \cap A$ dan $B \cap A \in \mathcal{B}_A$. Jadi anggota-anggota $\mathcal{B}_A$ menutupi A .

Kedua, andaikan $x \in (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A)$, dengan $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Karena $x \in B_1 \cap B_2$, sifat basis $\mathcal{B}$ menghasilkan $B_3 \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Akibatnya,

$$x \in B_3 \cap A \subseteq (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A),$$

dan $B_3 \cap A \in \mathcal{B}_A$. Dengan demikian kedua kriteria basis terpenuhi.

Masih perlu mengidentifikasi topologi yang dibangkitkan. Setiap $B \in \mathcal{B}$ terbuka dalam X , sehingga setiap $B \cap A$ terbuka relatif. Jadi topologi yang dibangkitkan $\mathcal{B}_A$ termuat dalam τ_A . Sebaliknya, jika $U \in \tau_A$, tulis $U = A \cap O$ untuk suatu $O \in \tau$. Karena $\mathcal{B}$ basis, ada keluarga $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ dengan $O = \bigcup_{i \in I} B_i$. Maka

$$U = A \cap O = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i),$$

suatu gabungan anggota $\mathcal{B}_A$. Jadi topologi yang dibangkitkan tepat τ_A .

Pemeriksaan O.12 Keterdefinisan Fungsi Tangen. Definisikan $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Jelaskan mengapa rumus ini memetakan setiap $x \in (0, 1)$ ke suatu bilangan real.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tentukan rentang $x - \frac{1}{2}$ ketika $0 < x < 1$.

Tahap 2. Kalikan pertidaksamaan tersebut dengan π .

Tahap 3. Ingat pada interval mana fungsi tangen terdefinisi dan bernilai real.

Jawaban. Jika $0 < x < 1$, maka $-\frac{\pi}{2} < \pi(x - \frac{1}{2}) < \frac{\pi}{2}$. Fungsi tangen terdefinisi dan bernilai real pada interval tersebut.

Solusi. Dari $0 < x < 1$ diperoleh $-\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, sehingga

$$-\frac{\pi}{2} < \pi\left(x - \frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Kosinus tidak nol pada interval terbuka $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, maka tangen terdefinisi di sana dan nilainya merupakan bilangan real. Jadi rumus tersebut mendefinisikan fungsi $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan baik.

Pemeriksaan O.13 Injektivitas Fungsi Tangen. Untuk $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ pada $(0, 1)$, jelaskan mengapa f merupakan injeksi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Fungsi $x \mapsto \pi(x - \frac{1}{2})$ naik tegas pada $(0, 1)$.

Tahap 2. Gunakan sifat monoton fungsi tangen pada $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Tahap 3. Komposisi dua fungsi yang naik tegas juga naik tegas.

Jawaban. Fungsi f naik tegas pada $(0, 1)$, sehingga dua masukan berbeda tidak mungkin mempunyai citra yang sama. Jadi f injektif.

Solusi. Pemetaan afin $h(x) = \pi(x - \frac{1}{2})$ naik tegas dan memetakan $(0, 1)$ ke $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pada interval terakhir, fungsi tangen naik tegas. Jika $x_1 < x_2$, maka

$$\pi\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) < \pi\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)$$

dan karena itu $f(x_1) < f(x_2)$. Jadi f naik tegas, yang menyiratkan bahwa $f(x_1) = f(x_2)$ hanya mungkin jika $x_1 = x_2$. Maka f merupakan injeksi.

Pemeriksaan O.14 Surjektivitas Fungsi Tangen. Untuk $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$, jelaskan mengapa f merupakan surjeksi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil bilangan real sebarang y .

Tahap 2. Gunakan $\arctan(y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Tahap 3. Selesaikan persamaan $y = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ terhadap x .

Jawaban. Untuk setiap $y \in \mathbb{R}$, ambil $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y)$. Titik ini berada dalam $(0, 1)$ dan memenuhi $f(x) = y$.

Solusi. Ambil sembarang $y \in \mathbb{R}$. Nilai utama $\arctan(y)$ berada dalam $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Oleh karena itu

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y)$$

memenuhi $0 < x < 1$. Substitusi memberi

$$f(x) = \tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y) - \frac{1}{2}\right)\right) = \tan(\arctan(y)) = y.$$

Jadi setiap bilangan real mempunyai prapeta dalam $(0, 1)$, dan f surjektif.

Pemeriksaan O.15 Kekontinuan Fungsi dan Inversnya. Untuk bijeksi $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$, jelaskan mengapa f dan f^{-1} kontinu terhadap topologi metrik Euklides.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tulis f sebagai komposisi fungsi afin dan fungsi tangen.

Tahap 2. Gunakan rumus prapeta dari panduan surjektivitas untuk menemukan f^{-1} .

Tahap 3. Terapkan teorema kalkulus bahwa fungsi elementer ini kontinu pada domain masing-masing dan komposisi fungsi kontinu tetap kontinu.

Jawaban. Fungsi f kontinu sebagai komposisi fungsi kontinu, dan

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y)$$

juga kontinu pada seluruh $\mathbb{R}$. Jadi f adalah homeomorfisme.

Solusi. Pemetaan $x \mapsto \pi(x - \frac{1}{2})$ kontinu pada $(0, 1)$, dan citranya termuat dalam $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Fungsi tangen kontinu pada interval itu. Maka komposisinya, yaitu f , kontinu.

Dari penyelesaian persamaan $y = f(x)$ diperoleh $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y)$. Fungsi arctangen kontinu pada seluruh $\mathbb{R}$, demikian pula operasi mengalikan dengan $1/\pi$ dan menambahkan $1/2$. Karena itu $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ kontinu. Kedua interval membawa topologi yang diinduksi oleh metrik Euklides, sehingga kekontinuan kalkulus tersebut adalah kekontinuan topologis yang dibutuhkan. Jadi f merupakan homeomorfisme.

Pemeriksaan O.16 Homeomorfisme dari Interval Satuan ke Interval Terbuka. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Definisikan fungsi $g : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ dan buktikan bahwa g merupakan homeomorfisme. Jelaskan bagaimana hasil ini, bersama homeomorfisme antara $\mathbb{R}$ dan $(0, 1)$, menunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan (a, b) .

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan pemetaan afin yang mengirim 0 ke a dan 1 ke b .

Tahap 2. Temukan rumus inversnya dan gunakan $b - a > 0$.

Tahap 3. Komposisikan g dengan invers homeomorfisme $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dari panduan sebelumnya.

Jawaban. Ambil $g(x) = a + (b - a)x$. Fungsi ini mempunyai invers $g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$; keduanya kontinu. Maka g homeomorfisme, dan $g \circ f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ juga homeomorfisme.

Solusi. Definisikan $g(x) = a + (b - a)x$. Karena $b - a > 0$, jika $0 < x < 1$, maka $a < a + (b - a)x < b$; jadi g memang memetakan $(0, 1)$ ke (a, b) . Fungsi ini naik tegas, sehingga injektif. Untuk setiap $y \in (a, b)$, titik $x = (y - a)/(b - a)$ berada dalam $(0, 1)$ dan memenuhi $g(x) = y$, sehingga g juga surjektif.

Fungsi afin g kontinu, dan inversnya

$$g^{-1}(y) = \frac{y - a}{b - a}$$

juga afin dan kontinu. Jadi g merupakan homeomorfisme. Dari panduan sebelumnya, $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ adalah homeomorfisme, maka $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ juga homeomorfisme. Komposisi $g \circ f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ adalah homeomorfisme, sehingga $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan setiap interval terbuka terbatas (a, b) .

Panduan latihan Bab 15, bagian pertama

Bagian ini mengikuti urutan sumber untuk sepuluh prompt latihan pertama tentang subruang. Setiap pernyataan dibuat mandiri dan disertai petunjuk, jawaban atau rubrik pembuktian, serta solusi lengkap. Materi pendamping ini ditulis secara terpisah, dilisensikan dengan CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan O.17 Pembatasan fungsi kontinu. Misalkan X dan Y ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu, dan A subruang dari X . Buktikan bahwa pembatasan $f|_A : A \rightarrow Y$ juga kontinu.

Petunjuk. Ambil himpunan terbuka U dalam Y . Tuliskan prapetanya di bawah pembatasan sebagai irisan A dengan prapeta di bawah f .

Jawaban. Untuk setiap U yang terbuka dalam Y , berlaku $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$, yang terbuka dalam topologi subruang pada A .

Solusi. Ambil sebarang himpunan terbuka $U \subseteq Y$. Karena f kontinu, $f^{-1}(U)$ terbuka dalam X . Untuk $x \in A$, titik x berada dalam prapeta U di bawah $f|_A$ tepat ketika $x \in f^{-1}(U)$. Oleh karena itu,

$$(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U).$$

Irisan di ruas kanan terbuka dalam topologi subruang pada A . Jadi prapeta setiap himpunan terbuka dalam Y terbuka dalam A , sehingga $f|_A$ kontinu.

Pemeriksaan O.18 Topologi subruang bersifat transitif. Misalkan X ruang topologi, A subruang dari X , dan B subruang dari A . Tunjukkan bahwa topologi subruang yang diwarisi B dari A sama dengan topologi subruang yang diwarisi B langsung dari X .

Petunjuk. Setiap himpunan terbuka dalam A berbentuk $A \cap U$ untuk suatu U yang terbuka dalam X . Gunakan $B \subseteq A$ untuk menyederhanakan $B \cap (A \cap U)$.

Jawaban. Kedua topologi tersebut terdiri tepat atas himpunan berbentuk $B \cap U$, dengan U terbuka dalam X .

Solusi. Himpunan $W \subseteq B$ terbuka dalam topologi yang diwarisi dari A tepat ketika terdapat himpunan V yang terbuka dalam A sedemikian sehingga $W = B \cap V$. Karena A sendiri memakai topologi subruang dari X , terdapat himpunan terbuka $U \subseteq X$ dengan $V = A \cap U$. Maka

$$W = B \cap V = B \cap A \cap U = B \cap U,$$

sebab $B \subseteq A$. Jadi W terbuka dalam topologi subruang yang diwarisi B langsung dari X .

Sebaliknya, jika $W = B \cap U$ untuk suatu U yang terbuka dalam X , maka $A \cap U$ terbuka dalam A dan $W = B \cap (A \cap U)$. Jadi W juga terbuka dalam topologi yang diwarisi B dari A . Kedua topologi itu sama.

Pemeriksaan O.19 Titik limit di dalam subruang. Misalkan A subruang dari ruang topologi X , $B \subseteq A$, dan $x \in A$. Buktikan bahwa x merupakan titik limit dari B dalam topologi subruang pada A jika dan hanya jika x merupakan titik limit dari B dalam topologi pada X .

Petunjuk. Lingkungan terbuka bagi x dalam A berbentuk $A \cap U$, dengan U terbuka dalam X dan $x \in U$. Karena $B \subseteq A$, bandingkan $(A \cap U) \cap (B \setminus \{x\})$ dengan $U \cap (B \setminus \{x\})$.

Jawaban. Kedua kondisi titik limit setara: untuk setiap himpunan terbuka U dalam X yang memuat x , kedua irisan yang relevan sama karena $B \setminus \{x\} \subseteq A$.

Solusi. Andaikan dahulu x titik limit B dalam X . Ambil sebarang lingkungan terbuka N bagi x dalam A . Terdapat himpunan terbuka U dalam X dengan $N = A \cap U$ dan $x \in U$. Sifat titik limit dalam X memberi suatu $b \in U \cap (B \setminus \{x\})$. Karena $B \subseteq A$, titik b juga berada dalam N . Jadi x titik limit B dalam A .

Sebaliknya, andaikan x titik limit B dalam A . Untuk setiap himpunan terbuka $U \subseteq X$ yang memuat x , himpunan $A \cap U$ adalah lingkungan terbuka bagi x dalam A . Maka terdapat $b \in (A \cap U) \cap (B \setminus \{x\})$, sehingga khususnya $b \in U \cap (B \setminus \{x\})$. Dengan demikian x merupakan titik limit B dalam X .

Pemeriksaan O.20 Tutupan dalam subruang. Misalkan A subruang dari ruang topologi X dan $B \subseteq A$. Buktikan bahwa tutupan B dalam A adalah

$$\text{cl}_A(B) = \text{cl}_X(B) \cap A,$$

dengan $\text{cl}_X(B)$ menyatakan tutupan B dalam X .

Petunjuk. Gunakan pencirian tutupan melalui lingkungan. Untuk $x \in A$, lingkungan subruang berbentuk $A \cap U$; karena $B \subseteq A$, berlaku $(A \cap U) \cap B = U \cap B$.

Jawaban. Untuk setiap $x \in A$, setiap lingkungan x dalam A bertemu B jika dan hanya jika setiap lingkungan x dalam X bertemu B . Jadi keanggotaan dalam kedua ruas persamaan itu setara.

Solusi. Ambil $x \in A$. Titik x berada dalam $\text{cl}_A(B)$ tepat ketika setiap himpunan terbuka dalam A yang memuat x bertemu B . Setiap himpunan semacam itu berbentuk $A \cap U$, dengan U terbuka dalam X dan $x \in U$. Karena $B \subseteq A$,

$$(A \cap U) \cap B = U \cap B.$$

Jadi semua lingkungan subruang bagi x bertemu B tepat ketika semua lingkungan terbuka bagi x dalam X bertemu B . Kondisi terakhir setara dengan $x \in \text{cl}_X(B)$. Karena sejak awal $x \in A$, kita memperoleh $x \in \text{cl}_A(B)$ jika dan hanya jika $x \in \text{cl}_X(B) \cap A$. Kesetaraan ini berlaku untuk setiap $x \in A$, sehingga kedua himpunan sama.

Pemeriksaan O.21 Garis bilangan real homeomorfik dengan sinar terbuka. Dengan topologi standar, buktikan bahwa $\mathbb{R}$ homeomorfik dengan setiap interval berbentuk (a, ∞) dan dengan setiap interval berbentuk $(-\infty, b)$, untuk $a, b \in \mathbb{R}$.

Petunjuk. Gunakan fungsi eksponensial untuk memperoleh nilai positif. Untuk sinar kanan tambahkan a ; untuk sinar kiri kurangkan hasil eksponensial dari b . Tuliskan invers masing-masing.

Jawaban. Homeomorfisme yang dapat dipakai adalah $F_a(x) = a + e^x$ menuju (a, ∞) dan $G_b(x) = b - e^x$ menuju $(-\infty, b)$.

Solusi. Tetapkan $a \in \mathbb{R}$ dan definisikan $F_a : \mathbb{R} \rightarrow (a, \infty)$ dengan $F_a(x) = a + e^x$. Fungsi ini kontinu dan bijektif karena e^x kontinu serta memetakan $\mathbb{R}$ secara bijektif ke $(0, \infty)$. Inversnya adalah

$$F_a^{-1}(y) = \ln(y - a),$$

yang kontinu pada (a, ∞) . Jadi F_a merupakan homeomorfisme.

Demikian pula, untuk $b \in \mathbb{R}$, definisikan $G_b : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, b)$ dengan $G_b(x) = b - e^x$. Fungsi ini kontinu dan bijektif; inversnya

$$G_b^{-1}(y) = \ln(b - y)$$

kontinu pada $(-\infty, b)$. Maka G_b juga merupakan homeomorfisme, dan klaim berlaku untuk semua a dan b .

Pemeriksaan O.22 Keterbukaan relatif di dalam himpunan terbuka. Misalkan X ruang topologi, O subhimpunan terbuka dari X , dan $A \subseteq O$. Buktikan bahwa A terbuka dalam subruang O jika dan hanya jika A terbuka dalam X .

Petunjuk. Jika A terbuka dalam O , tuliskan $A = O \cap U$ untuk suatu U yang terbuka dalam X . Gunakan bahwa O sendiri terbuka dalam X .

Jawaban. Benar. Pada arah yang tidak langsung, $A = O \cap U$ merupakan irisan dua himpunan terbuka dalam X ; arah sebaliknya langsung dari definisi topologi subruang.

Solusi. Andaikan A terbuka dalam subruang O . Menurut definisi topologi subruang, terdapat himpunan terbuka $U \subseteq X$ sedemikian sehingga $A = O \cap U$. Karena O dan U sama-sama terbuka dalam X , irisan A terbuka dalam X .

Sebaliknya, andaikan A terbuka dalam X . Karena $A \subseteq O$, kita mempunyai $A = O \cap A$. Ruas kanan adalah irisan O dengan suatu himpunan terbuka dalam X , sehingga A terbuka dalam topologi subruang pada O .

Pemeriksaan O.23 Ketertutupan relatif di dalam himpunan tertutup. Misalkan X ruang topologi, C subhimpunan tertutup dari X , dan $B \subseteq C$. Buktikan bahwa B tertutup dalam subruang C jika dan hanya jika B tertutup dalam X .

Petunjuk. Gunakan pencerian himpunan tertutup relatif: B tertutup dalam C tepat ketika $B = C \cap F$ untuk suatu F yang tertutup dalam X .

Jawaban. Benar. Jika $B = C \cap F$, maka B adalah irisan dua himpunan tertutup dalam X ; arah sebaliknya memakai $B = C \cap B$.

Solusi. Andaikan B tertutup dalam subruang C . Pencerian himpunan tertutup dalam topologi subruang memberi suatu himpunan tertutup $F \subseteq X$ dengan $B = C \cap F$. Karena C juga tertutup dalam X , irisan B

tertutup dalam X .

Sebaliknya, andaikan B tertutup dalam X . Karena $B \subseteq C$, berlaku $B = C \cap B$. Jadi B adalah irisan C dengan suatu himpunan tertutup dalam X , yang menurut pencirian topologi subruang berarti B tertutup dalam C .

Pemeriksaan O.24 Sifat herediter aksioma separasi T_1 , T_2 , dan T_3 . Suatu sifat ruang topologi disebut *herediter* jika setiap subruangnya juga memiliki sifat tersebut. Buktikan bahwa sifat T_1 , T_2 , dan T_3 semuanya herediter.

Catatan sumber: klaim yang serupa untuk T_4 tidak benar. Papan Tychonoff yang normal memiliki papan Tychonoff terhapus yang tidak normal sebagai subruang; sumber merujuk pembaca ke *Counterexamples in Topology* (2nd ed.) karya Lynn Arthur Steen dan J. Arthur Seebach, Jr. untuk contoh tersebut.

Petunjuk. Untuk T_1 dan T_2 , iriskan himpunan terbuka pemisah dalam ruang ambien dengan subruangnya. Untuk T_3 , tuliskan himpunan tertutup F dalam subruang A sebagai $F = A \cap C$ dengan C tertutup dalam ruang ambien, lalu pisahkan suatu titik $a \in A \setminus F$ dari C .

Jawaban. Rubrik lengkap: buktikan secara terpisah bahwa pemisah terbuka untuk dua titik tetap menjadi pemisah setelah diiriskan dengan subruang; lalu buktikan bahwa keteraturan diwarisi menggunakan $F = A \cap C$. Karena T_3 berarti reguler sekaligus T_1 , kedua bagiannya harus disebutkan.

Solusi. Misalkan A subruang dari X . Pertama, andaikan X merupakan ruang T_1 . Untuk titik berbeda $x, y \in A$, terdapat himpunan terbuka $U \subseteq X$ yang memuat y tetapi tidak memuat x . Himpunan $A \cap U$ terbuka dalam A , memuat y , dan tidak memuat x . Jadi A merupakan ruang T_1 .

Kedua, andaikan X merupakan ruang T_2 . Untuk titik berbeda $x, y \in A$, pilih himpunan terbuka saling lepas $U, V \subseteq X$ dengan $x \in U$ dan $y \in V$. Himpunan $A \cap U$ dan $A \cap V$ terbuka dalam A , memuat titik masing-masing, dan tetap saling lepas. Maka A merupakan ruang T_2 .

Terakhir, andaikan X merupakan ruang T_3 ; jadi X bersifat reguler dan T_1 . Bagian pertama telah menunjukkan bahwa A bersifat T_1 . Ambil himpunan tertutup F dalam A dan titik $a \in A \setminus F$. Ada himpunan tertutup C dalam X dengan $F = A \cap C$. Karena $a \in A$ tetapi $a \notin F$, kita mempunyai $a \notin C$. Keteraturan X memberi himpunan terbuka saling lepas U, V dalam X dengan $C \subseteq U$ dan $a \in V$. Maka $F \subseteq A \cap U$ dan $a \in A \cap V$; kedua himpunan itu terbuka dan saling lepas dalam A . Jadi A reguler. Karena A juga T_1 , ruang A adalah T_3 . Dengan demikian ketiga sifat tersebut herediter.

Pemeriksaan O.25 Homeomorfisme setelah menghapus titik yang bersesuaian. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme antara ruang topologi X dan Y , dan ambil $a \in X$. Tentukan apakah subruang $X' = X \setminus \{a\}$ harus homeomorfik dengan subruang $Y' = Y \setminus \{f(a)\}$, lalu buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Pertimbangkan pembatasan $g = f|_{X'}$. Gunakan keinjektifan dan kesurjektifan f untuk menunjukkan bahwa citra g tepat Y' , lalu identifikasi invers g sebagai pembatasan dari f^{-1} .

Jawaban. Ya. Homeomorfismenya adalah $f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$, dengan invers $f^{-1}|_{Y'} : Y' \rightarrow X'$.

Solusi. Definisikan $g = f|_{X'}$. Jika $x \in X'$, maka $x \neq a$; keinjektifan f memberi $f(x) \neq f(a)$. Jadi $g(x) \in Y'$. Sebaliknya, untuk $y \in Y'$, kesurjektifan f memberi suatu $x \in X$ dengan $f(x) = y$. Titik ini bukan a , sebab $y \neq f(a)$. Maka $x \in X'$ dan $g(x) = y$. Bersama keinjektifan yang diwarisi dari f , hal ini membuktikan bahwa $g : X' \rightarrow Y'$ bijektif.

Pembatasan fungsi kontinu pada subruang kontinu, sehingga g kontinu. Inversnya adalah pembatasan $f^{-1}|_{Y'} : Y' \rightarrow X'$, yang juga kontinu karena f^{-1} kontinu. Jadi g merupakan homeomorfisme antara X' dan Y' .

Pemeriksaan O.26 Subruang dari ruang diskret. Tentukan benar atau salah: jika X memiliki topologi diskret, maka setiap subruang A dari X juga memiliki topologi diskret. Jelaskan jawaban Anda.

Petunjuk. Untuk membuktikan bahwa topologi pada A diskret, ambil sebarang $S \subseteq A$ dan tunjukkan bahwa S terbuka dalam topologi subruang.

Jawaban. Benar. Setiap $S \subseteq A$ terbuka dalam X , sehingga $S = A \cap S$ terbuka dalam subruang A .

Solusi. Ambil subruang $A \subseteq X$ dan sebarang himpunan $S \subseteq A$. Karena topologi X diskret, setiap subhimpunan dari X , termasuk S , terbuka dalam X . Kesamaan $S = A \cap S$ menunjukkan bahwa S terbuka dalam topologi subruang pada A . Karena setiap subhimpunan S dari A terbuka, topologi subruang pada A adalah topologi diskret. Jadi pernyataan itu benar.

Panduan latihan Bab 15, bagian kedua

Bagian ini menutup empat prompt latihan terakhir dalam urutan sumber. Setiap pernyataan yang salah disertai contoh tandingan konkret. Materi pendamping ini ditulis secara terpisah, dilisensikan dengan CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan O.27 Subruang diskret di dalam ruang tak diskret. Tentukan benar atau salah: jika X adalah ruang topologi yang tidak memiliki topologi diskret, maka tidak ada subruang dari X yang memiliki topologi diskret. Jika salah, berikan contoh tandingan konkret.

Petunjuk. Setiap ruang bertitik tunggal memiliki topologi diskret. Tempatkan satu titik seperti itu sebagai subruang dari ruang sederhana yang topologinya indiskret dan memiliki dua titik.

Jawaban. Salah. Ruang dua titik indiskret tidak diskret, tetapi setiap subruang bertitik tunggalnya diskret.

Solusi. Ambil $X = \{0, 1\}$ dengan topologi indiskret $\tau = \{\emptyset, X\}$. Topologi ini bukan topologi diskret, sebab, misalnya, $\{0\}$ tidak terbuka dalam X . Sekarang ambil subruang $A = \{0\}$. Topologi subruang pada A adalah

$$\{A \cap U \mid U \in \tau\} = \{\emptyset, A\},$$

yang merupakan topologi diskret pada himpunan bertitik tunggal A . Jadi ruang tak diskret dapat memiliki subruang diskret, dan pernyataan sumber salah.

Pemeriksaan O.28 Citra kontinu dari ruang Hausdorff. Tentukan benar atau salah: jika $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu, X ruang Hausdorff, dan $f(X)$ diberi topologi subruang dari Y , maka $f(X)$ harus Hausdorff. Jika salah, berikan contoh tandingan konkret.

Petunjuk. Ambil himpunan dua titik. Beri domain topologi diskret dan kodomain topologi indiskret, lalu gunakan fungsi identitas pada himpunan yang mendasarinya.

Jawaban. Salah. Fungsi identitas dari ruang dua titik diskret ke ruang dua titik indiskret kontinu dan surjektif, tetapi citranya tidak Hausdorff.

Solusi. Ambil himpunan $S = \{0, 1\}$. Jadikan $X = (S, \mathcal{P}(S))$ ruang diskret dan $Y = (S, \{\emptyset, S\})$ ruang indiskret. Ruang X Hausdorff karena singleton $\{0\}$ dan $\{1\}$ merupakan lingkungan terbuka saling lepas bagi kedua titiknya. Definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(s) = s$.

Satu-satunya himpunan terbuka dalam Y adalah $\emptyset$ dan S , dan prapetanya masing-masing adalah $\emptyset$ dan X . Jadi f kontinu. Fungsi ini surjektif, sehingga $f(X) = Y$. Namun Y tidak Hausdorff: satu-satunya himpunan terbuka tak kosong adalah seluruh Y , sehingga titik 0 dan 1 tidak mempunyai lingkungan terbuka saling lepas. Jadi kekontinuan saja tidak mempertahankan sifat Hausdorff pada citra.

Pemeriksaan O.29 Tutupan irisan dengan subruang. Tentukan benar atau salah: jika A subruang dari ruang topologi X dan $B \subseteq X$, maka

$$\text{cl}_A(B \cap A) = \text{cl}_X(B) \cap A,$$

dengan ruas kiri tutupan dalam A dan $\text{cl}_X(B)$ tutupan dalam X . Jika salah, berikan contoh tandingan konkret.

Petunjuk. Carilah himpunan B di $\mathbb{R}$ yang tidak bertemu $A = \{0\}$, tetapi mempunyai 0 sebagai titik limit.

Jawaban. Salah. Dalam $X = \mathbb{R}$, ambil $A = \{0\}$ dan $B = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Ruas kiri kosong, sedangkan ruas kanan adalah $\{0\}$.

Solusi. Beri $X = \mathbb{R}$ topologi standar, dan tetapkan $A = \{0\}$ serta $B = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Karena $0 \notin B$, berlaku $B \cap A = \emptyset$. Tutupan himpunan kosong dalam subruang A tetap kosong, sehingga

$$\text{cl}_A(B \cap A) = \emptyset.$$

Di sisi lain, barisan $1/n$ konvergen ke 0, sehingga $0 \in \text{cl}_{\mathbb{R}}(B)$. Bahkan $\text{cl}_{\mathbb{R}}(B) = B \cup \{0\}$, dan akibatnya

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}(B) \cap A = \{0\}.$$

Kedua ruas berbeda. Kegagalan terjadi karena titik-titik B yang berada di luar A masih dapat berakumulasi pada titik dalam A . Secara umum hanya inklusi $\text{cl}_A(B \cap A) \subseteq \text{cl}_X(B) \cap A$ yang selalu berlaku.

Pemeriksaan O.30 Interior irisan dengan subruang. Tentukan benar atau salah: jika A subruang dari ruang topologi X dan $C \subseteq X$, maka

$$\text{Int}_A(C \cap A) = \text{Int}_X(C) \cap A.$$

Jika salah, berikan contoh tandingan konkret.

Petunjuk. Dalam $\mathbb{R}$, subruang bertitik tunggal terbuka di dalam dirinya sendiri, meskipun singleton itu tidak mempunyai interior dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Salah. Untuk $X = \mathbb{R}$ serta $A = C = \{0\}$, ruas kiri adalah $\{0\}$, sedangkan ruas kanan kosong.

Solusi. Beri $X = \mathbb{R}$ topologi standar dan ambil $A = C = \{0\}$. Karena $C \cap A = A$ dan seluruh ruang selalu terbuka dalam dirinya sendiri, interior $C \cap A$ di dalam subruang A adalah

$$\text{Int}_A(C \cap A) = \text{Int}_A(A) = A = \{0\}.$$

Namun singleton $\{0\}$ tidak memuat interval terbuka apa pun dalam $\mathbb{R}$, sehingga $\text{Int}_{\mathbb{R}}(C) = \emptyset$. Maka

$$\text{Int}_{\mathbb{R}}(C) \cap A = \emptyset,$$

yang tidak sama dengan ruas kiri. Secara umum, inklusi yang selalu benar justru $\text{Int}_X(C) \cap A \subseteq \text{Int}_A(C \cap A)$; keterbukaan relatif dapat membuat ruas kanan pada inklusi ini lebih besar.

Pemeriksaan penguasaan Bab 15

Delapan pemeriksaan berikut memadukan topologi subruang, keterbukaan dan ketertutupan relatif, subruang bertingkat, basis, kekontinuan, tutupan, homeomorfisme interval terbuka, serta sifat separasi dalam persoalan baru. Materi ini ditulis mandiri dalam bahasa Indonesia untuk komponen pendamping berlisensi CC BY 4.0; materi ini bukan teks, terjemahan, atau solusi resmi GVSU. Kerjakan setiap soal sebelum membuka petunjuk.

Pemeriksaan O.31 Topologi sebagai prapeta inklusi. Misalkan (X, τ) ruang topologi, $A \subseteq X$, dan $i : A \rightarrow X$ fungsi inklusi. Definisikan

$$\tau_A = \{i^{-1}(O) \mid O \in \tau\}.$$

Buktikan langsung dari sifat prapeta bahwa τ_A merupakan topologi pada A dan bahwa $\tau_A = \{O \cap A \mid O \in \tau\}$. Jelaskan pula apa yang terjadi jika $A = \emptyset$, meskipun teks sumber memakai konvensi subruang tak kosong.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung prapeta $\emptyset$ dan X di bawah i .

Tahap 2. Gunakan bahwa prapeta mempertahankan gabungan sebarang dan irisan berhingga.

Tahap 3. Tuliskan $i^{-1}(O)$ sebagai himpunan titik A yang juga berada dalam O .

Jawaban. Prapeta inklusi memenuhi $i^{-1}(O) = O \cap A$. Sifat-sifat umum prapeta memberikan ketiga aksioma topologi. Untuk $A = \emptyset$, keluarga yang diperoleh adalah $\{\emptyset\}$, yaitu topologi tunggal pada himpunan kosong.

Solusi. Karena $i(a) = a$, untuk setiap $O \subseteq X$ berlaku $i^{-1}(O) = \{a \in A \mid a \in O\} = O \cap A$. Selanjutnya, $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dan $i^{-1}(X) = A$, sehingga $\emptyset, A \in \tau_A$. Untuk keluarga sebarang $\{O_j\}_{j \in J} \subseteq \tau$,

$$\bigcup_{j \in J} i^{-1}(O_j) = i^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} O_j\right) \in \tau_A.$$

Untuk $O_1, O_2 \in \tau$,

$$i^{-1}(O_1) \cap i^{-1}(O_2) = i^{-1}(O_1 \cap O_2) \in \tau_A.$$

Jadi τ_A adalah topologi dan rumus prapeta di atas menunjukkan bahwa ia tepat merupakan topologi subruang. Jika $A = \emptyset$, setiap irisan $O \cap A$ sama dengan $\emptyset$; jadi $\tau_A = \{\emptyset\}$. Fakta ini sah secara matematis, tetapi edisi ini tetap menandai bahwa definisi sumber membatasi istilah **subruang** pada subhimpunan tak kosong.

Pemeriksaan O.32 Relatif terbuka, relatif tertutup, dan buka-tutup (klopen). Misalkan A subruang dari X . Buktikan bahwa $U \subseteq A$ terbuka dalam A jika dan hanya jika $U = A \cap O$ untuk suatu himpunan terbuka O dalam X . Turunkan dari hasil itu bahwa $F \subseteq A$ tertutup dalam A jika dan hanya jika $F = A \cap C$ untuk suatu himpunan tertutup C dalam X . Kemudian, untuk $X = \mathbb{R}$ bertopologi standar dan $A = \{0\} \cup (1, 2)$, tunjukkan bahwa $\{0\}$ merupakan himpunan buka-tutup (klopen) dalam A , walaupun tidak terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pernyataan tentang himpunan terbuka adalah definisi topologi subruang yang ditulis sebagai kesetaraan himpunan.

Tahap 2. Ambil komplement relatif dalam A dan gunakan hukum De Morgan.

Tahap 3. Nyatakan $\{0\}$ sebagai irisan A dengan satu himpunan terbuka dan satu himpunan tertutup di $\mathbb{R}$.

Jawaban. Karakterisasi terbuka mengikuti langsung dari definisi. Mengambil komplement memberi karakterisasi tertutup. Dalam contoh, $\{0\} = A \cap (-1, 1/2)$ dan $\{0\} = A \cap \{0\}$, sehingga $\{0\}$ sekaligus relatif terbuka dan relatif tertutup.

Solusi. Menurut definisi topologi subruang, anggota-anggotanya tepat berupa irisan $A \cap O$ dengan O terbuka dalam X . Jadi karakterisasi pertama berlaku dalam kedua arah. Sekarang andaikan F tertutup dalam A . Maka $A \setminus F = A \cap O$ untuk suatu O terbuka dalam X . Dengan $C = X \setminus O$, yang tertutup dalam X , diperoleh

$$F = A \setminus (A \cap O) = A \cap (X \setminus O) = A \cap C.$$

Sebaliknya, jika $F = A \cap C$ dan C tertutup dalam X , maka $A \setminus F = A \cap (X \setminus C)$ terbuka dalam A ; jadi F tertutup dalam A . Untuk contoh yang diberikan, $\{0\} = A \cap (-1, 1/2)$ membuktikan keterbukaan relatif, sedangkan $\{0\} = A \cap \{0\}$ membuktikan ketertutupan relatif. Namun tidak ada interval terbuka di $\mathbb{R}$ yang memuat 0 dan seluruhnya berada dalam $\{0\}$; jadi $\{0\}$ tidak terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan O.33 Jejak topologi melalui subruang bertingkat. Misalkan $B \subseteq A \subseteq X$ dan X bertopologi τ . Buktikan bahwa topologi yang diwarisi B langsung dari X sama dengan topologi yang diwarisi B dari subruang A . Tunjukkan pula bahwa setiap himpunan terbuka W dalam B dapat ditulis sebagai $W = B \cap O$ dengan O terbuka dalam X , tetapi O tidak harus unik. Berikan dua pilihan O untuk $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 2)$, $B = \{0\} \cup (1, 2)$, dan $W = \{0\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tuliskan himpunan terbuka dalam A sebagai $A \cap O$.

Tahap 2. Gunakan $B \subseteq A$ untuk menyederhanakan $B \cap (A \cap O)$.

Tahap 3. Pilih dua interval terbuka berbeda yang irisannya dengan B hanya memuat 0.

Jawaban. Jejak dua tahap memberi $B \cap (A \cap O) = B \cap O$, tepat seperti jejak langsung dari X . Dalam contoh, baik $O = (-1, 1/2)$ maupun $O' = (-2, 3/4)$ memenuhi $B \cap O = B \cap O' = \{0\}$.

Solusi. Himpunan terbuka dalam topologi yang diwarisi B dari A berbentuk $B \cap V$, dengan V terbuka dalam A . Karena $V = A \cap O$ untuk suatu $O \in \tau$, dan karena $B \subseteq A$,

$$B \cap V = B \cap (A \cap O) = (B \cap A) \cap O = B \cap O.$$

Ini adalah himpunan terbuka yang diwarisi langsung dari X . Sebaliknya, setiap $B \cap O$ dapat ditulis sebagai $B \cap (A \cap O)$, dengan $A \cap O$ terbuka dalam A . Karena itu, kedua topologi tersebut sama. Representasi oleh O tidak unik karena perilaku O di luar B tidak memengaruhi irisannya dengan B . Pada contoh, interval $(-1, 1/2)$ dan $(-2, 3/4)$ berbeda, tetapi keduanya memotong $B = \{0\} \cup (1, 2)$ tepat pada $\{0\}$.

Pemeriksaan O.34 Basis terinduksi dan keterhitungan kedua. Misalkan $\mathcal{B}$ basis untuk ruang topologi X dan $A \subseteq X$. Buktikan bahwa

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset\}$$

merupakan basis bagi A . Simpulkan bahwa setiap subruang dari ruang berketerhitungan kedua juga berketerhitungan kedua. Terapkan hasil ini pada $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ sebagai subruang $\mathbb{R}$: tunjukkan bahwa setiap $1/n$ terisolasi dalam A , sedangkan 0 tidak terisolasi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $x \in U = A \cap O$, pilih unsur basis B dengan $x \in B \subseteq O$.

Tahap 2. Citra suatu himpunan terhitung di bawah pemetaan $B \mapsto B \cap A$ tetap paling banyak terhitung.

Tahap 3. Pisahkan $1/n$ dari suku-suku tetangganya dengan interval kecil, lalu gunakan bahwa $1/n \rightarrow 0$.

Jawaban. Setiap lingkungan relatif $A \cap O$ dari suatu titik memuat jejak $A \cap B$ dari unsur basis ambien yang sesuai. Jika $\mathcal{B}$ terhitung, keluarga jejaknya juga terhitung. Pada subruang contoh, interval cukup kecil mengisolasi setiap $1/n$, tetapi setiap lingkungan relatif dari 0 memuat tak berhingga banyak titik $1/n$.

Solusi. Ambil U terbuka dalam A dan $x \in U$. Ada O terbuka dalam X dengan $U = A \cap O$. Karena $\mathcal{B}$ basis, ada $B \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B \subseteq O$. Maka $x \in B \cap A \subseteq O \cap A = U$, dan $B \cap A$ tidak kosong. Jadi $\mathcal{B}_A$ memenuhi kriteria basis. Jika $\mathcal{B}$ terhitung, membuang jejak kosong dan kemungkinan pengulangan tidak dapat menghasilkan keluarga tak terhitung; karena itu $\mathcal{B}_A$ terhitung.

Untuk $n > 1$, pilih interval terbuka yang berpusat di $1/n$ dan ujung-ujungnya berada secara ketat di antara $1/(n+1)$, $1/n$, dan $1/(n-1)$. Irisannya dengan A adalah $\{1/n\}$. Untuk $n = 1$, misalnya $(3/4, 5/4) \cap A = \{1\}$. Jadi setiap $1/n$ terisolasi. Sebaliknya, ambil sebarang lingkungan relatif U dari 0 . Ada himpunan terbuka $O \subseteq \mathbb{R}$ dengan $U = A \cap O$ dan $0 \in O$. Pilih $\epsilon > 0$ sehingga $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq O$. Sifat Archimedes memberi n dengan $1/n < \epsilon$, sehingga $1/n \in U \setminus \{0\}$. Jadi setiap lingkungan relatif dari 0 memuat titik lain dari A , dan $\{0\}$ tidak terbuka dalam A .

Pemeriksaan O.35 Pembatasan kontinu membawa tutupan ke tutupan. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu, $A \subseteq X$, dan $B \subseteq A$. Buktikan bahwa pembatasan $f|_A : A \rightarrow Y$ kontinu dan bahwa

$$(f|_A)(\overline{B}^A) \subseteq \overline{f(B)}^Y.$$

Tunjukkan dengan $X = A = B = \mathbb{R}$ dan $f(x) = e^x$ bahwa inklusi tersebut dapat ketat.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung prapeta suatu himpunan terbuka di bawah $f|_A$.

Tahap 2. Jika $x \in \overline{B}^A$, tarik kembali lingkungan terbuka dari $f(x)$.

Tahap 3. Bandingkan $e^{\mathbb{R}}$ dengan tutupannya dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Prapeta oleh pembatasan adalah $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$, sehingga terbuka dalam A . Setiap lingkungan V dari $f(x)$ karena itu menarik balik ke lingkungan relatif dari x yang bertemu B . Untuk fungsi eksponensial, ruas kiri adalah $(0, \infty)$, sedangkan ruas kanan $[0, \infty)$.

Solusi. Jika V terbuka dalam Y , kekontinuan f memberi $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Karena $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$, prapeta itu terbuka dalam A ; jadi $f|_A$ kontinu. Sekarang ambil $x \in \overline{B}^A$. Untuk setiap lingkungan terbuka V dari $f(x)$, himpunan $(f|_A)^{-1}(V)$ merupakan lingkungan relatif dari x . Karena x berada dalam tutupan B di A , prapeta itu bertemu B . Jadi V bertemu $f(B)$, yang berarti $f(x) \in \overline{f(B)}^Y$. Ini membuktikan inklusi.

Untuk $X = A = B = \mathbb{R}$, berlaku $\overline{B}^A = \mathbb{R}$. Fungsi $f(x) = e^x$ kontinu dan $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, sehingga ruas kiri adalah $(0, \infty)$. Tutupan himpunan itu dalam $\mathbb{R}$ adalah $[0, \infty)$; titik 0 menunjukkan bahwa inklusi dapat ketat.

Pemeriksaan O.36 Homeomorfisme eksplisit dari garis ke interval terbuka. Untuk bilangan real $a < b$, definisikan

$$h(x) = a + (b - a) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \right).$$

Buktikan bahwa $h : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ merupakan homeomorfisme dengan menuliskan inversnya secara eksplisit. Simpulkan bahwa $U \subseteq (a, b)$ terbuka dalam topologi subruang jika dan hanya jika $h^{-1}(U)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan bahwa $\arctan$ memetakan $\mathbb{R}$ secara bijektif ke $(-\pi/2, \pi/2)$.

Tahap 2. Selesaikan persamaan $y = h(x)$ terhadap x .

Tahap 3. Terapkan kekontinuan h dan h^{-1} pada prapeta himpunan terbuka.

Jawaban. Inversnya adalah $h^{-1}(y) = \tan(\pi((y - a)/(b - a) - 1/2))$. Kedua fungsi kontinu pada domainnya, sehingga h homeomorfisme dan mempertahankan keterbukaan melalui prapeta.

Solusi. Fungsi $\arctan$ kontinu, naik tegas, dan mempunyai citra $(-\pi/2, \pi/2)$. Pemetaan afin $t \mapsto a + (b - a)(1/2 + t/\pi)$ membawa interval itu secara bijektif ke (a, b) . Jadi komposisinya, yaitu h , kontinu dan bijektif. Dari $y = h(x)$ diperoleh

$$x = \tan \left(\pi \left(\frac{y - a}{b - a} - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Argumen fungsi $\tan$ berada dalam $(-\pi/2, \pi/2)$ ketika $y \in (a, b)$, sehingga rumus ini mendefinisikan invers kontinu. Maka h adalah homeomorfisme. Jika U terbuka dalam (a, b) , kekontinuan h membuat $h^{-1}(U)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$. Sebaliknya, jika $h^{-1}(U)$ terbuka, maka $U = (h^{-1})^{-1}(h^{-1}(U))$ terbuka karena h^{-1} kontinu.

Pemeriksaan O.37 Pewarisan sifat Hausdorff dan reguler. Misalkan A subruang dari X . Buktikan bahwa jika X Hausdorff, maka A Hausdorff. Selanjutnya, andaikan X reguler dan T_1 . Buktikan bahwa A juga reguler dan T_1 . Nyatakan dengan jelas bagaimana himpunan terbuka dan tertutup ambien dipotong dengan A untuk menghasilkan saksi separasi di subruang.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pisahkan dua titik A dengan himpunan terbuka di X , lalu ambil jejaknya.

Tahap 2. Tuliskan himpunan tertutup F dalam A sebagai $A \cap C$ dengan C tertutup dalam X .

Tahap 3. Untuk sifat T_1 , perhatikan bahwa setiap himpunan satu titik tertutup.

Jawaban. Saksi terbuka yang saling lepas di X tetap terbuka dan saling lepas setelah diiris dengan A . Untuk regularitas, wakili $F = A \cap C$, pisahkan titik dari C di X , lalu ambil jejak kedua lingkungan. Himpunan satu titik dalam A tertutup karena merupakan irisan A dengan himpunan satu titik tertutup dalam X .

Solusi. Ambil titik berbeda $x, y \in A$. Karena X Hausdorff, ada himpunan terbuka saling lepas $U, V \subseteq X$ dengan $x \in U$ dan $y \in V$. Himpunan $U \cap A$ dan $V \cap A$ terbuka dalam A , memuat titik masing-masing, dan tetap saling lepas. Jadi A Hausdorff.

Sekarang andaikan X reguler dan T_1 . Ambil $a \in A$ dan F tertutup dalam A dengan $a \notin F$. Ada C tertutup dalam X sehingga $F = A \cap C$. Karena $a \in A$ tetapi $a \notin F$, juga $a \notin C$. Regularitas X memberi himpunan terbuka saling lepas U, V dengan $a \in U$ dan $C \subseteq V$. Jejak $U \cap A$ dan $V \cap A$ memisahkan a dari F dalam A . Terakhir, untuk setiap $a \in A$, himpunan $\{a\}$ tertutup dalam X karena X bersifat T_1 , dan $\{a\} = A \cap \{a\}$ tertutup dalam A . Jadi A reguler dan T_1 .

Pemeriksaan O.38 Dua sangkalan terhadap intuisi subruang yang keliru. Sanggah kedua pernyataan berikut dengan contoh konkret dan verifikasi lengkap.

1. Jika ruang ambien tidak diskret, maka tidak ada subruang tak kosongnya yang diskret.
2. Untuk setiap $A, C \subseteq X$, selalu berlaku $\text{Int}_A(C \cap A) = A \cap \text{Int}_X(C)$.

Gunakan ruang metrik yang familiar agar kegagalan kedua klaim tampak dari topologi subruangnya, bukan dari konstruksi eksotis.

Petunjuk. *Tahap 1.* Di $\mathbb{R}$, cari subhimpunan tak berhingga yang tiap titiknya dapat diisolasi oleh interval kecil.

Tahap 2. Untuk klaim interior, pilih subruang satu titik yang tidak terbuka dalam ruang ambien.

Tahap 3. Hitung kedua ruas secara terpisah dalam setiap contoh.

Jawaban. Untuk klaim pertama, ambil $X = \mathbb{R}$ dan $A = \mathbb{Z}$; topologi subruang pada $\mathbb{Z}$ diskret walaupun $\mathbb{R}$ tidak diskret. Untuk klaim kedua, ambil $X = \mathbb{R}$ dan $A = C = \{0\}$. Interior relatif ruas kiri adalah $\{0\}$, sedangkan interior ambien C kosong.

Solusi. Ruang $\mathbb{R}$ dengan topologi standar tidak diskret karena, misalnya, $\{0\}$ tidak terbuka. Namun untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$,

$$(n - 1/3, n + 1/3) \cap \mathbb{Z} = \{n\}.$$

Jadi setiap himpunan satu titik terbuka dalam subruang $\mathbb{Z}$. Setiap subhimpunan $\mathbb{Z}$ adalah gabungan himpunan-himpunan satu titik tersebut, sehingga topologi subruang pada $\mathbb{Z}$ diskret. Ini menyanggah klaim pertama.

Untuk klaim kedua, ambil $X = \mathbb{R}$ dan $A = C = \{0\}$. Sebagai ruang satu titik, A mempunyai topologi $\{\emptyset, A\}$. Karena itu $\text{Int}_A(C \cap A) = \text{Int}_A(A) = A$. Di sisi lain, $\text{Int}_{\mathbb{R}}(C) = \emptyset$, sehingga $A \cap \text{Int}_{\mathbb{R}}(C) = \emptyset$. Kedua ruas berbeda, dan klaim kedua juga salah.

Lampiran P

Panduan Belajar Mandiri Bab 16: Ruang Kuosien

Komponen ini mendampingi Bab 16, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Bab sumber memuat 54 kejadian prompt fisik. Dua pasangan prompt terakhir merupakan duplikat persis yang diwarisi dari sumber; semuanya dipertahankan, tetapi pasangan kedua dipetakan sebagai alias ke dukungan pasangan pertama. Karena itu, panduan ini menyediakan 52 entri dukungan kanonis dalam urutan sumber. Tiga tugas induk yang hanya mengelompokkan tujuh subpertanyaan disimpan sebagai relasi backend dan tidak dihitung sebagai prompt tambahan.

Delapan pemeriksaan penguasaan orisinal memadukan gagasan topologi kuosien, sifat universal, model poligonal, retraksi, serta syarat Hausdorff dalam persoalan baru. Bersama 52 panduan sumber, komponen ini mempunyai tepat 60 entri kanonis dan 240 permukaan bertahap berupa pernyataan, petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University, tidak menyatakan dukungan mereka, dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0. Teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tersebut tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Panduan Belajar Mandiri: Membangun Topologi Kuosien

Sepuluh panduan ini mendampingi tugas-tugas awal Bab 16: menghitung suatu topologi kuosien berhingga, memeriksa sifat universalnya, membuktikan aksioma-aksioma topologi, dan menganalisis dua pemetaan dari garis real. Kerjakan dahulu butir pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan P.1 Menghitung Topologi yang Ditentukan oleh Prapeta. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, X\},$$

dan misalkan $Y = \{a, b, c, d\}$. Definisikan surjeksi $p : X \rightarrow Y$ melalui

$$p(1) = b, \quad p(2) = a, \quad p(3) = c, \quad p(4) = d, \quad p(5) = c, \quad p(6) = a.$$

Tentukan semua anggota $\sigma = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tuliskan keempat serat $p^{-1}(\{a\})$, $p^{-1}(\{b\})$, $p^{-1}(\{c\})$, dan $p^{-1}(\{d\})$.

Tahap 2. Prapeta suatu subhimpunan $U \subseteq Y$ harus berupa gabungan serat-serat utuh.

Tahap 3. Periksa anggota τ mana yang merupakan gabungan serat-serat utuh, lalu baca kembali subhimpunan U yang bersesuaian.

Jawaban. Diperoleh $\sigma = \{\emptyset, \{a, b, d\}, Y\}$.

Solusi. Serat-serat p adalah

$$p^{-1}(\{a\}) = \{2, 6\}, \quad p^{-1}(\{b\}) = \{1\}, \quad p^{-1}(\{c\}) = \{3, 5\}, \quad p^{-1}(\{d\}) = \{4\}.$$

Karena $p^{-1}(U)$ selalu merupakan gabungan semua serat yang berlabel anggota U , hanya anggota τ yang memuat setiap serat secara utuh yang mungkin menjadi prapeta seperti itu.

Himpunan $\{1, 2\}$ memuat 2 tetapi tidak memuat 6, sedangkan $\{4, 6\}$ memuat 6 tetapi tidak memuat 2; keduanya memotong serat $\{2, 6\}$ dan bukan prapeta subhimpunan mana pun dari Y . Tiga anggota τ yang merupakan gabungan serat utuh adalah

$$\emptyset = p^{-1}(\emptyset), \quad \{1, 2, 4, 6\} = p^{-1}(\{a, b, d\}), \quad X = p^{-1}(Y).$$

Jadi tepat ketiga subhimpunan yang disebutkan pada jawaban berada dalam σ .

Pemeriksaan P.2 Memeriksa Topologi Kuosien Berhingga. Gunakan X , Y , p , dan τ berikut: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$,

$$\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, X\},$$

serta $p(1) = b$, $p(2) = a$, $p(3) = c$, $p(4) = d$, $p(5) = c$, dan $p(6) = a$. Buktikan bahwa $\sigma = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$ merupakan topologi pada Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung dahulu σ secara eksplisit.

Tahap 2. Periksa bahwa $\emptyset$ dan Y berada dalam daftar tersebut.

Tahap 3. Untuk keluarga tiga himpunan $\{\emptyset, S, Y\}$, analisis semua kemungkinan gabungan dan irisan berhingga.

Jawaban. Perhitungan memberi $\sigma = \{\emptyset, \{a, b, d\}, Y\}$. Keluarga ini memuat himpunan kosong dan seluruh ruang serta tertutup terhadap gabungan sebarang dan irisan berhingga, sehingga merupakan topologi pada Y .

Solusi. Dengan menghitung serat seperti pada tugas sebelumnya, diperoleh $\sigma = \{\emptyset, S, Y\}$, dengan $S = \{a, b, d\}$. Jelas $\emptyset, Y \in \sigma$.

Ambil keluarga sebarang anggota σ . Jika salah satu anggotanya Y , gabungannya adalah Y . Jika tidak, tetapi salah satu anggotanya S , gabungannya adalah S ; jika semua anggotanya kosong, gabungannya kosong. Jadi gabungan sebarang tetap berada dalam σ . Untuk irisan berhingga, kehadiran $\emptyset$ menghasilkan $\emptyset$; tanpa $\emptyset$, kehadiran S menghasilkan S ; dan irisan yang hanya melibatkan Y menghasilkan Y . Dengan konvensi, irisan keluarga kosong adalah Y . Maka semua aksioma topologi terpenuhi.

Pemeriksaan P.3 Kekontinuan Pemetaan Pembentuk Kuosien. Misalkan (X, τ) dan fungsi surjektif $p : X \rightarrow Y$ seperti berikut: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$,

$$\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, X\},$$

dan $p(1) = b$, $p(2) = a$, $p(3) = c$, $p(4) = d$, $p(5) = c$, $p(6) = a$. Beri Y topologi $\sigma = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$. Jelaskan mengapa $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ kontinu.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat definisi kekontinuan melalui prapeta himpunan terbuka.

Tahap 2. Ambil sembarang $U \in \sigma$.

Tahap 3. Gunakan langsung syarat yang mendefinisikan keanggotaan U dalam σ .

Jawaban. Untuk setiap U yang terbuka dalam (Y, σ) , definisi σ menjamin bahwa $p^{-1}(U) \in \tau$. Inilah tepat syarat kekontinuan p .

Solusi. Suatu fungsi antar-ruang topologi kontinu jika prapeta setiap himpunan terbuka di kodomain terbuka di domain. Ambil sembarang $U \in \sigma$. Persamaan yang mendefinisikan σ menyatakan

$$U \in \sigma \iff p^{-1}(U) \in \tau.$$

Jadi prapeta setiap himpunan terbuka di Y terbuka di X . Karena itu $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ kontinu. Tidak diperlukan pemeriksaan tambahan terhadap titik-titik satu per satu.

Pemeriksaan P.4 Sifat Maksimal Topologi Kuosien. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, X\},$$

misalkan $Y = \{a, b, c, d\}$, dan definisikan surjeksi $p : X \rightarrow Y$ melalui $p(1) = b, p(2) = a, p(3) = c, p(4) = d, p(5) = c, \text{ dan } p(6) = a$. Untuk

$$\sigma = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Buktikan bahwa σ adalah topologi terbesar pada Y yang membuat p kontinu. Dengan kata lain, tunjukkan bahwa setiap topologi σ' pada Y yang membuat p kontinu memenuhi $\sigma' \subseteq \sigma$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil topologi σ' yang membuat p kontinu dan pilih $U \in \sigma'$.

Tahap 2. Terapkan definisi kekontinuan untuk menyimpulkan sesuatu tentang $p^{-1}(U)$.

Tahap 3. Bandingkan kesimpulan itu dengan definisi σ ; kemudian jelaskan apa yang terjadi jika σ' memuat anggota di luar σ .

Jawaban. Jika $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma')$ kontinu, maka setiap $U \in \sigma'$ mempunyai prapeta terbuka di X , sehingga $U \in \sigma$. Jadi $\sigma' \subseteq \sigma$.

Solusi. Misalkan σ' suatu topologi pada Y dan andaikan $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma')$ kontinu. Untuk setiap $U \in \sigma'$, kekontinuan memberi $p^{-1}(U) \in \tau$. Berdasarkan definisi σ , kondisi terakhir ekuivalen dengan $U \in \sigma$. Jadi setiap anggota σ' juga anggota σ , yakni $\sigma' \subseteq \sigma$.

Secara khusus, jika suatu topologi pada Y memuat σ secara sejati, pilih himpunan terbuka $U \notin \sigma$ dari selisihnya. Maka $p^{-1}(U) \notin \tau$, sehingga p tidak kontinu untuk topologi yang lebih besar itu. Jadi “terbesar” di sini berarti topologi paling halus di antara semua topologi pada Y yang membuat p kontinu.

Pemeriksaan P.5 Dua Anggota Wajib Topologi Kuosien. Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Untuk

$$\tau_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\},$$

buktikan bahwa $\emptyset$ dan Y merupakan anggota τ_Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung $p^{-1}(\emptyset)$.

Tahap 2. Gunakan surjektivitas untuk menghitung $p^{-1}(Y)$.

Tahap 3. Terapkan aksioma pertama topologi pada τ_X .

Jawaban. Karena $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$ dan, oleh surjektivitas, $p^{-1}(Y) = X \in \tau_X$, berlaku $\emptyset, Y \in \tau_Y$.

Solusi. Tidak ada titik yang dipetakan ke anggota himpunan kosong, sehingga $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Setiap topologi pada X memuat $\emptyset$; maka definisi τ_Y memberi $\emptyset \in \tau_Y$.

Karena kodomain p adalah Y , sebenarnya $p^{-1}(Y) = X$ untuk setiap fungsi $p : X \rightarrow Y$; asumsi surjektif diperlukan untuk konstruksi kuosien, tetapi tidak untuk identitas ini. Aksioma topologi memberi $X \in \tau_X$, sehingga $Y \in \tau_Y$.

Pemeriksaan P.6 Gabungan Sebarang dalam Topologi Kuosien. Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi, dan $\tau_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}$. Jika $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ suatu keluarga anggota τ_Y , buktikan bahwa $\bigcup_{\beta \in J} U_\beta \in \tau_Y$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap β , terjemahkan $U_\beta \in \tau_Y$ menjadi pernyataan tentang prapetanya.

Tahap 2. Gunakan identitas bahwa prapeta mempertahankan gabungan sebarang.

Tahap 3. Terapkan aksioma gabungan pada τ_X dan kembali ke definisi τ_Y .

Jawaban. Berlaku $p^{-1}(\bigcup_{\beta} U_\beta) = \bigcup_{\beta} p^{-1}(U_\beta)$. Ruas kanan terbuka dalam X , sehingga gabungan pada ruas kiri merupakan anggota τ_Y .

Solusi. Karena $U_\beta \in \tau_Y$, untuk setiap $\beta \in J$ berlaku $p^{-1}(U_\beta) \in \tau_X$. Prapeta berkomutasi dengan gabungan sebarang, jadi

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} U_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} p^{-1}(U_\beta).$$

Ruas kanan adalah gabungan sebarang himpunan terbuka dalam X , sehingga berada dalam τ_X . Berdasarkan definisi τ_Y , hal ini tepat menyatakan bahwa $\bigcup_{\beta \in J} U_\beta \in \tau_Y$. Argumen juga mencakup $J = \emptyset$, ketika gabungannya kosong.

Pemeriksaan P.7 Irisan Berhingga dalam Topologi Kuosien. Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi, dan $\tau_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}$. Jika J berhingga dan $U_\beta \in \tau_Y$ untuk setiap $\beta \in J$, buktikan bahwa $\bigcap_{\beta \in J} U_\beta \in \tau_Y$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ubah keanggotaan setiap U_β menjadi keterbukaan $p^{-1}(U_\beta)$.

Tahap 2. Prapeta juga mempertahankan irisan.

Tahap 3. Di sinilah keberhinggaan J diperlukan untuk memakai aksioma topologi pada τ_X .

Jawaban. Karena $p^{-1}(\bigcap_{\beta} U_\beta) = \bigcap_{\beta} p^{-1}(U_\beta)$ dan ruas kanan merupakan irisan berhingga himpunan terbuka, prapeta irisan tersebut terbuka. Jadi irisannya berada dalam τ_Y .

Solusi. Dari $U_\beta \in \tau_Y$ diperoleh $p^{-1}(U_\beta) \in \tau_X$ untuk setiap $\beta \in J$. Identitas prapeta memberi

$$p^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in J} U_\beta\right) = \bigcap_{\beta \in J} p^{-1}(U_\beta).$$

Karena J berhingga, ruas kanan terbuka dalam X oleh aksioma irisan berhingga. Maka $\bigcap_{\beta \in J} U_\beta \in \tau_Y$. Jika $J = \emptyset$, kedua irisan masing-masing adalah Y dan X , sehingga kesimpulan tetap benar.

Pemeriksaan P.8 Menyimpulkan Aksioma Topologi. Misalkan (X, τ_X) suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Definisikan $\tau_Y = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}$. Setelah diketahui bahwa $\emptyset, Y \in \tau_Y$, bahwa τ_Y tertutup terhadap gabungan sebarang, dan bahwa τ_Y tertutup terhadap irisan berhingga, simpulkan apa yang dapat dikatakan tentang τ_Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Cocokkan ketiga fakta yang diberikan dengan definisi sebuah topologi.

Tahap 2. Perhatikan bahwa semua anggota τ_Y memang subhimpunan dari Y .

Tahap 3. Nyatakan pula nama topologi yang dibentuk melalui suatu surjeksi dengan aturan prapeta ini.

Jawaban. Ketiga aksioma terpenuhi, jadi τ_Y merupakan topologi pada Y . Topologi ini disebut topologi kuosien yang ditentukan oleh p dan τ_X .

Solusi. Sebuah koleksi subhimpunan dari Y adalah topologi tepat bila memuat $\emptyset$ dan Y , tertutup terhadap gabungan sebarang, serta tertutup terhadap irisan berhingga. Semua syarat itu telah diverifikasi untuk τ_Y . Karena itu (Y, τ_Y) adalah ruang topologi. Konstruksi ini disebut topologi kuosien pada Y ; surjeksi p menjadi pemetaan kuosien karena, menurut definisi, U terbuka di Y jika dan hanya jika $p^{-1}(U)$ terbuka di X .

Pemeriksaan P.9 Topologi Kuosien dari Pemetaan Tanda. Beri $X = \mathbb{R}$ topologi standar dan ambil $Y = \{-1, 0, 1\}$. Definisikan surjeksi $p : X \rightarrow Y$ dengan $p(x) = 1$ untuk $x > 0$, $p(0) = 0$, dan $p(x) = -1$ untuk $x < 0$. Tentukan semua himpunan terbuka dalam topologi kuosien pada Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Ada hanya delapan subhimpunan Y ; mulai dengan prapeta ketiga himpunan satu titik.

Tahap 2. Prapeta mempertahankan gabungan, sehingga prapeta himpunan beranggota dua mudah diperoleh.

Tahap 3. Tentukan prapeta mana yang terbuka dalam topologi standar pada $\mathbb{R}$.

Jawaban. Topologi kuosienya adalah

$$\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}, Y\}.$$

Solusi. Serat-seratnya ialah $p^{-1}(\{-1\}) = (-\infty, 0)$, $p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, dan $p^{-1}(\{1\}) = (0, \infty)$. Karena itu prapeta delapan subhimpunan Y adalah

$$\begin{aligned} p^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, & p^{-1}(\{-1\}) &= (-\infty, 0), & p^{-1}(\{0\}) &= \{0\}, \\ p^{-1}(\{1\}) &= (0, \infty), & p^{-1}(\{-1, 0\}) &= (-\infty, 0], & p^{-1}(\{0, 1\}) &= [0, \infty), \\ p^{-1}(\{-1, 1\}) &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, & p^{-1}(Y) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Di antara himpunan-himpunan tersebut, tepat $\emptyset$, $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan $\mathbb{R}$ yang terbuka dalam topologi standar. Subhimpunan Y yang bersesuaian memberi daftar pada jawaban. Khususnya, 0 tidak mempunyai lingkungan terbuka sejati di Y ; setiap himpunan terbuka yang memuat 0 harus sama dengan Y .

Pemeriksaan P.10 Topologi Melingkar dari Fungsi Bagian Pecahan. Beri $\mathbb{R}$ topologi standar dan definisikan surjeksi $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ dengan $p(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Ciri lengkap apakah yang harus dipenuhi $U \subseteq [0, 1)$ agar $p^{-1}(U)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$? Dengan demikian, tentukan semua anggota topologi kuosien pada $[0, 1)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan $p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + U)$ dan periksa titik-titik dengan bagian pecahan di antara 0 dan 1 .

Tahap 2. Jika $0 \in U$, keterbukaan prapeta di setiap bilangan bulat memaksa U memuat bagian kecil di dekat 0 sekaligus bagian kecil di dekat 1 .

Tahap 3. Buktikan arah sebaliknya dengan membangun lingkungan terbuka bagi setiap titik $x \in p^{-1}(U)$, dengan memisahkan kasus $p(x) = 0$ dan $p(x) \neq 0$.

Jawaban. Suatu $U \subseteq [0, 1)$ terbuka kuosien jika dan hanya jika setiap $y \in U \cap (0, 1)$ mempunyai selang terbuka kecil yang termuat dalam U , dan, bila $0 \in U$, terdapat $\varepsilon > 0$ dengan $[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1) \subseteq U$. Jadi lingkungan 0 harus “membungkus” kedua ujung interval.

Solusi. Untuk $U \subseteq [0, 1)$, berlaku

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + U), \quad n + U = \{n + u \mid u \in U\}.$$

Andaikan prapeta ini terbuka. Jika $y \in U \cap (0, 1)$, maka $y \in p^{-1}(U)$; ada $\delta > 0$, yang dapat diperkecil agar $\delta < \min\{y, 1 - y\}$, sedemikian sehingga $(y - \delta, y + \delta) \subseteq p^{-1}(U)$. Pada selang $(0, 1)$, fungsi p adalah identitas, sehingga selang itu termuat dalam U .

Jika $0 \in U$, maka $0 \in p^{-1}(U)$. Keterbukaan menghasilkan $\varepsilon > 0$, yang dapat dipilih kurang dari 1 , dengan $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq p^{-1}(U)$. Bagian positif dipetakan ke $(0, \varepsilon)$, sedangkan untuk $t \in (-\varepsilon, 0)$ berlaku $p(t) = 1 + t$. Jadi

$$[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1) \subseteq U.$$

Kedua kondisi pada jawaban dengan demikian perlu.

Sebaliknya, andaikan kedua kondisi itu dipenuhi dan ambil $x \in p^{-1}(U)$. Jika $p(x) = y \in (0, 1)$, suatu selang kecil di sekitar y yang termuat dalam U , setelah digeser oleh bilangan bulat $\lfloor x \rfloor$, memberi lingkungan

terbuka bagi x yang termuat dalam $p^{-1}(U)$. Jika $p(x) = 0$, maka x bilangan bulat; syarat pembungkusan di 0 membuat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ termuat dalam $p^{-1}(U)$, setelah ε diperkecil bila perlu. Jadi setiap titik prapeta merupakan titik interior, sehingga $p^{-1}(U)$ terbuka. Ini membuktikan kecukupan dan melengkapi pencerian semua himpunan terbuka kuosien. Topologi ini bukan topologi subruang biasa pada $[0, 1]$; secara topologis, titik dekat 1 juga dekat dengan 0.

Panduan Belajar Mandiri: Ruang Identifikasi dan Faktorisasi

Delapan panduan ini melanjutkan pendamping Bab 16: satu kuosien berhingga, empat identifikasi geometris, dan tiga langkah pembuktian teorema faktorisasi melalui kelas ekuivalensi. Cobalah membangun argumen atau gambarnya sendiri sebelum membuka setiap tahap bantuan.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan P.11 Topologi pada Dua Kelas Ekuivalensi. Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Partisikan X menjadi kelas $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{d, e, f\}$, letakkan $X^* = \{A, B\}$, dan definisikan proyeksi $p : X \rightarrow X^*$ dengan $p(x) = A$ untuk $x \in A$ serta $p(x) = B$ untuk $x \in B$. Tentukan topologi kuosien pada X^* .

Petunjuk. *Tahap 1.* Daftarkan keempat subhimpunan dari $X^* = \{A, B\}$.

Tahap 2. Prapeta $\{A\}$ dan $\{B\}$ masing-masing adalah kelas yang namanya sama.

Tahap 3. Bandingkan keempat prapeta dengan daftar anggota τ .

Jawaban. Topologi kuosien pada X^* adalah $\{\emptyset, \{A\}, X^*\}$.

Solusi. Keempat calon himpunan terbuka dan prapetanya adalah

$$\begin{aligned} p^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, & p^{-1}(\{A\}) &= A = \{a, b, c\}, \\ p^{-1}(\{B\}) &= B = \{d, e, f\}, & p^{-1}(X^*) &= X. \end{aligned}$$

Dari daftar τ , himpunan $\emptyset$, A , dan X terbuka, sedangkan B tidak terbuka. Berdasarkan definisi topologi kuosien, tepat $\emptyset$, $\{A\}$, dan X^* yang terbuka dalam X^* . Ini adalah topologi Sierpiński dengan A sebagai titik terbuka.

Pemeriksaan P.12 Merekatkan Ujung Interval Menjadi Lingkaran. Beri $I = [0, 1]$ topologi standar. Ambil relasi ekuivalensi terkecil yang mengidentifikasi 0 dengan 1 dan tidak mengidentifikasi dua titik lain yang berbeda. Deskripsikan ruang kuosien $I/\sim$ dan buktikan identifikasi tersebut dengan suatu peta eksplisit.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bayangkan interval ditebuk sampai kedua ujungnya berimpit.

Tahap 2. Gunakan $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ dan tentukan kapan dua parameter mempunyai citra sama.

Tahap 3. Faktorkan f melalui proyeksi kuosien; untuk inversnya, periksa busur lokal, khususnya busur yang melintasi titik $(1, 0)$.

Jawaban. Ruang $[0, 1]/\sim$ homeomorfik dengan lingkaran satuan $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$. Homeomorfismenya diberikan oleh $[t] \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Solusi. Definisikan $f : I \rightarrow S^1$ melalui $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Fungsi ini kontinu dan surjektif. Untuk $s, t \in [0, 1]$, persamaan $f(s) = f(t)$ berlaku tepat ketika $s = t$ atau $\{s, t\} = \{0, 1\}$. Jadi serat-serat f tepat kelas-kelas relasi yang diberikan. Jika $q : I \rightarrow I/\sim$ adalah proyeksi, rumus

$$\bar{f}([t]) = f(t)$$

karena itu terdefinisi dengan baik dan menghasilkan bijeksi $\bar{f} : I/\sim \rightarrow S^1$ dengan $f = \bar{f} \circ q$.

Untuk setiap himpunan terbuka $O \subseteq S^1$, berlaku $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$, dan ruas kanan terbuka karena f kontinu. Definisi topologi kuosien lalu menunjukkan bahwa $\bar{f}$ kontinu.

Untuk melihat kekontinuan invers tanpa hanya mengandalkan gambar, ambil W terbuka dalam $I/\sim$. Himpunan $q^{-1}(W)$ terbuka relatif dalam I dan merupakan gabungan kelas-kelas. Di sekitar setiap $t \in (0, 1)$, pilih selang kecil tempat f memetakan homeomorfik ke suatu busur terbuka. Jika kelas ujung berada dalam W , keterbukaan dan kejenuhan prapeta memberi dua ruas $[0, \delta)$ dan $(1 - \varepsilon, 1]$; citra gabungannya memuat busur terbuka di sekitar $(1, 0)$. Busur-busur ini menunjukkan bahwa $\bar{f}(W) = f(q^{-1}(W))$ terbuka dalam S^1 . Jadi $\bar{f}$ terbuka, inversnya kontinu, dan $\bar{f}$ adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan P.13 Identifikasi dengan Setengah Puntiran. Pada persegi $I \times I$, ambil relasi ekuivalensi terkecil yang memenuhi $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ untuk setiap $x \in I$, sedangkan titik-titik lain tidak diidentifikasi kecuali sebagaimana dipaksa oleh aksioma relasi ekuivalensi. Deskripsikan ruang kuosienya dan jelaskan peran pembalikan $x \mapsto 1 - x$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pandang koordinat y sebagai arah memanjang sebuah pita.

Tahap 2. Sebelum merekatkan sisi $y = 0$ dan $y = 1$, putar salah satu ujung setengah putaran agar x berpasangan dengan $1 - x$.

Tahap 3. Lacak kedua sisi $x = 0$ dan $x = 1$ setelah perekatan untuk memeriksa jumlah komponen batas.

Jawaban. Ruang kuosien tersebut adalah pita Möbius. Pembalikan koordinat melahirkan setengah puntiran; akibatnya kedua sisi panjang persegi menyatu menjadi satu komponen batas.

Solusi. Anggap y bergerak sepanjang pita dan $s = 2x - 1 \in [-1, 1]$ bergerak melintang. Ketika y bergerak sekali dari 0 ke 1, aturan perekatan mengganti s dengan $-s$. Itulah setengah puntiran yang membedakan pita Möbius dari tabung, tempat koordinat melintang tidak dibalik.

Identifikasi itu dapat diwujudkan secara eksplisit. Untuk $\theta = 2\pi y$ dan $s = 2x - 1$, definisikan

$$F(x, y) = \left(\left(2 + \frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta, \left(2 + \frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta, \frac{s}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Pada $y = 0$ parameter melintangnya adalah s . Pada $y = 1$, pasangan $1 - x$ mempunyai parameter $-s$ dan faktor setengah sudut juga berubah tanda, sehingga $F(x, 0) = F(1 - x, 1)$. Selain pasangan yang diwajibkan ini, rumus tersebut tidak menyamakan titik lain; rumus itu merupakan parametrisasi standar pita Möbius tanpa perpotongan diri.

Karena F konstan tepat pada kelas-kelas tersebut, ia menginduksi bijeksi kontinu dari ruang kuosien ke citra pita Möbius di $\mathbb{R}^3$. Ruang kuosien itu kompak sebagai citra kontinu dari persegi kompak, sedangkan $\mathbb{R}^3$ Hausdorff; maka bijeksi kontinu tersebut adalah homeomorfisme. Terakhir, lintasan batas $x = 0$ tiba di $(0, 1) \sim (1, 0)$, lalu berlanjut sepanjang sisi $x = 1$. Jadi kedua sisi itu membentuk satu lingkaran batas, sesuai ciri pita Möbius.

Pemeriksaan P.14 Merekatkan Dua Pasang Sisi Menjadi Torus. Pada $I \times I$, ambil relasi ekuivalensi terkecil yang mengidentifikasi $(x, 0)$ dengan $(x, 1)$ dan $(0, y)$ dengan $(1, y)$ untuk semua $x, y \in I$. Dengan demikian keempat sudut berada dalam satu kelas. Deskripsikan ruang kuosien tersebut dan buktikan identifikasinya dengan suatu peta eksplisit.

Petunjuk. *Tahap 1.* Merekatkan satu pasangan sisi yang berhadapan dengan arah sama menghasilkan tabung.

Tahap 2. Rekatkan dua lingkaran batas tabung itu untuk mendapatkan permukaan tertutup.

Tahap 3. Gunakan pasangan koordinat melingkar $(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ untuk memeriksa kelas-kelas secara tepat.

Jawaban. Ruang kuosienya homeomorfik dengan torus $S^1 \times S^1$, dengan $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Homeomorfisme kanonis mengirim $[x, y]$ ke $(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$.

Solusi. Definisikan

$$F : I^2 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad F(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).$$

Fungsi ini kontinu dan surjektif. Koordinat pertama sama tepat bila nilai x sama atau merupakan pasangan

ujung $0, 1$; pernyataan yang sama berlaku untuk koordinat kedua. Karena itu dua titik mempunyai citra sama tepat bila keduanya berada dalam kelas yang dibentuk oleh perekatan dua pasangan sisi tersebut. Secara khusus, keempat sudut mempunyai citra $(1, 1)$.

Maka F memfaktor menjadi bijeksi kontinu

$$\overline{F} : I^2 / \sim \longrightarrow S^1 \times S^1, \quad \overline{F}([x, y]) = F(x, y).$$

Domain adalah citra kontinu persegi kompak di bawah proyeksi kuosien, sehingga kompak. Kodomain $S^1 \times S^1$ adalah subruang Hausdorff dari $\mathbb{R}^4$. Teorema bijeksi kontinu dari ruang kompak ke ruang Hausdorff menunjukkan bahwa $\overline{F}$ merupakan homeomorfisme. Jadi hasil perekatan tepat torus; konstruksi tabung lalu merekatkan dua lingkaran batasnya memberi gambaran geometris yang sama.

Pemeriksaan P.15 Menciutkan Batas Persegi Menjadi Bola. Pada persegi $I^2 = [0, 1]^2$, ambil relasi ekuivalensi yang mengidentifikasi semua titik batas ∂I^2 menjadi satu kelas dan membiarkan setiap titik interior sebagai kelas satu titik. Deskripsikan ruang kuosien $I^2 / \sim$ dan berikan pembenaran matematis, bukan hanya gambar.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ganti persegi dengan cakram tertutup melalui homeomorfisme yang mengirim batas ke batas.

Tahap 2. Dalam koordinat polar cakram, kirim jari-jari $r = 0$ ke kutub utara dan seluruh lingkaran $r = 1$ ke kutub selatan.

Tahap 3. Periksa bahwa titik-titik dengan $0 \leq r < 1$ tetap berbeda dan gunakan faktorisasi melalui kuosien.

Jawaban. Ruang $I^2 / \partial I^2$ homeomorfik dengan permukaan bola S^2 . Kelas batas menjadi satu kutub, sedangkan cakram interior menutupi bola tanpa kutub tersebut.

Solusi. Pertama, persegi homeomorfik dengan cakram tertutup $D^2 = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq 1\}$ melalui suatu homeomorfisme yang membawa batas persegi ke lingkaran batas. Salah satu konstruksi eksplisit diperoleh dengan memusatkan persegi menjadi $[-1, 1]^2$ dan memetakan setiap sinar dari titik asal secara linear: perpotongan sinar dengan batas persegi dikirim ke perpotongan sinar yang sama dengan S^1 . Jadi cukup menganalisis $D^2 / \partial D^2$.

Untuk $u \in D^2$ dengan $r = \|u\|$, definisikan $G(0) = (0, 0, 1)$ dan, bila $u \neq 0$,

$$G(u) = \left(\frac{\sin(\pi r)}{r} u_1, \frac{\sin(\pi r)}{r} u_2, \cos(\pi r) \right).$$

Limit $\sin(\pi r)/r \rightarrow \pi$ menunjukkan kekontinuan di 0. Rumus tersebut bernilai dalam S^2 . Untuk $0 < r < 1$, ketinggian $\cos(\pi r)$ menentukan r secara unik dan dua koordinat pertama menentukan arah u/r ; jadi tidak ada dua titik interior berbeda yang disamakan. Ketika $r = 1$, seluruh batas dipetakan ke $(0, 0, -1)$. Setiap titik bola muncul untuk suatu $0 \leq r \leq 1$, maka G surjektif dan serat-seratnya tepat kelas yang diinginkan.

Dengan demikian G menginduksi bijeksi kontinu $\overline{G} : D^2 / \partial D^2 \rightarrow S^2$. Domain kompak sebagai citra kontinu cakram kompak dan S^2 Hausdorff, sehingga bijeksi kontinu ini merupakan homeomorfisme. Menggabungkannya dengan homeomorfisme persegi-ke-cakram membuktikan $I^2 / \partial I^2 \cong S^2$.

Pemeriksaan P.16 Keterdefinisan Fungsi pada Kelas Ekuivalensi. Misalkan $\sim$ relasi ekuivalensi pada himpunan X , $p : X \rightarrow X / \sim$ proyeksi $p(x) = [x]$, dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$ setiap kali $x_1 \sim x_2$. Buktikan bahwa rumus $\bar{f}([x]) = f(x)$ mendefinisikan fungsi $\bar{f} : X / \sim \rightarrow Y$ dengan baik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Satu kelas dapat mempunyai banyak wakil; ambil dua wakil x_1 dan x_2 dari kelas yang sama.

Tahap 2. Terjemahkan persamaan $[x_1] = [x_2]$ menjadi hubungan antara x_1 dan x_2 .

Tahap 3. Terapkan hipotesis bahwa f konstan pada setiap kelas ekuivalensi.

Jawaban. Jika $[x_1] = [x_2]$, maka $x_1 \sim x_2$, sehingga $f(x_1) = f(x_2)$. Jadi nilai $\bar{f}([x])$ tidak bergantung

pada wakil yang dipilih.

Solusi. Agar rumus pada kelas ekuivalensi terdefinisi dengan baik, dua wakil dari kelas yang sama harus menghasilkan nilai yang sama. Ambil $[x_1] = [x_2]$. Untuk relasi ekuivalensi, kesamaan kelas ini ekuivalen dengan $x_1 \sim x_2$. Hipotesis terhadap f lalu memberi

$$\bar{f}([x_1]) = f(x_1) = f(x_2) = \bar{f}([x_2]).$$

Karena setiap anggota $X/\sim$ adalah suatu kelas $[x]$, rumus tersebut memberi tepat satu nilai di Y untuk setiap masukan. Maka $\bar{f}$ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik.

Pemeriksaan P.17 Memverifikasi Persamaan Faktorisasi. Dengan asumsi yang sama, yaitu $p(x) = [x]$ dan $\bar{f}([x]) = f(x)$, buktikan persamaan fungsi $f = \bar{f} \circ p$ dari X ke Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Dua fungsi sama jika nilainya sama pada setiap masukan.

Tahap 2. Ambil $x \in X$ dan hitung dahulu $p(x)$.

Tahap 3. Masukkan kelas $[x]$ itu ke definisi $\bar{f}$.

Jawaban. Untuk setiap $x \in X$, $(\bar{f} \circ p)(x) = \bar{f}([x]) = f(x)$. Jadi kedua fungsi sama.

Solusi. Ambil sembarang $x \in X$. Definisi proyeksi kanonis memberi $p(x) = [x]$. Oleh definisi fungsi terinduksi,

$$(\bar{f} \circ p)(x) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f}([x]) = f(x).$$

Kesamaan ini berlaku untuk setiap x dalam domain bersama X . Maka f dan $\bar{f} \circ p$ adalah fungsi yang sama, yakni $f = \bar{f} \circ p$.

Pemeriksaan P.18 Keunikan Fungsi yang Melalui Kuosien. Misalkan $\sim$ relasi ekuivalensi pada X , $p : X \rightarrow X/\sim$ proyeksi kanonis, dan $f : X \rightarrow Y$ konstan pada setiap kelas ekuivalensi. Fungsi $\bar{f}([x]) = f(x)$ memenuhi $f = \bar{f} \circ p$. Buktikan bahwa tidak ada fungsi lain $g : X/\sim \rightarrow Y$ yang juga memenuhi $f = g \circ p$ kecuali $g = \bar{f}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil kelas sebarang $[x] \in X/\sim$.

Tahap 2. Gunakan $[x] = p(x)$ untuk menulis $g([x])$ sebagai nilai komposisi $g \circ p$.

Tahap 3. Ganti komposisi itu dengan f , lalu bandingkan dengan definisi $\bar{f}$.

Jawaban. Jika $f = g \circ p$, maka untuk setiap kelas $[x]$, $g([x]) = g(p(x)) = f(x) = \bar{f}([x])$. Jadi $g = \bar{f}$.

Solusi. Andaikan $g : X/\sim \rightarrow Y$ memenuhi $f = g \circ p$. Setiap titik domain $X/\sim$ berbentuk $[x]$ untuk suatu $x \in X$. Pada titik sebarang itu,

$$g([x]) = g(p(x)) = (g \circ p)(x) = f(x) = \bar{f}([x]).$$

Jadi g dan $\bar{f}$ mempunyai nilai sama pada setiap anggota $X/\sim$; akibatnya $g = \bar{f}$. Bersama keberadaan yang dibuktikan oleh rumus $\bar{f}([x]) = f(x)$, ini menetapkan keunikan fungsi yang memfaktorkan f melalui proyeksi kuosien.

Panduan latihan Bab 16, bagian pertama

Bagian ini mengikuti urutan fisik sumber untuk sepuluh prompt latihan pertama tentang ruang kuosien. Setiap pernyataan dibuat mandiri dan disertai petunjuk bertahap, jawaban atau rubrik pembuktian ringkas, serta solusi lengkap. Bagian ini merupakan materi pendamping tidak resmi yang ditulis secara terpisah, dilisensikan dengan CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan P.19 Relasi serat suatu surjeksi. Misalkan X ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi. Pada X , definisikan $x \sim_p y$ jika dan hanya jika $p(x) = p(y)$. Buktikan bahwa $\sim_p$ merupakan relasi ekuivalensi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Periksa refleksivitas dengan membandingkan $p(x)$ dengan dirinya sendiri, lalu gunakan simetri kesamaan untuk memeriksa simetri relasi.

Tahap 2. Untuk transitivitas, mulai dari $p(x) = p(y)$ dan $p(y) = p(z)$. Perhatikan bahwa kesurjektifan tidak diperlukan untuk ketiga pemeriksaan ini.

Jawaban. Rubrik pembuktian: tunjukkan secara terpisah refleksivitas, simetri, dan transitivitas. Ketiganya mengikuti sifat-sifat kesamaan dalam Y .

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, berlaku $p(x) = p(x)$, sehingga $x \sim_p x$; jadi relasi ini refleksif. Jika $x \sim_p y$, maka $p(x) = p(y)$. Simetri kesamaan memberi $p(y) = p(x)$, sehingga $y \sim_p x$; jadi relasi ini simetris.

Terakhir, jika $x \sim_p y$ dan $y \sim_p z$, maka $p(x) = p(y)$ dan $p(y) = p(z)$. Transitivitas kesamaan menghasilkan $p(x) = p(z)$, sehingga $x \sim_p z$. Dengan demikian $\sim_p$ refleksif, simetris, dan transitif, maka merupakan relasi ekuivalensi. Kesurjektifan p memastikan setiap unsur Y mempunyai serat, tetapi tidak dibutuhkan untuk membuktikan ketiga sifat relasi tersebut.

Pemeriksaan P.20 Topologi kuosien yang ditentukan oleh tanda bilangan real. Beri $\mathbb{R}$ topologi standar dan definisikan surjeksi $p : \mathbb{R} \rightarrow \{a, b, c\}$ dengan

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{jika } x < 0, \\ b & \text{jika } x = 0, \\ c & \text{jika } x > 0. \end{cases}$$

Tentukan topologi kuosien pada $\{a, b, c\}$ yang ditentukan oleh p .

Petunjuk. *Tahap 1.* Tuliskan serat $p^{-1}(\{a\})$, $p^{-1}(\{b\})$, dan $p^{-1}(\{c\})$.

Tahap 2. Ada hanya delapan subhimpunan kodomain. Uji satu per satu dengan definisi: U terbuka dalam topologi kuosien tepat ketika $p^{-1}(U)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Topologi kuosienya adalah

$$\tau_p = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Solusi. Ketiga seratnya ialah $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, dan $(0, \infty)$, berturut-turut. Prapeta $\emptyset$ dan seluruh kodomain adalah $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$, jadi keduanya terbuka. Selain itu,

$$p^{-1}(\{a\}) = (-\infty, 0), \quad p^{-1}(\{c\}) = (0, \infty),$$

serta $p^{-1}(\{a, c\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ketiga himpunan ini terbuka.

Subhimpunan lain yang masih perlu diuji mempunyai prapeta $\{0\}$, $(-\infty, 0]$, atau $[0, \infty)$, masing-masing untuk $\{b\}$, $\{a, b\}$, atau $\{b, c\}$. Tidak satu pun terbuka dalam topologi standar pada $\mathbb{R}$. Karena semua delapan subhimpunan telah diperiksa, koleksi dalam jawaban tepat merupakan topologi kuosien.

Pemeriksaan P.21 Relasi translasi kisi pada bidang. Pada $\mathbb{R}^2$, definisikan $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ jika dan hanya jika $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ dan $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$. Buktikan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk refleksivitas dan simetri, gunakan bahwa $0 \in \mathbb{Z}$ dan bahwa lawan suatu bilangan bulat tetap bilangan bulat.

Tahap 2. Untuk transitivitas, jumlahkan selisih koordinat dari pasangan pertama dan pasangan kedua.

Jawaban. Rubrik pembuktian: verifikasi ketiga aksioma pada kedua koordinat; gunakan ketertutupan $\mathbb{Z}$ terhadap pengambilan lawan dan penjumlahan.

Solusi. Untuk $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, kedua selisih koordinat $x - x$ dan $y - y$ adalah $0 \in \mathbb{Z}$, sehingga $u \sim u$. Jika $u = (x_1, y_1) \sim v = (x_2, y_2)$, maka $x_2 - x_1$ dan $y_2 - y_1$ bilangan bulat. Lawannya, $x_1 - x_2$ dan $y_1 - y_2$, juga bilangan bulat, sehingga $v \sim u$.

Jika juga $v \sim w = (x_3, y_3)$, maka

$$x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) \in \mathbb{Z}$$

dan, dengan cara yang sama, $y_3 - y_1 = (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) \in \mathbb{Z}$. Jadi $u \sim w$. Relasi tersebut refleksif, simetris, dan transitif, maka merupakan relasi ekuivalensi.

Pemeriksaan P.22 Kuosien bidang oleh translasi kisi. Pada $\mathbb{R}^2$ dengan topologi standar, beri relasi ekuivalensi $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ tepat ketika $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ dan $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$. Kenali ruang kuosien $\mathbb{R}^2 / \sim$ dan jelaskan mengapa ruang yang Anda sebutkan homeomorfik dengan kuosien tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan fungsi periodik $q(t) = e^{2\pi it}$ dari $\mathbb{R}$ ke S^1 , lalu terapkan fungsi itu pada kedua koordinat.

Tahap 2. Periksa dua hal: serat fungsi hasil kali itu tepat kelas-kelas $\sim$, dan fungsi tersebut merupakan pemetaan kuosien. Untuk hal kedua, Anda dapat menunjukkan bahwa fungsi itu terbuka.

Jawaban. Ruang kuosiennya homeomorfik dengan torus $S^1 \times S^1$. Homeomorfisme terinduksi oleh $F(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$.

Solusi. Definisikan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ dengan $F(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$. Fungsi ini kontinu dan surjektif. Kesamaan $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ berlaku tepat ketika $x_2 - x_1$ dan $y_2 - y_1$ keduanya bilangan bulat. Jadi serat-serat F tepat kelas-kelas ekuivalensi $\sim$.

Pemetaan $q : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $q(t) = e^{2\pi it}$, terbuka: di sekitar setiap titik suatu himpunan terbuka terdapat selang cukup kecil yang dipetakan homeomorfik ke suatu busur terbuka. Karena persegi panjang terbuka membentuk basis bagi $\mathbb{R}^2$, pemetaan hasil kali $F = q \times q$ juga terbuka. Setiap surjeksi kontinu yang terbuka merupakan pemetaan kuosien.

Jika $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ adalah proyeksi kanonik, sifat serat di atas menghasilkan bijeksi $\bar{F} : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow S^1 \times S^1$ dengan $\bar{F} \circ \pi = F$. Karena π dan F sama-sama pemetaan kuosien, suatu himpunan pada salah satu sisi terbuka tepat ketika prapetanya di $\mathbb{R}^2$ terbuka. Maka $\bar{F}$ dan inversnya kontinu. Jadi $\bar{F}$ adalah homeomorfisme ke torus.

Pemeriksaan P.23 Surjeksi kontinu yang bukan pemetaan kuosien. Berikan contoh konkret suatu fungsi surjektif dan kontinu yang bukan pemetaan kuosien, lalu buktikan bahwa contoh Anda mempunyai ketiga sifat tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pertimbangkan fungsi identitas pada satu himpunan yang sama, tetapi beri domain topologi yang lebih halus daripada topologi kodomain.

Tahap 2. Agar fungsi identitas gagal menjadi pemetaan kuosien, cari subhimpunan yang tidak terbuka di kodomain tetapi prapetanya terbuka di domain.

Jawaban. Salah satu contoh ialah $\text{id} : (\mathbb{R}, \tau_{\text{diskret}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{standar}})$. Fungsi ini kontinu dan bijektif, tetapi bukan pemetaan kuosien.

Solusi. Ambil fungsi identitas $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{diskret}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{standar}})$. Sebagai fungsi himpunan, f adalah bijeksi, sehingga khususnya surjektif. Untuk setiap himpunan terbuka standar U , prapeta $f^{-1}(U) = U$ terbuka dalam domain diskret. Maka f kontinu.

Namun, ambil $A = \{0\}$. Himpunan ini tidak terbuka dalam kodomain bertopologi standar, sedangkan $f^{-1}(A) = \{0\}$ terbuka dalam domain diskret. Jika f merupakan pemetaan kuosien, keterbukaan prapeta tersebut akan memaksa A terbuka di kodomain. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa f bukan pemetaan kuosien.

Pemeriksaan P.24 Menciutkan kedua ujung selang. Beri $X = [0, 1]$ topologi standar dan tetapkan $A = \{0, 1\}$. Pada X , definisikan $x \sim y$ jika dan hanya jika $x = y$ atau kedua titik berada dalam A . Deskripsikan ruang kuosien $X/A = X / \sim$ sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bayangkan kedua ujung selang direkatkan. Cari fungsi kontinu dari $[0, 1]$ ke lingkaran yang mengambil nilai sama tepat pada 0 dan 1.

Tahap 2. Turunkan fungsi itu ke kuosien. Untuk membuktikan bahwa bijeksi terinduksi adalah homeomorfisme, gunakan kekompakan domain kuosien dan sifat Hausdorff target.

Jawaban. Ruang $[0, 1]/\{0, 1\}$ homeomorfik dengan S^1 ; pemetaannya diinduksi oleh $t \mapsto e^{2\pi it}$.

Solusi. Definisikan $F : [0, 1] \rightarrow S^1$ dengan $F(t) = e^{2\pi it}$. Fungsi ini kontinu dan surjektif. Pada selang setengah terbuka $[0, 1)$ fungsi tersebut injektif, dan satu-satunya pengulangan nilai pada seluruh $[0, 1]$ ialah $F(0) = F(1)$. Jadi serat-serat F tepat kelas-kelas relasi yang menciutkan $\{0, 1\}$ menjadi satu titik.

Karena F konstan pada setiap kelas, terdapat bijeksi kontinu $\bar{F} : X/A \rightarrow S^1$ yang memenuhi $\bar{F} \circ \pi = F$, dengan π proyeksi kuosien. Ruang X/A kompak sebagai citra kontinu ruang kompak $[0, 1]$, sedangkan S^1 Hausdorff. Bijeksi kontinu dari ruang kompak ke ruang Hausdorff adalah homeomorfisme. Maka $X/A \cong S^1$.

Pemeriksaan P.25 Menciutkan dua titik antipodal pada lingkaran. Misalkan $X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dan $A = \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Definisikan $u \sim v$ jika dan hanya jika $u = v$ atau kedua titik berada dalam A . Deskripsikan ruang kuosien X/A sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setelah kedua titik dalam A direkatkan, perhatikan citra busur setengah lingkaran atas dan bawah secara terpisah.

Tahap 2. Parametrisasikan masing-masing busur tertutup oleh suatu selang yang kedua ujungnya dipetakan ke titik rekat yang sama. Gunakan argumen kompak-ke-Hausdorff untuk peta terinduksi.

Jawaban. Ruang kuosiennya homeomorfik dengan buket dua lingkaran $S^1 \vee S^1$, yaitu ruang berbentuk angka delapan.

Solusi. Tuliskan sebuah titik lingkaran sebagai $(\cos \theta, \sin \theta)$, dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pandang $S^1 \vee S^1$ sebagai dua salinan lingkaran yang titik 1-nya direkatkan. Pada busur atas $0 \leq \theta \leq \pi$, petakan titik tersebut ke lingkaran pertama melalui $e^{2i\theta}$. Pada busur bawah $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, petakan ke lingkaran kedua melalui $e^{2i(\theta-\pi)}$.

Kedua definisi kontinu dan sepakat pada titik-titik ujung busur setelah titik 1 pada kedua lingkaran target direkatkan. Lemma penempelan memberi fungsi kontinu dan surjektif $F : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$. Setiap titik di bagian dalam masing-masing busur mempunyai citra unik. Titik-titik ujung kedua busur adalah tepat $(1, 0)$ dan $(-1, 0)$, dan keduanya dipetakan ke titik buket. Jadi serat tak tunggal satu-satunya adalah A .

Fungsi F menurunkan bijeksi kontinu $\bar{F} : X/A \rightarrow S^1 \vee S^1$. Domainnya kompak dan targetnya Hausdorff, sehingga bijeksi tersebut homeomorfisme. Secara geometris, setiap busur setengah lingkaran menjadi satu lingkaran, dan keduanya bertemu hanya pada titik hasil penciutan A .

Pemeriksaan P.26 Menciutkan batas cakram. Misalkan $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ dan $S^1 = \partial D^2$, keduanya dengan topologi standar yang relevan. Definisikan $u \sim v$ jika dan hanya jika $u = v$ atau $u, v \in S^1$. Deskripsikan ruang kuosien D^2/S^1 sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan koordinat polar. Biarkan pusat cakram menjadi satu kutub bola dan seluruh lingkaran batas menjadi kutub yang lain.

Tahap 2. Salah satu pilihan memakai garis lintang dengan tinggi $\cos(\pi r)$. Periksa serat fungsi itu, lalu gunakan kekompakan cakram dan sifat Hausdorff bola.

Jawaban. Ruang D^2/S^1 homeomorfik dengan bola dua dimensi S^2 .

Solusi. Untuk $0 \leq r \leq 1$, definisikan dalam koordinat polar

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) = (\sin(\pi r) \cos \theta, \sin(\pi r) \sin \theta, \cos(\pi r)).$$

Rumus ini tidak bergantung pada θ ketika $r = 0$, dan kontinu juga di pusat karena dua koordinat pertamanya mempunyai besar paling banyak $\sin(\pi r)$. Fungsi $F : D^2 \rightarrow S^2$ kontinu dan surjektif.

Jika $0 \leq r < 1$, tinggi $\cos(\pi r)$ menentukan r secara unik; untuk $r > 0$, dua koordinat pertama lalu menentukan θ . Jadi setiap titik bagian dalam cakram mempunyai serat tunggal. Untuk $r = 1$, semua nilai θ dipetakan ke kutub selatan $(0, 0, -1)$. Dengan demikian serat-serat F tepat kelas-kelas relasi yang menciutkan S^1 .

Maka F menurunkan bijeksi kontinu $\bar{F} : D^2/S^1 \rightarrow S^2$. Domain kuosien kompak sebagai citra kontinu D^2 , dan S^2 Hausdorff. Oleh karena itu $\bar{F}$ merupakan homeomorfisme.

Pemeriksaan P.27 Topologi kuosien pertama pada himpunan tiga titik. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ diberi topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, X\}.$$

Untuk $Y = \{a, b, c\}$, definisikan surjeksi $p : X \rightarrow Y$ oleh $p(1) = p(2) = a$, $p(3) = b$, dan $p(4) = c$. Tentukan topologi kuosien τ_p pada Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Serat-serat p adalah $\{1, 2\}$, $\{3\}$, dan $\{4\}$. Setiap prapeta subhimpunan Y merupakan gabungan beberapa serat tersebut.

Tahap 2. Bandingkan delapan gabungan serat dengan delapan himpunan yang tercantum dalam τ .

Jawaban. Topologi kuosienya adalah

$$\tau_p = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, Y\}.$$

Solusi. Menurut definisi, $U \subseteq Y$ berada dalam τ_p tepat ketika $p^{-1}(U) \in \tau$. Prapeta $\emptyset$ dan Y adalah $\emptyset$ dan X . Selain itu,

$$p^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}, \quad p^{-1}(\{b, c\}) = \{3, 4\},$$

dan kedua himpunan itu tercantum dalam τ .

Empat subhimpunan tak trivial lainnya mempunyai prapeta $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2, 3\}$, atau $\{1, 2, 4\}$, masing-masing untuk $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, dan $\{a, c\}$. Tidak satu pun berada dalam τ . Jadi tidak ada himpunan terbuka kuosien lain, dan $\tau_p = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, Y\}$.

Pemeriksaan P.28 Topologi kuosien kedua pada himpunan tiga titik. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ diberi topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, X\}.$$

Untuk $Y = \{a, b, c\}$, definisikan surjeksi $q : X \rightarrow Y$ oleh $q(1) = q(2) = c$, $q(3) = b$, dan $q(4) = a$. Tentukan topologi kuosien τ_q pada Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Tuliskan serat untuk a , b , dan c , lalu bentuk seluruh gabungan serat yang mungkin.

Tahap 2. Gunakan definisi topologi kuosien, bukan citra himpunan terbuka: yang diuji adalah apakah $q^{-1}(U)$ berada dalam τ .

Jawaban. Topologi kuosienya adalah

$$\tau_q = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, Y\}.$$

Solusi. Serat-serat q adalah $q^{-1}(\{a\}) = \{4\}$, $q^{-1}(\{b\}) = \{3\}$, dan $q^{-1}(\{c\}) = \{1, 2\}$. Prapeta $\emptyset$ dan Y terbuka. Di antara subhimpunan sejati yang tidak kosong,

$$q^{-1}(\{c\}) = \{1, 2\} \in \tau, \quad q^{-1}(\{a, b\}) = \{3, 4\} \in \tau.$$

Prapeta $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, c\}$, dan $\{b, c\}$ berturut-turut adalah $\{4\}$, $\{3\}$, $\{1, 2, 4\}$, dan $\{1, 2, 3\}$. Keempatnya tidak berada dalam τ . Dengan demikian tepat $\emptyset$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, dan Y yang terbuka dalam topologi kuosien.

Panduan latihan Bab 16, bagian kedua

Bagian ini melanjutkan urutan fisik sumber untuk prompt latihan ke-11 sampai ke-20 tentang ruang kuosien. Setiap pernyataan dibuat mandiri dan disertai petunjuk bertahap, jawaban atau rubrik pembuktian ringkas, serta solusi lengkap. Bagian ini merupakan materi pendamping tidak resmi yang ditulis secara terpisah, dilisensikan dengan CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan P.29 Homeomorfisme dua topologi kuosien berhingga. Pada $Y = \{a, b, c\}$, misalkan

$$\tau_p = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, Y\}, \quad \tau_q = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, Y\}.$$

Tentukan apakah (Y, τ_p) dan (Y, τ_q) homeomorfik. Jika ya, berikan suatu homeomorfisme tertentu dan buktikan; jika tidak, berikan penghalang topologisnya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam masing-masing topologi, kenali satu-satunya himpunan terbuka beranggota tunggal.

Tahap 2. Petakan kedua bagian partisi terbuka $\{a\} \mid \{b, c\}$ untuk τ_p ke bagian yang bersesuaian $\{c\} \mid \{a, b\}$ untuk τ_q , lalu periksa prapeta semua himpunan terbuka.

Jawaban. Ya. Salah satu homeomorfisme ialah $h(a) = c$, $h(b) = a$, dan $h(c) = b$.

Solusi. Fungsi $h : Y \rightarrow Y$ yang diberikan oleh $h(a) = c$, $h(b) = a$, dan $h(c) = b$ merupakan bijeksi. Himpunan terbuka dalam kodomain (Y, τ_q) mempunyai prapeta

$$h^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad h^{-1}(\{c\}) = \{a\}, \quad h^{-1}(\{a, b\}) = \{b, c\}, \quad h^{-1}(Y) = Y.$$

Semua prapeta ini berada dalam τ_p , sehingga h kontinu.

Citra himpunan-himpunan dalam τ_p berturut-turut adalah $\emptyset$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, dan Y , yang semuanya berada dalam τ_q . Dengan kata lain, prapeta himpunan terbuka di bawah h^{-1} juga terbuka, sehingga h^{-1} kontinu. Maka h adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan P.30 Menciutkan setiap penampang vertikal cakram. Misalkan $D^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 1\}$ dengan topologi standar. Definisikan $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ jika dan hanya jika $s_1 = s_2$. Deskripsikan ruang kuosien $D^2 / \sim$ sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap kelas ekuivalensi adalah penampang vertikal cakram pada satu nilai koordinat pertama. Gunakan proyeksi $P(s, t) = s$.

Tahap 2. Identifikasi citra proyeksi, lalu gunakan teorema bahwa surjeksi kontinu dari ruang kompak ke ruang Hausdorff merupakan pemetaan kuosien.

Jawaban. Ruang kuosienya homeomorfik dengan selang tertutup $[-1, 1]$, melalui peta yang mengirim kelas $[(s, t)]$ ke s .

Solusi. Proyeksi $P : D^2 \rightarrow [-1, 1]$, $P(s, t) = s$, kontinu dan surjektif. Dua titik mempunyai citra yang sama tepat ketika koordinat pertamanya sama, sehingga serat-serat P tepat kelas-kelas $\sim$.

Cakram D^2 kompak dan selang $[-1, 1]$ Hausdorff. Karena itu surjeksi kontinu P adalah pemetaan tertutup, dan setiap surjeksi kontinu yang tertutup merupakan pemetaan kuosien. Peta P menurunkan bijeksi $\bar{P} : D^2 / \sim \rightarrow [-1, 1]$. Karena P dan proyeksi kanonik sama-sama pemetaan kuosien, bijeksi terinduksi ini adalah homeomorfisme. Jadi penciutan setiap penampang vertikal menyisakan tepat koordinat s .

Pemeriksaan P.31 Merekatkan pasangan batas dengan koordinat pertama yang sama. Misalkan $D^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 1\}$ dan $S^1 = \partial D^2$. Ambil relasi ekuivalensi terkecil pada D^2 yang mengidentifikasi dua titik $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S^1$ apabila $s_1 = s_2$, tanpa identifikasi tambahan. Deskripsikan ruang kuosien $D^2 / \sim$ sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $|s| < 1$, normalkan koordinat vertikal dengan $u = t/\sqrt{1-s^2} \in [-1, 1]$. Dua ujung $u = -1$ dan $u = 1$ harus menjadi sudut yang sama pada sebuah lingkaran.

Tahap 2. Ketika s bergerak ke -1 atau 1 , kecilkan lingkaran itu menjadi sebuah kutub. Kenali ruang yang merupakan suspensi sebuah lingkaran.

Jawaban. Ruang kuosienya homeomorfik dengan S^2 . Pasangan titik pada busur batas atas dan bawah menjadi satu meridian, sedangkan kedua ujung horizontal cakram menjadi dua kutub.

Solusi. Untuk $|s| < 1$, tetapkan $u = t/\sqrt{1-s^2}$ dan definisikan

$$F(s, t) = (\sqrt{1-s^2} \cos(\pi(u+1)), \sqrt{1-s^2} \sin(\pi(u+1)), s).$$

Pada dua titik yang tersisa, definisikan $F(-1, 0) = (0, 0, -1)$ dan $F(1, 0) = (0, 0, 1)$. Nilai F selalu berada pada S^2 . Fungsi ini kontinu pada bagian $|s| < 1$; di dekat $s = \pm 1$, panjang gabungan dua koordinat pertamanya adalah $\sqrt{1 - s^2}$, sehingga fungsi juga kontinu di kedua titik ujung.

Pada batas atas, $u = 1$ dan sudutnya 2π ; pada batas bawah, $u = -1$ dan sudutnya 0 . Jadi dua titik batas dengan koordinat pertama yang sama mempunyai citra yang sama. Sebaliknya, untuk $-1 < u < 1$, sudut berada secara unik dalam $(0, 2\pi)$; bersama koordinat ketiga s , ini menunjukkan bahwa semua titik interior mempunyai serat tunggal. Kedua titik dengan $s = \pm 1$ juga mempunyai citra berbeda. Maka serat-serat F tepat kelas-kelas relasi yang diberikan. Rumus itu juga menjangkau setiap garis lintang, sehingga F surjektif.

Fungsi F menurunkan bijeksi kontinu $\bar{F} : D^2 / \sim \rightarrow S^2$. Domain kuosien kompak dan S^2 Hausdorff, jadi $\bar{F}$ merupakan homeomorfisme.

Pemeriksaan P.32 Mengidentifikasi pasangan antipodal di seluruh cakram. Misalkan $D^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 1\}$. Ambil relasi ekuivalensi terkecil yang memuat setiap identifikasi $x \sim -x$ untuk $x \in D^2$, tanpa identifikasi tambahan. Deskripsikan ruang kuosien $D^2 / \sim$ sampai homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Identifikasikan $\mathbb{R}^2$ dengan bidang kompleks. Cari fungsi pada cakram yang bernilai sama pada z dan $-z$ serta tidak membuat pengulangan lain.

Tahap 2. Periksa kesurjektifan dan serat fungsi tersebut, lalu turunkan ke kuosien dan gunakan argumen kompak-ke-Hausdorff.

Jawaban. Ruang kuosiennya kembali homeomorfik dengan D^2 . Homeomorfisme terinduksi oleh fungsi kompleks $z \mapsto z^2$.

Solusi. Pandang $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ dan definisikan $F : D^2 \rightarrow D^2$ dengan $F(z) = z^2$. Fungsi ini kontinu. Untuk setiap $w \in D^2$, suatu akar kuadrat z mempunyai $|z| = \sqrt{|w|} \leq 1$, sehingga F surjektif.

Jika $F(z_1) = F(z_2)$, maka $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$, sehingga $z_2 = z_1$ atau $z_2 = -z_1$. Sebaliknya, $F(-z) = F(z)$. Jadi serat-serat F tepat orbit $\{z, -z\}$, dengan orbit tunggal $\{0\}$, yakni tepat kelas-kelas relasi yang diberikan.

Karena itu F menurunkan bijeksi kontinu $\bar{F} : D^2 / \sim \rightarrow D^2$. Domain kuosien kompak dan cakram target Hausdorff, sehingga $\bar{F}$ adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan P.33 Interval titik pangkal dengan batang bersama. Misalkan $I = [0, 1]$, $X = I \times I$ dengan topologi standar, dan definisikan $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ jika dan hanya jika kedua titik sama atau $t_1 = t_2 > 0$. Deskripsikan himpunan kuosien $X / \sim$ beserta topologi kuosien.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap tinggi positif t , seluruh penampang $I \times \{t\}$ menjadi satu titik, sedangkan semua titik $(s, 0)$ tetap berlainan. Beri nama kedua jenis kelas ini.

Tahap 2. Tuliskan prapeta suatu subhimpunan umum kuosien. Uji keterbukaannya di titik tertinggi positif dan kemudian di titik sisi bawah; perhatikan bahwa lingkungan setiap titik sisi bawah memuat semua kelas dengan tinggi positif yang cukup kecil.

Jawaban. Sebagai himpunan, kuosienya adalah $Q = \{b_s : s \in I\} \sqcup \{u_t : 0 < t \leq 1\}$, dengan $b_s = [(s, 0)]$ dan $u_t = [(s, t)]$ untuk sebarang s . Himpunan $\{b_s : s \in A\} \cup \{u_t : t \in V\}$ terbuka tepat ketika A terbuka dalam I , V terbuka dalam $(0, 1]$, dan jika $A \neq \emptyset$, maka $(0, \varepsilon) \subseteq V$ untuk suatu $\varepsilon > 0$.

Solusi. Untuk $t > 0$, relasi menyatukan semua titik pada $I \times \{t\}$; sebut kelas itu u_t . Klausul kesamaan dalam definisi relasi menjamin bahwa pada tinggi nol setiap kelas adalah singleton $b_s = [(s, 0)]$. Jadi deskripsi himpunan Q dalam jawaban benar dan tidak membuat identifikasi tambahan.

Misalkan $\pi : X \rightarrow Q$ proyeksi kanonik. Setiap $W \subseteq Q$ dapat ditulis secara unik sebagai

$$W = W(A, V) = \{b_s : s \in A\} \cup \{u_t : t \in V\},$$

dengan $A \subseteq I$ dan $V \subseteq (0, 1]$. Prapetanya adalah

$$\pi^{-1}(W) = (A \times \{0\}) \cup (I \times V).$$

Jika prapeta ini terbuka dalam $I \times I$, pemeriksaan di titik-titik dengan tinggi positif menunjukkan bahwa V terbuka dalam $(0, 1]$. Pemeriksaan di setiap $(s, 0)$ dengan $s \in A$ menunjukkan bahwa A terbuka dalam I .

Jika A tidak kosong, pilih satu $s \in A$. Sebuah lingkungan persegi panjang relatif dari $(s, 0)$ yang termuat dalam prapeta memaksa adanya $\varepsilon > 0$ dengan $(0, \varepsilon) \subseteq V$.

Sebaliknya, andaikan ketiga kondisi tersebut dipenuhi. Titik dengan tinggi dalam V mempunyai lingkungan produk di $I \times V$. Jika $s \in A$, pilih lingkungan relatif $J \subseteq A$ bagi s ; bila $A \neq \emptyset$, syarat pada V membuat $J \times [0, \varepsilon)$ termuat dalam prapeta. Maka prapeta terbuka. Definisi topologi kuosien sekarang memberikan tepat pencirian dalam jawaban. Secara intuitif, terdapat satu interval titik pangkal b_s , dan semua titik pangkal itu berbagi batang tinggi positif yang sama.

Pemeriksaan P.34 Kuosien dengan titik-titik pangkal yang tak dapat dipisahkan. Misalkan $I = [0, 1]$, $X = I \times I$, dan $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ tepat ketika kedua titik sama atau $t_1 = t_2 > 0$. Buktikan bahwa ruang kuosien $X/\sim$ bukan ruang Hausdorff.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih dua kelas berbeda pada sisi bawah, misalnya $[(0, 0)]$ dan $[(1, 0)]$.

Tahap 2. Tarik kembali sembarang lingkungan terbuka kedua kelas itu ke persegi. Masing-masing prapeta memuat titik-titik pada semua ketinggian positif yang cukup kecil; gunakan identifikasi seluruh penampang horizontal untuk menemukan titik bersama di kuosien.

Jawaban. Rubrik pembuktian: tunjukkan bahwa setiap dua lingkungan terbuka dari kelas $[(0, 0)]$ dan $[(1, 0)]$ beririsan pada suatu kelas $[I \times \{t\}]$ dengan $t > 0$ cukup kecil. Karena kedua kelas bawah itu berbeda, aksioma Hausdorff gagal.

Solusi. Misalkan $\pi : X \rightarrow X/\sim$ adalah proyeksi kanonik dan tetapkan $b_0 = \pi(0, 0)$ serta $b_1 = \pi(1, 0)$. Kedua kelas ini berbeda, sebab pada tinggi nol relasi hanya mengidentifikasi titik dengan dirinya sendiri.

Ambil sembarang lingkungan terbuka U dari b_0 dan V dari b_1 dalam ruang kuosien. Prapeta $\pi^{-1}(U)$ terbuka dan memuat $(0, 0)$, sehingga terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dengan $(0, t) \in \pi^{-1}(U)$ untuk setiap $0 < t < \varepsilon_0$. Demikian pula, terdapat $\varepsilon_1 > 0$ dengan $(1, t) \in \pi^{-1}(V)$ untuk setiap $0 < t < \varepsilon_1$.

Pilih $0 < t < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Karena $t > 0$, berlaku $(0, t) \sim (1, t)$. Oleh karena itu satu kelas yang sama, yaitu $\pi(0, t) = \pi(1, t)$, berada dalam $U \cap V$. Jadi tidak ada lingkungan terbuka saling lepas bagi b_0 dan b_1 . Ruang kuosien tersebut bukan Hausdorff.

Pemeriksaan P.35 Kuosien topologi titik tertentu modulo tiga. Beri $\mathbb{Z}$ topologi titik tertentu pada $p = 1$: himpunan terbukanya adalah $\emptyset$ dan semua subhimpunan $\mathbb{Z}$ yang memuat 1. Definisikan $x \sim y$ jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{3}$. Deskripsikan $\mathbb{Z}/\sim$ dan tentukan topologi kuosienya dengan justifikasi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Namai tiga kelas sisa sebagai C_0, C_1, C_2 . Tentukan kelas yang memuat titik istimewa 1.

Tahap 2. Untuk U tak kosong di kuosien, uji kapan $\pi^{-1}(U)$ memuat 1. Terjemahkan syarat itu kembali menjadi syarat pada U .

Jawaban. Kuosienya adalah $Q = \{C_0, C_1, C_2\}$, dengan $C_r = 3\mathbb{Z} + r$. Topologi kuosienya ialah topologi titik tertentu pada C_1 :

$$\{\emptyset, \{C_1\}, \{C_0, C_1\}, \{C_1, C_2\}, Q\}.$$

Solusi. Kelas-kelas ekuivalensi kongruensi modulo 3 adalah $C_0 = 3\mathbb{Z}$, $C_1 = 3\mathbb{Z} + 1$, dan $C_2 = 3\mathbb{Z} + 2$. Jadi himpunan dasar kuosien adalah $Q = \{C_0, C_1, C_2\}$. Misalkan $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow Q$ proyeksi kanonik.

Prapeta $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ terbuka. Untuk $U \neq \emptyset$, prapeta $\pi^{-1}(U)$ terbuka dalam topologi titik tertentu tepat ketika memuat 1. Karena $1 \in C_1$, syarat ini setara dengan $C_1 \in U$. Jadi himpunan terbuka kuosien adalah $\emptyset$ bersama semua subhimpunan Q yang memuat C_1 , tepat seperti daftar dalam jawaban.

Pemeriksaan P.36 Kuosien topologi titik yang dikecualikan modulo tiga. Beri $\mathbb{Z}$ topologi titik yang dikecualikan pada $p = 1$: himpunan terbukanya adalah $\mathbb{Z}$ dan semua subhimpunan $\mathbb{Z}$ yang tidak memuat 1. Definisikan $x \sim y$ jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{3}$. Deskripsikan $\mathbb{Z}/\sim$ dan tentukan topologi kuosienya dengan justifikasi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan lagi tiga kelas sisa C_0, C_1, C_2 , dengan $1 \in C_1$.

Tahap 2. Prapeta suatu himpunan sejati di kuosien terbuka tepat ketika tidak memuat 1. Ingat bahwa seluruh ruang tetap terbuka sebagai pengecualian khusus.

Jawaban. Untuk $Q = \{C_0, C_1, C_2\}$, topologi kuosienya ialah topologi titik yang dikecualikan pada C_1 :

$$\{\emptyset, \{C_0\}, \{C_2\}, \{C_0, C_2\}, Q\}.$$

Solusi. Seperti sebelumnya, kelas-kelas kuosien adalah $C_r = 3\mathbb{Z} + r$ untuk $r = 0, 1, 2$, dan $1 \in C_1$. Misalkan $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow Q$ adalah proyeksi kanonik.

Jika $U = Q$, maka $\pi^{-1}(U) = \mathbb{Z}$, yang terbuka. Jika $U \subsetneq Q$, prapeta $\pi^{-1}(U)$ terbuka tepat ketika tidak memuat titik yang dikecualikan 1. Hal ini setara dengan $C_1 \notin U$. Jadi semua subhimpunan dari $\{C_0, C_2\}$ terbuka, seluruh Q juga terbuka, dan tidak ada himpunan lain yang terbuka. Daftarnya tepat seperti dalam jawaban.

Pemeriksaan P.37 Relasi skala pada bidang proyektif real. Pada $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, definisikan $x \sim_P y$ jika dan hanya jika terdapat $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq 0$ sedemikian sehingga $y = kx$. Buktikan bahwa $\sim_P$ merupakan relasi ekuivalensi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk refleksivitas gunakan skalar 1; untuk simetri, balik skalar tak nol yang diberikan.

Tahap 2. Untuk transitivitas, komposisikan dua penskalaan dan pastikan hasil kali kedua skalarnya masih tak nol.

Jawaban. Rubrik pembuktian: gunakan skalar 1, k^{-1} , dan hasil kali dua skalar tak nol untuk membuktikan refleksivitas, simetri, dan transitivitas secara berurutan.

Solusi. Untuk setiap $x \neq 0$, berlaku $x = 1x$ dan $1 \neq 0$, sehingga $x \sim_P x$. Jika $x \sim_P y$, ada $k \neq 0$ dengan $y = kx$. Maka $x = k^{-1}y$, dan $k^{-1} \neq 0$, sehingga $y \sim_P x$.

Jika $x \sim_P y$ dan $y \sim_P z$, pilih skalar tak nol k dan ℓ sehingga $y = kx$ dan $z = \ell y$. Kemudian $z = (\ell k)x$, dan $\ell k \neq 0$. Jadi $x \sim_P z$. Ketiga aksioma relasi ekuivalensi telah dipenuhi.

Pemeriksaan P.38 Unsur-unsur bidang proyektif real. Bidang proyektif real didefinisikan sebagai $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim_P$, dengan $x \sim_P y$ tepat ketika $y = kx$ untuk suatu skalar real tak nol k . Berikan deskripsi geometris yang tepat tentang unsur-unsur $\mathbb{R}P^2$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk sebuah vektor tak nol v , gambarkan semua kelipatan kv dengan $k \neq 0$.

Tahap 2. Bandingkan kelas tersebut dengan subruang linear $\text{span}(v)$, lalu perhatikan bagaimana garis yang sama berpotongan dengan bola satuan.

Jawaban. Setiap unsur $\mathbb{R}P^2$ adalah satu garis linear melalui titik asal dalam $\mathbb{R}^3$, atau secara ekuivalen satu arah tanpa orientasi. Garis itu berpotongan dengan S^2 pada sepasang titik antipodal.

Solusi. Untuk $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, kelas ekuivalensinya adalah

$$[v] = \{kv \mid k \in \mathbb{R}, k \neq 0\} = \text{span}(v) \setminus \{0\}.$$

Jadi kelas tersebut menentukan tepat satu subruang linear berdimensi satu, yakni garis $\text{span}(v)$ melalui titik asal.

Sebaliknya, setiap garis linear L melalui titik asal memuat suatu vektor tak nol v , dan semua vektor tak nol pada L adalah kelipatan skalar tak nol dari v . Maka $L \setminus \{0\}$ adalah tepat satu kelas ekuivalensi. Dengan demikian korespondensi $[v] \mapsto \text{span}(v)$ merupakan bijeksi antara unsur-unsur $\mathbb{R}P^2$ dan garis linear melalui asal di $\mathbb{R}^3$. Setelah dinormalisasi ke panjang satu, garis itu bertemu S^2 pada $v/\|v\|$ dan antipodanya, sehingga satu titik proyektif juga dapat dipandang sebagai satu pasangan antipodal atau satu arah tanpa orientasi.

Panduan latihan Bab 16, bagian ketiga

Bagian ini mendampingi sepuluh prompt latihan kanonis ke-21 sampai ke-30, dari model bidang proyektif real sampai retraksi. Kerjakan prompt pada bab utama lebih dahulu, lalu gunakan dukungan bertahap ini.

Materi pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan P.39 Bidang proyektif sebagai permukaan bola antipodal. Bidang proyektif real $\mathbb{RP}^2$ adalah himpunan garis satu dimensi melalui titik asal dalam $\mathbb{R}^3$. Berikan penjelasan geometris yang meyakinkan bahwa ruang ini homeomorfik dengan $S^2/\sim$, dengan $x \sim -x$ pada S^2 .

Petunjuk. *Tahap 1.* Potong setiap garis melalui asal dengan permukaan bola satuan.

Tahap 2. Hitung berapa titik potong yang diperoleh dan bagaimana keduanya berhubungan.

Tahap 3. Normalisasi vektor tak nol dan periksa bahwa penggantian wakil hanya mengganti tanda.

Jawaban. Setiap garis melalui asal memotong S^2 pada tepat sepasang titik antipodal $\{u, -u\}$. Sebaliknya, setiap pasangan antipodal menentukan satu garis. Korespondensi ini kontinu pada tingkat kuosien dan memberikan homeomorfisme.

Solusi. Untuk vektor tak nol $v \in \mathbb{R}^3$, garisnya adalah $L_v = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$. Normalisasi memberi $u = v/\|v\| \in S^2$. Titik potong garis dengan S^2 tepat u dan $-u$. Jika $w = kv$ dengan $k \neq 0$, normalisasi w menghasilkan u atau $-u$; jadi kelas antipodal tidak bergantung pada vektor pembangkit garis.

Sebaliknya, kelas $[u] = \{u, -u\}$ menentukan garis $\mathbb{R}u$. Kedua konstruksi saling invers. Pemetaan normalisasi dari $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ke S^2 kontinu dan menghormati kelas skalar, sehingga turun ke pemetaan kontinu pada kuosien. Konstruksi invers juga berasal dari pemetaan kuosien $u \mapsto \mathbb{R}u$. Maka korespondensi bijektif tersebut adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan P.40 Dari hemisfer ke model cakram dan persegi. Mulai dari model $S^2/(x \sim -x)$. Jelaskan mengapa model itu dapat diganti oleh hemisfer atas tertutup dengan pasangan titik antipodal pada ekuator diidentifikasi, kemudian oleh cakram tertutup dengan titik batas antipodal diidentifikasi. Gunakan model cakram untuk menjelaskan model persegi dengan pasangan sisi berhadapan diidentifikasi dalam arah berlawanan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap pasangan antipodal di luar ekuator mempunyai tepat satu wakil di hemisfer atas.

Tahap 2. Proyeksikan hemisfer ke bidang ekuator.

Tahap 3. Bagi lingkaran batas cakram menjadi empat busur dan luruskan busur-busur itu menjadi sisi persegi.

Jawaban. Interior hemisfer memberi satu wakil unik bagi setiap kelas, sedangkan ekuator masih mempunyai pasangan antipodal. Proyeksi vertikal mengubah hemisfer menjadi cakram dan ekuator menjadi batasnya. Ketika batas dibagi menjadi empat busur, pasangan antipodal menjadi pasangan sisi berhadapan dengan orientasi berlawanan.

Solusi. Jika $(x, y, z) \in S^2$ dan $z \neq 0$, tepat satu dari titik itu dan antipodalnya mempunyai koordinat $z > 0$. Jadi setiap kelas antipodal yang tidak menyentuh ekuator mempunyai tepat satu wakil di interior hemisfer atas. Jika $z = 0$, kedua wakil berada pada ekuator dan tetap harus diidentifikasi.

Proyeksi $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ memetakan hemisfer atas tertutup homeomorfik ke D^2 . Ekuator menjadi ∂D^2 , dan pasangan $(x, y, 0)$ serta $(-x, -y, 0)$ menjadi pasangan antipodal pada batas. Selanjutnya pilih empat titik batas yang membagi lingkaran menjadi empat busur dan deformasi cakram menjadi persegi. Antipodalitas memasang setiap busur dengan busur berhadapan, tetapi parameter sepanjang busur berjalan terbalik. Maka modelnya adalah persegi dengan kedua pasangan sisi berhadapan direkatkan dalam arah berlawanan.

Pemeriksaan P.41 Mengenali pita Möbius di dalam bidang proyektif. Dalam model persegi $\mathbb{RP}^2$ pada [Gambar 16.13](#), sebuah pita diagonal diarsir dan dipisahkan. Jelaskan mengapa kuosien pita itu, dengan identifikasi sisi yang diwarisi dari persegi, merupakan pita Möbius.

Petunjuk. *Tahap 1.* Luruskan pita diagonal menjadi persegi panjang panjang dan sempit.

Tahap 2. Ikuti anak panah pada kedua ujung pendek pita.

Tahap 3. Bandingkan identifikasi ujung itu dengan model poligonal standar pita Möbius.

Jawaban. Setelah diluruskan, pita menjadi persegi panjang yang kedua ujung pendeknya diidentifikasi dengan orientasi berlawanan. Itulah model kuosien standar pita Möbius.

Solusi. Potongan diagonal tidak mengubah topologi pita: melalui deformasi di dalam persegi, daerah berarsir dapat diluruskan menjadi $[0, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Kedua ujung pendeknya berasal dari bagian sisi berhadapan pada model persegi bidang proyektif. Anak panah identifikasi menunjukkan bahwa $(0, t)$ dipasangkan dengan $(1, -t)$, bukan dengan $(1, t)$. Kuosien persegi panjang menurut $(0, t) \sim (1, -t)$ tepat pita Möbius. Sisi panjang pita tidak direkatkan satu sama lain dan menjadi satu komponen batas pita Möbius.

Pemeriksaan P.42 Sisa bidang proyektif adalah cakram. Dalam Gambar 16.14, ruang S tersisa setelah pita Möbius sebelumnya dipisahkan dari model persegi $\mathbb{R}P^2$. Jelaskan homeomorfisme potong-dan-susun ulang yang mengubah S menjadi cakram, lalu simpulkan bahwa $\mathbb{R}P^2$ diperoleh dengan merekatkan pita Möbius pada cakram sepanjang batasnya.

Petunjuk. Tahap 1. Pindahkan salah satu daerah poligonal tanpa mengubah pasangan sisi berlabel sama.

Tahap 2. Gunakan identifikasi sisi a , b , dan c untuk menyederhanakan batas.

Tahap 3. Periksa bahwa sisi potongan x dan y membentuk satu lingkaran batas.

Jawaban. Pemotongan dan penyusunan ulang poligon mempertahankan identifikasi sisi dan menghasilkan cakram. Lingkaran batas cakram itu sama dengan batas tunggal pita Möbius, sehingga merekatkan kedua batas merekonstruksi bidang proyektif.

Solusi. Peta f pada gambar memindahkan salah satu komponen poligonal melalui translasi dan rotasi, lalu menyambungkannya pada sisi yang mempunyai label dan arah identifikasi sama. Operasi ini adalah pemotongan sepanjang ruas dan perekatan kembali menurut peta linear, sehingga menghasilkan ruang homeomorfik dengan S . Peta g kemudian meluruskan sisi-sisi luar dan menggunakan pasangan a , b , dan c untuk menutup sambungan yang bukan bagian dari potongan pita. Hasil akhirnya adalah satu cakram.

Dua sisi potongan yang berlabel x dan y bersama-sama menjadi lingkaran batas cakram. Pada sisi lain, kedua sisi panjang pita persegi panjang menjadi satu lingkaran batas setelah ujung pendeknya direkatkan berlawanan arah. Kedua lingkaran inilah bekas antarmuka pemotongan. Merekatkannya kembali dengan korespondensi asal merekonstruksi model persegi $\mathbb{R}P^2$. Jadi bidang proyektif adalah gabungan sebuah pita Möbius dan sebuah cakram yang direkatkan sepanjang batasnya.

Pemeriksaan P.43 Kekontinuan dan surjektivitas fungsi jari-jari kuadrat. Misalkan $X = \mathbb{R}^2$, $Y = [0, \infty)$, keduanya dengan topologi standar, dan definisikan $f : X \rightarrow Y$ dengan $f(x, y) = x^2 + y^2$. Buktikan bahwa f kontinu dan surjektif.

Petunjuk. Tahap 1. Gunakan bahwa proyeksi koordinat, perkalian, dan penjumlahan mempertahankan kekontinuan.

Tahap 2. Untuk $t \geq 0$, cari satu titik pada sumbu x yang dipetakan ke t .

Jawaban. Fungsi f adalah polinom dalam dua koordinat, sehingga kontinu. Untuk setiap $t \in [0, \infty)$, berlaku $f(\sqrt{t}, 0) = t$, sehingga f surjektif.

Solusi. Pemetaan koordinat $\pi_1(x, y) = x$ dan $\pi_2(x, y) = y$ kontinu. Fungsi kuadrat pada $\mathbb{R}$ kontinu, dan jumlah fungsi kontinu kontinu. Maka $f = \pi_1^2 + \pi_2^2$ kontinu sebagai fungsi ke $\mathbb{R}$ dan juga sebagai fungsi ke subruang $Y = [0, \infty)$, sebab citranya berada dalam Y . Jika $t \in Y$, akar $\sqrt{t}$ terdefinisi dan $f(\sqrt{t}, 0) = t$. Jadi setiap titik kodomain mempunyai prapeta.

Pemeriksaan P.44 Kuosien lingkaran sepusat homeomorfik dengan sinar. Untuk fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ dengan $f(x, y) = x^2 + y^2$, biarkan X^* menjadi kuosien serat: dua titik ekuivalen jika mempunyai nilai f yang sama. Buktikan bahwa fungsi terinduksi $\bar{f} : X^* \rightarrow [0, \infty)$ merupakan homeomorfisme.

Petunjuk. Tahap 1. Serat untuk $t > 0$ adalah lingkaran berjari-jari $\sqrt{t}$; serat nol adalah titik asal.

Tahap 2. Buktikan f terbuka relatif terhadap $[0, \infty)$ dengan citra bola kecil.

Tahap 3. Gunakan bahwa bijeksi kontinu yang terbuka adalah homeomorfisme.

Jawaban. Fungsi $\bar{f}([(x, y)]) = x^2 + y^2$ terdefinisi dengan baik dan bijektif. Fungsi f kontinu dan terbuka,

sehingga merupakan pemetaan kuosien; sifat universal memberi kekontinuan $\bar{f}$, dan keterbukaan f memberi keterbukaan $\bar{f}$.

Solusi. Kelas ekuivalensi tepat serat-serat f , sehingga rumus $\bar{f}([(x, y)]) = f(x, y)$ terdefinisi dengan baik. Surjektivitas f membuat $\bar{f}$ surjektif, sedangkan kesamaan nilai $\bar{f}$ berarti kedua kelas berasal dari serat yang sama; jadi $\bar{f}$ injektif.

Tinggal membuktikan f terbuka. Ambil himpunan terbuka $U \subseteq \mathbb{R}^2$ dan titik $z = f(x_0, y_0) \in f(U)$. Pilih bola kecil di sekitar (x_0, y_0) yang termuat dalam U . Jika $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, ruas radial kecil di dalam bola itu menghasilkan selang terbuka di sekitar z . Jika titiknya asal, bola berjari-jari ε menghasilkan $[0, \varepsilon^2)$, yang terbuka relatif dalam $[0, \infty)$. Jadi $f(U)$ terbuka relatif dan f pemetaan terbuka, maka pemetaan kuosien.

Jika $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow X^*$ proyeksi kanonis, maka $f = \bar{f} \circ q$. Sifat universal kuosien memberi kekontinuan $\bar{f}$. Untuk W terbuka dalam X^* , $q^{-1}(W)$ terbuka dan $f(W) = f(q^{-1}(W))$ terbuka. Jadi $\bar{f}$ bijektif, kontinu, dan terbuka; karena itu homeomorfisme.

Pemeriksaan P.45 Setiap ruang tak kosong mempunyai retrak satu titik. Buktikan bahwa setiap ruang topologi tak kosong X mempunyai suatu subruang satu titik yang merupakan retrak dari X .

Petunjuk. Pilih $a \in X$ dan pertimbangkan fungsi konstan $r : X \rightarrow \{a\}$.

Jawaban. Untuk suatu $a \in X$, fungsi $r(x) = a$ kontinu dan memenuhi $r(a) = a$; jadi $\{a\}$ merupakan retrak.

Solusi. Karena X tak kosong, pilih $a \in X$. Subruang $\{a\}$ mempunyai satu-satunya topologi $\{\emptyset, \{a\}\}$. Fungsi $r : X \rightarrow \{a\}$ yang didefinisikan oleh $r(x) = a$ kontinu: prapeta himpunan terbuka hanya $\emptyset$ atau X . Selain itu, pembatasan r pada $\{a\}$ adalah identitas karena $r(a) = a$. Maka r retraksi dan $\{a\}$ retrak dari X .

Pemeriksaan P.46 Retraksi garis real berlubang ke dua titik. Tunjukkan bahwa $\{-1, 1\}$ merupakan retrak dari $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dengan topologi subruang standar.

Petunjuk. Gunakan tanda bilangan: petakan komponen negatif ke -1 dan komponen positif ke 1 .

Jawaban. Fungsi $r(x) = -1$ untuk $x < 0$ dan $r(x) = 1$ untuk $x > 0$ adalah retraksi yang dimaksud.

Solusi. Subruang $\{-1, 1\}$ diskret. Definisikan

$$r(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Prapeta $\{-1\}$ adalah $(-\infty, 0)$ dan prapeta $\{1\}$ adalah $(0, \infty)$; keduanya terbuka dalam $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jadi r kontinu. Selain itu, $r(-1) = -1$ dan $r(1) = 1$, sehingga pembatasannya pada $\{-1, 1\}$ adalah identitas. Maka r retraksi.

Pemeriksaan P.47 Setiap retraksi adalah pemetaan kuosien. Misalkan A subruang dari X dan $r : X \rightarrow A$ suatu retraksi. Buktikan bahwa r merupakan pemetaan kuosien.

Petunjuk. Jika $i : A \hookrightarrow X$ inklusi, maka $r \circ i = \text{id}_A$. Untuk $U \subseteq A$, tulis $U = i^{-1}(r^{-1}(U))$.

Jawaban. Retraksi surjektif dan kontinu. Jika $r^{-1}(U)$ terbuka dalam X , maka $U = i^{-1}(r^{-1}(U))$ terbuka dalam A . Jadi keterbukaan di A tepat diuji oleh prapeta di bawah r .

Solusi. Karena $r(a) = a$ untuk semua $a \in A$, fungsi r surjektif. Kekontinuannya merupakan bagian definisi retraksi. Jadi jika U terbuka dalam A , maka $r^{-1}(U)$ terbuka dalam X .

Sebaliknya, andaikan $r^{-1}(U)$ terbuka dalam X untuk suatu $U \subseteq A$. Inklusi $i : A \hookrightarrow X$ kontinu dan $r \circ i = \text{id}_A$. Karena itu

$$U = (r \circ i)^{-1}(U) = i^{-1}(r^{-1}(U))$$

terbuka dalam A . Maka U terbuka tepat ketika $r^{-1}(U)$ terbuka. Ini adalah kriteria pemetaan kuosien.

Pemeriksaan P.48 Retrak dari ruang Hausdorff harus tertutup. Misalkan X ruang Hausdorff dan A retrak dari X . Buktikan bahwa A merupakan subhimpunan tertutup dari X .

Petunjuk. Tahap 1. Jika $r : X \rightarrow A$ retraksi dan $i : A \hookrightarrow X$, bentuk $F = i \circ r : X \rightarrow X$.

Tahap 2. Tunjukkan bahwa $A = \{x \in X : F(x) = x\}$.

Tahap 3. Dalam ruang Hausdorff, diagonal di $X \times X$ tertutup.

Jawaban. Himpunan A adalah himpunan titik tetap fungsi kontinu $F = i \circ r$. Himpunan titik tetap itu merupakan prapeta diagonal tertutup di $X \times X$, sehingga tertutup.

Solusi. Definisikan $F = i \circ r : X \rightarrow X$. Jika $a \in A$, maka $F(a) = i(r(a)) = a$. Sebaliknya, jika $F(x) = x$, maka $x = i(r(x))$ berada dalam A . Jadi himpunan titik tetap F tepat A .

Pemetaan $G : X \rightarrow X \times X$ yang diberikan oleh $G(x) = (x, F(x))$ kontinu. Karena X Hausdorff, diagonal $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ tertutup dalam $X \times X$. Maka

$$A = G^{-1}(\Delta_X)$$

tertutup dalam X sebagai prapeta himpunan tertutup di bawah fungsi kontinu.

Panduan latihan Bab 16, bagian keempat

Bagian terakhir ini mendampingi enam kemunculan fisik dalam latihan benar-salah. Dua pasangan pertama berulang persis dalam sumber. Karena itu kemunculan pertama dan ketiga memakai panduan kanonis d01, sedangkan kemunculan kedua dan keempat memakai panduan kanonis d02. Dua prompt terakhir memakai d03 dan d04. Semua kemunculan tetap dipertahankan dalam bab utama dan dicatat dalam backend.

Materi pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan P.49 Topologi kuosien adalah topologi terbesar yang sesuai. Tentukan benar atau salah: jika $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi dari ruang topologi X ke himpunan tak kosong Y , topologi kuosien pada Y merupakan topologi terbesar yang membuat p kontinu. Jelaskan.

Petunjuk. Jika σ topologi pada Y yang membuat p kontinu, uji setiap $U \in \sigma$ terhadap syarat $p^{-1}(U)$ terbuka.

Jawaban. Benar. Setiap topologi yang membuat p kontinu termuat dalam topologi kuosien.

Solusi. Topologi kuosien adalah $\tau_p = \{U \subseteq Y : p^{-1}(U) \text{ terbuka dalam } X\}$. Definisi ini membuat p kontinu. Jika σ topologi lain pada Y dan $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ kontinu, maka untuk setiap $U \in \sigma$, himpunan $p^{-1}(U)$ terbuka dalam X . Jadi $U \in \tau_p$, sehingga $\sigma \subseteq \tau_p$. Pernyataan itu benar.

Pemeriksaan P.50 Kuosien rasional-irasional pada selang satuan. Pada $X = [0, 1]$ dengan topologi Euklides, definisikan $x \sim y$ jika dan hanya jika keduanya rasional atau keduanya irasional. Tentukan benar atau salah: ruang kuosien $X/\sim$ adalah ruang dua titik dengan topologi indiskret.

Petunjuk. Tahap 1. Ada tepat dua kelas ekuivalensi.

Tahap 2. Uji apakah masing-masing kelas itu terbuka dalam $[0, 1]$.

Jawaban. Benar. Kedua singleton dalam kuosien mempunyai prapeta yang rapat dan tidak terbuka; jadi hanya himpunan kosong dan seluruh ruang yang terbuka.

Solusi. Kelas-kelasnya adalah $Q = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ dan $I = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Jadi himpunan kuosien mempunyai dua titik, yakni Q dan I . Menurut definisi topologi kuosien, singleton $\{Q\}$ terbuka tepat ketika Q terbuka dalam $[0, 1]$; hal ini salah karena setiap selang relatif memuat bilangan irasional. Demikian pula I tidak terbuka karena setiap selang relatif memuat bilangan rasional. Maka tidak ada singleton terbuka. Himpunan kosong dan seluruh kuosien selalu terbuka, sehingga topologinya tepat topologi indiskret.

Pemeriksaan P.51 Citra himpunan terbuka tidak selalu terbuka. Tentukan benar atau salah: untuk setiap surjeksi kuosien $p : X \rightarrow Y$, jika U terbuka dalam X , maka $p(U)$ terbuka dalam Y . Jika salah, berikan contoh tandingan konkret.

Petunjuk. Ambil proyeksi kanonis yang menciutkan selang $[0, 1]$ dalam $\mathbb{R}$ menjadi satu titik. Pilih himpunan terbuka yang bertemu sebagian, tetapi tidak seluruh, kelas yang diciutkan.

Jawaban. Salah. Untuk $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/[0, 1]$ dan $U = (-1, 1/2)$, saturasi $p^{-1}(p(U)) = (-1, 1]$ tidak terbuka; karena itu $p(U)$ tidak terbuka dalam kuosien.

Solusi. Definisikan relasi pada $\mathbb{R}$ dengan semua titik $[0, 1]$ berada dalam satu kelas dan setiap titik lain menjadi kelas singleton. Biarkan $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/[0, 1]$ proyeksi kanonis; menurut definisi, p pemetaan kuosien. Himpunan $U = (-1, 1/2)$ terbuka dan bertemu kelas $[0, 1]$. Karena satu anggota kelas itu masuk U , citra $p(U)$ memuat titik kelas yang diciutkan, sehingga prapetanya memuat seluruh $[0, 1]$. Tepatnya,

$$p^{-1}(p(U)) = (-1, 1].$$

Himpunan ini tidak terbuka dalam $\mathbb{R}$. Menurut kriteria topologi kuosien, $p(U)$ tidak terbuka. Jadi pemetaan kuosien tidak harus merupakan pemetaan terbuka.

Pemeriksaan P.52 Definisi ruang kuosien dari relasi ekuivalensi. Tentukan benar atau salah: jika $\sim$ relasi ekuivalensi pada ruang topologi X , maka ruang kuosien $X/\sim$ adalah himpunan semua kelas ekuivalensi yang diberi topologi kuosien. Jelaskan tanpa sekadar mengulang istilahnya.

Petunjuk. Tuliskan proyeksi kanonis $q(x) = [x]$ dan kriteria keterbukaan untuk $U \subseteq X/\sim$.

Jawaban. Benar. Himpunan dasarnya adalah koleksi kelas $[x]$, dan U didefinisikan terbuka tepat ketika $q^{-1}(U)$ terbuka dalam X .

Solusi. Relasi ekuivalensi mempartisi X menjadi kelas-kelas yang saling lepas. Himpunan semua kelas itu dinotasikan $X/\sim$. Proyeksi kanonis $q : X \rightarrow X/\sim$ diberikan oleh $q(x) = [x]$ dan bersifat surjektif. Topologi kuosien pada himpunan kelas didefinisikan oleh

$$\tau_q = \{U \subseteq X/\sim : q^{-1}(U) \text{ terbuka dalam } X\}.$$

Jadi pernyataan itu bukan klaim tambahan, melainkan konstruksi lengkap ruang kuosien: objeknya adalah kelas-kelas dan topologinya adalah topologi terbesar yang membuat proyeksi kanonis kontinu.

Uji Penguasaan Bab 16: Ruang Kuosien

Delapan uji penguasaan ini mengintegrasikan konstruksi, sifat universal, model geometris, dan contoh tandingan Bab 16. Kerjakan setiap pernyataan sebelum membuka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan P.53 Membangun topologi kuosien dan membuktikan kemaksimalannya. Misalkan $p : X \rightarrow Y$ suatu surjeksi dari ruang topologi (X, τ) ke suatu himpunan Y . Definiskan

$$\tau_p = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Buktikan bahwa τ_p adalah topologi pada Y , bahwa $p : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_p)$ kontinu, dan bahwa τ_p merupakan topologi terbesar pada Y yang membuat p kontinu.

Petunjuk. Tahap 1. Gunakan prapeta $p^{-1}(\emptyset)$ dan $p^{-1}(Y)$.

Tahap 2. Prapeta mempertahankan gabungan sebarang dan irisan berhingga.

Tahap 3. Jika topologi lain σ membuat p kontinu, uji setiap $U \in \sigma$ terhadap definisi τ_p .

Jawaban. Ketiga aksioma topologi mengikuti hukum prapeta. Kekontinuan p berlaku langsung dari definisi. Jika σ juga membuat p kontinu, maka setiap $U \in \sigma$ memenuhi $p^{-1}(U) \in \tau$, sehingga $\sigma \subseteq \tau_p$.

Solusi. Karena $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dan $p^{-1}(Y) = X$, kedua himpunan wajib berada dalam τ_p . Jika $U_i \in \tau_p$ untuk

$i \in I$, maka

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(U_i) \in \tau,$$

sehingga gabungan itu berada dalam τ_p . Jika $U, V \in \tau_p$, maka

$$p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \in \tau.$$

Induksi memberi penutupan terhadap irisan berhingga. Jadi τ_p adalah topologi.

Definisi τ_p tepat menyatakan bahwa prapeta setiap himpunan terbuka di kodomain terbuka dalam X ; maka p kontinu. Sekarang misalkan σ topologi pada Y yang juga membuat p kontinu. Untuk setiap $U \in \sigma$, kekontinuan memberi $p^{-1}(U) \in \tau$. Jadi $U \in \tau_p$, sehingga $\sigma \subseteq \tau_p$. Inilah arti bahwa τ_p merupakan topologi terbesar yang dimaksud.

Pemeriksaan P.54 Dari serat surjeksi ke kelas ekuivalensi. Untuk surjeksi $p : X \rightarrow Y$, definisikan $x \sim_p x'$ jika dan hanya jika $p(x) = p(x')$. Buktikan bahwa $\sim_p$ merupakan relasi ekuivalensi. Jika $q : X \rightarrow X/\sim_p$ adalah proyeksi kanonis, buktikan bahwa $h : X/\sim_p \rightarrow Y$ yang diberikan oleh $h([x]) = p(x)$ merupakan bijeksi. Terakhir, jika kedua kodomain diberi topologi kuosien yang ditentukan oleh q dan p , buktikan bahwa h adalah homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Periksa refleksivitas, simetri, dan transitivitas melalui kesamaan nilai p .

Tahap 2. Keterdefinisan h tepat memakai definisi $\sim_p$.

Tahap 3. Untuk $U \subseteq Y$, bandingkan $q^{-1}(h^{-1}(U))$ dengan $p^{-1}(U)$.

Jawaban. Relasi tersebut mengelompokkan tepat titik-titik dalam serat yang sama. Pemetaan h terdefinisi dengan baik dan bijektif, serta memenuhi $h \circ q = p$. Identitas $q^{-1}(h^{-1}(U)) = p^{-1}(U)$ menunjukkan bahwa U terbuka tepat ketika $h^{-1}(U)$ terbuka.

Solusi. Kesamaan $p(x) = p(x')$ memberi refleksivitas. Jika $p(x) = p(x')$, simetri kesamaan memberi $p(x') = p(x)$. Jika $p(x) = p(x')$ dan $p(x') = p(x'')$, transitivitas kesamaan memberi $p(x) = p(x'')$. Jadi $\sim_p$ relasi ekuivalensi.

Jika $[x] = [x']$, maka $x \sim_p x'$ dan $p(x) = p(x')$; karena itu rumus $h([x]) = p(x)$ tidak bergantung pada wakil. Surjektivitas p memberi surjektivitas h . Jika $h([x]) = h([x'])$, maka $p(x) = p(x')$, sehingga $[x] = [x']$; jadi h injektif.

Untuk setiap $U \subseteq Y$, berlaku

$$q^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ q)^{-1}(U) = p^{-1}(U).$$

Menurut definisi kedua topologi kuosien, ruas kanan terbuka dalam X jika dan hanya jika U terbuka dalam Y , dan ruas kiri terbuka dalam X jika dan hanya jika $h^{-1}(U)$ terbuka dalam $X/\sim_p$. Jadi U terbuka tepat ketika $h^{-1}(U)$ terbuka. Bijeksi h beserta kesetaraan ini adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan P.55 Mengenali empat kuosien persegi. Ambil persegi satuan $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$. Kenali ruang kuosien yang diperoleh dalam masing-masing kasus berikut dan berikan justifikasi geometris: (i) hanya sisi bawah dan atas direkatkan dengan $(x, 0) \sim (x, 1)$; (ii) keduanya direkatkan berlawanan arah dengan $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$; (iii) kedua pasangan sisi berhadapan direkatkan searah; (iv) seluruh batas ∂I^2 diciutkan menjadi satu titik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gulung persegi tanpa atau dengan satu pembalikan.

Tahap 2. Setelah satu pasangan sisi direkatkan menjadi silinder, rekatkan dua lingkaran batasnya untuk kasus (iii).

Tahap 3. Pandang interior persegi sebagai cakram terbuka dan titik hasil penciutan batas sebagai titik tambahan.

Jawaban. Hasilnya berturut-turut adalah silinder, pita Möbius, torus, dan permukaan bola S^2 .

Solusi. Pada (i), setiap ruas horizontal tetap menjadi ruas, sedangkan kedua ujung setiap ruas vertikal

pada sisi bawah dan atas diidentifikasi. Arah vertikal menjadi lingkaran, sehingga hasilnya homeomorfik dengan $S^1 \times I$, yaitu silinder.

Pada (ii), pembalikan $x \mapsto 1 - x$ memberi satu puntiran sebelum kedua sisi direkatkan. Inilah model poligonal pita Möbius. Pada (iii), satu pasangan sisi terlebih dahulu menghasilkan silinder; dua lingkaran batas silinder kemudian direkatkan dengan arah yang sama. Hasilnya $S^1 \times S^1$, yaitu torus.

Untuk (iv), persegi homeomorfik dengan cakram tertutup. Menciutkan seluruh lingkaran batas menjadi satu titik memberi kompaktifikasi satu titik dari cakram terbuka, yang homeomorfik dengan S^2 . Secara konkret, petakan interior secara radial ke permukaan bola tanpa satu titik dan kirim seluruh batas ke titik yang tersisa.

Pemeriksaan P.56 Faktorisasi himpunan melalui kuosien. Misalkan $\sim$ relasi ekuivalensi pada himpunan X dan $q : X \rightarrow X/\sim$ proyeksi kanonis. Jika fungsi $f : X \rightarrow Z$ memenuhi $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$, buktikan bahwa terdapat tepat satu fungsi $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$ dengan $f = \bar{f} \circ q$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Definisikan $\bar{f}([x]) = f(x)$.

Tahap 2. Gunakan hipotesis untuk membuktikan bahwa pilihan wakil tidak berpengaruh.

Tahap 3. Untuk keunikan, evaluasi fungsi calon pada kelas $[x] = q(x)$.

Jawaban. Fungsi tunggal tersebut adalah $\bar{f}([x]) = f(x)$. Hipotesis menjamin keterdefinisiannya, dan surjektivitas q memaksa setiap faktorisasi lain mempunyai nilai yang sama pada semua kelas.

Solusi. Definisikan $\bar{f}([x]) = f(x)$. Jika $[x] = [y]$, maka $x \sim y$, sehingga hipotesis memberi $f(x) = f(y)$. Jadi $\bar{f}$ terdefinisi dengan baik. Untuk setiap $x \in X$,

$$(\bar{f} \circ q)(x) = \bar{f}([x]) = f(x),$$

sehingga $f = \bar{f} \circ q$.

Jika $g : X/\sim \rightarrow Z$ juga memenuhi $f = g \circ q$, ambil sebarang kelas $[x]$. Karena setiap kelas mempunyai wakil, $g([x]) = g(q(x)) = f(x) = \bar{f}([x])$. Maka $g = \bar{f}$, jadi faktorisasi itu unik.

Pemeriksaan P.57 Sifat universal topologis. Dalam situasi uji sebelumnya, anggap X ruang topologi, $X/\sim$ memakai topologi kuosien, dan Z ruang topologi. Buktikan bahwa fungsi terinduksi $\bar{f}$ kontinu jika dan hanya jika $f = \bar{f} \circ q$ kontinu. Tuliskan secara eksplisit identitas prapeta yang membuat kedua ruang tempat prapeta itu berada tidak tertukar.

Petunjuk. *Tahap 1.* Satu arah mengikuti komposisi fungsi kontinu.

Tahap 2. Untuk himpunan terbuka $O \subseteq Z$, hitung $f^{-1}(O)$.

Tahap 3. Terapkan kriteria topologi kuosien pada himpunan $\bar{f}^{-1}(O) \subseteq X/\sim$.

Jawaban. Identitas yang benar adalah $f^{-1}(O) = q^{-1}(\bar{f}^{-1}(O))$. Karena q pemetaan kuosien, keterbukaan ruas kanan sebagai prapeta di X tepat menguji keterbukaan $\bar{f}^{-1}(O)$ di $X/\sim$.

Solusi. Jika $\bar{f}$ kontinu, maka $f = \bar{f} \circ q$ kontinu sebagai komposisi dua fungsi kontinu. Sebaliknya, andaikan f kontinu dan ambil himpunan terbuka $O \subseteq Z$. Faktorisasi memberi identitas bertipe benar

$$f^{-1}(O) = (\bar{f} \circ q)^{-1}(O) = q^{-1}(\bar{f}^{-1}(O)).$$

Ruas kiri terbuka dalam X karena f kontinu. Definisi topologi kuosien menyatakan bahwa suatu himpunan $V \subseteq X/\sim$ terbuka tepat ketika $q^{-1}(V)$ terbuka dalam X . Terapkan ini pada $V = \bar{f}^{-1}(O)$. Maka $\bar{f}^{-1}(O)$ terbuka untuk setiap O terbuka, sehingga $\bar{f}$ kontinu.

Pemeriksaan P.58 Homeomorfisme antara garis modulo bilangan bulat dan lingkaran. Definisikan $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dengan $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, dan pada $\mathbb{R}$ definisikan $s \sim t$ jika dan hanya jika $s - t \in \mathbb{Z}$. Buktikan bahwa fungsi terinduksi $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ merupakan homeomorfisme. Jangan memakai teorema “bijeksi kontinu dari ruang kompak ke ruang Hausdorff.”

Petunjuk. *Tahap 1.* Periksa bahwa serat-serat f tepat kelas-kelas modulo $\mathbb{Z}$.

Tahap 2. Buktikan f terbuka secara lokal dengan selang terbuka berpanjang kurang dari 1.

Tahap 3. Bijeksi kontinu yang terbuka mempunyai invers kontinu.

Jawaban. Serat f adalah kelas modulo bilangan bulat, sehingga $\bar{f}$ bijektif. Fungsi f kontinu dan terbuka; karena $f = \bar{f} \circ q$, sifat kuosien memberi kekontinuan $\bar{f}$, sedangkan keterbukaan f memberi keterbukaan $\bar{f}$. Jadi inversnya kontinu.

Solusi. Periodisitas fungsi sinus dan kosinus memberi $f(s) = f(t)$ jika dan hanya jika $s - t \in \mathbb{Z}$. Karena f juga surjektif, faktorisasi melalui proyeksi $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ menghasilkan bijeksi $\bar{f}([t]) = f(t)$. Kekontinuan f dan sifat universal topologi kuosien memberi kekontinuan $\bar{f}$.

Untuk membuktikan keterbukaan, ambil himpunan terbuka $U \subseteq \mathbb{R}$. Di sekitar setiap $t \in U$, pilih selang terbuka $J_t \subseteq U$ dengan panjang kurang dari 1. Pembatasan $f|_{J_t}$ memetakan J_t homeomorfik ke suatu busur terbuka pada S^1 . Karena

$$f(U) = \bigcup_{t \in U} f(J_t),$$

himpunan $f(U)$ terbuka. Jika W terbuka dalam $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, maka $q^{-1}(W)$ terbuka dan $\bar{f}(W) = f(q^{-1}(W))$ terbuka. Jadi $\bar{f}$ adalah bijeksi kontinu yang terbuka, sehingga $\bar{f}^{-1}$ kontinu.

Pemeriksaan P.59 Tiga model bidang proyektif real. Tunjukkan hubungan homeomorfik antara tiga model $\mathbb{R}P^2$: (i) garis-garis satu dimensi melalui titik asal dalam $\mathbb{R}^3$; (ii) S^2 dengan pasangan titik antipodal diidentifikasi; dan (iii) cakram tertutup D^2 dengan pasangan titik antipodal pada batasnya diidentifikasi. Jelaskan mengapa hanya titik-titik batas pada model cakram yang masih perlu diidentifikasi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap garis melalui asal memotong S^2 di tepat dua titik antipodal.

Tahap 2. Pilih wakil setiap pasangan antipodal pada hemisfer atas tertutup.

Tahap 3. Proyeksikan hemisfer itu ke cakram ekuator pada bidang xy .

Jawaban. Normalisasi vektor tak nol memotong setiap garis pada pasangan $\{u, -u\}$ di S^2 . Setiap pasangan mempunyai satu wakil di interior hemisfer atas, sedangkan pasangan pada ekuator mempunyai dua wakil antipodal. Proyeksi hemisfer ke D^2 menerjemahkan tepat identifikasi ekuator itu menjadi identifikasi antipodal batas.

Solusi. Suatu titik model (i) adalah garis $L = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ untuk vektor tak nol v . Garis itu memotong permukaan bola satuan di dua titik $u = v/\|v\|$ dan $-u$. Karena mengganti vektor pembangkit tidak mengubah garis, model garis tepat merupakan kuosien $S^2/(u \sim -u)$, yaitu model (ii).

Setiap kelas antipodal mempunyai wakil pada hemisfer atas tertutup $H = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$. Jika $z > 0$, tepat satu dari u dan $-u$ berada dalam H . Jika $z = 0$, kedua titik berada pada ekuator dan tetap harus diidentifikasi. Proyeksi $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ memetakan H homeomorfik ke cakram tertutup D^2 . Ekuator menjadi batas S^1 , dan pasangan antipodal ekuator menjadi pasangan (x, y) dan $(-x, -y)$ pada batas. Interior tidak memerlukan identifikasi tambahan. Jadi model (ii) dan (iii) homeomorfik sebagai ruang kuosien.

Pemeriksaan P.60 Pemetaan kuosien, retraksi, dan batas Hausdorff. Kerjakan tiga bagian berikut. (i) Jika $A \subseteq X$ dan $r : X \rightarrow A$ adalah retraksi, buktikan bahwa r merupakan pemetaan kuosien. (ii) Jika X Hausdorff, buktikan bahwa setiap retrak A tertutup dalam X . (iii) Berikan contoh surjeksi kontinu yang bukan pemetaan kuosien dan jelaskan kegagalannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $U \subseteq A$, gunakan inklusi $i : A \hookrightarrow X$ dan identitas $r \circ i = \text{id}_A$.

Tahap 2. Retrak adalah himpunan titik tetap dari $i \circ r : X \rightarrow X$; gunakan diagonal tertutup di $X \times X$.

Tahap 3. Bandingkan identitas dari garis real diskret ke garis real bertopologi standar.

Jawaban. Retraksi adalah surjeksi kontinu dan keterbukaan $r^{-1}(U)$ memaksa keterbukaan $U = i^{-1}(r^{-1}(U))$. Dalam ruang Hausdorff, himpunan titik tetap suatu fungsi kontinu tertutup. Contoh tandingan pada (iii) adalah fungsi identitas dari $\mathbb{R}$ diskret ke $\mathbb{R}$ standar: kontinu dan surjektif, tetapi topologi kuosien yang diinduksinya adalah topologi diskret.

Solusi. Misalkan $U \subseteq A$. Jika U terbuka dalam A , kekontinuan r memberi keterbukaan $r^{-1}(U)$ dalam X .

Sebaliknya, jika $r^{-1}(U)$ terbuka dalam X , maka

$$U = (r \circ i)^{-1}(U) = i^{-1}(r^{-1}(U))$$

terbuka dalam topologi subruang pada A . Jadi U terbuka tepat ketika prapetanya di bawah r terbuka; karena r surjektif, r pemetaan kuosien.

Tuliskan $F = i \circ r : X \rightarrow X$. Karena $r(a) = a$ bagi setiap $a \in A$ dan $r(x) \in A$, himpunan titik tetap F tepat A . Pemetaan $x \mapsto (x, F(x))$ kontinu dari X ke $X \times X$. Karena X Hausdorff, diagonal $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ tertutup. Maka $A = \{x : F(x) = x\}$ adalah prapeta diagonal tersebut dan tertutup.

Terakhir, biarkan $X = \mathbb{R}$ bertopologi diskret dan $Y = \mathbb{R}$ bertopologi standar, lalu ambil identitas himpunan $p : X \rightarrow Y$. Setiap prapeta himpunan terbuka di Y terbuka di X , jadi p kontinu dan jelas surjektif. Namun bagi setiap $U \subseteq Y$, prapeta $p^{-1}(U) = U$ terbuka dalam X . Jadi topologi kuosien yang ditentukan p adalah topologi diskret, lebih besar daripada topologi standar pada Y . Karena topologi aktual kodomain bukan topologi kuosien itu, p bukan pemetaan kuosien.

Lampiran Q

Panduan Belajar Mandiri Bab 17: Ruang Kompak

Komponen ini mendampingi Bab 17, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi secara bertahap.

Bab sumber memuat 76 kejadian prompt fisik: 71 tugas atomik, empat pernyataan langsung, dan satu badan kegiatan langsung. Dua simpul tugas tambahan hanya mengelompokkan tiga subprompt dan tidak dihitung dua kali. Kejadian fisik ke-34 mengulang kejadian ke-33; kedua prompt tetap tampil dalam bab utama, sedangkan backend memetakan kejadian kedua sebagai alias transparan. Karena itu, panduan ini menyediakan 75 entri dukungan sumber kanonis dalam urutan sumber.

Delapan uji penguasaan orisinal mengintegrasikan sifat irisan berhingga, citra kontinu, Heine–Borel, nilai ekstrem, pemisahan Hausdorff, contoh kofinit, metrik Hausdorff, dan atraktor sistem fungsi teriterasi. Bersama 75 panduan sumber, komponen ini mempunyai tepat 83 entri kanonis dan 332 permukaan bertahap berupa pernyataan, petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University, tidak menyatakan dukungan mereka, dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0. Teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tersebut tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Panduan Belajar Mandiri: Selimut Buka dan Kekompakan Dasar

Sepuluh panduan pertama ini mengikuti urutan sumber Bab 17: enam penyelidikan awal tentang kekompakan, lalu empat pertanyaan pertama tentang hubungan kekompakan dengan himpunan buka dan himpunan tertutup. Kerjakan dahulu prompt pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi secara bertahap.

Bab sumber mempertahankan 73 simpul tugas. Dua di antaranya hanya mengelompokkan subprompt; setelah empat pernyataan langsung dan satu badan kegiatan langsung ikut dihitung, backend memuat 76 kejadian prompt fisik dan 75 entri dukungan kanonis. Kejadian ke-34 merupakan duplikat persis dari kejadian ke-33 tentang subhimpunan kompak dalam topologi indiskret. Keduanya tetap dipertahankan; kejadian kedua dipetakan secara transparan sebagai alias ketika batch latihan yang memuatnya disusun.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan Q.1 Himpunan Berhingga Bersifat Kompak. Tentukan apakah $A = \{-2, 3, e, \pi, 456875\}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides bersifat kompak. Generalisasikan contoh ini.

Petunjuk. *Tahap 1.* Mulailah dengan selimut buka sebarang $\mathcal{U}$ bagi A , bukan dengan selimut tertentu.

Tahap 2. Untuk setiap titik dalam A , pilih satu anggota $\mathcal{U}$ yang memuat titik tersebut.

Tahap 3. Hitung banyaknya himpunan yang telah dipilih dan perhatikan bahwa argumen tidak memakai sifat khusus topologi Euklides.

Jawaban. Himpunan A kompak. Secara umum, setiap subhimpunan berhingga dari sebarang ruang topologi bersifat kompak.

Solusi. Misalkan $\mathcal{U}$ selimut buka sebarang bagi A . Untuk setiap $a \in A$, pilih $U_a \in \mathcal{U}$ dengan $a \in U_a$. Karena A mempunyai lima anggota, keluarga

$$\{U_{-2}, U_3, U_e, U_\pi, U_{456875}\}$$

berhingga dan masih menyelimuti A . Jika beberapa pilihan menghasilkan himpunan buka yang sama, kita cukup menghapus pengulangannya.

Argumen yang sama berlaku bagi setiap himpunan berhingga $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ dalam ruang topologi apa pun: pilih satu anggota selimut yang memuat setiap x_i . Untuk $F = \emptyset$, subkeluarga kosong sudah merupakan subselimut berhingga. Jadi setiap subhimpunan berhingga bersifat kompak.

Pemeriksaan Q.2 Interval Setengah Terbuka yang Tidak Kompak. Tentukan apakah $A = (0, 1]$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk membuktikan ketidakkompakan, cukup temukan satu selimut buka tanpa subselimut berhingga.

Tahap 2. Pertimbangkan keluarga $U_n = (1/n, 2)$ untuk $n \geq 2$.

Tahap 3. Dari subkeluarga berhingga, ambil indeks terbesar dan carilah titik A yang lebih kecil daripada batas kiri yang tersisa.

Jawaban. Himpunan $(0, 1]$ tidak kompak dalam topologi Euklides. Keluarga $\{(1/n, 2) \mid n \geq 2\}$ adalah selimut buka tanpa subselimut berhingga.

Solusi. Untuk setiap $x \in (0, 1]$, sifat Archimedes memberi $n \geq 2$ dengan $1/n < x$. Maka $x \in U_n = (1/n, 2)$, sehingga keluarga $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \geq 2\}$ menyelimuti A dan setiap anggotanya terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Ambil sebarang subkeluarga berhingga dan misalkan N indeks terbesar yang dipilih. Karena keluarga ini menaik, $U_n \subseteq U_N$ untuk setiap indeks terpilih $n \leq N$. Jadi gabungan subkeluarga itu sama dengan U_N . Namun $1/(N+1) \in (0, 1]$ dan $1/(N+1) \notin U_N$. Tidak ada subselimut berhingga, sehingga A tidak kompak.

Pemeriksaan Q.3 Barisan Tanpa Titik Limitnya. Tentukan apakah $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap titik $1/n$ terisolasi dari titik-titik lain dalam A .

Tahap 2. Gunakan $U_1 = (3/4, 5/4)$ dan, untuk $n \geq 2$, gunakan $U_n = (1/(n+1), 1/(n-1))$.

Tahap 3. Hitung $U_n \cap A$ dan tentukan berapa banyak titik A yang dapat diselimuti subkeluarga berhingga.

Jawaban. Himpunan A tidak kompak. Terdapat selimut buka yang setiap anggotanya memuat tepat satu titik A , sehingga tidak ada subkeluarga berhingga yang dapat menyelimuti seluruh A .

Solusi. Definisikan $U_1 = (3/4, 5/4)$ dan

$$U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right) \quad \text{untuk } n \geq 2.$$

Setiap U_n terbuka dalam $\mathbb{R}$ dan memuat $1/n$. Karena barisan $(1/n)$ menurun ketat, kedua titik bertetangga $1/(n+1)$ dan $1/(n-1)$ berada tepat pada batas interval untuk $n \geq 2$; semua suku lain berada di luar. Demikian pula, $U_1 \cap A = \{1\}$. Jadi $U_n \cap A = \{1/n\}$ untuk setiap $n \geq 1$.

Keluarga $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti A . Setiap subkeluarga berhingga hanya menyelimuti sejumlah berhingga titik A , sedangkan A tak berhingga. Karena itu keluarga ini tidak mempunyai subselimut berhingga dan A tidak kompak.

Pemeriksaan Q.4 Bilangan Bulat Positif dalam Topologi Euklides. Tentukan apakah $A = \mathbb{Z}^+$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Carilah interval terbuka kecil yang mengisolasi setiap bilangan bulat positif.

Tahap 2. Gunakan $U_n = (n - 1/3, n + 1/3)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa subkeluarga berhingga hanya dapat memuat sejumlah berhingga anggota $\mathbb{Z}^+$.

Jawaban. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ tidak kompak dalam topologi Euklides. Interval $U_n = (n - 1/3, n + 1/3)$ membentuk selimut buka tanpa subselimut berhingga.

Solusi. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, interval $U_n = (n - 1/3, n + 1/3)$ terbuka dalam $\mathbb{R}$ dan $U_n \cap \mathbb{Z}^+ = \{n\}$. Maka $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan selimut buka bagi A .

Gabungan sebarang subkeluarga berhingga dari $\mathcal{U}$ beririsan dengan A dalam sejumlah berhingga titik saja. Karena A mempunyai tak berhingga banyak titik, gabungan itu tidak dapat menyelimuti A . Jadi A tidak kompak.

Pemeriksaan Q.5 Bilangan Bulat Positif dalam Topologi Komplemen Berhingga. Tentukan apakah $A = \mathbb{Z}^+$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil selimut buka sebarang bagi A dan pilih satu anggotanya yang memuat suatu titik A .

Tahap 2. Komplemen setiap himpunan buka tak kosong dalam topologi ini berhingga.

Tahap 3. Setelah memilih himpunan buka pertama, pilih paling banyak satu anggota selimut tambahan untuk setiap titik A yang belum terselimuti.

Jawaban. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ kompak dalam $\mathbb{R}$ bertopologi komplemen berhingga. Bahkan setiap subhimpunan ruang bertopologi komplemen berhingga bersifat kompak.

Solusi. Misalkan $\mathcal{U}$ selimut buka bagi $A = \mathbb{Z}^+$. Pilih $U_0 \in \mathcal{U}$ yang memuat, misalnya, titik 1. Karena U_0 tak kosong dan terbuka dalam topologi komplemen berhingga, himpunan $\mathbb{R} \setminus U_0$ berhingga. Akibatnya, $A \setminus U_0 \subseteq \mathbb{R} \setminus U_0$ juga berhingga.

Untuk setiap titik $a \in A \setminus U_0$, pilih satu $U_a \in \mathcal{U}$ yang memuat a . Keluarga yang terdiri atas U_0 dan semua U_a tersebut berhingga serta menyelimuti A . Jadi A kompak. Bukti ini berlaku tanpa perubahan bagi setiap subhimpunan tak kosong; himpunan kosong kompak secara langsung.

Pemeriksaan Q.6 Garis Real Tidak Kompak. Tentukan apakah $A = \mathbb{R}$ dalam $X = \mathbb{R}$ dengan topologi Euklides bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Selimuti garis real dengan interval terbuka yang makin membesar.

Tahap 2. Ambil $U_n = (-n, n)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.

Tahap 3. Dalam setiap subkeluarga berhingga, gunakan indeks terbesar untuk menemukan titik real yang belum terselimuti.

Jawaban. Garis real tidak kompak dalam topologi Euklides. Selimut buka $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga.

Solusi. Setiap $x \in \mathbb{R}$ berada dalam $(-n, n)$ jika $n > |x|$. Jadi keluarga $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan selimut buka bagi $\mathbb{R}$.

Ambil subkeluarga berhingga dan misalkan N indeks terbesar yang muncul. Karena interval-interval itu bersarang, gabungannya termuat dalam $(-N, N)$. Titik N , misalnya, tidak berada dalam gabungan tersebut. Maka tidak ada subselimut berhingga dan $\mathbb{R}$ tidak kompak.

Pemeriksaan Q.7 Bukti Umum untuk Himpunan Berhingga. Jelaskan mengapa setiap subhimpunan berhingga dari suatu ruang topologi pasti kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tulis subhimpunan berhingga sebagai $F = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Tahap 2. Dari selimut buka sebarang, pilih satu himpunan buka yang memuat setiap x_i .

Tahap 3. Jelaskan mengapa paling banyak n himpunan terpilih sudah menyelimuti F .

Jawaban. Dari selimut buka sebarang bagi himpunan berhingga beranggota n , pilih satu anggota selimut untuk setiap titik. Paling banyak n anggota terpilih dan semuanya bersama-sama menyelimuti himpunan tersebut.

Solusi. Misalkan $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ dan $\mathcal{U}$ selimut buka sebarang bagi F . Untuk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$, karena $\mathcal{U}$ menyelimuti F , ada $U_i \in \mathcal{U}$ dengan $x_i \in U_i$. Keluarga $\{U_1, \dots, U_n\}$ berhingga dan menyelimuti setiap titik F . Penghapusan pilihan yang sama tidak mengubah gabungannya. Jika $F = \emptyset$, subkeluarga kosong cukup. Karena selimut awal dipilih sebarang, F kompak.

Pemeriksaan Q.8 Contoh Himpunan Kompak dan Terbuka. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Jika mungkin, temukan suatu subhimpunan dari X yang kompak dan terbuka. Jika subhimpunan semacam itu tidak ada, jelaskan alasannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan hasil bahwa setiap subhimpunan berhingga bersifat kompak.

Tahap 2. Semua subhimpunan X berhingga karena X sendiri berhingga.

Tahap 3. Pilih sebarang anggota τ ; untuk contoh nontrivial, hindari $\emptyset$ dan X .

Jawaban. *Rubrik.* Jawaban lengkap menyebutkan suatu anggota τ dan membuktikan kekompakannya dari keberhinggaan. Sebagai contoh, $\{a\}$ kompak dan terbuka. Contoh lain yang sah adalah $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\emptyset$, atau X .

Solusi. Ambil $A = \{a\}$. Daftar yang mendefinisikan topologi memuat $\{a\}$, jadi A terbuka. Himpunan A berhingga, sehingga setiap selimut bukanya mempunyai subselimut berhingga; maka A kompak.

Contoh ini tidak unik. Karena X berhingga, setiap subhimpunan X kompak. Oleh sebab itu, subhimpunan yang sekaligus kompak dan terbuka tepat anggota-anggota τ , yaitu $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, dan X .

Pemeriksaan Q.9 Kekompakan Tidak Memaksa Keterbukaan. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Jika A merupakan subhimpunan kompak dari X , haruskah A terbuka? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam ruang berhingga ini, setiap subhimpunan kompak.

Tahap 2. Bandingkan semua subhimpunan satu titik dengan daftar τ .

Tahap 3. Satu contoh kompak yang tidak berada dalam τ cukup untuk menyangkal keharusan tersebut.

Jawaban. Tidak. Sebagai contoh, $A = \{b\}$ berhingga sehingga kompak, tetapi $\{b\} \notin \tau$, sehingga tidak terbuka.

Solusi. Pilih $A = \{b\}$. Karena A berhingga, argumen pemilihan satu anggota selimut untuk setiap titik menunjukkan bahwa A kompak. Namun daftar anggota τ tidak memuat $\{b\}$. Jadi A tidak terbuka. Kontraeksempel ini membuktikan bahwa kekompakan saja tidak mengharuskan suatu subhimpunan terbuka.

Pemeriksaan Q.10 Contoh Himpunan Kompak dan Tertutup. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Jika mungkin, temukan suatu subhimpunan dari X yang kompak dan tertutup. Jika subhimpunan semacam itu tidak ada, jelaskan alasannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Semua subhimpunan X kompak karena berhingga.

Tahap 2. Ambil komplement setiap anggota τ untuk mendaftar himpunan tertutup.

Tahap 3. Pilih salah satu himpunan tertutup nontrivial dari daftar tersebut.

Jawaban. *Rubrik.* Jawaban lengkap memberikan suatu himpunan yang komplementnya berada dalam τ dan menjelaskan kekompakannya melalui keberhinggaan. Sebagai contoh, $\{d\}$ kompak dan tertutup karena

$$X \setminus \{d\} = \{a, b, c\} \in \tau.$$

Solusi. Komplemen anggota-anggota τ memberi seluruh himpunan tertutup:

$$X, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{d\}, \emptyset.$$

Setiap himpunan dalam daftar ini kompak karena merupakan subhimpunan berhingga dari X . Secara khusus, $\{d\}$ adalah contoh nontrivial: komplemennya $\{a, b, c\}$ terbuka, sehingga $\{d\}$ tertutup, dan keberhingganya menjamin kekompakan.

Panduan Belajar Mandiri: Kekompakan dan Pemetaan Kontinu

Lima belas panduan ini melanjutkan urutan sumber Bab 17. Entri pertama menutup penyelidikan tentang himpunan kompak, buka, dan tertutup; empat entri berikutnya membuktikan bahwa citra kontinu himpunan kompak tetap kompak; tujuh entri berikutnya membangun dua teorema tentang himpunan tertutup dan kekompakan; satu entri menguji batas Teorema Heine-Borel; dan dua entri terakhir memulai pembuktian teorema nilai ekstrem. Kerjakan prompt pada bab utama sebelum membuka setiap tahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan Q.11 Kekompakan Tidak Memaksa Ketertutupan. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Jika A merupakan subhimpunan kompak dari X , haruskah A tertutup? Jelaskan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap subhimpunan X kompak karena X berhingga.

Tahap 2. Pilih satu anggota τ yang komplemennya tidak tercantum dalam τ .

Tahap 3. Ingat bahwa suatu himpunan tertutup tepat ketika komplemennya terbuka.

Jawaban. Tidak. Sebagai contoh, $A = \{a\}$ berhingga sehingga kompak, tetapi $X \setminus A = \{b, c, d\} \notin \tau$. Jadi A tidak tertutup.

Solusi. Ambil $A = \{a\}$. Setiap selimut buka bagi himpunan satu titik mempunyai subselimut yang terdiri atas satu anggota, sehingga A kompak. Agar A tertutup, komplemennya $X \setminus A = \{b, c, d\}$ harus terbuka. Daftar anggota τ tidak memuat $\{b, c, d\}$, sehingga komplemen itu tidak terbuka dan A tidak tertutup. Kontraeksempel ini membuktikan bahwa kekompakan saja tidak menjamin ketertutupan.

Pemeriksaan Q.12 Memulai Bukti Kekompakan Citra. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ kontinu, dan A subhimpunan kompak dari X . Apa yang perlu ditunjukkan untuk membuktikan bahwa $f(A)$ merupakan subhimpunan kompak dari Y ? Dari mana pembuktian dimulai?

Petunjuk. *Tahap 1.* Tulis definisi kekompakan dengan $f(A)$ sebagai himpunan yang diselimuti.

Tahap 2. Karena pernyataan berlaku bagi setiap selimut buka, ambil selimut buka sebarang $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi $f(A)$.

Tahap 3. Sasaran akhirnya adalah memilih sejumlah berhingga indeks yang himpunan V_α -nya masih menyelimuti $f(A)$.

Jawaban. Ambil selimut buka sebarang $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi $f(A)$. Kita harus membuktikan bahwa terdapat indeks $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dengan $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$.

Solusi. Definisi menyatakan bahwa $f(A)$ kompak jika setiap selimut bukanya mempunyai subselimut berhingga. Karena itu, tetapkan keluarga sebarang $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dengan setiap V_α terbuka dalam Y dan

$$f(A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha.$$

Yang harus dihasilkan adalah himpunan indeks berhingga $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ yang memenuhi $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Kekompakan yang diketahui berada pada A , jadi langkah berikutnya harus mengubah $\mathcal{V}$ menjadi selimut buka bagi A .

Pemeriksaan Q.13 Menarik Selimut Buka melalui Prapeta. Misalkan (X, τ_X) dan (Y, τ_Y) ruang topologi, $f : X \rightarrow Y$ kontinu, $A \subseteq X$ kompak, dan $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ selimut buka bagi $f(A)$ dalam Y . Bagaimana kita dapat menemukan selimut buka $\{U_\alpha\}$ bagi A ? Verifikasikan bahwa keluarga yang diusulkan benar-benar merupakan selimut buka bagi A .

Petunjuk. *Tahap 1.* Definisikan $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$.

Tahap 2. Gunakan kekontinuan f untuk membuktikan bahwa setiap U_α terbuka dalam X .

Tahap 3. Untuk $a \in A$, letakkan $f(a)$ dalam salah satu anggota selimut $f(A)$, lalu tarik kembali ke a .

Jawaban. Ambil $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Setiap U_α terbuka karena f kontinu. Jika $a \in A$, maka $f(a) \in V_\alpha$ untuk suatu α , sehingga $a \in U_\alpha$. Jadi keluarga prapeta itu menyelimuti A .

Solusi. Untuk setiap $\alpha \in I$, definisikan $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Karena V_α terbuka dalam Y dan f kontinu, U_α terbuka dalam X .

Ambil $a \in A$. Titik $f(a)$ berada dalam $f(A)$, sedangkan keluarga $\{V_\alpha\}$ menyelimuti $f(A)$. Jadi ada $\alpha \in I$ dengan $f(a) \in V_\alpha$. Menurut definisi prapeta, ini ekuivalen dengan $a \in f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha$. Karena berlaku untuk setiap $a \in A$, diperoleh $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Maka $\{U_\alpha\}$ benar-benar selimut buka bagi A .

Pemeriksaan Q.14 Menggunakan Kekompakan Domain. Dalam situasi entri sebelumnya, apa yang diketahui tentang setiap selimut buka bagi A , khususnya keluarga $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$?

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan hipotesis bahwa A kompak.

Tahap 2. Pilih indeks berhingga $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Tahap 3. Tuliskan pernyataan penyalutan yang dihasilkan untuk A .

Jawaban. Kekompakan A menghasilkan indeks $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$.

Solusi. Keluarga $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ telah dibuktikan sebagai selimut buka bagi A . Karena A kompak, keluarga itu mempunyai subselimut berhingga. Jadi terdapat $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ dengan

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i}).$$

Kesimpulan ini masih dinyatakan di domain; langkah terakhir adalah mengembalikannya kepada selimut semula di kodomain.

Pemeriksaan Q.15 Citra Kontinu Himpunan Kompak. Lengkapilah bukti: jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu dan A subhimpunan kompak dari X , maka $f(A)$ merupakan subhimpunan kompak dari Y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Mulai dengan selimut buka sebarang $\{V_\alpha\}$ bagi $f(A)$.

Tahap 2. Tarik selimut itu melalui f^{-1} dan gunakan kekompakan A untuk memilih prapeta berhingga.

Tahap 3. Jika $y \in f(A)$, tulis $y = f(a)$ dan gunakan keanggotaan a dalam salah satu prapeta terpilih.

Jawaban. Prapeta selimut buka sebarang bagi $f(A)$ adalah selimut buka bagi A . Subselimut berhingga prapeta yang diberikan oleh kekompakan A menentukan subselimut berhingga dari selimut semula bagi $f(A)$. Jadi $f(A)$ kompak.

Solusi. Ambil selimut buka sebarang $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi $f(A)$. Kekontinuan f membuat setiap $f^{-1}(V_\alpha)$ terbuka dalam X . Selain itu, keluarga prapeta tersebut menyelimuti A : bagi $a \in A$, titik $f(a)$ berada dalam suatu V_α , jadi $a \in f^{-1}(V_\alpha)$.

Karena A kompak, terdapat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dengan $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$. Ambil $y \in f(A)$ dan pilih $a \in A$ dengan $y = f(a)$. Titik a berada dalam suatu $f^{-1}(V_{\alpha_i})$, sehingga $y = f(a) \in V_{\alpha_i}$. Maka $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Kita telah memperoleh subselimut berhingga dari selimut buka sebarang, sehingga $f(A)$ kompak.

Pemeriksaan Q.16 Sasaran Bukti Ketertutupan. Misalkan A subhimpunan kompak dari ruang topologi Hausdorff X . Untuk membuktikan bahwa A tertutup, kita mempertimbangkan $X \setminus A$. Sifat apa yang harus dimiliki $X \setminus A$, dan bagaimana sifat itu dapat dibuktikan?

Petunjuk. Tahap 1. Gunakan definisi himpunan tertutup melalui komplementnya.

Tahap 2. Untuk menunjukkan suatu himpunan terbuka, ambil titik sebarang $x \in X \setminus A$.

Tahap 3. Sasaran lokalnya adalah membangun himpunan buka O_x dengan $x \in O_x \subseteq X \setminus A$.

Jawaban. Kita harus menunjukkan bahwa $X \setminus A$ terbuka. Caranya, untuk setiap $x \in X \setminus A$, bangun lingkungan buka O_x yang memuat x dan tidak beririsan dengan A .

Solusi. Berdasarkan definisi, A tertutup jika dan hanya jika $X \setminus A$ terbuka. Suatu subhimpunan $G \subseteq X$ terbuka jika setiap $x \in G$ mempunyai lingkungan buka yang termuat dalam G . Maka ambil $x \in X \setminus A$ sebarang. Cukup menemukan himpunan buka O_x sedemikian sehingga

$$x \in O_x \subseteq X \setminus A,$$

atau ekuivalen dengan itu, $O_x \cap A = \emptyset$. Sifat Hausdorff akan memisahkan x dari setiap titik A , dan kekompakan akan mereduksi semua pemisahan itu menjadi sejumlah berhingga.

Pemeriksaan Q.17 Memisahkan Titik dari Setiap Titik Himpunan Kompak. Misalkan A subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff X , $x \in X \setminus A$, dan andaikan A tak kosong. Mengapa pengandaian tak kosong boleh dibuat? Untuk setiap $a \in A$, mengapa terdapat himpunan buka saling lepas O_{xa} dan O_a dengan $x \in O_{xa}$ dan $a \in O_a$?

Petunjuk. Tahap 1. Tangani dahulu kasus $A = \emptyset$.

Tahap 2. Karena $x \notin A$, berlaku $x \neq a$ untuk setiap $a \in A$.

Tahap 3. Terapkan definisi Hausdorff kepada pasangan titik berbeda x dan a .

Jawaban. Jika $A = \emptyset$, maka A sudah tertutup karena komplementnya X terbuka. Jika $A \neq \emptyset$, setiap $a \in A$ berbeda dari x ; sifat Hausdorff memberi lingkungan buka saling lepas $O_{xa} \ni x$ dan $O_a \ni a$.

Solusi. Kasus $A = \emptyset$ tidak memerlukan konstruksi: himpunan kosong tertutup dalam setiap ruang topologi karena $X \setminus \emptyset = X$ terbuka. Karena itu kita boleh melanjutkan dengan asumsi $A \neq \emptyset$.

Tetapkan $a \in A$. Dari $x \in X \setminus A$ diperoleh $x \neq a$. Ruang X Hausdorff, sehingga untuk dua titik berbeda tersebut terdapat himpunan buka O_{xa} dan O_a yang memenuhi

$$x \in O_{xa}, \quad a \in O_a, \quad \text{dan} \quad O_{xa} \cap O_a = \emptyset.$$

Konstruksi ini dapat dilakukan untuk setiap $a \in A$.

Pemeriksaan Q.18 Mereduksi Pemisahan dengan Kekompakan. Dalam konstruksi sebelumnya, mengapa terdapat bilangan bulat positif n dan titik $a_1, \dots, a_n \in A$ sedemikian sehingga $O_{a_1}, \dots, O_{a_n}$ membentuk selimut buka bagi A ?

Petunjuk. Tahap 1. Setiap $a \in A$ berada dalam himpunan buka O_a .

Tahap 2. Karena itu, $\{O_a \mid a \in A\}$ adalah selimut buka bagi A .

Tahap 3. Terapkan kekompakan A kepada selimut ini.

Jawaban. Keluarga $\{O_a \mid a \in A\}$ menyelimuti A . Karena A kompak, terdapat subselimut berhingga $O_{a_1}, \dots, O_{a_n}$.

Solusi. Untuk setiap $a \in A$, konstruksi Hausdorff menghasilkan himpunan buka O_a yang memuat a . Maka

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} O_a,$$

sehingga keluarga $\{O_a \mid a \in A\}$ merupakan selimut buka bagi A . Kekompakan A menjamin adanya subselimut berhingga. Jadi ada $a_1, \dots, a_n \in A$ dengan $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{a_i}$. Karena pada tahap ini A diasumsikan tak kosong, kita dapat mengambil $n \in \mathbb{Z}^+$.

Pemeriksaan Q.19 Himpunan Kompak dalam Ruang Hausdorff Tertutup. Dengan notasi sebelumnya, carilah subhimpunan terbuka dari $X \setminus A$ yang memuat x . Apa yang dapat disimpulkan mengenai A ?

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan irisan berhingga $O_x = \bigcap_{i=1}^n O_{xa_i}$.

Tahap 2. Untuk $y \in A$, pilih i dengan $y \in O_{a_i}$ dan gunakan $O_{xa_i} \cap O_{a_i} = \emptyset$.

Tahap 3. Simpulkan bahwa setiap titik komplemen mempunyai lingkungan buka di dalam komplemen.

Jawaban. Himpunan $O_x = \bigcap_{i=1}^n O_{xa_i}$ terbuka, memuat x , dan tidak beririsan dengan A . Jadi $X \setminus A$ terbuka dan A tertutup.

Solusi. Definisikan

$$O_x = \bigcap_{i=1}^n O_{xa_i}.$$

Ini merupakan irisan berhingga himpunan buka, sehingga terbuka, dan setiap O_{xa_i} memuat x , sehingga $x \in O_x$.

Ambil $y \in A$. Karena $O_{a_1}, \dots, O_{a_n}$ menyelubungi A , ada i dengan $y \in O_{a_i}$. Di sisi lain, $O_x \subseteq O_{xa_i}$ dan $O_{xa_i} \cap O_{a_i} = \emptyset$. Maka $y \notin O_x$. Jadi $O_x \cap A = \emptyset$, atau $O_x \subseteq X \setminus A$.

Titik $x \in X \setminus A$ dipilih sebarang, sehingga setiap titik komplemen memiliki lingkungan buka di dalam komplemen. Maka $X \setminus A$ terbuka dan A tertutup. Dengan demikian, setiap subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff merupakan himpunan tertutup.

Pemeriksaan Q.20 Memulai Bukti Kekompakan Subhimpunan Tertutup. Misalkan X ruang topologi kompak dan C subhimpunan tertutup dari X . Apa yang perlu dilakukan untuk membuktikan bahwa C kompak?

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan definisi kekompakan untuk C .

Tahap 2. Ambil selimut buka sebarang $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi C .

Tahap 3. Sasaran akhirnya adalah memilih sejumlah berhingga anggota keluarga itu yang masih menyelubungi C .

Jawaban. Ambil selimut buka sebarang $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi C dan buktikan bahwa selimut tersebut mempunyai subselimut berhingga.

Solusi. Untuk membuktikan kekompakan, kita tidak boleh memilih selimut yang khusus. Ambil keluarga sebarang $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ yang setiap anggotanya terbuka dalam X dan memenuhi $C \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Kita harus menghasilkan indeks berhingga $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dengan $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Kekompakan yang diketahui adalah kekompakan X , sehingga selimut bagi C perlu diperluas menjadi selimut bagi X .

Pemeriksaan Q.21 Memperluas Selimut dari Himpunan Tertutup. Misalkan $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ selimut buka bagi subhimpunan tertutup C dari ruang kompak X . Gunakan selimut tersebut dan fakta bahwa C tertutup untuk membuat selimut buka bagi X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena C tertutup, $X \setminus C$ terbuka.

Tahap 2. Tambahkan $X \setminus C$ kepada keluarga $\{U_\alpha\}$.

Tahap 3. Periksa secara terpisah titik yang berada dalam C dan titik yang berada di luar C .

Jawaban. Keluarga $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus C\}$ merupakan selimut buka bagi X .

Solusi. Karena C tertutup dalam X , komplementnya $X \setminus C$ terbuka. Setiap $x \in C$ berada dalam suatu U_α karena keluarga semula menyelubungi C . Setiap $x \in X \setminus C$ berada dalam anggota tambahan $X \setminus C$. Maka semua anggota keluarga

$$\mathcal{V} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus C\}$$

terbuka dan gabungannya memuat seluruh X . Jadi $\mathcal{V}$ adalah selimut buka bagi X .

Pemeriksaan Q.22 Subhimpunan Tertutup dari Ruang Kompak. Gunakan fakta bahwa X kompak untuk menyelesaikan bukti bahwa setiap subhimpunan tertutup C dari X kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Terapkan kekompakan X kepada selimut $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus C\}$.

Tahap 2. Hapus $X \setminus C$ dari subselimut berhingga yang diperoleh, jika himpunan itu terpilih.

Tahap 3. Jelaskan mengapa anggota U_α yang tersisa masih menyelimuti setiap titik C .

Jawaban. Kekompakan X memberi subselimut berhingga dari keluarga yang diperluas. Setelah $X \setminus C$ dibuang, anggota-anggota U_α yang tersisa tetap menyelimuti C . Jadi C kompak.

Solusi. Ambil selimut buka sebarang $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bagi C . Keluarga $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus C\}$ adalah selimut buka bagi X . Karena X kompak, ada subselimut berhingga. Anggota-anggota subselimut itu selain mungkin $X \setminus C$ dapat ditulis $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$.

Himpunan $X \setminus C$ tidak memuat satu pun titik C . Karena subselimut berhingga tadi menyelimuti X , setiap titik C harus termuat dalam salah satu U_{α_i} . Jadi $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Jika $C = \emptyset$, subkeluarga kosong juga cukup. Dengan demikian setiap selimut buka bagi C mempunyai subselimut berhingga, sehingga C kompak.

Pemeriksaan Q.23 Tertutup dan Terbatas Tidak Selalu Kompak. Subhimpunan A dari ruang metrik (X, d) disebut terbatas jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $d(a_1, a_2) \leq M$ untuk semua $a_1, a_2 \in A$. Jelaskan mengapa $\mathbb{Z}$, sebagai subhimpunan dari $(\mathbb{R}, d)$ dengan d metrik diskret, tertutup dan terbatas, tetapi tidak kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam metrik diskret, $B(x, 1/2) = \{x\}$; simpulkan sifat topologi setiap subhimpunan.

Tahap 2. Untuk dua titik berbeda, jarak diskretnya 1; pilih batas seragam bagi semua pasangan titik $\mathbb{Z}$.

Tahap 3. Selimuti $\mathbb{Z}$ dengan semua himpunan satu titik dan periksa subkeluarga berhingga.

Jawaban. Topologi metrik diskret membuat setiap subhimpunan terbuka dan tertutup, jadi $\mathbb{Z}$ tertutup. Semua jarak antartitik paling besar 1, jadi $\mathbb{Z}$ terbatas. Namun selimut buka $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga; maka $\mathbb{Z}$ tidak kompak.

Solusi. Untuk metrik diskret, $d(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d(x, y) = 1$ jika $x \neq y$. Karena $B(x, 1/2) = \{x\}$, setiap himpunan satu titik terbuka, sehingga setiap subhimpunan merupakan gabungan himpunan-himpunan satu titik dan terbuka. Komplemen setiap subhimpunan juga terbuka. Khususnya, $\mathbb{Z}$ tertutup dalam $(\mathbb{R}, d)$.

Untuk semua $m, n \in \mathbb{Z}$, berlaku $d(m, n) \leq 1$. Jadi definisi keterbatasan dipenuhi dengan $M = 1$. Di sisi lain, keluarga $\mathcal{U} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ terdiri atas himpunan-himpunan buka dan menyelimuti $\mathbb{Z}$. Setiap subkeluarga berhingga hanya menyelimuti sejumlah berhingga bilangan bulat, bukan seluruh $\mathbb{Z}$. Maka $\mathcal{U}$ tidak mempunyai subselimut berhingga dan $\mathbb{Z}$ tidak kompak. Jadi pencirian Heine-Borel tidak berlaku untuk semua ruang metrik.

Pemeriksaan Q.24 Kekompakan Citra Fungsi Bernilai Real. Misalkan X ruang topologi kompak tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu. Apa yang dapat disimpulkan dari kekontinuan f mengenai $f(X)$ dalam $\mathbb{R}$?

Petunjuk. *Tahap 1.* Terapkan teorema bahwa citra kontinu himpunan kompak bersifat kompak.

Tahap 2. Gunakan ketakosongan X untuk menentukan apakah $f(X)$ kosong.

Tahap 3. Di $\mathbb{R}$, gunakan Teorema Heine-Borel untuk menerjemahkan kekompakan menjadi sifat tertutup dan terbatas.

Jawaban. Himpunan $f(X)$ kompak dan tak kosong. Oleh Teorema Heine-Borel, $f(X)$ tertutup dan terbatas dalam $\mathbb{R}$.

Solusi. Ruang X kompak dan f kontinu, sehingga teorema citra kontinu himpunan kompak menunjukkan bahwa $f(X)$ kompak dalam $\mathbb{R}$. Karena $X \neq \emptyset$, pilih $x_0 \in X$; kemudian $f(x_0) \in f(X)$, jadi $f(X) \neq \emptyset$. Teorema Heine-Borel pada $\mathbb{R}$ menyatakan bahwa himpunan kompak tepat himpunan tertutup dan terbatas. Maka $f(X)$ tertutup dan terbatas.

Pemeriksaan Q.25 Supremum Citra Dicapai. Dalam situasi sebelumnya, mengapa $f(X)$ memiliki batas atas terkecil M ? Mengapa M harus merupakan unsur $f(X)$?

Petunjuk. *Tahap 1.* Himpunan $f(X)$ tak kosong dan terbatas di atas; gunakan sifat kelengkapan $\mathbb{R}$.

Tahap 2. Jika $M = \sup f(X)$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $y \in f(X)$ dengan $M - \varepsilon < y \leq M$.

Tahap 3. Jadi M berada dalam penutupan $f(X)$; gunakan ketertutupan $f(X)$.

Jawaban. Ketakosongan dan keterbatasan $f(X)$ menjamin adanya $M = \sup f(X)$. Sifat supremum membuat setiap lingkungan M beririsan dengan $f(X)$, sehingga $M \in \overline{f(X)}$. Karena $f(X)$ tertutup, $M \in f(X)$.

Solusi. Himpunan $f(X)$ tak kosong dan terbatas, khususnya terbatas di atas. Sifat batas atas terkecil bilangan real menghasilkan $M = \sup f(X) \in \mathbb{R}$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, bilangan $M - \varepsilon$ bukan batas atas bagi $f(X)$; jika ia batas atas, keminimalan M akan gagal. Maka terdapat $y_\varepsilon \in f(X)$ dengan $M - \varepsilon < y_\varepsilon \leq M$. Jadi setiap lingkungan buka dari M memuat titik $f(X)$, sehingga $M \in \overline{f(X)}$. Himpunan $f(X)$ tertutup, jadi sama dengan penutupannya. Oleh sebab itu $M \in f(X)$; ekuivalen, ada $x_M \in X$ dengan $f(x_M) = M$.

Panduan Belajar Mandiri: Nilai Ekstrem, Fraktal, dan Latihan Kekompakan

Empat belas panduan ini mencakup kejadian prompt sumber 26 sampai 40. Tujuh panduan pertama menutup teorema nilai ekstrem dan mengembangkan metrik Hausdorff serta konstruksi segitiga Sierpinski. Tujuh panduan berikutnya memulai latihan bab tentang topologi indiskret, perbandingan topologi, dan operasi himpunan pada subhimpunan kompak. Kejadian sumber ke-34 merupakan duplikat kejadian ke-33, sehingga keduanya diwakili oleh satu entri kanonis o003-c90-ch17-exer-a-01.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan Q.26 Melengkapi Teorema Nilai Ekstrem. Misalkan X ruang topologi kompak tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu. Lengkapilah bukti bahwa f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan kekontinuan untuk menunjukkan bahwa $f(X)$ kompak dan gunakan ketakosongan X .

Tahap 2. Terapkan Teorema Heine–Borel dan sifat kelengkapan $\mathbb{R}$ kepada $f(X)$.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa supremum dan infimum $f(X)$ berada dalam $f(X)$, lalu tarik keduanya kembali ke titik-titik domain.

Jawaban. Citra $f(X)$ kompak dan tak kosong, sehingga tertutup dan terbatas dalam $\mathbb{R}$. Supremum serta infimumnya ada dan, karena $f(X)$ tertutup, keduanya merupakan anggota $f(X)$. Jadi f mencapai maksimum dan minimumnya.

Solusi. Karena X kompak dan f kontinu, teorema citra kontinu himpunan kompak menyatakan bahwa $f(X)$ kompak dalam $\mathbb{R}$. Ketakosongan X memberi suatu $x_0 \in X$, sehingga $f(x_0) \in f(X)$ dan $f(X)$ tak kosong. Menurut Teorema Heine–Borel, $f(X)$ tertutup dan terbatas.

Karena $f(X)$ tak kosong dan terbatas di atas, bilangan $M = \sup f(X)$ ada. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, sifat supremum memberi $y_\varepsilon \in f(X)$ dengan $M - \varepsilon < y_\varepsilon \leq M$. Maka setiap lingkungan M beririsan dengan $f(X)$, sehingga $M \in \overline{f(X)} = f(X)$. Ada $x_M \in X$ dengan $f(x_M) = M$, dan nilai ini merupakan maksimum f .

Dengan cara yang sama, keterbatasan di bawah menghasilkan $m = \inf f(X)$. Sifat infimum menunjukkan $m \in \overline{f(X)} = f(X)$, sehingga ada $x_m \in X$ dengan $f(x_m) = m$. Jadi f mencapai nilai maksimum dan minimum.

Pemeriksaan Q.27 Jarak Terarah Tidak Simetris. Untuk subhimpunan kompak tak kosong A, B dari ruang metrik, definisikan $d(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b)$. Berikan contoh subhimpunan kompak $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan metrik Euklides yang memenuhi $d(A, B) \neq d(B, A)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Cukup bekerja dalam $\mathbb{R}$.

Tahap 2. Pilih satu himpunan yang termuat secara sejati dalam himpunan lainnya.

Tahap 3. Coba $A = \{0\}$ dan $B = \{0, 1\}$, lalu hitung kedua maksimum secara langsung.

Jawaban. Ambil $A = \{0\}$ dan $B = \{0, 1\}$ dalam $\mathbb{R}$. Maka $d(A, B) = 0$, sedangkan $d(B, A) = 1$.

Solusi. Kedua himpunan berhingga, sehingga kompak. Untuk satu-satunya titik $0 \in A$, jaraknya ke B adalah $\min\{|0 - 0|, |0 - 1|\} = 0$. Karena itu $d(A, B) = 0$.

Sebaliknya, jarak titik $0 \in B$ ke A adalah 0, sedangkan jarak titik $1 \in B$ ke A adalah 1. Oleh sebab itu

$$d(B, A) = \max\{0, 1\} = 1.$$

Jadi jarak terarah ini tidak simetris.

Pemeriksaan Q.28 Menghitung Tiga Jarak Hausdorff. Dalam $\mathbb{R}^2$, misalkan A lingkaran satuan berpusat di titik asal, B garis luar persegi tersisip dengan titik sudut $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$, dan $C = \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Untuk $h(P, Q) = \max\{d(P, Q), d(Q, P)\}$, tentukan $h(A, B)$, $h(A, C)$, dan $h(B, C)$. Verifikasikan $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena $C \subseteq A \cap B$, dua dari jarak terarah menuju A atau B langsung bernilai nol.

Tahap 2. Pada setiap kuadran, sisi B terletak pada garis berbentuk $\pm x \pm y = 1$; titik terjauh antara lingkaran dan sisi terjadi pada arah diagonal.

Tahap 3. Untuk jarak menuju C , periksa titik $(0, 1)$ dan $(0, -1)$.

Jawaban. Nilainya adalah $h(A, B) = 1 - 1/\sqrt{2}$, $h(A, C) = \sqrt{2}$, dan $h(B, C) = \sqrt{2}$. Karena itu $\sqrt{2} \leq (1 - 1/\sqrt{2}) + \sqrt{2}$.

Solusi. Di kuadran pertama, sisi persegi adalah ruas $x + y = 1$. Untuk $(x, y) \in A$ di kuadran itu, jaraknya ke ruas tersebut adalah $(x + y - 1)/\sqrt{2}$; nilai maksimum terjadi saat $x = y = 1/\sqrt{2}$ dan sama dengan $1 - 1/\sqrt{2}$. Dengan simetri, ini memberi $d(A, B) = 1 - 1/\sqrt{2}$. Titik pada sisi persegi yang terjauh dari lingkaran adalah titik tengah sisi, yang berjari-jari $1/\sqrt{2}$; jaraknya ke lingkaran juga $1 - 1/\sqrt{2}$. Jadi $h(A, B) = 1 - 1/\sqrt{2}$.

Karena $C \subseteq A$, berlaku $d(C, A) = 0$. Untuk $(x, y) \in A$, kuadrat jarak ke titik $(1, 0)$ dan $(-1, 0)$ masing-masing adalah $2 - 2x$ dan $2 + 2x$. Jarak yang lebih kecil mempunyai kuadrat $2 - 2|x|$, yang maksimum saat $x = 0$. Maka $d(A, C) = \sqrt{2}$ dan $h(A, C) = \sqrt{2}$.

Demikian pula $C \subseteq B$, sehingga $d(C, B) = 0$. Titik-titik $(0, \pm 1)$ pada B berjarak $\sqrt{2}$ dari titik terdekat dalam C , dan tidak ada titik pada keempat sisi yang berjarak lebih besar. Jadi $h(B, C) = \sqrt{2}$. Akhirnya,

$$h(A, C) = \sqrt{2} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} = h(A, B) + h(B, C).$$

Pemeriksaan Q.29 Jarak Hausdorff Merupakan Metrik. Misalkan (X, d) ruang metrik dan $\mathcal{H}(X)$ koleksi semua subhimpunan kompak tak kosong dari X . Untuk $A, B \in \mathcal{H}(X)$, tetapkan

$$d(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \quad h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Buktikan bahwa h adalah metrik pada $\mathcal{H}(X)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Nonnegativitas dan simetri mengikuti definisi; untuk pemisahan, gunakan fakta bahwa subhimpunan kompak ruang metrik tertutup.

Tahap 2. Untuk $a \in A$, pilih $b \in B$ yang mencapai jarak dari a ke B .

Tahap 3. Buktikan ketaksamaan terarah $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, lalu ulangi dengan arah terbalik dan ambil maksimum.

Jawaban. *Rubrik.* Bukti lengkap harus memverifikasi nonnegativitas, simetri, sifat $h(A, B) = 0 \iff A = B$, dan ketaksamaan segitiga. Pada langkah terakhir, kedua ketaksamaan terarah harus digabungkan, bukan mengasumsikan $d(A, B)$ simetris.

Solusi. Jelas $h(A, B) \geq 0$ dan $h(A, B) = h(B, A)$. Jika $A = B$, setiap titik mempunyai jarak nol ke himpunan yang sama, sehingga $h(A, B) = 0$. Sebaliknya, andaikan $h(A, B) = 0$. Untuk setiap $a \in A$,

berlaku $\min_{b \in B} d(a, b) = 0$. Karena B kompak, minimum itu dicapai; maka ada $b \in B$ dengan $d(a, b) = 0$, sehingga $a = b$ dan $A \subseteq B$. Argumen yang sama dari $d(B, A) = 0$ memberi $B \subseteq A$. Jadi $A = B$.

Sekarang ambil $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Untuk setiap $a \in A$, kekompakan B memberi $b_a \in B$ dengan $d(a, b_a) = \min_{b \in B} d(a, b)$. Ketaksamaan segitiga pada X memberi

$$d(a, C) \leq d(a, b_a) + d(b_a, C) \leq d(a, B) + d(B, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Mengambil maksimum terhadap $a \in A$ menghasilkan $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

Dengan menukar arah diperoleh $d(C, A) \leq d(C, B) + d(B, A)$. Kedua ruas kanan masing-masing tidak melebihi $h(A, B) + h(B, C)$. Karena itu

$$h(A, C) = \max\{d(A, C), d(C, A)\} \leq h(A, B) + h(B, C).$$

Semua aksioma metrik telah terpenuhi.

Pemeriksaan Q.30 Jarak Antaraproksimasi Segitiga Sierpinski. Misalkan S_0 garis luar segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1. Pada setiap tahap, terapkan tiga kontraksi berfaktor $1/2$ yang menempatkan salinan pada ketiga titik sudut, dan tetapkan S_{k+1} sebagai gabungan ketiga citra S_k . Tentukan $h(S_0, S_1)$ dan, untuk setiap $k \in \mathbb{Z}^+$, tentukan $h(S_k, S_{k+1})$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Perhatikan bahwa $S_k \subseteq S_{k+1}$, sehingga hanya jarak dari garis baru menuju S_k yang perlu dihitung.

Tahap 2. Pada tahap pertama, titik terjauh pada setiap sisi segitiga tengah adalah titik tengah sisi itu.

Tahap 3. Setiap tahap berikutnya merupakan salinan berskala 2^{-k} dari geometri tahap pertama.

Jawaban. Berlaku $h(S_0, S_1) = \sqrt{3}/8$ dan $h(S_k, S_{k+1}) = \sqrt{3}/2^{k+3}$ untuk $k \geq 0$.

Solusi. Ketiga salinan setengah ukuran mempertahankan seluruh batas luar S_0 dan menambahkan tiga sisi segitiga tengah. Jadi $S_0 \subseteq S_1$ dan $d(S_0, S_1) = 0$. Tinggi segitiga sama sisi bersisi 1 adalah $\sqrt{3}/2$. Pada salah satu sisi segitiga tengah, jarak menuju batas luar paling besar di titik tengah sisi tersebut. Jarak titik itu ke salah satu dari dua sisi luar terdekat adalah $\sqrt{3}/8$. Dengan simetri, tidak ada titik baru yang lebih jauh. Maka $d(S_1, S_0) = \sqrt{3}/8$ dan $h(S_0, S_1) = \sqrt{3}/8$.

Secara induktif $S_k \subseteq S_{k+1}$. Perbedaan baru pada tahap $k+1$ muncul di dalam segitiga-segitiga bersisi 2^{-k} . Geometrinya sebangun dengan tahap pertama dengan faktor skala 2^{-k} . Jarak Hausdorff ikut berskala linear, sehingga

$$h(S_k, S_{k+1}) = 2^{-k} \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2^{k+3}}.$$

Rumus ini juga menghasilkan nilai tahap pertama ketika $k = 0$.

Pemeriksaan Q.31 Barisan Cauchy Rasional dengan Limit Irasional. Untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, misalkan $a_n = (1 + 1/n)^n$. Setiap a_n rasional. Jelaskan mengapa suku-sukunya menjadi sedekat yang diinginkan satu sama lain tetapi barisan tersebut tidak konvergen dalam $\mathbb{Q}$. Jelaskan pula mengapa (a_n) konvergen dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan limit klasik $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$.

Tahap 2. Setiap barisan yang konvergen dalam ruang metrik merupakan barisan Cauchy; metrik pada $\mathbb{Q}$ adalah pembatasan metrik pada $\mathbb{R}$.

Tahap 3. Gunakan keirasionalan e dan keunikan limit dalam $\mathbb{R}$.

Jawaban. Barisan tersebut konvergen ke e dalam $\mathbb{R}$, sehingga Cauchy. Karena $e \notin \mathbb{Q}$, ia tidak memiliki limit dalam $\mathbb{Q}$ meskipun semua sukunya rasional.

Solusi. Ekspansi binomial menunjukkan setiap a_n rasional, dan limit klasik mendefinisikan bilangan Euler melalui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Jadi (a_n) konvergen dalam $\mathbb{R}$. Setiap barisan konvergen adalah Cauchy: untuk $\varepsilon > 0$, pilih N sehingga

$|a_n - e| < \varepsilon/2$ untuk $n \geq N$. Jika $m, n \geq N$, maka $|a_n - a_m| \leq |a_n - e| + |a_m - e| < \varepsilon$. Karena jarak pada $\mathbb{Q}$ sama dengan jarak yang diwarisi dari $\mathbb{R}$, barisan ini juga Cauchy sebagai barisan dalam $\mathbb{Q}$.

Andaikan (a_n) konvergen dalam $\mathbb{Q}$ ke suatu $q \in \mathbb{Q}$. Penyertaan $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mempertahankan jarak, sehingga barisan yang sama juga akan konvergen ke q dalam $\mathbb{R}$. Keunikan limit dalam ruang metrik memaksa $q = e$, bertentangan dengan fakta bahwa e irasional. Maka $\mathbb{Q}$ tidak memuat limit barisan Cauchy ini, sedangkan $\mathbb{R}$ memuatnya.

Pemeriksaan Q.32 Barisan Aproksimasi Sierpinski Bersifat Cauchy. Dengan konstruksi (S_n) sebelumnya dan metrik Hausdorff h , tunjukkan bahwa (S_n) merupakan barisan Cauchy dalam $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Gunakan fakta bahwa $h(S_k, S_{k+1}) = \sqrt{3}/2^{k+3}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $m > n$, terapkan ketaksamaan segitiga berulang kali sepanjang $S_n, S_{n+1}, \dots, S_m$.

Tahap 2. Batasi jumlah yang diperoleh dengan ekor deret geometri tak hingga.

Tahap 3. Pilih N sehingga batas ekor tersebut lebih kecil daripada ε .

Jawaban. Untuk $m > n$, $h(S_n, S_m) < \sqrt{3}/2^{n+2}$. Batas ini menuju nol ketika $n \rightarrow \infty$, sehingga (S_n) merupakan barisan Cauchy.

Solusi. Jika $m > n$, ketaksamaan segitiga untuk metrik Hausdorff memberi

$$h(S_n, S_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} h(S_k, S_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\sqrt{3}}{2^{k+3}}.$$

Jumlah berhingga ini lebih kecil daripada ekor deret geometri tak hingga:

$$h(S_n, S_m) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2^{k+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+2}}.$$

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih N sedemikian sehingga $\sqrt{3}/2^{N+2} < \varepsilon$. Untuk setiap $m, n \geq N$, andaikan tanpa kehilangan keumuman bahwa $m > n$; ketaksamaan di atas memberi $h(S_n, S_m) < \varepsilon$. Kasus $m = n$ langsung. Jadi (S_n) Cauchy dalam $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Kelengkapan ruang ini kemudian menjamin adanya limit kompak, yaitu segitiga Sierpinski.

Pemeriksaan Q.33 Subhimpunan Kompak dalam Topologi Indiskret. Tentukan semua subhimpunan kompak dari ruang topologi X dengan topologi indiskret $\{\emptyset, X\}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Tangani subhimpunan kosong secara terpisah.

Tahap 2. Jika $A \neq \emptyset$, tentukan satu-satunya himpunan buka yang dapat memuat titik A .

Tahap 3. Periksa apa yang wajib termuat dalam setiap selimut buka bagi A .

Jawaban. Setiap subhimpunan $A \subseteq X$ kompak dalam topologi indiskret.

Solusi. Himpunan kosong kompak karena subkeluarga kosong merupakan subselimut berhingga bagi setiap selimutnya. Sekarang ambil $A \subseteq X$ tak kosong dan suatu selimut buka $\mathcal{U}$ bagi A . Dalam topologi indiskret, satu-satunya himpunan buka tak kosong adalah X . Karena selimut harus memuat setiap titik A , keluarga $\mathcal{U}$ harus memuat X . Subkeluarga satu anggota $\{X\}$ menyelimuti A . Jadi setiap subhimpunan X kompak.

Pemeriksaan Q.34 Kekompakan pada Topologi yang Lebih Halus atau Lebih Kasar. Misalkan τ_1 dan τ_2 topologi pada himpunan X dengan $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Tentukan implikasi yang benar antara kekompakan (X, τ_1) dan kekompakan (X, τ_2) , dan berikan alasan atau kontraeksempl untuk setiap arah.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap himpunan τ_1 -buka juga τ_2 -buka.

Tahap 2. Mulailah dari selimut yang memiliki lebih sedikit kemungkinan anggota buka.

Tahap 3. Untuk menyangkal arah sebaliknya, bandingkan topologi indiskret dan diskret pada himpunan tak berhingga.

Jawaban. Jika (X, τ_2) kompak, maka (X, τ_1) kompak. Kebalikannya tidak selalu benar; pada himpunan

tak berhingga, topologi indiskret kompak sedangkan topologi diskret tidak kompak.

Solusi. Andaikan (X, τ_2) kompak. Setiap selimut buka $\mathcal{U}$ bagi X dalam topologi τ_1 juga merupakan selimut buka dalam τ_2 , karena $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Kekompakan terhadap τ_2 memberi subselimut berhingga dari $\mathcal{U}$. Anggota-anggota terpilih tetap τ_1 -buka, sehingga (X, τ_1) kompak.

Untuk arah sebaliknya, ambil himpunan tak berhingga X , $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, dan $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$. Topologi τ_1 lebih kasar dan (X, τ_1) kompak karena setiap selimut bagi X harus memuat X . Namun keluarga semua singleton $\{\{x\} \mid x \in X\}$ adalah selimut τ_2 -buka tanpa subselimut berhingga. Jadi kekompakan pada topologi yang lebih kasar tidak memaksa kekompakan pada topologi yang lebih halus.

Pemeriksaan Q.35 Topologi yang Ditentukan oleh Bilangan Bulat Genap. Misalkan $\mathbb{E}$ himpunan bilangan bulat genap dan $\tau = \{\mathbb{Z}\} \cup \{O \mid O \subseteq \mathbb{E}\}$. Buktikan bahwa τ adalah suatu topologi pada $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Verifikasikan bahwa $\emptyset$ dan $\mathbb{Z}$ berada dalam τ .

Tahap 2. Dalam gabungan sebarang anggota τ , pisahkan kasus ketika salah satu anggotanya adalah $\mathbb{Z}$.

Tahap 3. Gunakan pembagian kasus yang sama untuk irisan berhingga.

Jawaban. Koleksi τ memuat $\emptyset, \mathbb{Z}$, tertutup terhadap gabungan sebarang, dan tertutup terhadap irisan berhingga; jadi τ adalah topologi pada $\mathbb{Z}$.

Solusi. Karena $\emptyset \subseteq \mathbb{E}$, berlaku $\emptyset \in \tau$; menurut definisi juga $\mathbb{Z} \in \tau$. Ambil keluarga sebarang $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$. Jika suatu $U_\alpha = \mathbb{Z}$, gabungannya adalah $\mathbb{Z}$ dan berada dalam τ . Jika tidak, setiap $U_\alpha \subseteq \mathbb{E}$, maka $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subseteq \mathbb{E}$ dan gabungan itu juga anggota τ .

Untuk irisan berhingga $U_1 \cap \cdots \cap U_n$, jika semua $U_i = \mathbb{Z}$, irisannya adalah $\mathbb{Z}$. Jika setidaknya satu anggota merupakan subhimpunan $\mathbb{E}$, seluruh irisan termuat dalam anggota tersebut, sehingga merupakan subhimpunan $\mathbb{E}$ dan berada dalam τ . Jadi ketiga aksioma topologi terpenuhi.

Pemeriksaan Q.36 Menentukan Semua Subhimpunan Kompak. Dalam ruang $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan $\tau = \{\mathbb{Z}\} \cup \{O \mid O \subseteq \mathbb{E}\}$, tentukan semua subhimpunan kompak dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika suatu subhimpunan memuat bilangan ganjil, tentukan himpunan buka mana yang dapat memuat titik itu.

Tahap 2. Jika subhimpunan termuat dalam $\mathbb{E}$, topologi subruangnya bersifat diskret.

Tahap 3. Dalam ruang diskret, keluarga singleton menguji kekompakan himpunan tak berhingga.

Jawaban. Subhimpunan $A \subseteq \mathbb{Z}$ kompak tepat ketika A berhingga atau A memuat setidaknya satu bilangan ganjil.

Solusi. Jika A memuat bilangan ganjil q , satu-satunya anggota τ yang memuat q adalah $\mathbb{Z}$, sebab semua anggota lain termuat dalam $\mathbb{E}$. Maka setiap selimut buka bagi A harus memuat $\mathbb{Z}$; subkeluarga $\{\mathbb{Z}\}$ merupakan subselimut berhingga. Jadi setiap subhimpunan yang memuat bilangan ganjil kompak. Setiap subhimpunan berhingga juga kompak dalam sebarang ruang topologi.

Tersisa kasus $A \subseteq \mathbb{E}$ yang tak berhingga. Untuk setiap $a \in A$, singleton $\{a\}$ merupakan subhimpunan $\mathbb{E}$, sehingga terbuka dalam $(\mathbb{Z}, \tau)$. Keluarga $\{\{a\} \mid a \in A\}$ menyelimuti A , tetapi setiap subkeluarga berhingga hanya menyelimuti sejumlah berhingga titik. Jadi A tidak kompak. Kedua arah membuktikan pencirian tersebut.

Pemeriksaan Q.37 Irisan Dua Subhimpunan Kompak Tidak Selalu Kompak. Buktikan atau sangkal pernyataan berikut: jika A dan B adalah subhimpunan kompak dari ruang topologi X , maka $A \cap B$ juga kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pernyataan menjadi benar dalam ruang Hausdorff, jadi carilah ruang non-Hausdorff.

Tahap 2. Gunakan ruang $(\mathbb{Z}, \tau)$ dari dua panduan sebelumnya.

Tahap 3. Tambahkan bilangan ganjil yang berbeda kepada himpunan semua bilangan genap.

Jawaban. Pernyataan salah. Dalam ruang di atas, ambil $A = \mathbb{E} \cup \{1\}$ dan $B = \mathbb{E} \cup \{3\}$. Keduanya kompak, tetapi $A \cap B = \mathbb{E}$ tidak kompak.

Solusi. Gunakan $X = \mathbb{Z}$ dengan $\tau = \{\mathbb{Z}\} \cup \{O \mid O \subseteq \mathbb{E}\}$. Himpunan $A = \mathbb{E} \cup \{1\}$ memuat bilangan ganjil. Setiap selimut buka bagi A harus memuat $\mathbb{Z}$, sehingga A kompak. Argumen yang sama berlaku bagi $B = \mathbb{E} \cup \{3\}$.

Namun $A \cap B = \mathbb{E}$. Keluarga singleton $\{\{2k\} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ merupakan selimut buka bagi $\mathbb{E}$, sebab setiap singleton genap berada dalam τ . Tidak ada subkeluarga berhingga yang menyelimuti seluruh $\mathbb{E}$. Maka $\mathbb{E}$ tidak kompak, sehingga pernyataan umum tersebut tersangkal.

Pemeriksaan Q.38 Gabungan Berhingga Subhimpunan Kompak. Misalkan X ruang topologi. Buktikan bahwa gabungan dari sejumlah berhingga subhimpunan kompak dari X merupakan subhimpunan kompak dari X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Tulis gabungan sebagai $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ dan ambil selimut buka sebarang bagi K .

Tahap 2. Keluarga yang sama menyelimuti setiap K_i ; gunakan kekompakan masing-masing.

Tahap 3. Gabungkan semua subselimut berhingga yang diperoleh dan gunakan keberhinggaan jumlah indeks i .

Jawaban. Dari selimut buka bagi $K_1 \cup \dots \cup K_n$, pilih subselimut berhingga untuk setiap K_i . Gabungan dari sejumlah berhingga keluarga berhingga itu merupakan subselimut berhingga bagi seluruh gabungan.

Solusi. Misalkan $K_1, \dots, K_n$ subhimpunan kompak dari X dan $\mathcal{U}$ selimut buka sebarang bagi $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Untuk setiap i , keluarga $\mathcal{U}$ juga menyelimuti K_i . Kekompakan K_i memberi subkeluarga berhingga $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ yang menyelimuti K_i .

Keluarga $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ berhingga, karena merupakan gabungan dari sejumlah berhingga himpunan berhingga. Jika $x \in K$, maka $x \in K_i$ untuk suatu i , sehingga x termuat dalam suatu anggota $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{V}$. Jadi $\mathcal{V}$ menyelimuti K . Karena selimut awal sebarang, K kompak.

Pemeriksaan Q.39 Irisan Berhingga dalam Ruang Hausdorff. Misalkan X ruang Hausdorff. Buktikan bahwa irisan dari sejumlah berhingga subhimpunan kompak dari X merupakan subhimpunan kompak dari X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam ruang Hausdorff, setiap subhimpunan kompak tertutup.

Tahap 2. Irisan berhingga himpunan tertutup tertutup dalam X .

Tahap 3. Pandang irisan tersebut sebagai subhimpunan tertutup dari salah satu himpunan kompak.

Jawaban. Jika $K_1, \dots, K_n$ kompak, semuanya tertutup karena X Hausdorff. Irisan $K_1 \cap \dots \cap K_n$ tertutup dalam K_1 , sehingga kompak.

Solusi. Misalkan $K_1, \dots, K_n$ subhimpunan kompak dari X , dengan $n \geq 1$. Karena X Hausdorff, setiap K_i tertutup dalam X . Maka

$$K = \bigcap_{i=1}^n K_i$$

tertutup dalam X . Khususnya, $K = K_1 \cap F$ untuk $F = \bigcap_{i=2}^n K_i$ yang tertutup dalam X , sehingga K tertutup dalam subruang K_1 .

Subhimpunan tertutup dari ruang kompak bersifat kompak. Karena K_1 kompak dan K tertutup dalam K_1 , maka K kompak. Untuk $n = 1$, kesimpulan adalah hipotesis itu sendiri. Jadi setiap irisan dari sejumlah positif berhingga subhimpunan kompak bersifat kompak.

Panduan latihan Bab 17, bagian kedua

Bagian ini mencakup urutan pemetaan kanonis 41 sampai 55 tentang kekompakan. Setiap pernyataan dibuat mandiri dan disertai petunjuk bertahap, jawaban atau rubrik pembuktian ringkas, serta solusi lengkap. Bagian ini merupakan materi pendamping tidak resmi yang ditulis secara terpisah, dilisensikan dengan CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan Q.40 Subhimpunan kompak pada garis digital. Pada $\mathbb{Z}$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ definisikan

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ \{n-1, n, n+1\}, & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Topologi garis digital adalah topologi yang mempunyai $\mathcal{B} = \{B(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sebagai basis. Tentukan tepat semua subhimpunan kompak dari garis digital $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Perhatikan bahwa setiap $B(n)$ berhingga dan keluarga seluruh $B(n)$ menyelimuti $\mathbb{Z}$.

Tahap 2. Batasi selimut basis tersebut pada suatu subhimpunan tak berhingga A . Dapatkah gabungan berhingga himpunan-himpunan basis yang berhingga menyelimuti A ?

Jawaban. Subhimpunan kompak dari garis digital tepat merupakan subhimpunan-subhimpunan berhingga dari $\mathbb{Z}$.

Solusi. Setiap himpunan berhingga dalam ruang topologi apa pun kompak: dari suatu selimut buka, pilih satu anggota selimut untuk setiap titik. Jadi setiap subhimpunan berhingga dari $\mathbb{Z}$ kompak.

Sebaliknya, misalkan $A \subseteq \mathbb{Z}$ tak berhingga. Karena $n \in B(n)$ untuk setiap n , keluarga $\{A \cap B(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan selimut buka bagi A dalam topologi subruang. Setiap $B(n)$ mempunyai paling banyak tiga unsur. Oleh karena itu, gabungan berhingga anggota selimut tersebut hanya memuat berhingga banyak titik dan tidak mungkin menyelimuti A . Jadi A tidak kompak.

Pemeriksaan Q.41 Basis interval bilangan bulat yang bersarang. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, definisikan $I_n = (-n, n) \cap \mathbb{Z}$, yaitu himpunan bilangan bulat di dalam interval $(-n, n)$. Buktikan bahwa $\mathcal{B} = \{I_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan basis bagi suatu topologi τ pada $\mathbb{Z}$, dan deskripsikan topologi yang dihasilkannya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk $z \in \mathbb{Z}$, pilih $n > |z|$. Untuk dua anggota basis, hitung $I_m \cap I_n$.

Tahap 2. Keluarga $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ bersarang. Gabungan suatu subkeluarga yang indeksinya terbatas mempunyai indeks terbesar, sedangkan gabungan dengan indeks tak terbatas adalah seluruh $\mathbb{Z}$.

Jawaban. Keluarga $\mathcal{B}$ merupakan basis, dan

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{I_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Solusi. Jika $z \in \mathbb{Z}$, setiap bilangan bulat positif $n > |z|$ memenuhi $z \in I_n$. Jadi anggota-anggota $\mathcal{B}$ menyelimuti $\mathbb{Z}$. Selanjutnya,

$$I_m \cap I_n = I_{\min\{m, n\}}.$$

Maka, jika suatu titik berada dalam irisan dua anggota basis, irisan itu sendiri merupakan anggota basis yang memuat titik tersebut. Kedua syarat basis terpenuhi.

Karena himpunan-himpunan basis bersarang secara menaik, gabungan subkeluarga tak kosong dengan himpunan indeks terbatas adalah I_N , dengan N indeks terbesarnya. Jika himpunan indeksinya tak terbatas, untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$ terdapat indeks $n > |z|$, sehingga gabungannya adalah $\mathbb{Z}$. Dengan menambahkan gabungan kosong, diperoleh tepat topologi dalam jawaban.

Pemeriksaan Q.42 Kekompakan interval bilangan bulat terkecil. Pada $\mathbb{Z}$, beri topologi τ yang berbasis $I_n = (-n, n) \cap \mathbb{Z}$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Apakah $I_2 = (-2, 2) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$ kompak dalam topologi subruang? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung banyaknya unsur I_2 .

Tahap 2. Dari suatu selimut buka bagi himpunan berhingga, pilih satu anggota selimut untuk setiap titik.

Jawaban. Ya. Himpunan $I_2 = \{-1, 0, 1\}$ kompak karena berhingga.

Solusi. Misalkan $\mathcal{U}$ suatu selimut buka bagi I_2 . Pilih $U_{-1}, U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ yang masing-masing memuat $-1, 0$, dan 1 . Setelah anggota yang kebetulan sama dihapus, paling banyak tiga himpunan ini masih menyelimuti I_2 . Jadi setiap selimut buka mempunyai subselimut berhingga, sehingga I_2 kompak.

Pemeriksaan Q.43 Semua subhimpunan kompak dalam topologi interval bersarang. Pada $\mathbb{Z}$, misalkan τ mempunyai basis $I_n = (-n, n) \cap \mathbb{Z}$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Tentukan tepat semua subhimpunan kompak dari $(\mathbb{Z}, \tau)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Semua himpunan berhingga kompak.

Tahap 2. Untuk $A \subseteq \mathbb{Z}$ tak berhingga, gunakan selimut subruang $\{A \cap I_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. Setiap gabungan berhingga keluarga bersarang ini berada dalam satu I_N .

Jawaban. Subhimpunan kompak dari $(\mathbb{Z}, \tau)$ tepat merupakan subhimpunan-subhimpunan berhingga.

Solusi. Setiap subhimpunan berhingga kompak dalam topologi subruang. Sekarang misalkan $A \subseteq \mathbb{Z}$ tak berhingga. Karena setiap bilangan bulat berada dalam suatu I_n , keluarga $\{A \cap I_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti A dengan himpunan-himpunan terbuka subruang.

Untuk indeks $n_1, \dots, n_r$, ambil $N = \max\{n_1, \dots, n_r\}$. Karena keluarga I_n bersarang, gabungan anggota-anggota yang dipilih termuat dalam $A \cap I_N$. Himpunan I_N berhingga, sedangkan A tak berhingga, sehingga gabungan itu tidak menyelimuti A . Selimut tersebut tidak mempunyai subselimut berhingga; jadi A tidak kompak.

Pemeriksaan Q.44 Citra tertutup di bawah fungsi kontinu. Misalkan X ruang topologi kompak, Y ruang Hausdorff, dan $f : X \rightarrow Y$ fungsi kontinu. Buktikan bahwa untuk setiap subhimpunan tertutup $C \subseteq X$, citra $f(C)$ tertutup dalam Y . Dengan demikian, f merupakan pemetaan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan fakta bahwa subhimpunan tertutup dari ruang kompak adalah kompak.

Tahap 2. Citra kontinu dari himpunan kompak adalah kompak, dan setiap subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff adalah tertutup.

Jawaban. Rubrik pembuktian: tunjukkan berturut-turut bahwa C kompak, $f(C)$ kompak, lalu $f(C)$ tertutup dalam Y .

Solusi. Ambil sembarang subhimpunan tertutup C dari X . Karena X kompak, setiap subhimpunan tertutupnya kompak; jadi C kompak. Kekontinuan f mengakibatkan citra $f(C)$ kompak dalam Y . Karena Y Hausdorff, setiap subhimpunan kompak dari Y tertutup. Maka $f(C)$ tertutup. Hal ini berlaku untuk setiap C tertutup, sehingga f adalah pemetaan tertutup.

Pemeriksaan Q.45 Bijeksi kontinu kompak-ke-Hausdorff. Misalkan X ruang topologi kompak, Y ruang Hausdorff, dan $f : X \rightarrow Y$ bijeksi kontinu. Buktikan bahwa f merupakan homeomorfisme.

Petunjuk. *Tahap 1.* Buktikan bahwa f memetakan setiap himpunan tertutup dalam X ke himpunan tertutup dalam Y .

Tahap 2. Gunakan bijektivitas untuk menafsirkan $f(C)$ sebagai prapeta C di bawah f^{-1} .

Jawaban. Fungsi f adalah bijeksi kontinu dan pemetaan tertutup; karena itu inversnya kontinu, sehingga f merupakan homeomorfisme.

Solusi. Jika $C \subseteq X$ tertutup, maka C kompak. Citra $f(C)$ kompak karena f kontinu, dan $f(C)$ tertutup karena Y Hausdorff. Jadi f adalah pemetaan tertutup.

Karena f bijektif, invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ terdefinisi. Untuk setiap himpunan tertutup $C \subseteq X$,

$$(f^{-1})^{-1}(C) = f(C),$$

dan ruas kanan tertutup dalam Y . Dengan kriteria prapeta himpunan tertutup, f^{-1} kontinu. Jadi f dan inversnya kontinu, sehingga f adalah homeomorfisme.

Pemeriksaan Q.46 Kekompakan domain tanpa syarat Hausdorff pada kodomain. Berikan contoh ruang topologi X dan Y serta bijeksi kontinu $f : X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga X kompak, tetapi f bukan homeomorfisme. Verifikasikan semua sifat yang dinyatakan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan himpunan dua unsur. Beri domain topologi diskret dan kodomain topologi indiskret.

Tahap 2. Periksa kekompakan domain, kekontinuan fungsi identitas, dan kegagalan kekontinuan invers pada suatu singleton.

Jawaban. Ambil $X = \{0, 1\}$ dengan topologi diskret, $Y = \{0, 1\}$ dengan topologi indiskret, dan $f = \text{id}$.

Solusi. Ruang X kompak karena berhingga. Fungsi identitas $f : X \rightarrow Y$ jelas bijektif. Hanya $\emptyset$ dan Y yang terbuka dalam kodomain, dan prapetanya berturut-turut $\emptyset$ serta X , keduanya terbuka dalam domain. Jadi f kontinu.

Akan tetapi, $\{0\}$ terbuka dalam X , sedangkan $(f^{-1})^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ tidak terbuka dalam Y . Maka f^{-1} tidak kontinu dan f bukan homeomorfisme. Contoh ini juga memperlihatkan mengapa syarat Hausdorff pada kodomain diperlukan.

Pemeriksaan Q.47 Kodomain Hausdorff tanpa kekompakan domain. Berikan contoh ruang topologi X dan ruang Hausdorff Y serta bijeksi kontinu $f : X \rightarrow Y$ yang bukan homeomorfisme. Verifikasikan semua sifat yang dinyatakan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan himpunan dasar $\mathbb{R}$. Beri domain topologi diskret dan kodomain topologi Euklides.

Tahap 2. Fungsi identitas dari topologi yang lebih halus ke topologi yang lebih kasar kontinu. Uji inversnya pada singleton.

Jawaban. Ambil $X = (\mathbb{R}, \tau_{\text{diskret}})$, $Y = (\mathbb{R}, \tau_E)$, dan $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Solusi. Topologi Euklides pada Y bersifat Hausdorff. Fungsi identitas $f : X \rightarrow Y$ bijektif. Jika U terbuka dalam topologi Euklides, maka $f^{-1}(U) = U$ merupakan suatu subhimpunan $\mathbb{R}$, sehingga terbuka dalam topologi diskret. Jadi f kontinu.

Inversnya adalah fungsi identitas dari Y ke X . Singleton $\{0\}$ terbuka dalam X , tetapi prapetanya di bawah f^{-1} adalah $\{0\}$, yang tidak terbuka dalam topologi Euklides. Jadi invers tidak kontinu dan f bukan homeomorfisme. Domain diskret tak berhingga ini memang tidak kompak.

Pemeriksaan Q.48 Himpunan tertutup dalam topologi Entah-Atau. Misalkan $X = [-1, 1]$. Topologi Entah-Atau pada X didefinisikan dengan menyatakan $U \subseteq X$ terbuka jika $0 \notin U$, atau jika $(-1, 1) \subseteq U$. Deskripsikan semua subhimpunan tertutup nontrivial dari X , dengan “nontrivial” berarti selain $\emptyset$ dan X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Suatu $F \subseteq X$ tertutup tepat ketika $X \setminus F$ terbuka. Pisahkan kasus $0 \in F$ dan $0 \notin F$.

Tahap 2. Jika $0 \notin F$, komplementnya memuat 0; agar terbuka, komplement itu harus memuat seluruh $(-1, 1)$.

Jawaban. Subhimpunan tertutup nontrivial adalah semua subhimpunan sejati $F \subsetneq X$ yang memuat 0, bersama $\{-1\}$, $\{1\}$, dan $\{-1, 1\}$.

Solusi. Jika $0 \in F$, maka $0 \notin X \setminus F$. Menurut definisi topologi, setiap subhimpunan yang tidak memuat 0 terbuka, sehingga $X \setminus F$ terbuka dan F tertutup.

Jika $0 \notin F$, komplement $X \setminus F$ memuat 0. Komplement ini terbuka tepat ketika memuat $(-1, 1)$. Kondisi tersebut setara dengan $F \subseteq X \setminus (-1, 1) = \{-1, 1\}$. Jadi semua himpunan tertutup adalah semua subhimpunan yang memuat 0 bersama semua subhimpunan $\{-1, 1\}$. Setelah $\emptyset$ dan X dikeluarkan, diperoleh daftar dalam jawaban.

Pemeriksaan Q.49 Kegagalan sifat Hausdorff pada topologi Entah-Atau. Pada $X = [-1, 1]$, beri topologi Entah-Atau: suatu $U \subseteq X$ terbuka jika $0 \notin U$, atau jika $(-1, 1) \subseteq U$. Tentukan apakah X Hausdorff dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih $y \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Tahap 2. Setiap lingkungan terbuka dari 0 harus memuat seluruh $(-1, 1)$, khususnya y .

Jawaban. Tidak. Titik 0 tidak dapat dipisahkan oleh lingkungan terbuka saling lepas dari titik mana pun di $(-1, 1) \setminus \{0\}$.

Solusi. Ambil $y \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Misalkan U lingkungan terbuka dari 0. Karena $0 \in U$, alternatif pertama dalam definisi keterbukaan tidak berlaku; maka $(-1, 1) \subseteq U$, sehingga $y \in U$.

Setiap lingkungan terbuka V dari y juga memuat y . Akibatnya $y \in U \cap V$, sehingga sembarang lingkungan U dan V tersebut beririsan. Kedua titik berbeda 0 dan y tidak dapat dipisahkan oleh himpunan terbuka saling lepas. Jadi X bukan Hausdorff.

Pemeriksaan Q.50 Kekompakan topologi Entah-Atau. Pada $X = [-1, 1]$, beri topologi Entah-Atau: suatu $U \subseteq X$ terbuka jika $0 \notin U$, atau jika $(-1, 1) \subseteq U$. Tentukan apakah X kompak dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dari suatu selimut buka, pilih satu anggota yang memuat 0.

Tahap 2. Anggota itu langsung menyelimuti $(-1, 1)$. Berapa banyak titik X yang mungkin masih belum terselimuti?

Jawaban. Ya. Setiap selimut buka mempunyai subselimut dengan paling banyak tiga anggota.

Solusi. Misalkan $\mathcal{U}$ selimut buka bagi X . Karena $0 \in X$, terdapat $U_0 \in \mathcal{U}$ dengan $0 \in U_0$. Definisi topologi memaksa $(-1, 1) \subseteq U_0$. Jadi hanya kedua titik ujung -1 dan 1 yang mungkin belum terselimuti oleh U_0 .

Jika -1 belum terselimuti, pilih satu anggota $U_{-1} \in \mathcal{U}$ yang memuatnya; lakukan hal yang sama untuk 1 bila perlu. Keluarga yang terdiri dari U_0 dan paling banyak dua pilihan tambahan itu menyelimuti seluruh X . Jadi X kompak.

Pemeriksaan Q.51 Subhimpunan tak kompak dalam topologi Entah-Atau. Pada $X = [-1, 1]$, beri topologi Entah-Atau: suatu $U \subseteq X$ terbuka jika $0 \notin U$, atau jika $(-1, 1) \subseteq U$. Adakah subhimpunan X yang tidak kompak? Berikan contoh, buktikan, dan jika mungkin klasifikasikan semua subhimpunan kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Subruang $X \setminus \{0\}$ bersifat diskret, sebab setiap subhimpunannya tidak memuat 0 dan karena itu terbuka dalam X .

Tahap 2. Untuk subhimpunan yang memuat 0, ulangi argumen satu anggota selimut yang menutupi seluruh $(-1, 1)$.

Jawaban. Ya. Misalnya $(0, 1)$ tidak kompak. Secara umum, $A \subseteq X$ kompak jika dan hanya jika A berhingga atau $0 \in A$.

Solusi. Jika A berhingga, maka A kompak. Jika $0 \in A$, ambil suatu selimut buka subruang bagi A dan pilih anggota yang memuat 0. Anggota ini berasal dari himpunan terbuka di X yang memuat seluruh $(-1, 1)$; karena itu ia menyelimuti $A \cap (-1, 1)$. Hanya titik ujung -1 dan 1 yang mungkin tersisa, sehingga paling banyak dua anggota tambahan menghasilkan subselimut berhingga.

Sebaliknya, andaikan A tak berhingga dan $0 \notin A$. Setiap singleton $\{a\}$ untuk $a \in A$ tidak memuat 0, sehingga terbuka dalam X dan juga dalam A . Selimut singleton $\{\{a\} \mid a \in A\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga. Jadi A tidak kompak. Khususnya, $(0, 1)$ merupakan contoh subhimpunan tak kompak.

Pemeriksaan Q.52 Ketakkompakan garis dengan topologi K. Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$. Topologi K , dilambangkan τ_K , pada $\mathbb{R}$ mempunyai basis yang terdiri atas semua interval terbuka (a, b) dan semua $(a, b) \setminus K$, dengan $a < b$. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap interval terbuka Euklides juga terbuka dalam τ_K ; jadi topologi K lebih halus daripada topologi Euklides.

Tahap 2. Gunakan selimut $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Jawaban. Selimut buka $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti $\mathbb{R}$ tetapi tidak mempunyai subselimut berhingga.

Solusi. Setiap $(-n, n)$ adalah interval terbuka biasa, sehingga merupakan anggota basis topologi K . Keluarga $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti $\mathbb{R}$, sebab untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan bulat positif $n > |x|$.

Setiap subkeluarga berhingga mempunyai indeks terbesar N . Karena interval-interval tersebut bersarang, gabungannya hanyalah $(-N, N)$, yang tidak menyelimuti $\mathbb{R}$. Jadi $\mathcal{U}$ tidak mempunyai subselimut berhingga.

dan $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak kompak.

Pemeriksaan Q.53 Subhimpunan yang memuat K tidak kompak. Misalkan $K = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ dan beri $\mathbb{R}$ topologi K yang berbasis interval (a, b) serta himpunan $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa setiap $A \subseteq \mathbb{R}$ yang memuat K tidak kompak sebagai subruang. Simpulkan bahwa $[0, 1]$ tidak kompak dalam topologi ini meskipun tertutup dan terbatas.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan himpunan terbuka $G = \mathbb{R} \setminus K$ dan

$$O_k = \left(\frac{1}{k}, 2\right) \cup ((-1, 1) \setminus K), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Tahap 2. Setelah berhingga banyak O_k dipilih, ambil m setidaknya sebesar semua indeks yang dipilih dan uji apakah $1/m$ terselimuti.

Jawaban. Rubrik pembuktian: tunjukkan bahwa $\{A \cap G\} \cup \{A \cap O_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan selimut buka bagi A , lalu gunakan suatu $1/m \in K$ untuk menggagalkan setiap subselimut berhingga.

Solusi. Himpunan $G = \mathbb{R} \setminus K$ terbuka dalam topologi K , karena $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} ((-n, n) \setminus K)$. Setiap O_k juga terbuka: suku pertamanya adalah interval terbuka dan suku keduanya anggota basis topologi K .

Misalkan $A \supseteq K$. Titik $A \setminus K$ terselimuti oleh $A \cap G$. Untuk $1/m \in K$, pilih $k = m + 1$; karena $1/k < 1/m < 2$, titik itu berada dalam $A \cap O_k$. Jadi

$$\{A \cap G\} \cup \{A \cap O_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

merupakan selimut buka subruang bagi A .

Subkeluarga berhingga tanpa satu pun himpunan O_k jelas tidak menyelimuti K . Untuk sembarang subkeluarga berhingga lainnya, misalkan N indeks terbesar di antara himpunan-himpunan O_k yang dipilih. Pilih $m \geq N$. Titik $1/m \in K \subseteq A$ tidak berada dalam G . Untuk setiap indeks terpilih $k \leq N \leq m$, berlaku $1/m \leq 1/k$, sehingga $1/m$ tidak berada dalam $(1/k, 2)$; sebagai anggota K , titik itu juga tidak berada dalam $(-1, 1) \setminus K$. Jadi tidak ada subselimut berhingga.

Himpunan $[0, 1]$ memuat K , sehingga tidak kompak. Komplementnya $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ terbuka dalam topologi K , jadi $[0, 1]$ tertutup; himpunan ini juga terbatas dalam arti biasa.

Pemeriksaan Q.54 Memisahkan titik dari subhimpunan kompak. Misalkan X ruang Hausdorff, $C \subseteq X$ subhimpunan kompak, dan $x \in X \setminus C$. Buktikan bahwa terdapat himpunan terbuka saling lepas $U, V \subseteq X$ sedemikian sehingga $x \in U$ dan $C \subseteq V$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap $c \in C$, gunakan sifat Hausdorff untuk memilih himpunan terbuka saling lepas $U_c \ni x$ dan $V_c \ni c$.

Tahap 2. Gunakan kekompakan untuk memilih berhingga banyak V_c . Ambil irisan pasangan-pasangan U_c dan gabungan pasangan-pasangan V_c .

Jawaban. Rubrik pembuktian: dari subselimut berhingga $V_{c_1}, \dots, V_{c_n}$ bagi C , ambil $U = \bigcap_{i=1}^n U_{c_i}$ dan $V = \bigcup_{i=1}^n V_{c_i}$, lalu buktikan $U \cap V = \emptyset$.

Solusi. Jika $C = \emptyset$, ambil $U = X$ dan $V = \emptyset$. Sekarang andaikan $C \neq \emptyset$. Untuk setiap $c \in C$, titik x dan c berbeda. Karena X Hausdorff, terdapat himpunan terbuka U_c dan V_c dengan $x \in U_c$, $c \in V_c$, dan $U_c \cap V_c = \emptyset$. Keluarga $\{V_c \mid c \in C\}$ merupakan selimut buka bagi C .

Kekompakan C memberi titik $c_1, \dots, c_n \in C$ sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{c_i}$. Definisikan

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{c_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_{c_i}.$$

Irisan berhingga U terbuka dan memuat x ; gabungan V terbuka dan memuat C .

Jika $y \in U \cap V$, maka $y \in V_{c_i}$ untuk suatu i . Karena $y \in U$, juga $y \in U_{c_i}$, bertentangan dengan $U_{c_i} \cap V_{c_i} = \emptyset$. Jadi $U \cap V = \emptyset$, sebagaimana diperlukan.

Panduan Latihan: Pemisahan, Kekompakan Lokal, dan Contoh Tandingan

Lima belas panduan ini mendampingi entri kanonis 56–70 dalam backend Bab 17. Kerjakan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan Q.55 Ruang Hausdorff kompak bersifat normal. Buktikan bahwa setiap ruang Hausdorff kompak X bersifat normal: untuk setiap dua himpunan tertutup saling lepas $A, B \subseteq X$, terdapat himpunan terbuka saling lepas U, V dengan $A \subseteq U$ dan $B \subseteq V$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Karena A dan B tertutup dalam ruang kompak, keduanya kompak.

Tahap 2. Untuk setiap $a \in A$, pisahkan titik a dari himpunan kompak B dengan lingkungan terbuka U_a, V_a .

Tahap 3. Ambil subselimut berhingga dari $\{U_a : a \in A\}$; gabungkan sisi U_a dan iris sisi V_a .

Jawaban. Pilih $a_1, \dots, a_n$ sehingga $A \subseteq \bigcup_i U_{a_i}$. Maka $U = \bigcup_i U_{a_i}$ dan $V = \bigcap_i V_{a_i}$ terbuka, memuat A dan B , serta saling lepas.

Solusi. Himpunan A dan B kompak karena keduanya tertutup dalam ruang kompak X . Untuk setiap $a \in A$, hasil pemisahan titik dari himpunan kompak dalam ruang Hausdorff memberi himpunan terbuka U_a, V_a dengan $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$, dan $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Keluarga $\{U_a : a \in A\}$ menyelimuti A . Pilih $a_1, \dots, a_n$ sehingga $A \subseteq \bigcup_i U_{a_i}$ dan tetapkan $U = \bigcup_i U_{a_i}$, $V = \bigcap_i V_{a_i}$. Karena irisan yang membentuk V berhingga, U dan V terbuka. Setiap V_{a_i} memuat B , maka $B \subseteq V$. Jika suatu titik berada dalam $U \cap V$, titik itu berada dalam suatu U_{a_i} sekaligus dalam $V \subseteq V_{a_i}$, sebuah kontradiksi. Jadi $U \cap V = \emptyset$ dan X normal.

Pemeriksaan Q.56 Subhimpunan kompak dalam topologi titik tertentu. Misalkan X himpunan tak kosong, $p \in X$, dan τ_p topologi titik tertentu: himpunan terbuka tak kosong adalah tepat subhimpunan yang memuat p . Tentukan, dengan bukti, semua subhimpunan kompak $A \subseteq X$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap subhimpunan berhingga kompak dalam ruang topologi apa pun.

Tahap 2. Jika A tak hingga, gunakan himpunan-himpunan terbuka $\{p, a\}$ untuk $a \in A \setminus \{p\}$.

Tahap 3. Jika $p \notin A$, tambahkan satu himpunan terbuka yang memuat satu titik tetap dari A bila diperlukan.

Jawaban. Subhimpunan kompaknya tepat subhimpunan berhingga dari X .

Solusi. Setiap subhimpunan berhingga kompak. Sebaliknya, misalkan A tak hingga. Jika $p \in A$, keluarga $\{\{p, a\} : a \in A \setminus \{p\}\}$ terdiri atas himpunan terbuka dan menyelimuti A , tetapi gabungan berhingga anggotanya hanya memuat berhingga banyak titik A .

Jika $p \notin A$, pilih $a_0 \in A$ dan gunakan keluarga $\{\{p, a\} : a \in A\}$. Keluarga ini juga merupakan selimut buka bagi A dan tidak mempunyai subselimut berhingga. Jadi tidak ada subhimpunan tak hingga yang kompak, dan klasifikasinya tepat semua subhimpunan berhingga.

Pemeriksaan Q.57 Subhimpunan kompak dalam topologi titik dikecualikan. Misalkan X himpunan tak kosong, $p \in X$, dan $\tau_{\bar{p}}$ topologi titik dikecualikan: himpunan terbukanya adalah $\emptyset$, X , dan semua subhimpunan yang tidak memuat p . Tentukan semua subhimpunan kompak $A \subseteq X$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $p \in A$, setiap selimut buka bagi A harus memuat satu himpunan terbuka yang mengandung p .

Tahap 2. Tentukan satu-satunya himpunan terbuka yang mengandung p .

Tahap 3. Jika $p \notin A$, topologi subruang pada A bersifat diskret.

Jawaban. Subhimpunan A kompak jika dan hanya jika $p \in A$ atau A berhingga.

Solusi. Jika $p \in A$, setiap selimut buka bagi A harus mempunyai anggota yang memuat p . Dalam topologi ini, satu-satunya himpunan terbuka yang memuat p adalah X . Anggota itu sendiri menyelimuti A , sehingga A kompak. Setiap A berhingga juga kompak, terlepas dari apakah $p \in A$.

Sekarang misalkan $p \notin A$ dan A tak hingga. Setiap subhimpunan A terbuka dalam X , sehingga topologi subruang pada A diskret. Selimut oleh semua himpunan satu titik $\{\{a\} : a \in A\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga. Maka A tidak kompak. Kedua arah membuktikan klasifikasi tersebut.

Pemeriksaan Q.58 Himpunan satu titik dalam topologi komplement berhingga. Pada $\mathbb{Z}$ dengan topologi komplement berhingga τ_{FC} , tunjukkan bahwa setiap himpunan satu titik tertutup.

Petunjuk. Gunakan definisi himpunan tertutup melalui keterbukaan komplementnya.

Jawaban. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, komplement $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ terbuka karena komplementnya berhingga. Jadi $\{n\}$ tertutup.

Solusi. Berdasarkan definisi τ_{FC} , suatu himpunan tak kosong terbuka tepat ketika komplementnya berhingga. Komplement dari $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ adalah himpunan satu titik $\{n\}$, yang berhingga. Maka $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ terbuka, sehingga $\{n\}$ tertutup. Argumen ini berlaku bagi setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Pemeriksaan Q.59 Ruang kofinit tak hingga bukan Hausdorff. Jelaskan mengapa $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$, dengan topologi komplement berhingga, bukan ruang Hausdorff.

Petunjuk. Hitung komplement irisan dua himpunan terbuka tak kosong.

Jawaban. Setiap dua himpunan terbuka tak kosong beririsan, sehingga dua titik berbeda tidak dapat dipisahkan oleh lingkungan terbuka saling lepas.

Solusi. Jika U, V terbuka dan tak kosong, maka

$$\mathbb{Z} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{Z} \setminus U) \cup (\mathbb{Z} \setminus V)$$

berhingga. Karena $\mathbb{Z}$ tak hingga, $U \cap V$ tidak mungkin kosong. Jadi tidak ada dua lingkungan terbuka tak kosong yang saling lepas. Khususnya, dua titik berbeda tidak dapat mempunyai lingkungan seperti yang disyaratkan oleh aksioma Hausdorff.

Pemeriksaan Q.60 Dua lingkungan kofinit selalu beririsan. Misalkan U terbuka dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$ dan memuat 0, sedangkan V terbuka dan memuat 1. Buktikan bahwa $U \cap V \neq \emptyset$.

Petunjuk. Andaikan irisannya kosong dan gunakan bahwa gabungan dua himpunan berhingga tetap berhingga.

Jawaban. Komplement $U \cap V$ berhingga, sedangkan komplement himpunan kosong adalah seluruh $\mathbb{Z}$, yang tak hingga. Maka irisan itu tidak kosong.

Solusi. Karena U dan V tak kosong dan terbuka, kedua himpunan $\mathbb{Z} \setminus U$ dan $\mathbb{Z} \setminus V$ berhingga. Hukum De Morgan memberi

$$\mathbb{Z} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{Z} \setminus U) \cup (\mathbb{Z} \setminus V),$$

dan ruas kanan berhingga. Jika $U \cap V = \emptyset$, komplementnya adalah $\mathbb{Z}$, bertentangan dengan ketakterhinggaan $\mathbb{Z}$. Jadi $U \cap V \neq \emptyset$.

Pemeriksaan Q.61 Bilangan genap: kompak tetapi tidak tertutup. Dalam $(\mathbb{Z}, \tau_{FC})$, tunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat genap $\mathbb{E}$ kompak sebagai subruang tetapi tidak tertutup dalam $\mathbb{Z}$.

Petunjuk. Tahap 1. Tunjukkan bahwa topologi subruang pada $\mathbb{E}$ juga merupakan topologi komplement berhingga.

Tahap 2. Dari selimut buka bagi $\mathbb{E}$, pilih satu anggota tak kosong dan selimuti sisa titik yang berhingga.

Tahap 3. Periksa apakah komplement $\mathbb{E}$ terbuka dalam $\mathbb{Z}$.

Jawaban. Subruang $\mathbb{E}$ bertopologi kofinit dan karena itu kompak. Himpunan $\mathbb{E}$ tidak tertutup karena komplementnya, himpunan bilangan ganjil, bukan himpunan terbuka kofinit dalam $\mathbb{Z}$.

Solusi. Jika $U \cap \mathbb{E}$ terbuka dan tak kosong dalam subruang $\mathbb{E}$, dengan U terbuka dalam $\mathbb{Z}$, maka $\mathbb{E} \setminus (U \cap \mathbb{E}) = \mathbb{E} \cap (\mathbb{Z} \setminus U)$ berhingga. Sebaliknya, setiap subhimpunan $W \subseteq \mathbb{E}$ yang berkomplemen berhingga dalam $\mathbb{E}$ dapat ditulis $W = \mathbb{E} \cap (\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{E} \setminus W))$, dan himpunan kedua pada irisan itu terbuka dalam $\mathbb{Z}$. Jadi topologi subruangnya kofinit.

Dari selimut buka bagi $\mathbb{E}$, pilih satu anggota tak kosong. Anggota itu menyisakan berhingga banyak titik $\mathbb{E}$; pilih satu anggota selimut tambahan bagi setiap titik yang tersisa. Maka $\mathbb{E}$ kompak. Namun $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{E}$ adalah himpunan semua bilangan ganjil. Komplementnya $\mathbb{E}$ tak hingga, sehingga himpunan ganjil itu tidak terbuka dalam topologi kofinit. Jadi $\mathbb{E}$ tidak tertutup.

Pemeriksaan Q.62 Memisahkan titik dari subhimpunan kompak. Misalkan X Hausdorff, $A \subseteq X$ kompak, dan $x \in X \setminus A$. Buktikan bahwa terdapat himpunan terbuka saling lepas U, V dengan $x \in U$ dan $A \subseteq V$.

Petunjuk. Untuk setiap $a \in A$, pisahkan x dan a ; lalu gunakan kekompakan A .

Jawaban. Pilih pasangan terbuka saling lepas $U_a \ni x$ dan $V_a \ni a$. Dari subselimut berhingga $V_{a_1}, \dots, V_{a_n}$, gunakan $U = \bigcap_i U_{a_i}$ dan $V = \bigcup_i V_{a_i}$.

Solusi. Untuk setiap $a \in A$, sifat Hausdorff memberi himpunan terbuka saling lepas U_a, V_a dengan $x \in U_a$ dan $a \in V_a$. Keluarga $\{V_a : a \in A\}$ menyelimuti A , maka ada $a_1, \dots, a_n$ sehingga $A \subseteq \bigcup_i V_{a_i}$. Tetapkan $U = \bigcap_i U_{a_i}$ dan $V = \bigcup_i V_{a_i}$. Keduanya terbuka, memuat objek yang diminta, dan saling lepas: titik dalam $U \cap V$ akan berada dalam suatu V_{a_i} sekaligus dalam $U \subseteq U_{a_i}$.

Pemeriksaan Q.63 Memisahkan dua subhimpunan kompak. Misalkan A dan B subhimpunan kompak saling lepas dari ruang Hausdorff X . Buktikan bahwa terdapat himpunan terbuka saling lepas U, V dengan $A \subseteq U$ dan $B \subseteq V$.

Petunjuk. Untuk setiap $a \in A$, terapkan hasil pemisahan titik dari himpunan kompak B , lalu gunakan kekompakan A .

Jawaban. Pisahkan setiap $a \in A$ dari seluruh B dengan U_a, V_a . Pilih berhingga banyak U_a yang menyelimuti A ; gabungan sisi U_a dan irisan sisi V_a adalah lingkungan terbuka saling lepas yang diperlukan.

Solusi. Untuk setiap $a \in A$, hasil sebelumnya memberi himpunan terbuka saling lepas U_a, V_a dengan $a \in U_a$ dan $B \subseteq V_a$. Karena A kompak, pilih $a_1, \dots, a_n$ dengan $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$. Tetapkan

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}.$$

Himpunan U, V terbuka, $A \subseteq U$, dan $B \subseteq V$. Jika $z \in U \cap V$, maka untuk suatu i , $z \in U_{a_i}$ dan juga $z \in V \subseteq V_{a_i}$, bertentangan dengan keterlepasan pasangan itu. Jadi $U \cap V = \emptyset$.

Pemeriksaan Q.64 Kekompakan ambient dan kekompakan subruang. Misalkan $A \subseteq (X, \tau_X)$ dan τ_A topologi subruang pada A . Buktikan bahwa A kompak sebagai subhimpunan dari X jika dan hanya jika (A, τ_A) merupakan ruang topologi kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setiap himpunan terbuka dalam A berbentuk $A \cap U$ untuk suatu U terbuka dalam X .

Tahap 2. Batasi selimut ambient ke A untuk satu arah.

Tahap 3. Pilih satu wakil terbuka ambient bagi setiap anggota selimut subruang untuk arah lainnya.

Jawaban. Kedua jenis selimut saling diterjemahkan melalui $U \mapsto A \cap U$, dan pemilihan subselimut berhingga bertahan dalam kedua arah.

Solusi. Andaikan A kompak sebagai subhimpunan X . Ambil selimut $\{W_i : i \in I\}$ bagi A oleh himpunan-himpunan yang terbuka dalam topologi subruang. Untuk setiap i , pilih himpunan terbuka $U_i \subseteq X$ dengan $W_i = A \cap U_i$. Maka $\{U_i : i \in I\}$ menyelimuti A secara ambient, sehingga berhingga banyak U_i cukup. Irisannya dengan A memberi subselimut berhingga dari keluarga W_i .

Sebaliknya, andaikan (A, τ_A) kompak dan ambil selimut ambient $\{U_i : i \in I\}$ bagi A . Keluarga $\{A \cap U_i :$

$i \in I\}$ adalah selimut buka subruang, maka mempunyai subselimut berhingga. Himpunan-himpunan ambient dengan indeks yang sama menyelimuti A . Jadi kedua pengertian kekompakan itu ekuivalen.

Pemeriksaan Q.65 Karakterisasi melalui sifat irisan berhingga. Misalkan X ruang topologi. Buktikan bahwa X kompak jika dan hanya jika setiap keluarga himpunan tertutup $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ yang mempunyai sifat irisan berhingga memenuhi $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$.

Petunjuk. Ambil komplemen seluruh anggota keluarga dan gunakan hukum De Morgan; subselimut berhingga tepat bersesuaian dengan irisan berhingga yang kosong.

Jawaban. Komplemen mengubah keluarga tertutup bersifat irisan berhingga menjadi keluarga terbuka yang tidak mempunyai subselimut berhingga, dan mengubah irisan total kosong menjadi selimut bagi seluruh ruang.

Solusi. Andaikan X kompak dan keluarga tertutup $\{F_\alpha\}$ mempunyai sifat irisan berhingga. Jika irisan totalnya kosong, maka $\{X \setminus F_\alpha\}$ merupakan selimut buka bagi X . Subselimut berhingga akan memberi $\bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \emptyset$, bertentangan dengan sifat irisan berhingga. Maka irisan total tidak kosong.

Sebaliknya, andaikan syarat keluarga tertutup berlaku. Jika suatu selimut buka $\{U_\alpha\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga, maka himpunan-himpunan tertutup $F_\alpha = X \setminus U_\alpha$ mempunyai sifat irisan berhingga. Namun karena $\{U_\alpha\}$ menyelimuti X , hukum De Morgan memberi $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$, sebuah kontradiksi. Maka setiap selimut buka mempunyai subselimut berhingga dan X kompak.

Pemeriksaan Q.66 Ruang Euklides bersifat kompak lokal. Dengan definisi bahwa setiap titik harus mempunyai lingkungan terbuka yang tutupannya kompak, jelaskan mengapa $\mathbb{R}^n$ kompak lokal untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.

Petunjuk. Di sekitar $x \in \mathbb{R}^n$, gunakan bola terbuka berjari-jari satu dan Teorema Heine–Borel untuk tutupannya.

Jawaban. Bola $B_1(x)$ terbuka, memuat x , dan tutupannya adalah bola tertutup $\overline{B}_1(x)$, yang tertutup dan terbatas sehingga kompak menurut Heine–Borel.

Solusi. Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}^n$ dan tetapkan $O = B_1(x) = \{y : d_E(x, y) < 1\}$. Himpunan O terbuka dan memuat x . Dalam topologi Euklides, $\overline{O} = \{y : d_E(x, y) \leq 1\}$. Bola tertutup ini tertutup dan terbatas dalam $\mathbb{R}^n$, maka kompak berdasarkan Teorema Heine–Borel. Karena konstruksi berlaku pada setiap titik, $\mathbb{R}^n$ kompak lokal.

Pemeriksaan Q.67 Setiap ruang kompak bersifat kompak lokal. Tunjukkan bahwa setiap ruang topologi kompak X bersifat kompak lokal menurut definisi lingkungan terbuka dengan tutupannya kompak.

Petunjuk. Untuk setiap $x \in X$, pilih lingkungan terbuka terbesar yang tersedia.

Jawaban. Ambil $O = X$. Himpunan ini terbuka, memuat setiap x , dan $\overline{O} = X$ kompak.

Solusi. Untuk sembarang $x \in X$, himpunan $O = X$ adalah himpunan terbuka yang memuat x . Tutupannya dalam X adalah $\overline{X} = X$, yang kompak menurut hipotesis. Jadi syarat kekompakan lokal terpenuhi pada setiap titik tanpa memerlukan aksioma pemisahan tambahan.

Pemeriksaan Q.68 Garis Sorgenfrey tidak kompak lokal. Misalkan garis Sorgenfrey adalah $\mathbb{R}$ dengan basis $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$. Tunjukkan bahwa ruang ini Hausdorff tetapi tidak kompak lokal.

Petunjuk. Tahap 1. Untuk $x < y$, gunakan lingkungan basis $[x, y)$ dan $[y, y + 1)$.

Tahap 2. Setiap lingkungan terbuka dari x memuat suatu $[x, b)$ dengan $b > x$.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa $[x, b)$ tertutup tetapi tidak kompak dengan selimut menaik yang batas kanannya menuju b .

Jawaban. Dua titik dapat dipisahkan oleh interval basis saling lepas. Namun setiap lingkungan $O \ni x$ memuat subruang tertutup $[x, b)$ yang tidak kompak; karena itu $\overline{O}$ tidak mungkin kompak.

Solusi. Jika $x < y$, maka $[x, y)$ dan $[y, y + 1)$ adalah himpunan terbuka basis, masing-masing memuat x dan y , serta saling lepas. Jadi garis Sorgenfrey Hausdorff.

Ambil lingkungan terbuka O dari x . Ada $b > x$ dengan $[x, b) \subseteq O$. Himpunan $[x, b)$ tertutup dalam garis Sorgenfrey karena komplementnya $(-\infty, x) \cup [b, \infty)$ terbuka. Pilih bilangan bulat N_0 dengan $1/N_0 < b - x$. Keluarga

$$\{[x, b - 1/n) : n \geq N_0\}$$

adalah selimut buka bagi $[x, b)$, tetapi subkeluarga berhingga mempunyai indeks maksimum N dan gabungannya hanya $[x, b - 1/N)$. Jadi $[x, b)$ tidak kompak.

Jika $\overline{O}$ kompak, maka subhimpunan $[x, b)$, yang tertutup dalam $\overline{O}$, juga kompak, sebuah kontradiksi. Tidak ada titik yang mempunyai lingkungan terbuka dengan tutupan kompak, sehingga garis Sorgenfrey tidak kompak lokal.

Pemeriksaan Q.69 Bijeksi kontinu antara dua ruang kompak. Tentukan benar atau salah: jika X dan Y ruang topologi kompak dan $f : X \rightarrow Y$ bijeksi kontinu, maka f pasti suatu homeomorfisme. Berikan bukti atau contoh tandingan.

Petunjuk. Uji pemetaan identitas pada himpunan dua titik yang domainnya diskret dan kodomainnya indiskret.

Jawaban. Salah. Identitas dari ruang dua titik diskret ke ruang dua titik indiskret adalah bijeksi kontinu antara ruang-ruang kompak, tetapi inversnya tidak kontinu.

Solusi. Ambil $S = \{0, 1\}$. Beri domain $X = S$ topologi diskret dan kodomain $Y = S$ topologi indiskret $\{\emptyset, S\}$. Kedua ruang kompak karena berhingga. Pemetaan identitas $f : X \rightarrow Y$ bijektif. Prapeta satu-satunya himpunan terbuka kodomain adalah $\emptyset$ dan S , keduanya terbuka dalam X ; jadi f kontinu.

Namun invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tidak kontinu: himpunan $\{0\}$ terbuka dalam kodomain X dari invers, sedangkan prapetanya $\{0\}$ tidak terbuka dalam Y . Hipotesis yang hilang adalah sifat Hausdorff pada Y ; dengan hipotesis itu, bijeksi kontinu dari ruang kompak memang homeomorfisme.

Panduan Latihan: Pernyataan Benar atau Salah tentang Kekompakan

Enam panduan terakhir ini mempertahankan urutan pernyataan benar atau salah pada sumber Bab 17. Untuk pernyataan yang benar, periksalah seluruh hipotesis dalam bukti. Untuk pernyataan yang salah, telusuri secara eksplisit setiap hipotesis pada contoh tandingan sebelum menyimpulkan.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0 dan bukan materi resmi GVSU.

Pemeriksaan Q.70 Subruang Tertutup dari Ruang Kompak. Jika X adalah suatu ruang topologi kompak, maka setiap subruang tertutup dari X bersifat kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil subruang tertutup $C \subseteq X$ dan selimut buka subruang sebarang $\{W_\alpha\}$ bagi C .

Tahap 2. Tulis $W_\alpha = C \cap U_\alpha$ untuk suatu U_α yang terbuka dalam X , lalu tambahkan $X \setminus C$.

Tahap 3. Gunakan kekompakan X dan buang anggota $X \setminus C$ dari subselimut berhingga yang diperoleh.

Jawaban. *Benar.* Selimut buka subruang bagi C , setelah diwakili oleh himpunan-himpunan buka dalam X dan ditambah $X \setminus C$, menjadi selimut buka bagi X . Kekompakan X menghasilkan subselimut berhingga bagi C .

Solusi. Misalkan C subruang tertutup dari X dan $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ selimut buka sebarang bagi C dalam topologi subruang. Untuk setiap α , pilih himpunan buka $U_\alpha \subseteq X$ dengan $W_\alpha = C \cap U_\alpha$. Karena C tertutup, $X \setminus C$ terbuka. Keluarga

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus C\}$$

menyelimuti X : titik dalam C diselimuti oleh suatu U_α , sedangkan titik di luar C diselimuti oleh komplemen tersebut.

Kekompakan X memberi subselimut berhingga. Hapus $X \setminus C$ jika ia terpilih. Himpunan-himpunan

$U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ yang tersisa masih menyelimuti C , sebab $X \setminus C$ tidak memuat titik C . Maka $W_{\alpha_i} = C \cap U_{\alpha_i}$ untuk $1 \leq i \leq n$ membentuk subselimut berhingga dari selimut semula. Jadi C kompak.

Pemeriksaan Q.71 Kodomain Kompak Tidak Cukup. Jika X adalah suatu ruang Hausdorff, Y adalah suatu ruang kompak, dan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinu dan bijektif, maka f adalah suatu homeomorfisme.

Petunjuk. Tahap 1. Gunakan himpunan dua titik $S = \{0, 1\}$.

Tahap 2. Beri domain topologi diskret dan kodomain topologi indiskret, lalu periksa sifat Hausdorff, kompak, bijektif, dan kontinu untuk pemetaan identitas.

Tahap 3. Uji kekontinuan invers dengan himpunan satu titik yang terbuka di ruang diskret.

Jawaban. *Salah.* Identitas dari ruang dua titik diskret ke ruang dua titik indiskret adalah bijeksi kontinu dari ruang Hausdorff ke ruang kompak, tetapi inversnya tidak kontinu.

Solusi. Ambil $S = \{0, 1\}$. Jadikan $X = S$ ruang diskret dan $Y = S$ ruang indiskret dengan topologi $\{\emptyset, S\}$. Ruang diskret X Hausdorff: dua titik berbeda dipisahkan oleh singleton yang saling lepas. Ruang Y kompak, baik karena berhingga maupun karena setiap selimut bukanya harus memuat S sendiri.

Pemetaan identitas $f : X \rightarrow Y$ bijektif. Prapeta kedua himpunan terbuka kodomain, $\emptyset$ dan S , terbuka dalam X , jadi f kontinu. Namun invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tidak kontinu: singleton $\{0\}$ terbuka dalam kodomain X dari invers, sedangkan prapetanya $\{0\}$ tidak terbuka dalam Y . Jadi f bukan homeomorfisme. Hipotesis yang ditempatkan pada ruang yang keliru adalah kekompakan: teorema yang benar memerlukan domain kompak dan kodomain Hausdorff.

Pemeriksaan Q.72 Domain Kompak dan Kodomain Hausdorff. Jika X adalah suatu ruang kompak, Y adalah suatu ruang Hausdorff, dan $f : X \rightarrow Y$ adalah bijeksi kontinu, maka f adalah suatu homeomorfisme.

Petunjuk. Tahap 1. Ambil himpunan tertutup $C \subseteq X$; sebagai subhimpunan tertutup dari ruang kompak, C kompak.

Tahap 2. Citra kontinu $f(C)$ kompak, dan subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff tertutup.

Tahap 3. Jadi f adalah pemetaan tertutup. Gunakan bijektivitas untuk menunjukkan bahwa f^{-1} kontinu.

Jawaban. *Benar.* Pemetaan f membawa setiap himpunan tertutup di X ke himpunan kompak, dan karena Y Hausdorff, citra itu tertutup. Jadi f adalah bijeksi kontinu yang tertutup, sehingga inversnya kontinu.

Solusi. Ambil sebarang himpunan tertutup $C \subseteq X$. Karena X kompak, subhimpunan tertutup C kompak. Kekontinuan f kemudian membuat $f(C)$ kompak dalam Y . Setiap subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff tertutup, jadi $f(C)$ tertutup dalam Y . Dengan demikian f adalah pemetaan tertutup.

Karena f bijektif, invers $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ terdefinisi. Untuk setiap himpunan tertutup $C \subseteq X$, berlaku $g^{-1}(C) = f(C)$, yang tertutup dalam Y . Jadi prapeta oleh g dari setiap himpunan tertutup adalah tertutup; ini ekuivalen dengan kekontinuan g . Maka f kontinu, bijektif, dan mempunyai invers kontinu, sehingga f homeomorfisme.

Pemeriksaan Q.73 Himpunan Tertutup dalam Ruang Metrik Tidak Selalu Kompak. Misalkan C adalah subhimpunan tertutup dari suatu ruang metrik (X, d) dengan topologi metrik. Maka C kompak.

Petunjuk. Tahap 1. Ambil ruang metrik Euklides $X = \mathbb{R}$ dan subhimpunan $C = \mathbb{R}$.

Tahap 2. Seluruh ruang selalu tertutup dalam dirinya sendiri.

Tahap 3. Gunakan selimut buka $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ untuk menguji kekompakan.

Jawaban. *Salah.* Dalam ruang metrik Euklides $X = \mathbb{R}$, himpunan $C = \mathbb{R}$ tertutup, tetapi tidak kompak; selimut buka $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ tidak mempunyai subselimut berhingga.

Solusi. Beri $X = \mathbb{R}$ metrik Euklides dan ambil $C = \mathbb{R}$. Himpunan C tertutup dalam X karena komplemennya $X \setminus C = \emptyset$ terbuka.

Untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, tetapkan $U_n = (-n, n)$. Setiap U_n terbuka dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R}$, sehingga keluarga tersebut

menyelimuti C . Jika hanya berhingga banyak anggota dipilih dan N adalah indeks terbesarnya, gabungannya sama dengan $(-N, N)$ dan tidak memuat, misalnya, titik N . Jadi tidak ada subselimut berhingga dan C tidak kompak. Ketertutupan saja dalam ruang metrik sebarang tidak cukup; dalam ruang kompak, barulah setiap subhimpunan tertutup kompak.

Pemeriksaan Q.74 Himpunan Kompak Tidak Selalu Tertutup. Jika A adalah subhimpunan kompak dari suatu ruang topologi X , maka A adalah subhimpunan tertutup dari X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan himpunan dua titik $X = \{0, 1\}$ dengan topologi indiskret.

Tahap 2. Setiap himpunan berhingga, khususnya $A = \{0\}$, kompak dalam ruang topologi apa pun.

Tahap 3. Periksa apakah komplemen $X \setminus A = \{1\}$ terbuka dalam topologi indiskret.

Jawaban. *Salah.* Dalam ruang indiskret dua titik $X = \{0, 1\}$, singleton $A = \{0\}$ kompak karena berhingga, tetapi tidak tertutup karena komplemennya $\{1\}$ tidak terbuka.

Solusi. Ambil $X = \{0, 1\}$ dengan topologi indiskret $\tau = \{\emptyset, X\}$, dan ambil $A = \{0\}$. Himpunan A kompak: dari selimut buka sebarang bagi singleton tersebut, pilih satu anggota selimut yang memuat 0; satu anggota itu sudah merupakan subselimut berhingga.

Namun $X \setminus A = \{1\}$ bukan anggota τ , sehingga komplemen A tidak terbuka. Jadi A tidak tertutup. Pernyataan menjadi benar jika ruang ambient X Hausdorff, tetapi hipotesis tersebut tidak diberikan di sini.

Pemeriksaan Q.75 Ruang Diskret Kompak Tepat Ketika Berhingga. Misalkan (X, τ) adalah suatu ruang topologi dengan τ topologi diskret. Maka X kompak jika dan hanya jika X berhingga.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika X berhingga, gunakan fakta bahwa setiap himpunan berhingga bersifat kompak.

Tahap 2. Untuk arah sebaliknya, dalam topologi diskret setiap singleton $\{x\}$ terbuka.

Tahap 3. Terapkan kekompakan kepada selimut $\{\{x\} \mid x \in X\}$ dan tafsirkan keberadaan subselimut berhingga.

Jawaban. *Benar.* Ruang berhingga selalu kompak. Sebaliknya, singleton dalam ruang diskret membentuk selimut buka; jika ruang itu kompak, berhingga banyak singleton harus menyelimuti seluruh X , sehingga X berhingga.

Solusi. Andaikan dahulu X berhingga. Untuk selimut buka sebarang bagi X , pilih satu anggota selimut yang memuat setiap titik. Karena hanya ada berhingga banyak titik, pilihan ini menghasilkan subselimut berhingga. Jadi X kompak; argumen juga mencakup $X = \emptyset$ dengan subselimut kosong.

Sebaliknya, andaikan X kompak dan τ diskret. Setiap singleton $\{x\}$ terbuka, sehingga

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

merupakan selimut buka bagi X . Kekompakan memberi subselimut berhingga $\{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$. Karena keluarga ini menyelimuti X , berlaku $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, jadi X berhingga. Kedua implikasi telah terbukti.

Uji Penguasaan Bab 17: Kekompakan

Delapan uji penguasaan ini menghubungkan definisi selimut buka, sifat irisan berhingga, Teorema Heine–Borel, pemetaan kontinu, hipotesis Hausdorff, metrik Hausdorff, dan sistem fungsi teriterasi. Kerjakan setiap pernyataan sebelum membuka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Pemeriksaan Q.76 Kekompakan dan sifat irisan berhingga. Misalkan X ruang topologi. Buktikan bahwa X kompak jika dan hanya jika setiap keluarga $\mathcal{F}$ himpunan tertutup yang mempunyai sifat irisan berhingga memenuhi $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Di sini sifat irisan berhingga berarti bahwa irisan setiap subkeluarga berhingga dan tak kosong dari $\mathcal{F}$ tidak kosong.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil komplement setiap himpunan tertutup.

Tahap 2. Gunakan hukum De Morgan untuk menerjemahkan “irisan total kosong” menjadi “komplement-komplementnya menutupi X ”.

Tahap 3. Perhatikan bahwa subselimit berhingga tepat bersesuaian dengan irisan berhingga yang kosong.

Jawaban. Pernyataan itu benar. Dengan menuliskan $U_F = X \setminus F$, kegagalan irisan total setara dengan fakta bahwa keluarga $\{U_F\}$ merupakan selimut buka, sedangkan kegagalan suatu irisan berhingga setara dengan adanya subselimit berhingga.

Solusi. Andaikan X kompak dan $\mathcal{F}$ mempunyai sifat irisan berhingga. Jika $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, maka hukum De Morgan memberi

$$X = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F).$$

Jadi komplement anggota $\mathcal{F}$ membentuk selimut buka bagi X . Kekompakan menghasilkan $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ dengan $X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus F_i)$. Sekali lagi menurut hukum De Morgan, $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, bertentangan dengan sifat irisan berhingga.

Sebaliknya, andaikan syarat irisan tersebut berlaku dan misalkan $\mathcal{U}$ suatu selimut buka bagi X tanpa subselimit berhingga. Keluarga tertutup $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ mempunyai sifat irisan berhingga: irisan berhingga yang kosong akan mengatakan bahwa himpunan-himpunan terbuka yang bersesuaian menutupi X . Namun $\mathcal{U}$ menutupi X , sehingga $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Ini bertentangan dengan hipotesis, maka setiap selimut buka mempunyai subselimit berhingga.

Pemeriksaan Q.77 Citra kontinu dari ruang kompak. Misalkan X kompak dan $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Buktikan bahwa $f(X)$, dengan topologi subruang dari Y , kompak. Deduksikan bahwa jika f juga surjektif, maka Y kompak, dan bahwa kekompakan merupakan invarian topologi.

Petunjuk. *Tahap 1.* Mulailah dengan selimut buka $\{V_i\}$ bagi $f(X)$.

Tahap 2. Tarik setiap V_i kembali melalui pemetaan $f : X \rightarrow f(X)$.

Tahap 3. Untuk invarian topologi, terapkan hasil tersebut pada suatu homeomorfisme.

Jawaban. Prapeta selimut buka bagi $f(X)$ menyelubungi X . Subselimit berhingga bagi prapeta itu menghasilkan subselimit berhingga bagi $f(X)$. Jika f surjektif, $f(X) = Y$; khususnya, homeomorfisme mempertahankan kekompakan.

Solusi. Ambil selimut buka $\{V_i : i \in I\}$ bagi $f(X)$. Karena setiap V_i terbuka dalam topologi subruang dan f yang dipandang sebagai pemetaan ke $f(X)$ tetap kontinu, setiap $f^{-1}(V_i)$ terbuka dalam X . Selain itu, $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ menutupi X . Pilih indeks $i_1, \dots, i_n$ sehingga prapeta-prapeta tersebut menutupi X . Untuk setiap $y \in f(X)$, tulis $y = f(x)$. Salah satu $f^{-1}(V_{i_k})$ memuat x , sehingga $y \in V_{i_k}$. Jadi $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$ menutupi $f(X)$, dan $f(X)$ kompak.

Jika f surjektif, citra itu adalah Y . Jika $h : X \rightarrow Y$ homeomorfisme dan salah satu ruang kompak, maka kekontinuan h atau h^{-1} memindahkan kekompakan ke ruang yang lain. Karena itu kekompakan merupakan invarian topologi.

Pemeriksaan Q.78 Merekonstruksi Teorema Heine–Borel. Buktikan bahwa subhimpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas. Anda boleh memakai fakta bahwa setiap barisan kubus tertutup tak kosong yang menurun dan yang panjang rusuknya menuju nol mempunyai irisan tak kosong, serta bahwa subhimpunan tertutup dari ruang kompak adalah kompak.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk membuktikan kubus tertutup kompak, andaikan ada selimut buka tanpa subselimit berhingga dan bagi kubus menjadi 2^n subkubus.

Tahap 2. Pilih berulang kali satu subkubus yang juga tidak dapat ditutupi secara berhingga.

Tahap 3. Untuk arah sebaliknya, gunakan fungsi koordinat atau bola-bola terbuka untuk memperoleh keterbatasan dan gunakan hipotesis Hausdorff pada $\mathbb{R}^n$ untuk memperoleh ketertutupan.

Jawaban. Kubus tertutup dalam $\mathbb{R}^n$ kompak melalui argumen pembagian kubus bersarang. Himpunan tertutup dan terbatas terletak dalam suatu kubus kompak dan tertutup di dalamnya, maka kompak. Se-

baliknya, subhimpunan kompak ruang Hausdorff tertutup, dan suatu tutup oleh bola-bola berpusat di asal mempunyai subselimit berhingga sehingga himpunan itu terbatas.

Solusi. Pertama, misalkan suatu kubus tertutup Q_0 mempunyai selimit buka $\mathcal{U}$ tanpa subselimit berhingga. Bagi Q_0 menjadi 2^n kubus tertutup kongruen. Sedikitnya satu di antaranya, sebut Q_1 , tidak dapat ditutupi oleh berhingga banyak anggota $\mathcal{U}$; jika semuanya dapat, gabungan subselimit-subselimit berhingga itu akan menyelimuti Q_0 . Ulangi untuk memperoleh $Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$, dengan panjang rusuk menuju nol dan setiap Q_k tidak mempunyai subselimit berhingga dari $\mathcal{U}$.

Ambil $x \in \bigcap_{k \geq 0} Q_k$. Ada $U \in \mathcal{U}$ dan $\epsilon > 0$ dengan $x \in B_\epsilon(x) \subseteq U$. Untuk k cukup besar, diameter Q_k lebih kecil daripada ϵ , sehingga $Q_k \subseteq U$. Ini memberi subselimit satu himpunan bagi Q_k , sebuah kontradiksi. Jadi setiap kubus tertutup kompak.

Jika K tertutup dan terbatas, maka $K \subseteq [-M, M]^n$ untuk suatu M . Kubus tersebut kompak, dan K tertutup di dalamnya, sehingga K kompak. Sebaliknya, $\mathbb{R}^n$ Hausdorff, jadi setiap subhimpunan kompaknya tertutup. Keluarga $\{B_m(0) : m \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti K ; suatu subselimit berhingga termuat dalam $B_M(0)$ untuk nilai maksimum M dari indeks yang terpilih. Maka K terbatas.

Pemeriksaan Q.79 Teorema nilai ekstrem pada ruang kompak. Misalkan X ruang topologi kompak tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu. Buktikan bahwa terdapat $x_-, x_+ \in X$ dengan $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ untuk setiap $x \in X$. Jelaskan tepat di mana ketakosongan X digunakan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan kekontinuan untuk menunjukkan bahwa $f(X)$ kompak.

Tahap 2. Terapkan Heine–Borel dalam $\mathbb{R}$, lalu ambil supremum dan infimum.

Tahap 3. Gunakan ketertutupan $f(X)$ untuk menunjukkan bahwa kedua batas itu benar-benar anggota citra.

Jawaban. Citra $f(X)$ kompak, sehingga tertutup dan terbatas dalam $\mathbb{R}$. Karena citra itu tak kosong, supremum dan infimumnya ada; ketertutupan membuat keduanya termasuk dalam $f(X)$ dan karena itu dicapai oleh titik-titik X .

Solusi. Berdasarkan kekontinuan f , himpunan $f(X)$ kompak. Menurut Heine–Borel, $f(X)$ tertutup dan terbatas dalam $\mathbb{R}$. Ketakosongan X menjamin bahwa $f(X)$ tak kosong, sehingga bilangan $a = \inf f(X)$ dan $b = \sup f(X)$ terdefinisi sebagai bilangan real.

Untuk setiap $k \geq 1$, sifat supremum memberi $y_k \in f(X)$ dengan $b - 1/k < y_k \leq b$. Maka $y_k \rightarrow b$. Karena $f(X)$ tertutup, $b \in f(X)$. Jadi ada $x_+ \in X$ dengan $f(x_+) = b$. Argumen yang sama bagi infimum memberi $x_- \in X$ dengan $f(x_-) = a$. Definisi infimum dan supremum kemudian memberi $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ bagi setiap $x \in X$.

Pemeriksaan Q.80 Memisahkan titik dari himpunan kompak. Misalkan X ruang Hausdorff, $K \subseteq X$ kompak, dan $x \in X \setminus K$. Buktikan bahwa terdapat himpunan terbuka $U, V \subseteq X$ dengan $x \in U$, $K \subseteq V$, dan $U \cap V = \emptyset$. Deduksikan bahwa setiap subhimpunan kompak dari ruang Hausdorff tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk setiap $y \in K$, pilih lingkungan terbuka saling lepas $U_y \ni x$ dan $V_y \ni y$.

Tahap 2. Ambil subselimit berhingga dari $\{V_y : y \in K\}$.

Tahap 3. Iris lingkungan-lingkungan U_y yang bersesuaian dan gabungkan lingkungan-lingkungan V_y .

Jawaban. Pilih $y_1, \dots, y_n$ sehingga $K \subseteq \bigcup_i V_{y_i}$. Maka $U = \bigcap_i U_{y_i}$ dan $V = \bigcup_i V_{y_i}$ memenuhi semua syarat. Karena setiap titik di luar K mempunyai lingkungan terbuka yang tidak memotong K , komplemen K terbuka.

Solusi. Untuk setiap $y \in K$, sifat Hausdorff memberi himpunan terbuka U_y, V_y dengan $x \in U_y$, $y \in V_y$, dan $U_y \cap V_y = \emptyset$. Keluarga $\{V_y : y \in K\}$ menutupi K . Karena K kompak, ada $y_1, \dots, y_n$ sehingga $K \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.

Tetapkan

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, \quad V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Keduanya terbuka, $x \in U$, dan $K \subseteq V$. Jika $z \in U \cap V$, maka $z \in V_{y_i}$ untuk suatu i , sementara $z \in U \subseteq U_{y_i}$, bertentangan dengan $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$. Jadi $U \cap V = \emptyset$. Khususnya, setiap $x \notin K$ mempunyai lingkungan

terbuka $U \subseteq X \setminus K$. Maka $X \setminus K$ terbuka dan K tertutup.

Pemeriksaan Q.81 Mengapa hipotesis Hausdorff tidak boleh dihapus. Misalkan X himpunan tak hingga dengan topologi kofinit: himpunan terbukanya adalah $\emptyset$ dan semua himpunan yang komplementnya berhingga. Buktikan bahwa X kompak tetapi tidak Hausdorff. Selanjutnya, pilih subhimpunan tak hingga sejati $A \subsetneq X$ dan tunjukkan bahwa A kompak sebagai subruang tetapi tidak tertutup dalam X apabila $X \setminus A$ juga tak hingga.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dari suatu selimut buka, pilih satu anggota tak kosong; hanya berhingga banyak titik yang belum terselimuti.

Tahap 2. Dua himpunan terbuka tak kosong tidak mungkin saling lepas.

Tahap 3. Topologi subruang pada A juga kofinit, sedangkan kriteria tertutup di X dapat dibaca dari komplementnya.

Jawaban. Satu anggota tak kosong dari selimut buka menyisakan hanya berhingga banyak titik, yang dapat diselimuti oleh berhingga banyak anggota lain. Dua himpunan terbuka tak kosong selalu beririsan karena gabungan dua komplement berhingga tetap berhingga. Subruang A bertopologi kofinit sehingga kompak, tetapi A tidak tertutup jika komplementnya tak hingga.

Solusi. Ambil selimut buka $\mathcal{U}$ bagi X dan pilih $U_0 \in \mathcal{U}$ yang tak kosong. Himpunan $X \setminus U_0$ berhingga. Untuk setiap titik pada komplement itu, pilih satu anggota $\mathcal{U}$ yang memuatnya. Bersama U_0 , berhingga banyak pilihan ini menutupi X . Jadi X kompak.

Jika U, V terbuka dan tak kosong, maka $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ berhingga. Karena X tak hingga, $U \cap V$ tidak kosong. Maka dua titik berbeda tidak dapat mempunyai lingkungan terbuka saling lepas, dan X tidak Hausdorff.

Himpunan terbuka tak kosong dalam subruang A berbentuk $A \cap U$; komplementnya di A termuat dalam komplement berhingga $X \setminus U$. Sebaliknya, setiap komplement berhingga di A diperoleh dengan cara ini. Jadi A juga bertopologi kofinit dan argumen pertama menunjukkan bahwa A kompak. Namun jika $X \setminus A$ tak hingga, komplement itu bukan himpunan terbuka tak kosong kofinit; akibatnya A tidak tertutup. Contoh ini menunjukkan bahwa “kompak mengakibatkan tertutup” memerlukan hipotesis Hausdorff pada ruang ambient.

Pemeriksaan Q.82 Metrik Hausdorff pada himpunan kompak. Untuk himpunan kompak tak kosong A, B dalam ruang metrik (X, d) , definisikan

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}, \quad d(x, C) = \inf_{c \in C} d(x, c).$$

Buktikan bahwa d_H merupakan metrik pada koleksi semua subhimpunan kompak tak kosong dari X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Simetri dan nonnegativitas langsung dari definisi.

Tahap 2. Jika $d_H(A, B) = 0$, gunakan ketertutupan himpunan kompak dalam ruang metrik untuk memperoleh kedua inklusi.

Tahap 3. Untuk setiap $a \in A$, bandingkan $d(a, C)$ dengan $d(a, b) + d(b, C)$, lalu ambil infimum dan supremum.

Jawaban. Fungsi d_H nonnegatif dan simetris. Nilai nol memaksa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Ketaksamaan $d(a, C) \leq d(a, B) + d_H(B, C)$ dan pasangannya bagi titik-titik C menghasilkan ketaksamaan segitiga setelah supremum diambil.

Solusi. Fungsi jarak-ke-himpunan $x \mapsto d(x, B)$ kontinu, sehingga terbatas pada himpunan kompak A ; hal yang sama berlaku setelah A dan B dipertukarkan. Jadi kedua supremum dalam definisi bernilai hingga. Nonnegativitas jelas, dan pertukaran A dengan B tidak mengubah maksimum, jadi $d_H(A, B) = d_H(B, A)$. Jika $A = B$, semua jarak ke himpunan itu nol. Sebaliknya, jika $d_H(A, B) = 0$, maka $d(a, B) = 0$ untuk setiap $a \in A$. Himpunan kompak dalam ruang metrik tertutup, sehingga $a \in B$. Jadi $A \subseteq B$; secara simetris $B \subseteq A$.

Ambil himpunan kompak tak kosong A, B, C . Untuk $a \in A$, $b \in B$, dan $c \in C$, ketaksamaan segitiga memberi $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. Dengan mengambil infimum terhadap c , lalu memperkirakan $d(b, C) \leq$

$d_H(B, C)$, diperoleh $d(a, C) \leq d(a, b) + d_H(B, C)$. Mengambil infimum terhadap $b \in B$ memberi $d(a, C) \leq d(a, B) + d_H(B, C)$. Setelah supremum terhadap $a \in A$,

$$\sup_{a \in A} d(a, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Argumen simetris memberi batas yang sama bagi $\sup_{c \in C} d(c, A)$. Maksimum kedua ruas kiri itu adalah $d_H(A, C)$, sehingga $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$. Semua aksioma metrik terpenuhi.

Pemeriksaan Q.83 Kontraksi himpunan dan atraktor unik. Misalkan (X, d) ruang metrik lengkap dan $f_1, \dots, f_N : X \rightarrow X$ kontraksi dengan satu konstanta bersama $0 \leq c < 1$. Pada koleksi $\mathcal{K}(X)$ subhimpunan kompak tak kosong, definisikan $H(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$. Buktikan bahwa $d_H(H(A), H(B)) \leq c d_H(A, B)$. Dengan memakai kelengkapan $(\mathcal{K}(X), d_H)$ dan teorema titik tetap kontraksi, simpulkan bahwa ada tepat satu atraktor K dengan $H(K) = K$ dan bahwa iterasi dari sembarang $A_0 \in \mathcal{K}(X)$ menuju K .

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $x = f_i(a)$, dekati a oleh suatu titik $b \in B$.

Tahap 2. Gunakan $d(f_i(a), f_i(b)) \leq c d(a, b)$ dan ambil infimum, supremum, serta maksimum.

Tahap 3. Terapkan teorema titik tetap Banach pada pemetaan H .

Jawaban. Setiap titik $f_i(a)$ dalam $H(A)$ berjarak paling besar $c d(a, B)$ dari $H(B)$; arah sebaliknya simetris. Maka H kontraksi berfaktor paling besar c . Kelengkapan hiperruang dan teorema Banach memberi satu-satunya titik tetap K serta konvergensi $H^n(A_0) \rightarrow K$ dalam metrik Hausdorff.

Solusi. Ambil $x \in H(A)$. Ada i dan $a \in A$ dengan $x = f_i(a)$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, pilih $b \in B$ sehingga $d(a, b) < d(a, B) + \epsilon$. Karena $f_i(b) \in H(B)$,

$$d(x, H(B)) \leq d(f_i(a), f_i(b)) \leq c d(a, b) < c(d(a, B) + \epsilon).$$

Biarkan $\epsilon \downarrow 0$. Maka $d(x, H(B)) \leq c d(a, B) \leq c d_H(A, B)$. Mengambil supremum terhadap $x \in H(A)$ memberi satu sisi definisi metrik Hausdorff. Pertukaran A dan B memberi sisi lainnya, sehingga $d_H(H(A), H(B)) \leq c d_H(A, B)$.

Gabungan berhingga citra kompak adalah kompak dan tak kosong, jadi H memang memetakan $\mathcal{K}(X)$ ke dirinya sendiri. Dengan fakta yang diberikan bahwa $\mathcal{K}(X)$ lengkap, H adalah kontraksi pada ruang metrik lengkap. Teorema titik tetap Banach menghasilkan tepat satu $K \in \mathcal{K}(X)$ dengan $H(K) = K$. Untuk setiap $A_0 \in \mathcal{K}(X)$, barisan $A_{n+1} = H(A_n)$ memenuhi $d_H(A_n, K) \leq c^n d_H(A_0, K)$ dan karena itu konvergen ke K . Himpunan K ialah atraktor unik sistem fungsi tersebut.

Lampiran R

Panduan Belajar Mandiri Bab 18: Ruang Topologi Terhubung

Komponen ini mendampingi Bab 18, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi secara bertahap.

Bab sumber memuat tepat 128 kejadian prompt fisik dan 128 entri dukungan sumber kanonis: 117 tugas atomik, sembilan pernyataan langsung, dan dua badan langsung. Enam simpul pengelompokan mengatur 15 subprompt tanpa dihitung ulang sebagai prompt tambahan. Tidak ada kejadian duplikat atau alias kejadian dalam bab ini.

Delapan uji penguasaan orisinal mengintegrasikan pemisahan, kriteria buka-tertutup, citra kontinu, sub-himpunan terhubung dari garis real, komponen, titik pemutus, Teorema Nilai Antara, dan penerapan titik tetap. Bersama 128 panduan sumber, komponen ini mempunyai tepat 136 entri dan 544 permukaan bertahap berupa pernyataan, petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi dari Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University, tidak menyatakan dukungan mereka, dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0. Teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tersebut tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Panduan Belajar Mandiri: Keterhubungan, Komponen, dan Titik Tetap

Empat puluh tiga panduan ini mengikuti tepat urutan prompt nonlatihan Bab 18. Kerjakan dahulu prompt pada bab utama, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap. Setiap pernyataan di bawah merumuskan kembali persoalan sumber secara ringkas tanpa menggantikan kegiatan penemuan pada bab utama.

Seluruh uraian pendamping ini ditulis secara mandiri sebagai komponen terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0. Komponen ini bukan materi maupun solusi resmi GVSU dan tidak menyatakan dukungan penulis atau institusi sumber. Identitas lisensinya tidak diratakan dengan lisensi teks utama.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Pemeriksaan R.1 Dua Titik yang Terpisah. Dalam $X = \{a, b, c, d\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, tentukan apakah $A = \{a, b\}$ terhubung dengan memeriksa topologi subruangnya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Iris setiap anggota τ dengan A .

Tahap 2. Periksa apakah $\{a\}$ dan $\{b\}$ buka relatif dalam A .

Tahap 3. Bandingkan gabungan dan irisan kedua singleton itu dengan A dan $\emptyset$.

Jawaban. A terputus; pasangan $\{a\}, \{b\}$ merupakan pemisahan dari A .

Solusi. Topologi subruang pada A adalah

$$\tau_A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

Memang, $\{a\} = A \cap \{a\}$ dan $\{b\} = A \cap \{b\}$, sehingga keduanya buka relatif.

Kedua himpunan tersebut takkosong, saling lepas, dan gabungannya sama dengan A . Jadi keduanya membentuk pemisahan, sehingga A tidak terhubung.

Pemeriksaan R.2 Pemisahan pada Subruang Tiga Titik. Untuk $A = \{a, b, c\}$ dalam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\},$$

tentukan apakah A terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hitung irisan A dengan $\{a\}$ dan $\{b, c, d, e, f\}$.

Tahap 2. Periksa apakah hasil kedua irisan itu saling lepas.

Tahap 3. Tentukan apakah gabungannya menyusun seluruh A .

Jawaban. A terputus, dengan pemisahan $\{a\}$ dan $\{b, c\}$.

Solusi. Himpunan $\{a\}$ buka relatif karena sudah terbuka dalam X . Selain itu, $A \cap \{b, c, d, e, f\} = \{b, c\}$, sehingga $\{b, c\}$ juga buka relatif dalam A .

Kedua himpunan itu takkosong, beririsan kosong, dan $\{a\} \cup \{b, c\} = A$. Karena itu A mempunyai pemisahan dan tidak terhubung.

Pemeriksaan R.3 Ruang Berhingga Tanpa Himpunan Buka-Tertutup Nontrivial. Misalkan $A = X = \{a, b, c, d\}$ dan

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

Putuskan apakah X terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika U, V memisahkan X , maka $V = X \setminus U$.

Tahap 2. Ambil komplemen setiap anggota nontrivial τ .

Tahap 3. Periksa apakah ada anggota nontrivial yang komplemennya juga berada dalam τ .

Jawaban. X terhubung; satu-satunya himpunan yang sekaligus buka dan tertutup ialah $\emptyset$ dan X .

Solusi. Komplemen himpunan buka nontrivial berturut-turut adalah $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, d\}$, $\{d\}$, dan $\{a\}$. Tidak satu pun tercantum dalam τ .

Andaikan $X = U \cup V$ merupakan pemisahan. Karena U dan V saling lepas, $V = X \setminus U$; jadi U buka dan tertutup serta nontrivial. Daftar di atas menunjukkan hal itu mustahil. Maka X terhubung.

Pemeriksaan R.4 Subhimpunan dalam Topologi Diskret. Tentukan keterhubungan $A = \{d, f\}$ dalam ruang diskret $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, lalu generalisasikan untuk semua subhimpunan ruang diskret.

Petunjuk. *Tahap 1.* Dalam topologi diskret, setiap singleton terbuka.

Tahap 2. Pisahkan A menjadi dua singleton.

Tahap 3. Untuk subhimpunan yang lebih besar, pisahkan satu titik dari semua titik sisanya.

Jawaban. A terputus. Dalam ruang diskret, tepat subhimpunan dengan paling banyak satu titik yang

terhubung.

Solusi. Karena topologi diskret memuat semua subhimpunan, $\{d\}$ dan $\{f\}$ buka, takkosong, saling lepas, dan gabungannya A . Jadi A terputus.

Jika subhimpunan diskret B mempunyai sedikitnya dua titik, pilih $b \in B$; pasangan $\{b\}$ dan $B \setminus \{b\}$ memisahkan B . Sebaliknya, himpunan kosong dan singleton tidak dapat ditulis sebagai gabungan dua himpunan takkosong yang saling lepas. Jadi keduanya terhubung.

Pemeriksaan R.5 Subhimpunan dalam Topologi Indiskret. Tentukan keterhubungan $A = \{a, c, d\}$ dalam ruang indiskret $X = \{a, b, c, d, e\}$, lalu generalisasikan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Iris dua himpunan buka $\emptyset$ dan X dengan A .

Tahap 2. Tentukan topologi subruang pada A .

Tahap 3. Tanyakan apakah dua himpunan buka relatif takkosong dapat saling lepas dan menutupi A .

Jawaban. A terhubung. Setiap subhimpunan ruang indiskret terhubung.

Solusi. Topologi subruang pada A adalah $\{\emptyset, A\}$, sebab hanya itulah irisan A dengan anggota topologi indiskret pada X . Tidak tersedia dua himpunan buka relatif takkosong yang berbeda untuk membentuk pemisahan.

Argumen yang sama berlaku bagi setiap $B \subseteq X$: topologi subruangnya adalah $\{\emptyset, B\}$ jika B takkosong. Untuk $B = \emptyset$, syarat adanya dua bagian takkosong juga mustahil. Jadi semua subhimpunan terhubung.

Pemeriksaan R.6 Bilangan Bulat dalam Topologi Komplemen Berhingga. Putuskan apakah $A = \mathbb{Z}$ terhubung sebagai subruang dari $\mathbb{R}$ bertopologi komplemen berhingga, lalu klasifikasikan subhimpunan terhubung secara umum.

Petunjuk. *Tahap 1.* Topologi yang terinduksi pada subhimpunan tak berhingga juga bertopologi komplemen berhingga.

Tahap 2. Dua himpunan buka takkosong di ruang komplemen berhingga yang tak berhingga selalu beririsan.

Tahap 3. Pada subhimpunan berhingga, tunjukkan bahwa setiap bagiannya terbuka relatif.

Jawaban. $\mathbb{Z}$ terhubung. Secara umum, semua subhimpunan tak berhingga, singleton, dan himpunan kosong terhubung; subhimpunan berhingga dengan sedikitnya dua titik terputus.

Solusi. Jika U dan V buka relatif takkosong dalam $\mathbb{Z}$, komplemen keduanya di $\mathbb{Z}$ berhingga. Maka $\mathbb{Z} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{Z} \setminus U) \cup (\mathbb{Z} \setminus V)$ berhingga, sehingga $U \cap V$ tidak mungkin kosong. Jadi tidak ada pemisahan dari $\mathbb{Z}$.

Bukti ini berlaku bagi setiap subhimpunan tak berhingga. Jika F berhingga, untuk setiap $B \subseteq F$ terdapat himpunan buka $\mathbb{R} \setminus (F \setminus B)$ yang irisannya dengan F sama dengan B . Jadi topologi pada F diskret; klasifikasi berhingga kemudian mengikuti hasil ruang diskret.

Pemeriksaan R.7 Dua Interval yang Dipisahkan Celah. Tentukan keterhubungan $X = [1, 2] \cup (3, 4)$ dengan topologi subruang Euklides.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih sebuah bilangan di dalam celah antara 2 dan 3.

Tahap 2. Iris X dengan dua sinar buka yang dipisahkan bilangan tersebut.

Tahap 3. Verifikasi ketakosongan, ketaksalingberirisan, dan gabungannya.

Jawaban. X terputus; $[1, 2]$ dan $(3, 4)$ membentuk pemisahan relatif.

Solusi. Ambil $c = 5/2$. Himpunan $U = X \cap (-\infty, c) = [1, 2]$ dan $V = X \cap (c, \infty) = (3, 4)$ terbuka dalam topologi subruang. Keduanya takkosong dan saling lepas.

Setiap titik X berada tepat pada salah satu dari dua interval, sehingga $X = U \cup V$. Maka U, V merupakan pemisahan dan X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.8 Grafik Hiperbola dan Sumbu Mendatar. Misalkan $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x \text{ atau } y = 0\}$ dengan topologi subruang Euklides. Tentukan apakah X terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pisahkan X menjadi sumbu x dan grafik $xy = 1$.

Tahap 2. Kedua bagian merupakan himpunan tertutup dalam X .

Tahap 3. Karena keduanya saling melengkapi di X , simpulkan bahwa keduanya juga buka relatif.

Jawaban. X terputus; sumbu x dan grafik $y = 1/x$ membentuk pemisahan.

Solusi. Tuliskan $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ dan $H = \{(x, y) : xy = 1\}$. Keduanya takkosong, saling lepas, dan $X = L \cup H$. Himpunan L tertutup di $\mathbb{R}^2$ sebagai prapeta $\{0\}$ oleh fungsi kontinu $(x, y) \mapsto y$; demikian pula H tertutup sebagai prapeta $\{1\}$ oleh $(x, y) \mapsto xy$.

Maka L dan H tertutup dalam X . Karena $L = X \setminus H$ dan $H = X \setminus L$, keduanya juga buka relatif. Jadi L, H adalah pemisahan dari X .

Pemeriksaan R.9 Himpunan Buka-Tertutup dalam Ruang Terhubung. Jika X terhubung dan $A \subseteq X$ sekaligus buka dan tertutup, tentukan kemungkinan bagi A dengan meninjau A dan $X \setminus A$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ketertutupan A membuat $X \setminus A$ terbuka.

Tahap 2. Kedua himpunan itu saling lepas dan gabungannya X .

Tahap 3. Gunakan keterhubungan untuk menentukan mana yang harus kosong.

Jawaban. Harus berlaku $A = \emptyset$ atau $A = X$.

Solusi. Karena A buka dan tertutup, baik A maupun $X \setminus A$ terbuka. Mereka saling lepas dan $A \cup (X \setminus A) = X$. Jika keduanya takkosong, pasangan itu menjadi pemisahan dari X , bertentangan dengan keterhubungan.

Jadi salah satunya kosong. Jika $A = \emptyset$, kita memperoleh kemungkinan pertama; jika $X \setminus A = \emptyset$, maka $A = X$. Tidak ada kemungkinan lain.

Pemeriksaan R.10 Kebalikan Kriteria Buka-Tertutup. Andaikan satu-satunya subhimpunan X yang sekaligus buka dan tertutup adalah $\emptyset$ dan X . Buktikan bahwa X terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan sebaliknya bahwa $X = U \cup V$ merupakan pemisahan.

Tahap 2. Dari kesalinglepasan, tulis $U = X \setminus V$.

Tahap 3. Tunjukkan bahwa U menjadi buka-tertutup nontrivial.

Jawaban. Ya. Setiap pemisahan akan menghasilkan himpunan buka-tertutup nontrivial, sehingga tidak mungkin ada.

Solusi. Andaikan X terputus. Maka ada himpunan buka takkosong U, V yang saling lepas dan memenuhi $X = U \cup V$. Karena gabungan meliputi X dan irisannya kosong, $U = X \setminus V$.

Himpunan V terbuka, sehingga U tertutup; U juga terbuka menurut asumsi pemisahan. Ketakosongan U, V memberi $U \neq \emptyset$ dan $U \neq X$. Ini bertentangan dengan hipotesis. Jadi X terhubung.

Pemeriksaan R.11 Karakterisasi Keterhubungan dengan Himpunan Buka-Tertutup. Rumuskan dan buktikan teorema yang mengarakterisasi keterhubungan (X, τ) melalui subhimpunan yang sekaligus buka dan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Untuk arah maju, pasangkan himpunan buka-tertutup dengan komplementnya.

Tahap 2. Untuk arah balik, mulai dari pemisahan hipotetis.

Tahap 3. Dalam kedua arah, gunakan fakta bahwa dua bagian saling melengkapi.

Jawaban. Ruang X terhubung jika dan hanya jika satu-satunya subhimpunan yang sekaligus buka dan tertutup adalah $\emptyset$ dan X .

Solusi. Jika X terhubung dan A buka-tertutup, maka A serta $X \setminus A$ merupakan himpunan buka yang saling lepas dan menutupi X . Keterhubungan memaksa salah satunya kosong, jadi $A = \emptyset$ atau $A = X$.

Sebaliknya, jika hanya $\emptyset$ dan X yang buka-tertutup tetapi X mempunyai pemisahan U, V , maka $U =$

$X \setminus V$ sekaligus buka dan tertutup. Ketakosongan kedua bagian membuat U nontrivial, suatu kontradiksi. Maka X terhubung.

Pemeriksaan R.12 Memulai Bukti Citra Kontinu. Misalkan $g : X \rightarrow Z = f(X)$ kontinu dan surjektif, dengan X terhubung. Untuk memulai bukti dengan kontradiksi bahwa Z terhubung, nyatakan secara lengkap konsekuensi asumsi bahwa Z terputus.

Petunjuk. *Tahap 1.* Buka definisi ruang terputus.

Tahap 2. Namai kedua himpunan buka dengan U dan V .

Tahap 3. Catat empat sifat: buka, takkosong, saling lepas, dan menutupi Z .

Jawaban. Ada himpunan buka takkosong $U, V \subseteq Z$ dengan $U \cap V = \emptyset$ dan $U \cup V = Z$.

Solusi. Asumsi bahwa Z tidak terhubung tepat berarti bahwa Z mempunyai pemisahan. Jadi terdapat U, V yang terbuka dalam topologi subruang pada Z , keduanya takkosong, dengan $U \cap V = \emptyset$ serta $U \cup V = Z$. Sifat-sifat inilah yang akan ditarik kembali melalui g .

Pemeriksaan R.13 Prapeta Pemisahan Bersifat Terbuka. Dengan $R = g^{-1}(U)$ dan $S = g^{-1}(V)$, jelaskan mengapa R dan S terbuka dalam X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Ingat definisi kekontinuan melalui prapeta himpunan buka.

Tahap 2. Gunakan bahwa U dan V terbuka dalam kodomain Z .

Tahap 3. Terapkan definisi itu secara terpisah kepada kedua himpunan.

Jawaban. Kekontinuan g membuat prapeta himpunan buka terbuka, sehingga R dan S terbuka.

Solusi. Menurut definisi, $g : X \rightarrow Z$ kontinu jika untuk setiap himpunan buka $O \subseteq Z$, prapeta $g^{-1}(O)$ terbuka dalam X . Karena U dan V terbuka dalam Z , kita langsung memperoleh $R = g^{-1}(U)$ dan $S = g^{-1}(V)$ terbuka dalam X .

Pemeriksaan R.14 Prapeta Gabungan Menutupi Domain. Buktikan bahwa $R \cup S = X$ dari $U \cup V = Z$ dan $Z = g(X)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan identitas $g^{-1}(U \cup V) = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$.

Tahap 2. Ganti $U \cup V$ dengan Z .

Tahap 3. Karena kodomain g adalah Z , tentukan $g^{-1}(Z)$.

Jawaban. $R \cup S = g^{-1}(U \cup V) = g^{-1}(Z) = X$.

Solusi. Prapeta mempertahankan gabungan, sehingga

$$R \cup S = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cup V).$$

Karena $U \cup V = Z$, ruas kanan adalah $g^{-1}(Z)$. Setiap $x \in X$ dipetakan ke kodomain Z , jadi $g^{-1}(Z) = X$. Maka $R \cup S = X$.

Pemeriksaan R.15 Prapeta Kedua Bagian Tidak Kosong. Gunakan kesurjektifan $g : X \rightarrow Z$ untuk membuktikan bahwa $R = g^{-1}(U)$ dan $S = g^{-1}(V)$ takkosong.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih $u \in U$ dan $v \in V$.

Tahap 2. Gunakan surjektivitas untuk mencari prapeta masing-masing titik.

Tahap 3. Tempatkan kedua prapeta itu dalam R dan S .

Jawaban. Surjektivitas memberi $x_u \in R$ dan $x_v \in S$, sehingga kedua prapeta takkosong.

Solusi. Karena U, V takkosong, pilih $u \in U$ dan $v \in V$. Kesurjektifan g menghasilkan $x_u, x_v \in X$ dengan $g(x_u) = u$ dan $g(x_v) = v$. Maka $x_u \in g^{-1}(U) = R$ dan $x_v \in g^{-1}(V) = S$. Jadi R serta S takkosong.

Pemeriksaan R.16 Prapeta Kedua Bagian Saling Lepas. Buktikan $R \cap S = \emptyset$ dari $U \cap V = \emptyset$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan identitas prapeta untuk irisan.

Tahap 2. Ganti $U \cap V$ dengan himpunan kosong.

Tahap 3. Hitung prapeta himpunan kosong.

Jawaban. $R \cap S = g^{-1}(U \cap V) = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Solusi. Prapeta mempertahankan irisan:

$$R \cap S = g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cap V).$$

Pemisahan U, V memenuhi $U \cap V = \emptyset$, sedangkan tidak ada titik yang dipetakan ke himpunan kosong. Karena itu $R \cap S = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Pemeriksaan R.17 Citra Kontinu Ruang Terhubung. Lengkapi bukti bahwa jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu dan X terhubung, maka $f(X)$ terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ganti kodomain dengan $Z = f(X)$ agar pemetaan menjadi surjektif.

Tahap 2. Tarik kembali pemisahan hipotetis U, V dari Z .

Tahap 3. Gunakan hasil empat langkah sebelumnya untuk memperoleh pemisahan domain.

Jawaban. Pemisahan hipotetis dari $f(X)$ akan menghasilkan pemisahan dari X melalui prapeta, bertenangan dengan keterhubungan X .

Solusi. Letakkan $Z = f(X)$ dan pandang $g : X \rightarrow Z$ dengan $g(x) = f(x)$. Fungsi g kontinu dan surjektif. Andaikan $Z = U \cup V$ adalah pemisahan.

Prapeta $R = g^{-1}(U)$ dan $S = g^{-1}(V)$ terbuka karena g kontinu; keduanya takkosong karena g surjektif; $R \cup S = X$ dan $R \cap S = \emptyset$ menurut hukum prapeta. Jadi R, S memisahkan X , suatu kontradiksi. Maka $f(X) = Z$ terhubung.

Pemeriksaan R.18 Menyelesaikan Kriteria Pemisahan Subhimpunan. Misalkan $A \subseteq X$ dan ada himpunan buka $U, V \subseteq X$ dengan $A \subseteq U \cup V$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, serta $U \cap V \cap A = \emptyset$. Buktikan bahwa A terputus.

Petunjuk. *Tahap 1.* Definisikan $U' = U \cap A$ dan $V' = V \cap A$.

Tahap 2. Periksa keterbukaan relatif dan ketakosongan keduanya.

Tahap 3. Gunakan dua syarat lainnya untuk menghitung gabungan dan irisan.

Jawaban. $U \cap A$ dan $V \cap A$ membentuk pemisahan dari A .

Solusi. Karena U, V terbuka dalam X , himpunan $U' = U \cap A$ dan $V' = V \cap A$ terbuka dalam subruang A . Dua syarat irisan menjamin keduanya takkosong.

Selanjutnya,

$$U' \cap V' = U \cap V \cap A = \emptyset.$$

Karena $A \subseteq U \cup V$, setiap titik A berada dalam U' atau V' , sehingga $U' \cup V' = A$. Jadi pasangan itu merupakan pemisahan dan A terputus.

Pemeriksaan R.19 Mewariskan Syarat Pemisahan kepada Subhimpunan. Jika U, V memisahkan A dan $C \subseteq A$, buktikan $C \subseteq U \cup V$ serta $C \cap U \cap V = \emptyset$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan rantai inklusi $C \subseteq A \subseteq U \cup V$.

Tahap 2. Tulis $C \cap U \cap V \subseteq A \cap U \cap V$.

Tahap 3. Terapkan syarat terakhir dalam definisi pemisahan A .

Jawaban. Kedua kesimpulan mengikuti langsung dari $C \subseteq A$ dan syarat pemisahan pada A .

Solusi. Pemisahan U, V dari A memenuhi $A \subseteq U \cup V$ dan $A \cap U \cap V = \emptyset$. Karena $C \subseteq A$, transitivitas inklusi memberi $C \subseteq U \cup V$. Selain itu, $C \cap U \cap V \subseteq A \cap U \cap V = \emptyset$, sehingga $C \cap U \cap V = \emptyset$.

Pemeriksaan R.20 Subhimpunan Terhubung Memilih Satu Sisi. Dalam situasi sebelumnya, anggap C terhubung. Apa yang harus berlaku bagi $U' = U \cap C$ dan $V' = V \cap C$?

Petunjuk. Tahap 1. Kedua irisan terbuka relatif dalam C .

Tahap 2. Gunakan hasil sebelumnya untuk menghitung gabungan dan irisannya.

Tahap 3. Keterhubungan melarang keduanya takkosong sekaligus.

Jawaban. Salah satu dari U' dan V' harus kosong; yang lain sama dengan C .

Solusi. Himpunan U' dan V' terbuka dalam C . Karena $C \subseteq U \cup V$, berlaku $U' \cup V' = C$; karena $C \cap U \cap V = \emptyset$, berlaku $U' \cap V' = \emptyset$.

Jika keduanya takkosong, mereka memisahkan C , bertentangan dengan keterhubungan. Jadi $U' = \emptyset$ atau $V' = \emptyset$. Karena gabungannya C , bagian yang tidak kosong harus sama dengan C .

Pemeriksaan R.21 Lema Subhimpunan Terhubung dan Pemisahan. Buktikan: jika U, V memisahkan $A \subseteq X$ dan $C \subseteq A$ terhubung, maka $C \subseteq U$ atau $C \subseteq V$.

Petunjuk. Tahap 1. Bentuk $U \cap C$ dan $V \cap C$.

Tahap 2. Tunjukkan bahwa keduanya tidak dapat sama-sama takkosong.

Tahap 3. Terjemahkan kekosongan salah satu irisan menjadi inklusi C pada sisi lainnya.

Jawaban. Keterhubungan C memaksa salah satu irisan $C \cap U$ atau $C \cap V$ kosong, sehingga seluruh C berada pada sisi lainnya.

Solusi. Karena $C \subseteq A \subseteq U \cup V$, kita mempunyai $C = (C \cap U) \cup (C \cap V)$. Kedua bagian terbuka relatif dalam C , dan $(C \cap U) \cap (C \cap V) = C \cap U \cap V = \emptyset$.

Jika kedua bagian takkosong, mereka memisahkan C . Jadi salah satunya kosong. Jika $C \cap U = \emptyset$, persamaan gabungan memberi $C = C \cap V \subseteq V$; kasus lainnya memberi $C \subseteq U$. Lema terbukti.

Pemeriksaan R.22 Singleton pada Garis Real. Tentukan apakah $A = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$ terhubung dan berikan alasan dari definisi.

Petunjuk. Tahap 1. Andaikan ada dua subhimpunan takkosong dari A .

Tahap 2. Setiap subhimpunan takkosong dari singleton harus memuat a .

Tahap 3. Periksa apakah dua subhimpunan tersebut dapat saling lepas.

Jawaban. Ya. Setiap singleton terhubung dalam ruang topologi apa pun.

Solusi. Satu-satunya subhimpunan dari $A = \{a\}$ adalah $\emptyset$ dan A . Karena itu tidak mungkin ada dua subhimpunan buka relatif yang keduanya takkosong dan saling lepas. Jadi A tidak mempunyai pemisahan dan terhubung. Argumen tidak menggunakan sifat khusus $\mathbb{R}$.

Pemeriksaan R.23 Subhimpunan Real yang Bukan Interval. Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ memuat $a < c < b$ dengan $a, b \in A$ tetapi $c \notin A$. Temukan pemisahan dari A dan simpulkan keterhubungannya.

Petunjuk. Tahap 1. Gunakan dua sinar buka yang berujung di c .

Tahap 2. Iris kedua sinar dengan A ; titik a dan b menjamin ketakosongan.

Tahap 3. Karena $c \notin A$, periksa bahwa kedua irisan menutupi A .

Jawaban. Himpunan $A \cap (-\infty, c)$ dan $A \cap (c, \infty)$ memisahkan A ; jadi A terputus.

Solusi. Definisikan $U = (-\infty, c)$ dan $V = (c, \infty)$. Kedua himpunan terbuka dan saling lepas. Irisan $A \cap U$ memuat a , sedangkan $A \cap V$ memuat b , jadi keduanya takkosong dan terbuka relatif dalam A .

Setiap bilangan real selain c berada dalam $U \cup V$. Karena $c \notin A$, berlaku $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$. Maka kedua irisan tersebut adalah pemisahan dari A , sehingga A terputus.

Pemeriksaan R.24 Klasifikasi Subhimpunan Terhubung dari Garis Real. Deskripsikan secara tepat semua subhimpunan terhubung dari $(\mathbb{R}, d_E)$.

Petunjuk. Tahap 1. Hasil sebelumnya menunjukkan bahwa himpunan terhubung harus memuat setiap titik di antara dua anggotanya.

Tahap 2. Sifat tersebut adalah sifat pendefinisi interval.

Tahap 3. Sertakan interval terbatas, tak terbatas, singleton, dan himpunan kosong.

Jawaban. Subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ tepat interval-interval, termasuk singleton dan himpunan kosong.

Solusi. Jika A terhubung dan $a, b \in A$ dengan $a < b$, maka setiap c dengan $a < c < b$ harus berada dalam A ; jika tidak, dua sinar pada c memisahkan A . Jadi A mempunyai sifat interval.

Sebaliknya, andaikan interval I mempunyai pemisahan U, V . Pilih $u \in U$ dan $v \in V$, dengan $u < v$, dan letakkan $s = \sup(U \cap [u, v])$. Sifat interval memberi $[u, v] \subseteq I$. Jika $s \in U$, keterbukaan relatif U memberi titik $U \cap [u, v]$ yang lebih besar daripada s (dan $s < v$ karena $v \in V$), bertentangan dengan sifat batas atas. Jika $s \in V$, keterbukaan relatif V memberi lingkungan kiri s yang berada dalam V , sedangkan sifat supremum memberi titik $U \cap [u, v]$ di lingkungan itu, juga kontradiksi. Karena $s \in U \cup V = I$, kedua kemungkinan sudah habis. Jadi setiap interval terhubung. Singleton dan himpunan kosong memenuhi definisi secara langsung.

Pemeriksaan R.25 Setiap Titik Berada dalam Himpunan Terhubung. Buktikan bahwa untuk setiap $x \in X$, singleton $\{x\}$ terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Daftar semua subhimpunan singleton.

Tahap 2. Pemisahan memerlukan dua bagian takkosong.

Tahap 3. Dua bagian takkosong dari singleton tidak dapat saling lepas.

Jawaban. $\{x\}$ terhubung karena tidak mempunyai pemisahan.

Solusi. Satu-satunya subhimpunan $\{x\}$ adalah $\emptyset$ dan $\{x\}$. Setiap subhimpunan takkosongnya sama dengan seluruh singleton. Karena itu dua subhimpunan takkosong selalu beririsan di x dan tidak mungkin membentuk pemisahan. Jadi singleton terhubung, apa pun topologi pada X .

Pemeriksaan R.26 Gabungan Himpunan Terhubung dengan Irisan Bersama. Misalkan setiap $A_\alpha \subseteq X$ terhubung dan $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Buktikan bahwa $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih p dalam irisan semua A_α .

Tahap 2. Andaikan U, V memisahkan A dan letakkan p pada salah satu sisi.

Tahap 3. Setiap A_α terhubung dan memuat p , sehingga seluruhnya harus memilih sisi yang sama.

Jawaban. Semua A_α harus berada pada sisi pemisahan yang memuat titik irisan bersama; sisi lainnya lalu kosong.

Solusi. Pilih $p \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Andaikan U, V memisahkan A , dan tanpa mengurangi keumuman $p \in U$. Untuk setiap α , himpunan A_α terhubung dan termuat dalam A . Lema pemisahan menyatakan $A_\alpha \subseteq U$ atau $A_\alpha \subseteq V$.

Pilihan kedua mustahil karena $p \in A_\alpha \cap U$ dan $U \cap V \cap A = \emptyset$. Jadi semua $A_\alpha \subseteq U$, sehingga $A \subseteq U$ dan $A \cap V = \emptyset$. Ini bertentangan dengan ketakosongan sisi V dari pemisahan. Maka A terhubung.

Pemeriksaan R.27 Refleksivitas Relasi Komponen. Pada X , definisikan $x \sim y$ jika keduanya termuat dalam suatu subhimpunan terhubung yang sama. Buktikan bahwa $\sim$ refleksif.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ambil sebarang $x \in X$.

Tahap 2. Gunakan subhimpunan terhubung terkecil yang memuat x .

Tahap 3. Terapkan definisi $\sim$ kepada pasangan (x, x) .

Jawaban. Ya. Singleton $\{x\}$ terhubung dan memuat x bersama dirinya sendiri, jadi $x \sim x$.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, singleton $\{x\}$ terhubung. Kedua unsur dalam pasangan (x, x) berada dalam singleton yang sama. Menurut definisi relasi, $x \sim x$. Karena x sebarang, $\sim$ refleksif.

Pemeriksaan R.28 Simetri Relasi Komponen. Buktikan bahwa relasi $\sim$ yang didefinisikan melalui subhimpunan terhubung bersama bersifat simetris.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan $x \sim y$.

Tahap 2. Pilih satu subhimpunan terhubung yang memuat keduanya.

Tahap 3. Urutan menyebut x dan y tidak mengubah keanggotaan dalam himpunan itu.

Jawaban. Ya. Himpunan terhubung yang memuat x dan y juga memuat y dan x , jadi $y \sim x$.

Solusi. Jika $x \sim y$, ada subhimpunan terhubung $C \subseteq X$ dengan $x, y \in C$. Pernyataan $x, y \in C$ setara dengan $y, x \in C$. Himpunan yang sama menyaksikan $y \sim x$. Maka relasi tersebut simetris.

Pemeriksaan R.29 Transitivitas Relasi Komponen. Jika $x \sim y$ dan $y \sim z$, buktikan $x \sim z$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih himpunan terhubung C yang memuat x, y dan D yang memuat y, z .

Tahap 2. Perhatikan bahwa $C \cap D$ memuat y .

Tahap 3. Gunakan teorema gabungan beririsan untuk $C \cup D$.

Jawaban. $C \cup D$ terhubung karena $C \cap D \neq \emptyset$, dan gabungan itu memuat x, z ; jadi $x \sim z$.

Solusi. Dari $x \sim y$, pilih C terhubung dengan $x, y \in C$. Dari $y \sim z$, pilih D terhubung dengan $y, z \in D$. Titik y berada dalam $C \cap D$, sehingga irisannya takkosong.

Gabungan dua himpunan terhubung dengan irisan takkosong bersifat terhubung. Maka $C \cup D$ terhubung dan memuat x serta z . Menurut definisi, $x \sim z$; jadi relasi transitif.

Pemeriksaan R.30 Titik Pemutus pada Interval Buka. Verifikasi bahwa 1 merupakan titik pemutus dari $(0, 2)$ dan generalisasikan kepada setiap titik interval tersebut.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hapus 1 dan tulis ruang sisanya sebagai dua interval.

Tahap 2. Kedua interval itu buka relatif, takkosong, dan saling lepas.

Tahap 3. Ganti 1 dengan titik sebarang $c \in (0, 2)$.

Jawaban. Setiap $c \in (0, 2)$ adalah titik pemutus karena penghapusannya menghasilkan $(0, c) \cup (c, 2)$.

Solusi. Untuk $c \in (0, 2)$, berlaku

$$(0, 2) \setminus \{c\} = (0, c) \cup (c, 2).$$

Kedua interval di ruas kanan takkosong, saling lepas, dan terbuka relatif dalam ruang yang tersisa. Karena gabungannya seluruh ruang tersisa, keduanya membentuk pemisahan.

Jadi penghapusan setiap c memutus $(0, 2)$. Khususnya, untuk $c = 1$ diperoleh bagian $(0, 1)$ dan $(1, 2)$.

Pemeriksaan R.31 Lingkaran sebagai Himpunan Pemutus Cakram. Untuk cakram $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ dan lingkaran $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, jelaskan mengapa D tidak mempunyai titik pemutus tetapi S merupakan himpunan pemutus.

Petunjuk. *Tahap 1.* Setelah satu titik cakram dihapus, lintasan dapat dibelokkan sedikit untuk menghindari titik itu.

Tahap 2. Setelah S dihapus, bandingkan titik dengan jari-jari kurang dari 1 dan lebih dari 1.

Tahap 3. Fungsi jari-jari kontinu tidak dapat melintasi nilai 1 tanpa menyentuh S .

Jawaban. Cakram dikurangi satu titik tetap terhubung melalui lintasan. Sebaliknya, $D \setminus S$ terpisah menjadi cakram buka berjari-jari 1 dan anulus dengan jari-jari antara 1 dan 2.

Solusi. Untuk dua titik dalam $D \setminus \{p\}$, ruas garis lurus di antara keduanya berada dalam cakram cembung. Jika ruas itu melalui p , pilih titik perantara kecil di dalam D yang tidak segaris dengan keduanya dan p ; dua ruas melalui titik perantara menghindari p . Jadi $D \setminus \{p\}$ terhubung melalui lintasan untuk setiap $p \in D$.

Sementara itu,

$$D \setminus S = \{x^2 + y^2 < 1\} \cup \{1 < x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Kedua bagian takkosong, saling lepas, dan buka relatif dalam $D \setminus S$. Fungsi kontinu $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ memisahkan keduanya di nilai 1. Maka S adalah himpunan pemutus, walaupun tidak ada singleton yang memutus D .

Pemeriksaan R.32 Lingkaran Bukan Interval Tertutup. Gunakan titik pemutus untuk menunjukkan bahwa lingkaran satuan S^1 tidak homeomorfik dengan $[0, 1]$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hapus titik interior, misalnya $1/2$, dari interval.

Tahap 2. Hapus satu titik sebarang dari lingkaran; ruang sisanya dapat dibuka menjadi satu busur.

Tahap 3. Homeomorfisme mempertahankan keterhubungan setelah titik yang bersesuaian dihapus.

Jawaban. Titik $1/2$ memutus $[0, 1]$, sedangkan tidak ada titik yang memutus S^1 . Karena sifat ini invarian terhadap homeomorfisme, kedua ruang tidak homeomorfik.

Solusi. Penghapusan $1/2$ memberi $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, dua bagian buka relatif takkosong yang saling lepas. Jadi $1/2$ adalah titik pemutus interval.

Sebaliknya, lingkaran dikurangi satu titik homeomorfik dengan interval buka, misalnya melalui parametrisasi sudut setelah memilih titik yang dihapus sebagai tempat pemotongan. Maka ruang sisanya terhubung. Jika ada homeomorfisme $h : [0, 1] \rightarrow S^1$, pembatasannya akan memberi homeomorfisme antara ruang setelah $1/2$ dan $h(1/2)$ dihapus, yang mustahil karena satu terputus dan satu terhubung.

Pemeriksaan R.33 Lingkaran dengan Diameter Tambahan. Misalkan $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ dan $B = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$. Tentukan apakah $A \cup B$ homeomorfik dengan A dan berikan invarian pemutus yang meyakinkan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Hapus dua titik $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$ dari $A \cup B$.

Tahap 2. Hitung komponen yang tersisa: dua busur lingkaran dan bagian dalam diameter.

Tahap 3. Bandingkan dengan banyaknya komponen lingkaran setelah dua titik berbeda dihapus.

Jawaban. Tidak. Menghapus kedua ujung diameter dari $A \cup B$ menghasilkan tiga komponen, sedangkan menghapus dua titik berbeda dari lingkaran selalu menghasilkan dua komponen.

Solusi. Dalam $A \cup B$, hapus $p = (-1, 0)$ dan $q = (1, 0)$. Ruang tersisa terbagi menjadi busur atas, busur bawah, dan ruas terbuka $\{(x, 0) : -1 < x < 1\}$. Ketiga bagian itu terhubung dan saling terpisah, sehingga terdapat tiga komponen.

Pada lingkaran A , dua titik berbeda membagi lingkaran menjadi tepat dua busur terbuka, jadi ruang tersisa mempunyai dua komponen. Homeomorfisme hipotetis akan membawa pasangan p, q ke dua titik berbeda pada A dan mempertahankan banyaknya komponen ruang tersisa. Karena $3 \neq 2$, homeomorfisme itu tidak ada.

Pemeriksaan R.34 Empat Kelas Homeomorfisme Enam Ruang. Kelompokkan $S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = (0, 1)$, $S_3 = [-1, 1]$, ruas garis S_4 dari $(0, 0)$ ke $(2, 2)$, serta bentuk huruf $S_5 = X$ dan $S_6 = Y$ menurut kelas homeomorfismenya.

Petunjuk. *Tahap 1.* Bangun homeomorfisme antara garis dan interval buka, serta antara dua ruas tertutup.

Tahap 2. Bandingkan apakah ada titik bukan pemutus dan berapa komponen muncul setelah titik cabang dihapus.

Tahap 3. Pusat huruf X memberi empat cabang; simpul huruf Y memberi tiga.

Jawaban. Kelas-kelasnya adalah $\{S_1, S_2\}$, $\{S_3, S_4\}$, $\{S_5\}$, dan $\{S_6\}$.

Solusi. Fungsi monoton seperti $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ memberi homeomorfisme $\mathbb{R} \cong (0, 1)$. Parametrisasi linear $t \mapsto (t+1, t+1)$ memberi $[-1, 1] \cong S_4$. Jadi dua pasangan yang dinyatakan memang membentuk kelas.

Garis dan interval buka mempunyai sifat bahwa setiap titik adalah titik pemutus. Ruas tertutup mempunyai dua titik ujung yang bukan titik pemutus, sehingga kedua kelas pertama berbeda. Pada X , penghapusan titik pusat menghasilkan empat komponen; pada Y , penghapusan simpul cabang menghasilkan tiga. Tidak ada ruang lain dalam daftar yang mempunyai titik dengan empat atau tiga cabang. Maka S_5 dan S_6 masing-masing membentuk kelas tersendiri.

Pemeriksaan R.35 Kasus Dua Titik Domain yang Sama. Dalam bukti Teorema Nilai Antara untuk $a, b \in A$, jelaskan mengapa cukup menangani kasus $a \neq b$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $a = b$, bandingkan $f(a)$ dan $f(b)$.

Tahap 2. Tentukan semua bilangan yang berada di antara dua nilai yang sama.

Tahap 3. Pilih langsung titik domain yang menghasilkan nilai tersebut.

Jawaban. Jika $a = b$, maka nilai antara yang mungkin hanya $y = f(a)$; pilih $x = a$.

Solusi. Bila $a = b$, tentu $f(a) = f(b)$. Satu-satunya y yang berada di antara dua bilangan yang sama adalah bilangan itu sendiri, yakni $y = f(a)$. Titik $x = a \in A$ memenuhi $f(x) = y$. Jadi kasus $a = b$ sudah selesai dan pembuktian selanjutnya boleh mengasumsikan $a \neq b$.

Pemeriksaan R.36 Nilai Antara pada Salah Satu Ujung. Dalam Teorema Nilai Antara, selesaikan kasus $y = f(a)$ atau $y = f(b)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $y = f(a)$, coba titik $x = a$.

Tahap 2. Jika $y = f(b)$, coba titik $x = b$.

Tahap 3. Pastikan kedua titik memang berada dalam A .

Jawaban. Pilih $x = a$ pada kasus pertama dan $x = b$ pada kasus kedua.

Solusi. Hipotesis memberi $a, b \in A$. Jika $y = f(a)$, titik $x = a$ memenuhi $f(x) = y$. Jika $y = f(b)$, titik $x = b$ memenuhi persamaan yang sama. Karena itu hanya kasus y yang terletak ketat di antara dua nilai ujung yang masih perlu dibuktikan.

Pemeriksaan R.37 Citra Terhubung di Garis Real adalah Interval. Jika A terhubung dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, jelaskan mengapa $f(A)$ merupakan interval, khususnya ketika $f(a) < f(b)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Gunakan bahwa citra kontinu himpunan terhubung tetap terhubung.

Tahap 2. Klasifikasikan subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$.

Tahap 3. Catat bahwa $f(a), f(b) \in f(A)$.

Jawaban. $f(A)$ terhubung sebagai citra kontinu A , dan setiap subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ adalah interval.

Solusi. Kekontinuan f dan keterhubungan A menyiratkan bahwa $f(A)$ terhubung. Klasifikasi pada garis real menyatakan bahwa subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ tepat interval-interval. Maka $f(A)$ adalah interval. Karena $a, b \in A$, kedua nilai $f(a)$ dan $f(b)$ berada dalam interval tersebut.

Pemeriksaan R.38 Menutup Bukti Teorema Nilai Antara. Jelaskan bagaimana sifat interval dari $f(A)$ menjamin adanya $x \in A$ dengan $f(x) = y$ untuk setiap y di antara $f(a)$ dan $f(b)$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Interval memuat setiap bilangan di antara dua anggotanya.

Tahap 2. Gunakan bahwa $f(a), f(b) \in f(A)$.

Tahap 3. Uraikan arti keanggotaan $y \in f(A)$.

Jawaban. Karena $y \in f(A)$, menurut definisi citra ada $x \in A$ dengan $f(x) = y$.

Solusi. Himpunan $f(A)$ adalah interval yang memuat $f(a)$ dan $f(b)$. Definisi interval memaksa setiap bilangan y di antara kedua nilai itu juga menjadi anggota $f(A)$. Pernyataan $y \in f(A)$ berarti tepat bahwa terdapat $x \in A$ dengan $f(x) = y$. Ini menyelesaikan seluruh kasus Teorema Nilai Antara.

Pemeriksaan R.39 Reduksi Kasus Ujung pada Teorema Titik Tetap. Untuk fungsi kontinu $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, jelaskan mengapa dalam pembuktian titik tetap boleh diasumsikan $a < f(a)$ dan $f(b) < b$.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika $f(a) = a$ atau $f(b) = b$, titik tetap sudah ditemukan.

Tahap 2. Karena citra berada dalam $[a, b]$, berlaku $f(a) \geq a$ dan $f(b) \leq b$.

Tahap 3. Gabungkan ketaksamaan dengan pengecualian kasus sama.

Jawaban. Kasus kesamaan memberi titik tetap di ujung; jika tidak, batas kodomain memperketat $f(a) \geq a$ dan $f(b) \leq b$ menjadi ketaksamaan ketat yang diminta.

Solusi. Jika $f(a) = a$, ambil $c = a$; jika $f(b) = b$, ambil $c = b$. Jadi anggap kedua kesamaan gagal. Karena $f(a), f(b) \in [a, b]$, kita mengetahui $a \leq f(a)$ dan $f(b) \leq b$. Setelah kasus kesamaan disingkirkan, diperoleh $a < f(a)$ dan $f(b) < b$.

Pemeriksaan R.40 Kekontinuan Fungsi Selisih. Jika $g(x) = x - f(x)$ pada $[a, b]$ dan f kontinu, buktikan bahwa g kontinu.

Petunjuk. Tahap 1. Fungsi identitas $i(x) = x$ kontinu.

Tahap 2. Fungsi $-f$ kontinu sebagai kelipatan skalar fungsi kontinu.

Tahap 3. Jumlah dua fungsi kontinu bernilai real kontinu.

Jawaban. $g = i - f$ adalah selisih dua fungsi kontinu bernilai real, sehingga kontinu.

Solusi. Fungsi identitas $i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = x$, kontinu. Fungsi f kontinu menurut hipotesis, sehingga $-f$ kontinu. Operasi penjumlahan di $\mathbb{R}$ kontinu, maka $g = i + (-f)$ kontinu. Secara titik demi titik, rumus ini sama dengan $g(x) = x - f(x)$.

Pemeriksaan R.41 Nol Fungsi Selisih Memberi Titik Tetap. Dengan $g(x) = x - f(x)$, tentukan tanda $g(a)$ dan $g(b)$, lalu gunakan Teorema Nilai Antara untuk memperoleh titik tetap f .

Petunjuk. Tahap 1. Substitusikan ketaksamaan $a < f(a)$ ke $g(a) = a - f(a)$.

Tahap 2. Substitusikan $f(b) < b$ ke $g(b) = b - f(b)$.

Tahap 3. Nilai 0 terletak di antara kedua nilai fungsi kontinu g .

Jawaban. $g(a) < 0 < g(b)$; jadi ada $c \in [a, b]$ dengan $g(c) = 0$, ekuivalen dengan $f(c) = c$.

Solusi. Dari $a < f(a)$ diperoleh $g(a) = a - f(a) < 0$. Dari $f(b) < b$ diperoleh $g(b) = b - f(b) > 0$. Fungsi g kontinu pada interval terhubung $[a, b]$.

Teorema Nilai Antara memberi $c \in [a, b]$ dengan $g(c) = 0$, sebab 0 berada di antara $g(a)$ dan $g(b)$. Persamaan $0 = c - f(c)$ setara dengan $f(c) = c$. Jadi c adalah titik tetap.

Pemeriksaan R.42 Citra Kubik pada Interval Tertutup. Untuk $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x$, buktikan bahwa $f([-1, 2]) \subseteq [-1, 2]$.

Petunjuk. Tahap 1. Hitung $f'(x)$ dan tentukan tandanya.

Tahap 2. Gunakan kemonotonan untuk menempatkan minimum dan maksimum pada kedua ujung interval.

Tahap 3. Hitung $f(-1)$ dan $f(2)$, lalu bandingkan dengan -1 dan 2 .

Jawaban. Fungsi meningkat ketat dan $f([-1, 2]) = [-5/12, 11/6] \subseteq [-1, 2]$.

Solusi. Turunannya adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} > 0$$

untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Jadi f meningkat ketat. Pada interval $[-1, 2]$, minimum dicapai di -1 dan maksimum di 2 .

Perhitungan memberi

$$f(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{12}, \quad f(2) = \frac{8}{6} + \frac{2}{4} = \frac{11}{6}.$$

Karena $-1 < -5/12$ dan $11/6 < 2$, setiap nilai citra berada dalam $[-1, 2]$. Maka f memang memetakan interval itu ke dalam dirinya sendiri.

Pemeriksaan R.43 Titik Tetap Fungsi Kubik. Tentukan semua $c \in [-1, 2]$ yang memenuhi $\frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{4}c = c$.

Petunjuk. Tahap 1. Pindahkan semua suku ke satu ruas dan faktorkan c .

Tahap 2. Selesaikan faktor kuadrat yang tersisa.

Tahap 3. Uji setiap akar terhadap syarat $-1 \leq c \leq 2$.

Jawaban. Satu-satunya titik tetap dalam $[-1, 2]$ adalah $c = 0$.

Solusi. Persamaan titik tetap setara dengan

$$\frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{4}c - c = 0 \iff \frac{c(2c^2 - 9)}{12} = 0.$$

Jadi kandidatnya $c = 0$ dan $c = \pm 3/\sqrt{2}$.

Karena $3/\sqrt{2} > 2$ dan $-3/\sqrt{2} < -1$, kedua akar nonnul berada di luar $[-1, 2]$. Nilai 0 berada dalam interval dan memang memenuhi $f(0) = 0$. Maka hanya $c = 0$ yang diperbolehkan.

Panduan Latihan Bab 18 A

Komponen pendamping asli ini menyediakan dukungan bertahap untuk latihan tentang keterhubungan. Setiap entri dapat dipakai secara berurutan: cobalah pernyataannya, buka petunjuk bila perlu, lalu bandingkan dengan jawaban dan solusi.

Karya asli berlisensi CC BY 4.0. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan R.44 Membandingkan keterhubungan dua topologi. Misalkan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ adalah topologi pada X . Tentukan arah implikasi keterhubungan yang selalu benar, dan uji apakah arah sebaliknya berlaku.

Petunjuk. Topologi yang lebih halus mempunyai lebih banyak kandidat himpunan buka untuk membentuk pemisahan.

Jawaban. Jika (X, τ_2) terhubung, maka (X, τ_1) terhubung. Konversnya salah.

Solusi. Andaikan topologi yang lebih kasar τ_1 mempunyai pemisahan $X = U \sqcup V$. Karena $U, V \in \tau_1 \subseteq \tau_2$, pasangan yang sama memisahkan (X, τ_2) , suatu kontradiksi. Untuk konversnya, pada himpunan dua titik, topologi indisret terhubung, sedangkan topologi diskret yang lebih halus tidak terhubung.

Pemeriksaan R.45 Teorema nilai rata-rata integral. Untuk fungsi kontinu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, buktikan bahwa ada $w \in [a, b]$ dengan $f(w)(b - a) = \int_a^b f(t) dt$.

Petunjuk. Bandingkan nilai rata-rata integral dengan nilai minimum dan maksimum f , kemudian gunakan teorema nilai antara.

Jawaban. Nilai $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ berada dalam $f([a, b])$, sehingga sama dengan $f(w)$ untuk suatu w .

Solusi. Untuk $a < b$, kekompakan interval memberi titik minimum dan maksimum, dengan nilai m dan M . Dari $m \leq f(t) \leq M$ diperoleh $m \leq (b - a)^{-1} \int_a^b f(t) dt \leq M$. Citra interval oleh fungsi kontinu adalah interval, jadi teorema nilai antara menghasilkan w dengan nilai rata-rata tersebut. Mengalikan dengan $b - a$ memberi persamaan yang diminta. Kasus $a = b$ langsung benar.

Pemeriksaan R.46 Interior himpunan terhubung. Apakah interior setiap subhimpunan terhubung A harus terhubung?

Petunjuk. Cobalah dua cakram tertutup yang hanya bersinggungan pada satu titik.

Jawaban. Tidak.

Solusi. Di $\mathbb{R}^2$, ambil gabungan dua cakram tertutup berjari-jari satu yang berpusat di $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$. Keduanya berpotongan di $(0, 0)$, sehingga gabungannya terhubung. Interior gabungan itu adalah gabungan dua cakram buka yang saling lepas; karena keduanya tak kosong dan relatif buka, interior tersebut tidak terhubung.

Pemeriksaan R.47 Penutupan himpunan terhubung. Apakah penutupan setiap subhimpunan terhubung A harus terhubung?

Petunjuk. Jika penutupan dapat dipisahkan, iriskan kedua bagian pemisahan dengan A .

Jawaban. Ya, $\overline{A}$ selalu terhubung.

Solusi. Andaikan $\overline{A} = U \sqcup V$ merupakan pemisahan relatif. Karena A terhubung, seluruh A harus termuat dalam salah satu bagian, misalnya U . Bagian U tertutup dalam $\overline{A}$, sehingga penutupan A di $\overline{A}$ juga termuat dalam U . Namun penutupan itu adalah $\overline{A}$, maka $V = \emptyset$, bertentangan dengan definisi pemisahan.

Pemeriksaan R.48 Batas himpunan terhubung. Apakah batas setiap subhimpunan terhubung A harus terhubung?

Petunjuk. Periksa batas sebuah interval tertutup tak degenerat.

Jawaban. Tidak.

Solusi. Himpunan $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ terhubung. Akan tetapi, batasnya adalah $\partial A = \{0, 1\}$. Dalam topologi subruang, kedua singleton itu buka dan tertutup, sehingga membentuk pemisahan. Jadi batas tidak harus terhubung.

Pemeriksaan R.49 Subhimpunan terhubung pada topologi kofinit. Tentukan semua subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ yang diberi topologi kofinit.

Petunjuk. Topologi subruang pada subhimpunan tak hingga tetap kofinit; pada subhimpunan berhingga topologi itu diskret.

Jawaban. Subhimpunan terhubungnya ialah himpunan kosong, singleton, dan semua subhimpunan tak hingga.

Solusi. Jika A tak hingga, dua himpunan relatif buka tak kosong dalam A masing-masing mempunyai komplement berhingga. Keduanya harus berpotongan, sehingga tidak mungkin membentuk pemisahan. Jika A berhingga, setiap subsetnya relatif buka: komplementnya dalam $\mathbb{R}$ dapat dipilih tertutup berhingga. Jadi A diskret dan terhubung tepat ketika memiliki paling banyak satu titik.

Pemeriksaan R.50 Irisan dua himpunan terhubung yang tidak terhubung. Berikan himpunan terhubung $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ yang irisannya tidak terhubung.

Petunjuk. Iris sebuah lingkaran dengan diameternya.

Jawaban. Ambil lingkaran satuan A dan ruas diameter mendatar B .

Solusi. Tetapkan $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ dan $B = [-1, 1] \times \{0\}$. Lingkaran dan ruas masing-masing terhubung sebagai citra kontinu interval. Irisannya adalah $\{(-1, 0), (1, 0)\}$, sebuah subruang dua titik diskret, sehingga tidak terhubung.

Pemeriksaan R.51 Selisih dua himpunan terhubung yang tidak terhubung. Berikan himpunan terhubung $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dengan $A \setminus B$ tidak terhubung.

Petunjuk. Buang subinterval buka di tengah sebuah interval tertutup.

Jawaban. Ambil $A = [-2, 2]$ dan $B = (-1, 1)$.

Solusi. Kedua himpunan adalah interval, maka terhubung. Namun $A \setminus B = [-2, -1] \cup [1, 2]$. Kedua ruas tak kosong tersebut saling lepas serta relatif buka dalam selisih itu, sehingga membentuk pemisahan.

Pemeriksaan R.52 Gabungan terhubung dari dua himpunan tidak terhubung. Berikan himpunan tidak terhubung $A, B \subseteq \mathbb{R}$ yang gabungannya terhubung.

Petunjuk. Susun dua pasang ruas secara berselang-seling agar seluruh gabungannya menjadi satu interval.

Jawaban. Ambil $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ dan $B = [1, 2] \cup [3, 4]$.

Solusi. Masing-masing dari A dan B mempunyai dua komponen yang terpisah, jadi keduanya tidak terhubung. Akan tetapi, $A \cup B = [0, 4]$, sebuah interval, sehingga gabungannya terhubung.

Pemeriksaan R.53 Gabungan himpunan terhubung yang beririsan. Dapatkah dua himpunan terhubung yang beririsan mempunyai gabungan yang tidak terhubung?

Petunjuk. Andaikan gabungannya memiliki pemisahan; setiap himpunan terhubung harus berada pada satu sisi.

Jawaban. Tidak; contoh seperti itu mustahil.

Solusi. Jika $A \cup B = U \sqcup V$ adalah pemisahan, keterhubungan A memaksa A termuat dalam salah satu sisi, dan hal yang sama berlaku untuk B . Karena $A \cap B \neq \emptyset$, keduanya harus berada pada sisi yang sama. Sisi lain lalu kosong, kontradiksi.

Pemeriksaan R.54 Penutupan beririsan tetapi gabungan terputus. Berikan himpunan terhubung A, B dengan $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, tetapi $A \cup B$ tidak terhubung.

Petunjuk. Pilih dua interval buka yang berdekatan tetapi tidak memuat titik batas bersama.

Jawaban. Ambil $A = (0, 1)$ dan $B = (1, 2)$.

Solusi. Kedua interval terhubung dan penutupannya beririsan di titik 1. Akan tetapi, titik itu tidak termasuk dalam gabungan. Maka A dan B sendiri merupakan dua bagian relatif buka, tak kosong, dan saling lepas yang menutupi $A \cup B$.

Pemeriksaan R.55 Nilai sama pada titik antipodal. Untuk fungsi kontinu $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, buktikan bahwa ada $x \in S^1$ dengan $f(x) = f(-x)$.

Petunjuk. Tinjau $g(x) = f(x) - f(-x)$; nilainya berubah tanda pada pasangan antipodal.

Jawaban. Fungsi g mempunyai nol, dan nol itu memberikan pasangan yang diminta.

Solusi. Pilih sembarang $x_0 \in S^1$. Jika $g(x_0) = 0$, selesai. Jika tidak, $g(-x_0) = -g(x_0)$. Salah satu busur dari x_0 ke $-x_0$ adalah citra kontinu interval; pembatasan g pada busur itu kontinu dan nilai ujungnya berlainan tanda. Teorema nilai antara memberikan titik x dengan $g(x) = 0$.

Pemeriksaan R.56 Tiga jenis interval tidak homeomorfik. Tunjukkan bahwa (a, b) , $[a, b]$, dan $[a, b]$ berpasangan tidak homeomorfik.

Petunjuk. Hitung titik yang penghapusannya tidak memutus ruang.

Jawaban. Ketiganya dibedakan oleh banyaknya titik bukan-pemutus: berturut-turut nol, satu, dan dua.

Solusi. Pada interval buka, menghapus titik mana pun menghasilkan dua interval terpisah, sehingga setiap titik adalah titik pemutus. Pada interval setengah buka, hanya ujung yang termasuk, yaitu b , bukan titik pemutus; semua titik lain memutus. Pada interval tertutup, tepat kedua ujung bukan titik pemutus. Homeomorfisme mempertahankan sifat menjadi titik pemutus, jadi ketiga jumlah tersebut merupakan invarian yang membedakan ruang-ruang itu.

Pemeriksaan R.57 Keterhubungan topologi K. Misalkan $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ dan topologi pada $\mathbb{R}$ mempunyai basis interval buka serta himpunan $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa ruang ini terhubung.

Petunjuk. Tunjukkan bahwa setiap himpunan yang sekaligus buka dan tertutup dalam topologi ini juga buka dalam topologi biasa.

Jawaban. Ruang topologi K terhubung karena pemisahannya akan menjadi pemisahan garis real biasa.

Solusi. Andaikan U klopen dalam topologi K . Di setiap $x \neq 0$, himpunan K lokalnya berhingga, sehingga lingkungan basis yang termuat dalam U dapat diperkecil menjadi interval biasa dalam U . Jika $0 \in U$, ada $\varepsilon > 0$ dengan $((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K) \subseteq U$. Tidak ada titik $1/n$ dalam interval itu yang dapat berada di komplement V : karena V buka dan $1/n \in K$, suatu interval biasa di sekitar $1/n$ harus termuat dalam V , padahal interval itu memuat titik bukan- K dari U . Jadi seluruh interval yang cukup kecil di sekitar nol termuat dalam U . Dengan demikian U , dan secara simetris komplementnya, buka dalam topologi biasa. Karena garis real biasa terhubung, salah satunya kosong.

Pemeriksaan R.58 Lokal terhubung tetapi tidak terhubung. Berikan contoh ruang yang lokal terhubung tetapi tidak terhubung.

Petunjuk. Gunakan gabungan dua interval buka yang terpisah.

Jawaban. Ruang $(0, 1) \cup (2, 3)$ dengan topologi subruang memenuhi syarat.

Solusi. Setiap titik mempunyai basis lingkungan berupa interval buka kecil yang terhubung, sehingga ruang itu lokal terhubung. Namun kedua interval penyusunnya tak kosong, saling lepas, dan sekaligus buka dalam subruang; keduanya membentuk pemisahan, sehingga ruang tidak terhubung.

Pemeriksaan R.59 Ruang serat rasional dan irasional: keterhubungan. Dalam $\mathbb{R}^2$, ambil serat $\{x\} \times [0, 1]$ untuk setiap x irasional dan serat $\{x\} \times [-1, 0]$ untuk setiap x rasional. Tunjukkan bahwa gabungan X terhubung.

Petunjuk. Semua serat bertemu sumbu x , dan seluruh sumbu itu termuat dalam X .

Jawaban. X terhubung sebagai gabungan himpunan terhubung yang masing-masing bertemu satu himpunan terhubung yang sama.

Solusi. Sumbu $L = \mathbb{R} \times \{0\}$ terhubung. Setiap serat vertikal dalam definisi X adalah ruas terhubung dan berpotongan dengan L di $(x, 0)$. Gabungan suatu himpunan terhubung dengan keluarga himpunan terhubung yang semuanya memotongnya tetap terhubung. Karena X tepat merupakan gabungan L dan seluruh serat itu, X terhubung.

Pemeriksaan R.60 Ruang serat rasional dan irasional: kegagalan lokal. Untuk ruang X pada latihan sebelumnya, buktikan bahwa X tidak lokal terhubung.

Petunjuk. Di atas sumbu, proyeksi suatu himpunan terhubung ke sumbu x harus menjadi subhimpunan terhubung dari bilangan irasional.

Jawaban. Titik dengan koordinat kedua positif tidak mempunyai basis lingkungan terhubung.

Solusi. Pilih $p = (\alpha, y)$ dengan α irasional dan $y > 0$, lalu ambil bola kecil yang tidak menyentuh sumbu. Di dalam bola ini, X hanya terdiri atas potongan serat pada absis irasional. Jika C terhubung, proyeksinya ke sumbu x terhubung dan termuat dalam himpunan irasional. Karena setiap interval tak degenerat memuat bilangan rasional, proyeksi itu harus singleton; jadi C berada pada satu serat. Tetapi setiap lingkungan relatif buka dari p memuat serat dengan banyak absis irasional. Karena itu tidak ada lingkungan relatif buka terhubung yang cukup kecil di sekitar p .

Pemeriksaan R.61 Kriteria komponen untuk keterhubungan lokal. Buktikan bahwa X lokal terhubung jika dan hanya jika setiap komponen dari setiap himpunan buka $O \subseteq X$ terbuka dalam X .

Petunjuk. Untuk satu arah, kumpulkan semua lingkungan buka terhubung dalam O yang memuat suatu titik. Untuk arah lain, gunakan komponen O yang memuat titik tersebut.

Jawaban. Keterbukaan komponen-komponen himpunan buka persis menyediakan basis lingkungan buka terhubung.

Solusi. Andaikan X lokal terhubung dan C komponen O . Untuk setiap $x \in C$, ada lingkungan buka terhubung V_x dengan $x \in V_x \subseteq O$. Maksimalitas komponen memberi $V_x \subseteq C$, maka $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ terbuka. Sebaliknya, jika komponen setiap himpunan buka terbuka, untuk $x \in O$ ambil komponen C_x dari O yang memuat x . Himpunan C_x terbuka, terhubung, dan termuat dalam O ; himpunan-himpunan ini membentuk basis lingkungan terhubung.

Pemeriksaan R.62 Kriteria penutupan silang untuk keterputusan. Jika $X = A \cup B$ dengan $A, B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$, dan $A \cap \overline{B} = \emptyset$, buktikan bahwa X tidak terhubung.

Petunjuk. Syarat tersebut menyatakan bahwa penutupan relatif masing-masing bagian tidak menambah titik dari bagian lain.

Jawaban. A dan B membentuk pemisahan X .

Solusi. Dari kedua syarat segera diperoleh $A \cap B = \emptyset$. Penutupan A di X adalah $X \cap \overline{A}$ dan, karena

tidak memuat titik B , sama dengan A ; jadi A tertutup dalam X . Demikian pula B tertutup. Karena keduanya saling merupakan komplemen, keduanya juga buka. Keduanya tak kosong dan menutupi X , sehingga merupakan pemisahan.

Pemeriksaan R.63 Karakterisasi dengan penutupan silang. Buktikan bahwa X terhubung jika dan hanya jika untuk setiap $X = A \cup B$ dengan A, B tak kosong, sedikitnya salah satu dari $\overline{A} \cap B$ dan $A \cap \overline{B}$ tak kosong.

Petunjuk. Gunakan kontraposisi pada kedua arah dan latihan sebelumnya.

Jawaban. Kedua irisan silang kosong tepat ketika A, B adalah dua himpunan terpisah yang menutupi X .

Solusi. Jika ada penutupan $X = A \cup B$ tak kosong dengan kedua irisan silang kosong, latihan sebelumnya menghasilkan pemisahan, sehingga X tidak terhubung. Sebaliknya, jika $X = U \sqcup V$ adalah pemisahan, U dan V tertutup dalam X . Karena itu $\overline{U}^X = U$ dan $\overline{V}^X = V$, sehingga kedua irisan silang kosong. Ini membuktikan ekuivalensi.

Pemeriksaan R.64 Ruang dengan tepat satu titik pemutus. Berikan ruang terhubung yang mempunyai tepat satu titik pemutus.

Petunjuk. Rekatkan dua lingkaran pada tepat satu titik.

Jawaban. Gabungan dua lingkaran yang bersinggungan pada satu titik mempunyai tepat satu titik pemutus.

Solusi. Misalkan dua lingkaran berpotongan hanya di p . Gabungannya terhubung karena keduanya terhubung dan beririsan. Setelah p dihapus, tersisa dua busur yang saling lepas, sehingga ruang terputus. Jika titik lain q dihapus, lingkaran yang memuat q menjadi busur yang masih bertemu lingkaran kedua di p ; gabungan tetap terhubung. Jadi hanya p titik pemutus.

Pemeriksaan R.65 Ruang dengan tepat dua titik pemutus. Berikan ruang terhubung yang mempunyai tepat dua titik pemutus.

Petunjuk. Susun tiga lingkaran sebagai rantai, dengan dua titik sambung yang berbeda.

Jawaban. Rantai tiga lingkaran yang lingkaran bertetanganya bersinggungan mempunyai tepat dua titik pemutus.

Solusi. Misalkan lingkaran pertama dan kedua bertemu hanya di p , lingkaran kedua dan ketiga hanya di $q \neq p$, dan tidak ada irisan lain. Gabungan terhubung. Menghapus p memisahkan lingkaran pertama dari sisanya, dan menghapus q memisahkan lingkaran ketiga. Menghapus titik lain hanya membuka salah satu lingkaran menjadi busur, sedangkan semua sambungan rantai tetap ada. Maka tepat p, q adalah titik pemutus.

Pemeriksaan R.66 Ruang dengan tak hingga banyak titik pemutus. Berikan ruang terhubung dengan tak hingga banyak titik pemutus.

Petunjuk. Periksa garis real.

Jawaban. $\mathbb{R}$ mempunyai setiap titik sebagai titik pemutus.

Solusi. Garis real terhubung. Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, penghapusan c menghasilkan $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$. Kedua sinar tersebut tak kosong, saling lepas, dan relatif buka, sehingga $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ tidak terhubung. Jadi terdapat tak hingga banyak titik pemutus.

Pemeriksaan R.67 Ruang tanpa titik pemutus. Berikan ruang terhubung tak trivial tanpa titik pemutus.

Petunjuk. Menghapus satu titik dari lingkaran menghasilkan interval.

Jawaban. Lingkaran S^1 tidak mempunyai titik pemutus.

Solusi. Lingkaran terhubung. Untuk setiap $p \in S^1$, proyeksi stereografik, atau parameterisasi sudut dengan satu nilai dihapus, memberi homeomorfisme $S^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$. Karena garis real terhubung, penghapusan titik

mana pun tidak memutus lingkaran.

Pemeriksaan R.68 Homeomorfisme interval mempertahankan ujung. Jika $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ homeomorfisme untuk interval tak degenerat, buktikan bahwa $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

Petunjuk. Ujung interval adalah tepat titik yang bukan titik pemutus.

Jawaban. Homeomorfisme memetakan kedua ujung ke kedua ujung, mungkin dengan urutan terbalik.

Solusi. Untuk $x \in (a, b)$, ruang $[a, b] \setminus \{x\}$ tidak terhubung, sedangkan penghapusan a atau b menyisakan interval yang terhubung. Jadi $\{a, b\}$ tepat himpunan titik bukan-pemutus. Homeomorfisme membatasi diri menjadi homeomorfisme setelah titik dan citranya dihapus, sehingga mempertahankan sifat pemutus. Pada kodomain, titik bukan-pemutus tepat c, d , yang membuktikan klaim.

Pemeriksaan R.69 Homeomorfisme memasangkan komponen. Buktikan bahwa homeomorfisme $f : X \rightarrow Y$ menginduksi bijeksi antara komponen terhubung X dan komponen terhubung Y .

Petunjuk. Citra komponen terhubung; gunakan f^{-1} untuk membuktikan maksimalitas dan invers.

Jawaban. Pemetaan komponennya adalah $C \mapsto f(C)$.

Solusi. Jika C komponen X , maka $f(C)$ terhubung. Bila termuat dalam himpunan terhubung $D \subseteq Y$, maka $f^{-1}(D)$ terhubung dan memuat C ; maksimalitas memberi $f^{-1}(D) = C$, jadi $D = f(C)$. Maka $f(C)$ komponen. Penerapan argumen yang sama pada f^{-1} memberi pemetaan invers, sehingga korespondensinya bijektif.

Pemeriksaan R.70 Homeomorfisme memasangkan titik pemutus. Buktikan bahwa homeomorfisme $f : X \rightarrow Y$ menginduksi bijeksi antara titik pemutus X dan titik pemutus Y .

Petunjuk. Batasi f pada komplemen satu titik.

Jawaban. x titik pemutus X jika dan hanya jika $f(x)$ titik pemutus Y .

Solusi. Pembatasan $f|_{X \setminus \{x\}}$ adalah homeomorfisme dari $X \setminus \{x\}$ ke $Y \setminus \{f(x)\}$. Keterhubungan, dan karenanya ketakterhubungan, dipertahankan oleh homeomorfisme. Jadi penghapusan x memutus X tepat ketika penghapusan $f(x)$ memutus Y . Karena f bijektif, pembatasannya pada himpunan titik pemutus juga bijektif.

Pemeriksaan R.71 Mengklasifikasikan bentuk huruf. Dengan model huruf kapital bidang yang dinyatakan secara eksplisit, kelompokkan huruf-huruf dalam frasa “TOPOLOGY IS NEAT” menurut kelas homeomorfismenya.

Petunjuk. Nyatakan dahulu apakah huruf berupa kurva rangka atau daerah tebal. Bandingkan banyak komponen, ujung, titik cabang atau pemutus, dan siklus.

Jawaban. Jawaban bergantung pada font dan model geometris; penilaian harus didasarkan pada invarian topologis yang konsisten, bukan kemiripan visual saja.

Solusi. Rubrik lengkap: (1) peserta menyatakan model huruf, termasuk apakah perpotongan goresan direkatkan dan apakah lubang dianggap bagian komplemen; (2) untuk setiap huruf, peserta mencatat invarian yang relevan, sedikitnya jumlah komponen serta jumlah ujung, titik cabang, dan siklus bila memakai model rangka; (3) huruf hanya dikelompokkan bersama jika invarian cocok dan diberikan homeomorfisme atau deformasi yang meyakinkan; (4) pasangan dengan invarian berbeda dipisahkan dengan alasan eksplisit. Karena bentuk glif tidak ditentukan oleh teks soal, beberapa partisi dapat benar bila modelnya jelas dan argumennya konsisten.

Pemeriksaan R.72 Kriteria himpunan klopen. Buktikan bahwa X tidak terhubung jika dan hanya jika terdapat himpunan klopen U dengan $\emptyset \neq U \neq X$.

Petunjuk. Pasangkan U dengan komplemennya.

Jawaban. Himpunan klopen sejati dan komplemennya tepat membentuk pemisahan.

Solusi. Jika U klopen, tak kosong, dan bukan seluruh X , maka $V = X \setminus U$ juga klopen dan tak kosong.

Pasangan U, V saling lepas dan menutupi X , jadi merupakan pemisahan. Sebaliknya, bila $X = U \sqcup V$ adalah pemisahan, kedua bagian buka dan saling merupakan komplement, sehingga keduanya juga tertutup. Maka U adalah himpunan klopen sejati.

Pemeriksaan R.73 Surjeksi ke ruang diskret dua titik. Buktikan bahwa X tidak terhubung jika dan hanya jika ada surjeksi kontinu dari X ke ruang diskret $\{0, 1\}$.

Petunjuk. Dari pemisahan, buat fungsi indikator; dari fungsi, ambil pracitra kedua singleton.

Jawaban. Pemisahan dan surjeksi kontinu dua-nilai saling menentukan.

Solusi. Jika $X = U \sqcup V$ adalah pemisahan, definisikan $f = 0$ pada U dan $f = 1$ pada V . Pracitra setiap himpunan buka pada kodomain diskret terbuka, dan kedua nilai tercapai, jadi f kontinu dan surjektif. Sebaliknya, untuk surjeksi kontinu f , himpunan $f^{-1}(\{0\})$ dan $f^{-1}(\{1\})$ tak kosong, saling lepas, terbuka, dan menutupi X ; keduanya membentuk pemisahan.

Pemeriksaan R.74 Keterhubungan topologi tiga himpunan. Pada $X = \mathbb{R}$, tentukan apakah $\tau_1 = \{\emptyset, [0, 1], X\}$ menghasilkan ruang terhubung.

Petunjuk. Carilah pasangan himpunan buka tak kosong yang saling lepas dan menutupi X .

Jawaban. (X, τ_1) terhubung.

Solusi. Satu-satunya himpunan buka tak kosong sejati ialah $[0, 1]$. Komplementnya $X \setminus [0, 1]$ tidak termasuk τ_1 , sehingga $[0, 1]$ tidak dapat menjadi salah satu sisi pemisahan. Tidak ada kandidat lain untuk dua sisi buka tak kosong. Maka ruang terhubung.

Pemeriksaan R.75 Keterhubungan topologi titik tertentu. Pada $X = \mathbb{R}$, beri topologi titik tertentu di 0: himpunan buka tak kosong adalah semua himpunan yang memuat 0. Apakah X terhubung?

Petunjuk. Dua himpunan buka tak kosong selalu mempunyai satu titik bersama.

Jawaban. Ya, ruang terhubung.

Solusi. Setiap himpunan buka tak kosong memuat 0. Karena itu, dua himpunan buka tak kosong tidak pernah saling lepas. Pemisahan membutuhkan dua himpunan buka tak kosong yang saling lepas, sehingga pemisahan tidak mungkin ada.

Pemeriksaan R.76 Menghapus titik tertentu. Dalam topologi titik tertentu di 0 pada $\mathbb{R}$, tentukan apakah $X \setminus \{0\}$ terhubung.

Petunjuk. Tunjukkan bahwa setiap subset dari subruang itu terbuka.

Jawaban. Tidak; subruang $X \setminus \{0\}$ diskret dan memiliki lebih dari satu titik.

Solusi. Untuk setiap $A \subseteq X \setminus \{0\}$, himpunan $A \cup \{0\}$ buka di X , dan irisannya dengan subruang adalah A . Jadi topologi subruangnya diskret. Pilih satu titik; singleton itu dan komplementnya di subruang merupakan dua himpunan buka tak kosong yang membentuk pemisahan.

Pemeriksaan R.77 Subhimpunan terhubung dalam topologi titik tertentu. Untuk topologi titik tertentu τ_p pada himpunan X , klasifikasikan semua subhimpunan terhubung.

Petunjuk. Bedakan subhimpunan yang memuat p dari yang tidak memuatnya.

Jawaban. Subhimpunan terhubungnya ialah himpunan kosong, singleton, dan semua subhimpunan yang memuat p .

Solusi. Jika A memuat p , setiap himpunan relatif buka tak kosong dalam A memuat p ; dua himpunan demikian tidak dapat saling lepas, jadi A terhubung. Jika $p \notin A$, setiap $B \subseteq A$ terbuka relatif karena $B = (B \cup \{p\}) \cap A$. Jadi A diskret dan terhubung tepat bila memiliki paling banyak satu titik.

Pemeriksaan R.78 Subhimpunan terhubung dalam topologi titik dikecualikan. Untuk topologi titik dikecualikan $\tau_{\bar{p}}$, yakni himpunan buka sejati tidak memuat p , klasifikasikan semua subhimpunan terhubung.

Petunjuk. Jika subruang memuat p , satu-satunya himpunan relatif buka yang memuat p adalah seluruh subruang.

Jawaban. Subhimpunan terhubungnya kembali ialah himpunan kosong, singleton, dan semua subhimpunan yang memuat p .

Solusi. Jika $p \in A$, setiap pemisahan relatif harus menempatkan p pada salah satu sisi buka. Namun satu-satunya himpunan relatif buka yang memuat p adalah A sendiri, sehingga sisi lain kosong; jadi A terhubung. Jika $p \notin A$, setiap subset $B \subseteq A$ sudah buka di X , maka subruang diskret dan terhubung tepat untuk kardinalitas paling banyak satu.

Pemeriksaan R.79 Himpunan titik limit dari himpunan terhubung. Jika A terhubung dalam ruang Hausdorff X , buktikan bahwa himpunan titik limit A' terhubung.

Petunjuk. Untuk $|A| > 1$, tunjukkan $A \subseteq A' \subseteq \overline{A}$.

Jawaban. A' terhubung; untuk singleton ia kosong, dan selain itu ia terletak di antara A dan penutupannya.

Solusi. Ruang Hausdorff bersifat T_1 . Jika A singleton atau kosong, maka $A' = \emptyset$, yang terhubung. Andaikan A memiliki lebih dari satu titik. Jika $a \in A$ bukan titik limit, ada lingkungan U dengan $U \cap A = \{a\}$. Karena singleton tertutup, $\{a\}$ lalu klopen relatif dalam A , bertentangan dengan keterhubungan. Jadi $A \subseteq A'$, sedangkan selalu $A' \subseteq \overline{A}$. Setiap himpunan yang memuat himpunan terhubung A dan termuat dalam $\overline{A}$ terhubung; terapkan ini pada A' .

Pemeriksaan R.80 Titik limit pada topologi titik tertentu. Dalam topologi titik tertentu di 0 pada $\mathbb{R}$, ambil $A = \mathbb{Z}$. Tentukan A' dan putuskan apakah himpunan titik limit dari himpunan terhubung selalu terhubung tanpa asumsi Hausdorff.

Petunjuk. Lingkungan terkecil yang perlu diuji untuk $x \neq 0$ dapat memuat hanya 0 dan x ; untuk $x = 0$, gunakan singleton.

Jawaban. $A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, yang diskret sebagai subruang dan tidak terhubung. Jadi asumsi Hausdorff tidak dapat dibuang.

Solusi. Himpunan A terhubung karena memuat titik tertentu 0. Titik 0 bukan titik limit: lingkungan buka $\{0\}$ tidak mempunyai titik $A \setminus \{0\}$. Untuk $x \neq 0$, setiap lingkungan buka yang memuat x juga memuat 0; setelah x dihapus, titik $0 \in A$ masih tersisa. Jadi setiap $x \neq 0$ titik limit. Subruang yang tidak memuat 0 bersifat diskret dan memiliki banyak titik, maka tidak terhubung.

Pemeriksaan R.81 Keunikan komponen yang memuat titik. Buktikan bahwa setiap $a \in X$ termuat dalam tepat satu komponen terhubung, yang kita nyatakan dengan C_a .

Petunjuk. Ambil gabungan semua subhimpunan terhubung yang memuat a .

Jawaban. Gabungan tersebut terhubung, maksimal, dan merupakan satu-satunya komponen yang memuat a .

Solusi. Misalkan C_a adalah gabungan semua subhimpunan terhubung yang memuat a . Semua anggota keluarga itu mempunyai titik a bersama, sehingga gabungannya terhubung. Jika suatu himpunan terhubung yang lebih besar memuat C_a , ia juga memuat a dan sudah termasuk dalam keluarga, jadi termuat dalam C_a ; maka C_a maksimal. Jika dua komponen memuat a , gabungannya terhubung karena beririsan, dan maksimalitas memaksa keduanya sama.

Pemeriksaan R.82 Karakterisasi komponen melalui gabungan. Buktikan bahwa C_a memuat setiap subhimpunan terhubung yang mengandung a , dan karenanya sama dengan gabungan semua subhimpunan tersebut.

Petunjuk. Gabungan komponen dengan himpunan terhubung yang memuat a tetap terhubung.

Jawaban. Maksimalitas komponen memberi setiap himpunan tersebut termuat dalam C_a ; singleton $\{a\}$ menjamin keluarganya tak kosong.

Solusi. Ambil himpunan terhubung D dengan $a \in D$. Karena $a \in C_a \cap D$, gabungan $C_a \cup D$ terhubung. Komponen C_a maksimal di antara subhimpunan terhubung, sehingga $C_a \cup D = C_a$ dan $D \subseteq C_a$. Maka gabungan seluruh D tersebut termuat dalam C_a . Sebaliknya, C_a sendiri salah satu anggota keluarga, sehingga kesamaan berlaku.

Pemeriksaan R.83 Komponen sama atau saling lepas. Buktikan bahwa untuk $a, b \in X$, berlaku $C_a = C_b$ atau $C_a \cap C_b = \emptyset$.

Petunjuk. Jika irisan tidak kosong, gabungan kedua komponen terhubung.

Jawaban. Dua komponen yang beririsan harus sama.

Solusi. Andaikan $C_a \cap C_b \neq \emptyset$. Karena kedua komponen terhubung dan beririsan, $C_a \cup C_b$ terhubung. Maksimalitas C_a memberi $C_a \cup C_b = C_a$, sehingga $C_b \subseteq C_a$. Dengan menukar peran keduanya diperoleh $C_a \subseteq C_b$. Jadi $C_a = C_b$. Jika tidak beririsan, tentu keduanya saling lepas.

Pemeriksaan R.84 Himpunan terhubung termuat dalam komponen. Buktikan bahwa setiap subhimpunan terhubung $A \subseteq X$ termuat dalam suatu komponen X .

Petunjuk. Pilih $a \in A$ dan gunakan karakterisasi C_a ; tangani himpunan kosong secara terpisah.

Jawaban. Jika $A \neq \emptyset$ dan $a \in A$, maka $A \subseteq C_a$.

Solusi. Untuk $A = \emptyset$, pernyataan benar secara hampa bila X mempunyai komponen; dalam pemakaian biasa klaim ditujukan pada A tak kosong. Pilih $a \in A$. Karena A terhubung dan memuat a , karakterisasi komponen sebagai gabungan semua himpunan terhubung yang memuat a langsung memberi $A \subseteq C_a$.

Pemeriksaan R.85 Komponen adalah himpunan tertutup. Buktikan bahwa setiap komponen terhubung C dari X tertutup dalam X .

Petunjuk. Penutupan himpunan terhubung terhubung dan memuat himpunan semula.

Jawaban. $\overline{C} = C$, sehingga C tertutup.

Solusi. Karena C terhubung, penutupannya $\overline{C}$ juga terhubung. Penutupan itu memuat C . Akan tetapi, C maksimal di antara subhimpunan terhubung X , sehingga tidak mungkin termuat secara sejati dalam himpunan terhubung yang lebih besar. Maka $\overline{C} = C$, persis syarat bahwa C tertutup.

Panduan Latihan Bab 18 B

Komponen pendamping asli ini ditulis secara terpisah, bukan materi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber. Komponen ini menyediakan dukungan bertahap untuk latihan keterhubungan pada urutan peta 86–128; setiap entri memuat pernyataan mandiri, petunjuk dua tahap, jawaban langsung, dan penyelesaian lengkap.

Karya asli berlisensi CC BY 4.0. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan R.86 Satu komponen dan keterhubungan. Buktikan bahwa ruang topologi X terhubung jika dan hanya jika X mempunyai tepat satu komponen terhubung.

Petunjuk. Tahap 1: jika X terhubung, bandingkan X sendiri dengan setiap subhimpunan terhubung maksimal.

Tahap 2: untuk arah sebaliknya, sebuah pemisahan menghasilkan dua himpunan terhubung atau, lebih umum, memaksa setiap komponen berada pada salah satu sisinya.

Jawaban. Pernyataan benar: keterhubungan X ekuivalen dengan keberadaan satu-satunya komponen, yaitu X sendiri.

Solusi. Jika X terhubung, maka X adalah subhimpunan terhubung maksimal dari dirinya; jadi satu-satunya komponen ialah X . Sebaliknya, andaikan X tidak terhubung dan $X = U \sqcup V$ suatu pemisahan. Setiap subhimpunan terhubung hanya dapat bertemu salah satu dari U dan V , sebab irisan dengan keduanya akan memisahkannya. Ambil $u \in U$ dan $v \in V$. Komponen yang memuat u termuat dalam U , sedangkan

komponen yang memuat v termuat dalam V ; keduanya berbeda. Jadi ruang dengan tepat satu komponen harus terhubung.

Pemeriksaan R.87 Komponen terbuka bila jumlahnya berhingga. Misalkan ruang topologi X mempunyai berhingga banyak komponen terhubung. Buktikan bahwa setiap komponennya terbuka.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan fakta bahwa setiap komponen terhubung tertutup.

Tahap 2: tulis komplemen satu komponen sebagai gabungan semua komponen lainnya.

Jawaban. Setiap komponen terbuka, bahkan sekaligus tertutup.

Solusi. Tuliskan komponen-komponen X sebagai $C_1, \dots, C_n$. Masing-masing C_i tertutup. Untuk suatu i , komponen-komponen mempartisi X , sehingga $X \setminus C_i = \bigcup_{j \neq i} C_j$. Gabungan di ruas kanan berhingga dan setiap sukunya tertutup, maka komplemen C_i tertutup. Jadi C_i terbuka. Karena i sembarang, semua komponen terbuka.

Pemeriksaan R.88 Citra himpunan pemutus. Misalkan X dan Y terhubung serta $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Apakah setiap himpunan pemutus $S \subseteq X$ selalu mempunyai citra $f(S)$ yang merupakan himpunan pemutus bagi Y ? Buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Tahap 1: kontinuitas tidak mensyaratkan fungsi injektif atau surjektif.

Tahap 2: gunakan fungsi konstan dari garis real ke lingkaran.

Jawaban. Tidak. Fungsi konstan memberikan contoh tandingan.

Solusi. Ambil $X = \mathbb{R}$, $S = \{0\}$, dan $Y = S^1$. Kedua ruang terhubung, sedangkan $X \setminus S = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ tidak terhubung, jadi S adalah himpunan pemutus. Tetapkan $f(x) = p$ untuk suatu $p \in S^1$. Fungsi ini kontinu dan $f(S) = \{p\}$. Namun $S^1 \setminus \{p\}$ homeomorfik dengan $\mathbb{R}$, sehingga terhubung. Jadi $f(S)$ bukan himpunan pemutus bagi Y .

Pemeriksaan R.89 Kelas topologi 1 pada empat titik. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ diberi topologi diskret. Tentukan apakah X terhubung dan buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. Tahap 1: ruang tidak terhubung tepat ketika mempunyai subhimpunan sejati tak kosong yang klopen.

Tahap 2: dalam topologi diskret, periksa singleton $\{a\}$.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Dalam topologi diskret, $\{a\}$ dan komplemennya $\{b, c, d\}$ sama-sama buka. Keduanya tak kosong, saling lepas, dan gabungannya X . Jadi keduanya membentuk pemisahan.

Pemeriksaan R.90 Kelas topologi 2 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cari himpunan buka sejati yang komplemennya juga buka.

Tahap 2: perhatikan bahwa setiap komplemen tak kosong dari himpunan buka sejati memuat d .

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Ruang berhingga terputus tepat bila mempunyai himpunan klopen sejati tak kosong. Komplemen himpunan buka sejati yang tercantum berturut-turut adalah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$, dan $\{d\}$. Tidak satu pun berada dalam τ . Jadi tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong dan X terhubung.

Pemeriksaan R.91 Kelas topologi 3 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji apakah suatu singleton mempunyai komplemen yang tercantum dalam τ .

Tahap 2: bandingkan $\{c\}$ dengan $\{a, b, d\}$.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{c\}$ dan $\{a, b, d\}$ sama-sama buka menurut daftar τ . Keduanya tak kosong, saling lepas, dan menutupi X , sehingga membentuk pemisahan. Maka X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.92 Kelas topologi 4 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: gunakan kriteria himpunan klopen sejati.

Tahap 2: pasangan $\{b\}$ dan $\{a, c, d\}$ patut diperiksa.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Baik $\{b\}$ maupun komplementnya $\{a, c, d\}$ termasuk dalam τ . Pasangan ini merupakan dua himpunan buka tak kosong yang saling lepas dan menutupi X . Jadi X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.93 Kelas topologi 5 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cukup periksa komplement ketiga himpunan buka sejati.

Tahap 2: semua komplement itu memuat paling sedikit satu dari c, d .

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Komplement $\{a\}$, $\{b\}$, dan $\{a, b\}$ masing-masing ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, dan $\{c, d\}$. Tidak satu pun tercantum sebagai himpunan buka. Jadi tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong; akibatnya X terhubung.

Pemeriksaan R.94 Kelas topologi 6 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: keterputusan setara dengan keberadaan himpunan buka sejati yang komplementnya buka.

Tahap 2: hitung komplement $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, dan $\{a, b, c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Keempat komplement tersebut ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{c, d\}$, dan $\{d\}$. Tidak satu pun termasuk dalam τ . Dengan demikian tidak ada subhimpunan klopen sejati tak kosong, sehingga X terhubung.

Pemeriksaan R.95 Kelas topologi 7 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: periksa apakah $\{b\}$ klopen.

Tahap 2: komplement $\{b\}$ sudah muncul dalam daftar topologi.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{b\}$ buka dan komplementnya $\{a, c, d\}$ juga buka. Kedua himpunan itu tak kosong, saling lepas, dan menutupi X ; jadi keduanya adalah suatu pemisahan. Maka X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.96 Kelas topologi 8 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: daftar semua himpunan buka sejati dan uji komplementnya.

Tahap 2: komplementnya ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{c, d\}$, $\{d\}$, dan $\{c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tak satu pun dari lima komplement yang disebutkan dalam petunjuk termasuk dalam τ . Jadi tidak ada himpunan buka sejati tak kosong yang juga tertutup. Karena pemisahan akan memberikan tepat himpunan semacam itu, pemisahan tidak ada dan X terhubung.

Pemeriksaan R.97 Kelas topologi 9 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cari pasangan komplementer di antara himpunan buka.

Tahap 2: hitung komplemen kelima himpunan buka sejati satu per satu.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Komplemen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, dan $\{a, b, c\}$ berturut-turut ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, dan $\{d\}$. Semuanya tidak buka. Jadi tidak ada pemisahan dan X terhubung.

Pemeriksaan R.98 Kelas topologi 10 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: carilah suatu singleton buka dengan komplemen yang juga buka.

Tahap 2: gunakan $\{b\}$ dan $\{a, c, d\}$.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{b\}$ serta komplemennya $\{a, c, d\}$ sama-sama anggota τ . Keduanya tak kosong, saling lepas, dan menutupi X . Jadi pasangan tersebut memisahkan X , sehingga ruang tidak terhubung.

Pemeriksaan R.99 Kelas topologi 11 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: keterputusan akan menghasilkan dua anggota τ yang saling berkomplemen.

Tahap 2: uji komplemen keenam himpunan buka sejati dalam daftar.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Komplemen himpunan buka sejati yang tercantum ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$, dan $\{c\}$. Tidak satu pun merupakan anggota τ . Maka tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong dan X terhubung.

Pemeriksaan R.100 Kelas topologi 12 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: periksa apakah salah satu singleton buka mempunyai komplemen buka.

Tahap 2: $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$ adalah pasangan komplementer.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$ termasuk dalam τ . Keduanya tak kosong, saling lepas, dan gabungannya X . Jadi pasangan tersebut adalah pemisahan, sehingga X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.101 Kelas topologi 13 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji apakah setiap himpunan buka sejati gagal memiliki komplemen buka.

Tahap 2: komplemen yang mungkin ialah $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{b, c\}$, $\{d\}$, $\{c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Daftar pada tahap kedua adalah tepat daftar komplemen semua anggota sejati tak kosong dari τ . Tidak satu pun muncul dalam τ . Jadi tak ada himpunan klopen sejati tak kosong, padahal setiap pemisahan akan menghasilkan himpunan demikian. Oleh sebab itu X terhubung.

Pemeriksaan R.102 Kelas topologi 14 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cukup temukan satu himpunan klopen sejati tak kosong.

Tahap 2: periksa $\{b\}$ beserta komplemennya.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{b\}$ buka, dan komplemennya $\{a, c, d\}$ juga tercantum dalam τ . Kedua himpunan itu

membentuk pemisahan $X = \{b\} \sqcup \{a, c, d\}$. Jadi X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.103 Kelas topologi 15 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: hanya ada satu kandidat himpunan klopen sejati tak kosong.

Tahap 2: tentukan apakah $X \setminus \{a\} = \{b, c, d\}$ buka.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Satu-satunya himpunan buka sejati tak kosong ialah $\{a\}$, tetapi komplementnya $\{b, c, d\}$ tidak termasuk dalam τ . Jadi $\{a\}$ tidak klopen dan tidak ada kandidat lain untuk membentuk pemisahan. Maka X terhubung.

Pemeriksaan R.104 Kelas topologi 16 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji kedua himpunan buka sejati terhadap kriteria klopen.

Tahap 2: komplementnya adalah $\{b, c, d\}$ dan $\{c, d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Baik $\{b, c, d\}$ maupun $\{c, d\}$ tidak termasuk dalam τ . Karena itu, tidak satu pun himpunan buka sejati tak kosong juga tertutup. Pemisahan tidak mungkin ada, sehingga X terhubung.

Pemeriksaan R.105 Kelas topologi 17 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cari pasangan komplementer di antara tiga himpunan buka sejati.

Tahap 2: komplementnya masing-masing $\{b, c, d\}$, $\{c, d\}$, dan $\{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tiga komplemen tersebut semuanya tidak berada dalam τ . Dengan demikian tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong. Kriteria klopen bagi keterputusan lalu menunjukkan bahwa X terhubung.

Pemeriksaan R.106 Kelas topologi 18 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: hitung komplemen setiap himpunan buka sejati.

Tahap 2: periksa $\{b, c, d\}$, $\{a, d\}$, dan $\{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Komplemen $\{a\}$, $\{b, c\}$, dan $\{a, b, c\}$ berturut-turut adalah ketiga himpunan pada petunjuk. Tidak satu pun buka. Jadi tidak ada pasangan himpunan buka tak kosong yang saling berkomplemen, sehingga tidak ada pemisahan dan X terhubung.

Pemeriksaan R.107 Kelas topologi 19 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: tentukan komplemen ketiga himpunan buka sejati.

Tahap 2: komplementnya ialah $\{b, c, d\}$, $\{c, d\}$, dan $\{b\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tidak satu pun dari $\{b, c, d\}$, $\{c, d\}$, atau $\{b\}$ tercantum dalam τ . Jadi setiap himpunan buka sejati tak kosong gagal menjadi tertutup. Karena itu pemisahan tidak ada dan X terhubung.

Pemeriksaan R.108 Kelas topologi 20 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: keterputusan memerlukan pasangan anggota topologi yang saling berkomplemen.

Tahap 2: hitung empat komplemen: $\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{d\}, \{c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Keempat himpunan pada petunjuk adalah komplemen semua himpunan buka sejati tak kosong, dan tidak satu pun merupakan anggota τ . Jadi tak ada himpunan klopen sejati tak kosong; akibatnya X terhubung.

Pemeriksaan R.109 Kelas topologi 21 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji apakah $\{a\}$ tertutup sekaligus buka.

Tahap 2: komplemennya ialah $\{b, c, d\}$, yang juga tercantum dalam τ .

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$ sama-sama buka, tak kosong, saling lepas, dan menutupi X . Maka $X = \{a\} \sqcup \{b, c, d\}$ adalah suatu pemisahan, sehingga ruang tidak terhubung.

Pemeriksaan R.110 Kelas topologi 22 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: periksa komplemen keempat himpunan buka sejati.

Tahap 2: komplemennya ialah $\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tak satu pun dari empat komplemen pada petunjuk berada dalam τ . Karena itu tidak ada sub-himpunan sejati tak kosong yang sekaligus buka dan tertutup. Kriteria klopen menunjukkan bahwa X terhubung.

Pemeriksaan R.111 Kelas topologi 23 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cari dua anggota tak kosong topologi yang saling berkomplemen.

Tahap 2: uji komplemen $\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Daftar pada petunjuk memuat semua komplemen himpunan buka sejati tak kosong, dan tak satu pun ada dalam τ . Maka tidak tersedia pasangan buka komplementer untuk membentuk pemisahan. Jadi X terhubung.

Pemeriksaan R.112 Kelas topologi 24 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: carilah dua himpunan buka beranggota dua yang saling berkomplemen.

Tahap 2: gunakan $\{a, b\}$ dan $\{c, d\}$.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Baik $\{a, b\}$ maupun $\{c, d\}$ adalah anggota τ . Keduanya tak kosong, saling lepas, dan gabungannya X . Jadi keduanya membentuk pemisahan dan X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.113 Kelas topologi 25 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: periksa komplemen setiap himpunan buka sejati.

Tahap 2: daftar komplemennya adalah $\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tidak satu pun himpunan pada daftar komplemen itu termasuk dalam τ . Jadi tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong, dan karenanya tidak ada pemisahan. Dengan demikian X terhubung.

Pemeriksaan R.114 Kelas topologi 26 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji kedua himpunan buka sejati dengan kriteria klopen.

Tahap 2: komplementnya adalah $\{b, c, d\}$ dan $\{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Himpunan $\{b, c, d\}$ dan $\{d\}$ tidak termasuk dalam τ . Jadi tidak ada himpunan buka sejati tak kosong yang sekaligus tertutup. Karena pemisahan setara dengan adanya himpunan semacam itu, X terhubung.

Pemeriksaan R.115 Kelas topologi 27 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: perhatikan bahwa kedua himpunan buka sejati saling berkomplemen.

Tahap 2: tulis X sebagai gabungan lepas $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$.

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$ sama-sama buka, tak kosong, dan saling lepas, serta gabungannya adalah X . Dengan demikian keduanya merupakan pemisahan dan X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.116 Kelas topologi 28 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: hanya $\{a, b\}$ yang dapat menjadi sisi pemisahan sejati.

Tahap 2: tentukan apakah komplementnya $\{c, d\}$ buka.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Satu-satunya himpunan buka sejati tak kosong adalah $\{a, b\}$. Komplementnya $\{c, d\}$ tidak termasuk dalam τ , sehingga $\{a, b\}$ tidak klopen. Tidak ada pemisahan dan X terhubung.

Pemeriksaan R.117 Kelas topologi 29 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: cari dua himpunan buka sejati yang saling berkomplemen.

Tahap 2: gunakan kedua himpunan beranggota dua dalam τ .

Jawaban. X tidak terhubung.

Solusi. Himpunan $\{a, b\}$ dan $\{c, d\}$ terbuka, tak kosong, saling lepas, dan menutupi X . Pasangan ini merupakan pemisahan, jadi X tidak terhubung.

Pemeriksaan R.118 Kelas topologi 30 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: periksa komplemen kedua himpunan buka sejati.

Tahap 2: komplementnya adalah $\{c, d\}$ dan $\{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Baik $\{c, d\}$ maupun $\{d\}$ tidak berada dalam τ . Jadi tidak ada himpunan klopen sejati tak kosong dan tidak mungkin ada pemisahan. Maka X terhubung.

Pemeriksaan R.119 Kelas topologi 31 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: uji apakah salah satu dari tiga himpunan buka sejati mempunyai komplemen buka.

Tahap 2: komplementnya ialah $\{c, d\}$, $\{d\}$, dan $\{c\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Tiga komplemen pada petunjuk semuanya tidak tercantum dalam τ . Dengan demikian tidak ada subhimpunan sejati tak kosong yang klopen. Kriteria klopen untuk keterputusan menunjukkan bahwa X terhubung.

Pemeriksaan R.120 Kelas topologi 32 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a, b, c\}, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: hanya ada satu himpunan buka sejati tak kosong.

Tahap 2: komplemen $\{a, b, c\}$ adalah $\{d\}$.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Himpunan $\{d\}$ tidak buka, sehingga $\{a, b, c\}$ bukan himpunan klopen sejati. Tidak ada kandidat lain untuk sisi pemisahan. Oleh karena itu X terhubung.

Pemeriksaan R.121 Kelas topologi 33 pada empat titik. Pada $X = \{a, b, c, d\}$, tentukan keterhubungan topologi indisret $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Petunjuk. Tahap 1: pemisahan memerlukan dua himpunan buka tak kosong.

Tahap 2: hitung banyaknya himpunan buka tak kosong dalam topologi indisret.

Jawaban. X terhubung.

Solusi. Satu-satunya himpunan buka tak kosong adalah X sendiri. Karena pemisahan memerlukan dua himpunan buka tak kosong yang saling lepas, tidak ada pemisahan. Jadi X terhubung.

Pemeriksaan R.122 Titik pada himpunan terhubung sebagai titik limit. Tentukan benar atau salah: jika A terhubung dalam ruang topologi X dan $|A| \geq 2$, maka setiap titik A merupakan titik limit dari A .

Petunjuk. Tahap 1: tanpa aksioma T_1 , suatu titik pada ruang terhubung dapat terisolasi dari titik lain secara sepihak.

Tahap 2: gunakan ruang Sierpiński $X = \{0, 1\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$.

Jawaban. Salah.

Solusi. Ambil $A = X = \{0, 1\}$ dengan topologi $\{\emptyset, \{1\}, X\}$. Ruang ini terhubung: satu-satunya himpunan buka sejati tak kosong ialah $\{1\}$, sedangkan komplemennya $\{0\}$ tidak buka. Namun lingkungan buka $\{1\}$ tidak bertemu $A \setminus \{1\} = \{0\}$. Jadi 1 bukan titik limit A , meskipun A terhubung dan mempunyai dua titik.

Pemeriksaan R.123 Kekompakan tidak memaksa keterhubungan. Tentukan benar atau salah: setiap subruang kompak A dari ruang Hausdorff terhubung.

Petunjuk. Tahap 1: subhimpunan berhingga dari ruang metrik selalu kompak.

Tahap 2: pilih dua titik berbeda pada garis real.

Jawaban. Salah.

Solusi. Dalam ruang Hausdorff $\mathbb{R}$, ambil $A = \{0, 1\}$. Himpunan berhingga ini kompak. Dalam topologi subruang, $\{0\} = A \cap (-1/2, 1/2)$ dan $\{1\} = A \cap (1/2, 3/2)$ adalah himpunan buka tak kosong yang saling lepas dan menutupi A . Jadi A tidak terhubung.

Pemeriksaan R.124 Keterhubungan tidak memaksa kekompakan. Tentukan benar atau salah: setiap subruang terhubung A dari ruang Hausdorff kompak.

Petunjuk. Tahap 1: interval pada garis real terhubung, tetapi tidak semuanya kompak.

Tahap 2: gunakan seluruh garis real dan suatu selimut buka tanpa subselimut berhingga.

Jawaban. Salah.

Solusi. Ambil $A = \mathbb{R}$ di dalam ruang Hausdorff $\mathbb{R}$. Sebagai interval, A terhubung. Akan tetapi, selimut buka $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ menutupi $\mathbb{R}$ dan tidak mempunyai subselimut berhingga: setiap subkoleksi berhingga termuat dalam satu $(-N, N)$ dan melewati titik di luar interval itu. Jadi A tidak kompak.

Pemeriksaan R.125 Subhimpunan ruang diskret. Tentukan benar atau salah: setiap subhimpunan dari ruang bertopologi diskret tidak terhubung.

Petunjuk. Tahap 1: ingat kasus ruang dengan nol atau satu titik.

Tahap 2: pilih satu singleton sebagai subhimpunan.

Jawaban. Salah.

Solusi. Dalam ruang diskret tak kosong X , pilih $x \in X$. Subruang $A = \{x\}$ tidak dapat ditulis sebagai gabungan dua himpunan tak kosong yang saling lepas, sehingga terhubung. Jadi tidak benar bahwa setiap subhimpunan ruang diskret tidak terhubung. Secara lengkap, subruang diskret terhubung tepat bila memiliki paling banyak satu titik.

Pemeriksaan R.126 Komponen dua titik dalam ruang berhingga. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ bertopologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$. Tentukan benar atau salah: $\{a, b\}$ merupakan komponen terhubung dari X .

Petunjuk. Tahap 1: hitung topologi subruang pada $\{a, b\}$ dan uji keterhubungannya.

Tahap 2: periksa tiga superset sejati $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, dan X untuk membuktikan kemaksimalan.

Jawaban. Benar; $\{a, b\}$ adalah komponen terhubung.

Solusi. Topologi subruang pada $\{a, b\}$ ialah $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Karena komplemen relatif $\{a\}$, yaitu $\{b\}$, tidak buka, subruang itu terhubung. Setiap superset sejati yang lebih besar tidak terhubung: $\{a, b, c\}$ dipisahkan oleh $\{a, b\}$ dan $\{c\}$; $\{a, b, d\}$ dipisahkan oleh $\{a, b\}$ dan $\{d\}$; sedangkan X dipisahkan oleh $\{a, b\}$ dan $\{c, d\}$. Jadi $\{a, b\}$ maksimal di antara subhimpunan terhubung dan merupakan sebuah komponen.

Pemeriksaan R.127 Menguji pemisahan relatif. Pada ruang $X = \{a, b, c, d\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$, tentukan benar atau salah: $U = \{a, c, d\}$ dan $V = \{a, b, c\}$ membentuk pemisahan bagi $A = \{c, d\}$.

Petunjuk. Tahap 1: untuk memisahkan A , irisan $U \cap A$ dan $V \cap A$ harus saling lepas.

Tahap 2: hitung $U \cap V \cap A$.

Jawaban. Salah; kedua bagian bertumpang tindih pada c di dalam A .

Solusi. Memang U dan V terbuka dan $A \subseteq U \cup V$. Namun $U \cap A = \{c, d\}$ dan $V \cap A = \{c\}$, sehingga $U \cap V \cap A = \{c\} \neq \emptyset$. Karena irisan relatifnya tidak saling lepas, U dan V bukan pemisahan bagi A .

Pemeriksaan R.128 Titik pemutus dalam topologi empat titik. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ bertopologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Tentukan benar atau salah: ruang terhubung X ini tidak mempunyai titik pemutus.

Petunjuk. Tahap 1: hapus titik yang tidak muncul dalam satu pun himpunan buka sejati.

Tahap 2: pada $X \setminus \{d\}$, periksa pasangan $\{a\}$ dan $\{b, c\}$.

Jawaban. Salah; d adalah titik pemutus.

Solusi. Ruang X sendiri terhubung, sebab komplemen $\{a\}$, $\{b, c\}$, dan $\{a, b, c\}$ masing-masing $\{b, c, d\}$, $\{a, d\}$, dan $\{d\}$, yang tidak buka. Setelah d dihapus, topologi subruang pada $X \setminus \{d\} = \{a, b, c\}$ adalah $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Di sana $\{a\}$ dan $\{b, c\}$ membentuk pemisahan. Jadi penghapusan d memutus ruang, sehingga d adalah titik pemutus dan pernyataan tersebut salah.

Uji Penguasaan Bab 18: Keterhubungan

Delapan uji penguasaan orisinal ini menghubungkan pemisahan, himpunan buka-tertutup, citra kontinu, interval real, komponen terhubung, himpunan dan titik pemutus, Teorema Nilai Antara, serta penerapan titik tetap. Kerjakan setiap pernyataan sebelum membuka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Komponen pendamping ini ditulis secara terpisah di bawah lisensi CC BY 4.0, bukan materi resmi GVSU

atau ekspresi dari sumber lain, dan tidak menyiratkan dukungan penulis sumber.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Pemeriksaan R.129 Mengenali pemisahan dan blok terhubung. Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi

$$\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}.$$

Tunjukkan bahwa $U = \{a, b\}$ dan $V = \{c, d\}$ membentuk pemisahan dari X . Selanjutnya buktikan bahwa subruang U dan V masing-masing terhubung. Simpulkan komponen-komponen terhubung dari X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Periksa bahwa U dan V terbuka, tak kosong, saling lepas, dan gabungannya X .

Tahap 2. Hitung topologi subruang pada U dan V .

Tahap 3. Ruang indiskret dengan sedikitnya satu titik terhubung; lalu gunakan maksimalitas untuk menentukan komponen.

Jawaban. Himpunan U dan V terbuka, tak kosong, saling lepas, dan $U \cup V = X$, sehingga keduanya memisahkan X . Topologi subruang pada masing-masing blok adalah indiskret, jadi kedua blok terhubung. Komponen-komponen X tepat U dan V .

Solusi. Dari daftar τ , himpunan U dan V terbuka dalam X . Selain itu, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, dan $U \cup V = X$. Jadi U dan V memenuhi semua syarat suatu pemisahan dari X ; khususnya, X tidak terhubung.

Himpunan buka subruang dari U berbentuk $U \cap O$ dengan $O \in \tau$. Keempat kemungkinan memberi hanya $\emptyset$ dan U . Jadi U bertopologi indiskret. Topologi subruang pada V juga $\{\emptyset, V\}$. Ruang indiskret tak kosong tidak mempunyai dua himpunan buka tak kosong yang saling lepas, maka U dan V terhubung.

Subhimpunan terhubung yang memuat titik a tidak dapat memuat titik dari V : irisan dengan U dan V akan memisahkannya. Karena U sendiri terhubung, U merupakan subhimpunan terhubung maksimal yang memuat a . Argumen yang sama berlaku bagi setiap titik dan bagi V . Jadi komponen-komponen terhubung X adalah U dan V .

Pemeriksaan R.130 Kriteria buka-tertutup untuk keterhubungan. Buktikan bahwa ruang topologi X terhubung jika dan hanya jika satu-satunya subhimpunan X yang sekaligus terbuka dan tertutup adalah $\emptyset$ dan X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika A terbuka dan tertutup, maka $X \setminus A$ juga terbuka.

Tahap 2. Jika A bukan kosong maupun seluruh ruang, pasangan A dan $X \setminus A$ merupakan calon pemisahan.

Tahap 3. Sebaliknya, dari suatu pemisahan U, V , gunakan $V = X \setminus U$.

Jawaban. Subhimpunan buka-tertutup sejati A menghasilkan pemisahan A dan $X \setminus A$. Sebaliknya, setiap pemisahan U, V membuat U terbuka dan tertutup karena $X \setminus U = V$. Karena itu kedua kondisi ekuivalen.

Solusi. Andaikan X terhubung dan misalkan $A \subseteq X$ sekaligus terbuka dan tertutup. Jika $A \notin \{\emptyset, X\}$, maka A dan $X \setminus A$ tak kosong. Himpunan pertama terbuka menurut hipotesis, sedangkan yang kedua terbuka karena A tertutup. Keduanya saling lepas dan gabungannya X , sehingga membentuk pemisahan. Ini bertentangan dengan keterhubungan X . Maka hanya $\emptyset$ dan X yang buka-tertutup.

Sebaliknya, andaikan $\emptyset$ dan X adalah satu-satunya himpunan buka-tertutup. Jika X tidak terhubung, ada pemisahan U, V . Himpunan U terbuka, dan karena $X \setminus U = V$ juga terbuka, U tertutup. Syarat pemisahan membuat U tak kosong dan tidak sama dengan X , bertentangan dengan hipotesis. Jadi X terhubung.

Pemeriksaan R.131 Citra kontinu mempertahankan keterhubungan. Misalkan X terhubung dan $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Buktikan bahwa $f(X)$ terhubung dalam topologi subruang dari Y . Deduksikan bahwa tidak ada surjeksi kontinu dari ruang terhubung tak kosong ke ruang diskret $\{0, 1\}$ yang mengenai kedua titik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Andaikan $f(X)$ mempunyai pemisahan P, Q .

Tahap 2. Tarik P dan Q kembali melalui pemetaan $f : X \rightarrow f(X)$.

Tahap 3. Ruang diskret dua titik dipisahkan oleh kedua singletonnya.

Jawaban. Pemisahan citra akan menarik kembali menjadi pemisahan domain, karena prapeta memisahkan gabungan, irisan, dan ketakosongan ketika setiap bagian mengenai citra. Jadi $f(X)$ terhubung. Surjeksi ke ruang diskret dua titik akan mempunyai citra yang tidak terhubung, sehingga mustahil.

Solusi. Pandang f sebagai pemetaan kontinu $f : X \rightarrow f(X)$. Andaikan P, Q membentuk pemisahan dari $f(X)$. Maka $f^{-1}(P)$ dan $f^{-1}(Q)$ terbuka dalam X . Kedua prapeta tak kosong: jika $p \in P$, karena $p \in f(X)$, ada $x \in X$ dengan $f(x) = p$, dan demikian pula untuk Q . Selain itu,

$$f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \cap Q) = \emptyset$$

dan

$$f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q) = f^{-1}(f(X)) = X.$$

Jadi kedua prapeta memisahkan X , berlawanan dengan hipotesis. Maka $f(X)$ terhubung.

Dalam ruang diskret $D = \{0, 1\}$, singleton $\{0\}$ dan $\{1\}$ membentuk pemisahan, sehingga D tidak terhubung. Jika ada surjeksi kontinu $g : X \rightarrow D$, hasil yang baru dibuktikan akan membuat $g(X) = D$ terhubung, sebuah kontradiksi.

Pemeriksaan R.132 Mencirikan subhimpunan terhubung dari garis real. Buktikan bahwa subhimpunan tak kosong $A \subseteq \mathbb{R}$ terhubung jika dan hanya jika A mempunyai sifat interval: setiap kali $a, b \in A$ dan $a < c < b$, berlaku $c \in A$. Simpulkan bahwa subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ tepat interval-interval, termasuk singleton dan interval tak terbatas.

Petunjuk. *Tahap 1.* Jika sifat interval gagal pada c , gunakan $A \cap (-\infty, c)$ dan $A \cap (c, \infty)$.

Tahap 2. Untuk arah sebaliknya, andaikan suatu interval A dipisahkan oleh U, V ; pilih $u \in U$ dan $v \in V$ dengan $u < v$.

Tahap 3. Ambil supremum titik-titik U di antara u dan v , lalu gunakan keterbukaan relatif untuk memperoleh kontradiksi.

Jawaban. Hilangnya satu titik di antara dua anggota A menghasilkan pemisahan di kiri dan kanan titik tersebut. Sebaliknya, pemisahan suatu himpunan yang mempunyai sifat interval bertentangan dengan sifat supremum dan keterbukaan relatif kedua bagian. Jadi sifat interval ekuivalen dengan keterhubungan.

Solusi. Andaikan A terhubung. Jika terdapat $a, b \in A$ dan $a < c < b$ dengan $c \notin A$, tetapkan $U = A \cap (-\infty, c)$ dan $V = A \cap (c, \infty)$. Kedua himpunan terbuka dalam A , masing-masing memuat a dan b , saling lepas, dan gabungannya A . Ini adalah pemisahan, sebuah kontradiksi. Maka A mempunyai sifat interval.

Sebaliknya, andaikan A mempunyai sifat interval dan, untuk memperoleh kontradiksi, misalkan U, V memisahkan A . Pilih $u \in U$ dan $v \in V$; setelah menukar nama jika perlu, andaikan $u < v$. Sifat interval memberi $[u, v] \subseteq A$. Himpunan $E = U \cap [u, v]$ tak kosong dan terbatas di atas. Ambil $s = \sup E$. Karena $u \leq s \leq v$, berlaku $s \in A$, sehingga $s \in U$ atau $s \in V$.

Jika $s \in U$, keterbukaan relatif U memberi $\epsilon > 0$ dengan $A \cap (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq U$. Karena $s < v$ dalam kasus ini, suatu titik di antara s dan $\min\{s + \epsilon, v\}$ berada dalam E dan lebih besar dari s , bertentangan dengan sifat batas atas. Jika $s \in V$, keterbukaan relatif V memberi interval relatif di sekitar s yang tidak beririsan dengan U . Namun definisi supremum menjamin anggota E yang lebih besar dari $s - \epsilon$, juga kontradiksi. Jadi pemisahan tidak ada dan A terhubung. Sifat interval ini tepat definisi himpunan interval dalam $\mathbb{R}$, dengan singleton dan interval tak terbatas termasuk.

Pemeriksaan R.133 Komponen pada subruang garis real. Beri $X = (-2, -1) \cup \{0\} \cup [2, 4]$ topologi subruang dari $\mathbb{R}$. Tentukan semua komponen terhubung dari X dan buktikan jawaban Anda. Kemudian buktikan secara umum bahwa setiap komponen terhubung dari ruang topologi merupakan himpunan tertutup.

Petunjuk. *Tahap 1.* Ketiga bagian yang ditampilkan adalah interval atau singleton, sehingga terhubung.

Tahap 2. Gunakan titik-titik yang hilang di antara bagian-bagian itu untuk memisahkan setiap subhimpunan yang melintasi dua bagian.

Tahap 3. Untuk komponen umum C , gunakan fakta bahwa $C \subseteq \overline{C}$ dan bahwa penutupan himpunan terhubung tetap terhubung.

Jawaban. Komponen-komponen X adalah $(-2, -1)$, $\{0\}$, dan $[2, 4]$. Masing-masing terhubung dan tidak dapat diperbesar tanpa melintasi celah yang menghasilkan pemisahan. Secara umum, $\overline{C}$ terhubung dan memuat komponen C ; maksimalitas memaksa $\overline{C} = C$, sehingga C tertutup.

Solusi. Himpunan $(-2, -1)$ dan $[2, 4]$ adalah interval dalam $\mathbb{R}$, maka terhubung; singleton $\{0\}$ juga terhubung. Jika suatu subhimpunan $D \subseteq X$ memuat titik dari dua bagian berbeda, pilih bilangan real $c \notin X$ di antara kedua titik tersebut. Himpunan $D \cap (-\infty, c)$ dan $D \cap (c, \infty)$ kemudian terbuka relatif dalam D , tak kosong, saling lepas, dan menutupi D . Jadi D tidak terhubung. Tidak satu pun dari ketiga bagian dapat diperbesar di dalam X sambil tetap terhubung; ketiganya tepat komponen-komponen X .

Sekarang misalkan C suatu komponen dari ruang topologi umum Y . Penutupan himpunan terhubung terhubung: jika $\overline{C}$ mempunyai pemisahan, lema bahwa subhimpunan terhubung harus seluruhnya berada dalam salah satu sisi menempatkan C pada satu sisi; sisi lain yang tak kosong dan terbuka relatif akan memuat titik penutupan C tetapi tidak beririsan dengan C , sebuah kontradiksi. Jadi $\overline{C}$ terhubung. Karena $C \subseteq \overline{C}$ dan C maksimal di antara subhimpunan terhubung, berlaku $\overline{C} = C$. Maka C tertutup.

Pemeriksaan R.134 Titik pemutus sebagai invarian topologi. Misalkan $h : X \rightarrow Y$ suatu homeomorfisme antara ruang terhubung. Buktikan bahwa jika $S \subseteq X$ merupakan himpunan pemutus, maka $h(S)$ merupakan himpunan pemutus dari Y . Deduksikan bahwa titik pemutus dipertahankan oleh homeomorfisme, lalu gunakan hasil tersebut untuk membuktikan bahwa interval $[0, 1]$ tidak homeomorfik dengan lingkaran satuan S^1 .

Petunjuk. *Tahap 1.* Batasi h menjadi pemetaan dari $X \setminus S$ ke $Y \setminus h(S)$.

Tahap 2. Tunjukkan bahwa pembatasan itu homeomorfisme, sehingga mempertahankan keterhubungan atau ketidakterhubungan.

Tahap 3. Titik interior $[0, 1]$ adalah titik pemutus, sedangkan penghapusan satu titik dari S^1 menghasilkan ruang yang homeomorfik dengan interval terbuka.

Jawaban. Pembatasan $h : X \setminus S \rightarrow Y \setminus h(S)$ adalah homeomorfisme. Karena domainnya tidak terhubung, kodomainnya juga tidak terhubung; jadi $h(S)$ himpunan pemutus. Khususnya, singleton titik pemutus dipetakan ke singleton titik pemutus. Interval mempunyai titik pemutus, sedangkan lingkaran tidak, sehingga keduanya tidak homeomorfik.

Solusi. Karena h bijektif, $h(X \setminus S) = Y \setminus h(S)$. Pembatasan $h_S : X \setminus S \rightarrow Y \setminus h(S)$ kontinu sebagai pembatasan fungsi kontinu. Inversnya adalah pembatasan h^{-1} , sehingga juga kontinu. Jadi h_S homeomorfisme. Jika S himpunan pemutus, $X \setminus S$ tidak terhubung. Karena keterhubungan merupakan invarian topologi, $Y \setminus h(S)$ tidak terhubung. Maka $h(S)$ himpunan pemutus. Untuk $S = \{p\}$, bijektivitas memberi $h(S) = \{h(p)\}$, sehingga titik pemutus dipertahankan.

Setiap $p \in (0, 1)$ merupakan titik pemutus dari $[0, 1]$, sebab $[0, 1] \setminus \{p\} = [0, p) \cup (p, 1]$ tidak terhubung. Sebaliknya, untuk setiap $q \in S^1$, ruang $S^1 \setminus \{q\}$ homeomorfik dengan $\mathbb{R}$, misalnya melalui proyeksi stereografik setelah suatu rotasi membawa q ke kutub proyeksi. Karena $\mathbb{R}$ terhubung, lingkaran tidak mempunyai titik pemutus. Jika ada homeomorfisme $[0, 1] \rightarrow S^1$, citra suatu titik interior harus menjadi titik pemutus lingkaran, kontradiksi. Jadi kedua ruang tidak homeomorfik.

Pemeriksaan R.135 Teorema Nilai Antara dari keterhubungan. Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, dan $a, b \in I$ dengan $a < b$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan y di antara $f(a)$ dan $f(b)$, terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f(c) = y$. Jelaskan bagaimana bukti ini mengikuti langsung dari keterhubungan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Interval $[a, b]$ terhubung.

Tahap 2. Citra kontinu $f([a, b])$ terhubung, sehingga merupakan interval dalam $\mathbb{R}$.

Tahap 3. Interval yang memuat $f(a)$ dan $f(b)$ harus memuat setiap bilangan di antaranya.

Jawaban. Himpunan $[a, b]$ terhubung, maka citranya di bawah f terhubung. Subhimpunan terhubung dari $\mathbb{R}$ adalah interval. Karena $f([a, b])$ memuat kedua nilai ujung, ia memuat setiap y di antara keduanya,

sehingga $y = f(c)$ untuk suatu $c \in [a, b]$.

Solusi. Karena I interval dan $a, b \in I$, berlaku $[a, b] \subseteq I$. Interval tertutup $[a, b]$ terhubung. Pembatasan $f|_{[a, b]}$ kontinu, sehingga $f([a, b])$ terhubung sebagai citra kontinu ruang terhubung. Berdasarkan pencirian subhimpunan terhubung dari garis real, $f([a, b])$ merupakan interval.

Andaikan, tanpa mengurangi keumuman, bahwa $f(a) \leq y \leq f(b)$. Kedua bilangan $f(a)$ dan $f(b)$ termasuk dalam interval $f([a, b])$. Karena interval memuat setiap bilangan di antara dua anggotanya, $y \in f([a, b])$. Menurut definisi citra, ada $c \in [a, b]$ dengan $f(c) = y$. Jika urutan nilai ujung terbalik, argumen yang sama berlaku setelah keduanya ditukar. Inilah Teorema Nilai Antara sebagai konsekuensi langsung keterhubungan.

Pemeriksaan R.136 Penerapan titik tetap pada interval. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ kontinu, dengan $a < b$. Buktikan bahwa f mempunyai titik tetap: terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f(c) = c$. Tunjukkan pula bahwa hipotesis kodomain $[a, b]$ penting dengan memberikan fungsi kontinu $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yang tidak mempunyai titik tetap.

Petunjuk. *Tahap 1.* Definisikan $h(x) = f(x) - x$.

Tahap 2. Dari $f(a), f(b) \in [a, b]$, tentukan tanda $h(a)$ dan $h(b)$.

Tahap 3. Terapkan Teorema Nilai Antara pada nilai 0; untuk contoh tandingan, geser setiap titik dengan konstanta positif.

Jawaban. Fungsi $h(x) = f(x) - x$ kontinu, dengan $h(a) \geq 0$ dan $h(b) \leq 0$. Teorema Nilai Antara memberi $h(c) = 0$, sehingga $f(c) = c$. Tanpa syarat bahwa citra tetap dalam interval, fungsi $g(x) = x + 1$ kontinu tetapi tidak mempunyai titik tetap.

Solusi. Definisikan $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ melalui $h(x) = f(x) - x$. Fungsi h kontinu sebagai selisih dua fungsi kontinu. Karena $f(a) \in [a, b]$, berlaku $f(a) \geq a$, sehingga $h(a) \geq 0$. Demikian pula, $f(b) \leq b$, sehingga $h(b) \leq 0$.

Jika salah satu nilai ujung sama dengan nol, titik ujung itu sudah merupakan titik tetap. Jika tidak, $h(a) > 0 > h(b)$. Dalam kedua keadaan, nilai 0 berada di antara $h(a)$ dan $h(b)$. Teorema Nilai Antara menghasilkan $c \in [a, b]$ dengan $h(c) = 0$. Maka $f(c) - c = 0$, yakni $f(c) = c$.

Syarat $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ tidak boleh dihapus. Fungsi $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $g(x) = x + 1$ kontinu, tetapi persamaan $g(x) = x$ akan memberi $1 = 0$, yang mustahil. Pada contoh ini tanda ujung yang diperlukan juga gagal: $g(b) - b = 1 > 0$.

Lampiran S

Panduan Belajar Mandiri Bab 19: Ruang Terhubung Lintasan

Komponen ini mendampingi Bab 19, bukan menggantikannya. Kerjakan eksplorasi, kegiatan, dan latihan pada bab utama terlebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi secara bertahap.

Bab sumber memuat tepat 39 kejadian prompt fisik dan 39 entri dukungan sumber kanonis: 33 tugas atomik, lima pernyataan langsung, dan satu badan langsung. Dua simpul pengelompokan mempertahankan hubungan subprompt tanpa dihitung sebagai prompt tambahan. Tidak ada kejadian duplikat atau alias kejadian.

Delapan uji penguasaan orisinal melengkapi 39 panduan sumber. Komponen ini mempunyai tepat 47 entri dan 188 permukaan bertahap berupa pernyataan, petunjuk, jawaban atau rubrik, dan solusi.

Seluruh uraian pendamping ditulis mandiri untuk edisi ini. Komponen ini bukan teks maupun solusi resmi Steven Schlicker ataupun Grand Valley State University, tidak menyatakan dukungan mereka, dan memiliki identitas lisensi terpisah di bawah CC BY 4.0. Teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan GVSU CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tersebut tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model untuk komponen ini dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi ini tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Dua prompt tentang “sapu harmonik” memuat ketidakselarasan matematis: definisi literal hanya memuat ruas-ruas hitung dan menjadikan ruang itu lokal terhubung lintasan, sedangkan kesimpulan yang diminta berlaku untuk sapu tertutup setelah ruas vertikal limit ditambahkan. Panduan terkait menyajikan kedua analisis secara transparan tanpa mengubah teks utama.

Panduan Prompt Sumber Bab 19: Lintasan dan Komponen Lintasan

Dua puluh satu panduan ini mengikuti tepat urutan prompt nonlatihan Bab 19. Kerjakan prompt utama lebih dahulu, lalu buka petunjuk, jawaban, dan solusi secara bertahap.

Uraian ini merupakan karya pendamping asli berlisensi CC BY 4.0, bukan solusi resmi GVSU, dan tidak menyiratkan dukungan penulis atau institusi sumber. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan S.1 Garis real Euklides terhubung lintasan. Tentukan apakah $\mathbb{R}$ dengan topologi Euklides terhubung lintasan, dan berikan lintasan eksplisit di antara dua titik sebarang.

Petunjuk. Untuk $a, b \in \mathbb{R}$, interpolasikan keduanya secara linear pada parameter $t \in [0, 1]$.

Jawaban. Ya. Lintasan $p(t) = (1-t)a + tb$ menghubungkan a dengan b .

Solusi. Fungsi $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(t) = (1-t)a + tb$, kontinu sebagai fungsi polinomial. Nilai ujungnya adalah $p(0) = a$ dan $p(1) = b$. Karena konstruksi ini berlaku untuk setiap pasangan a, b , garis real Euklides terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.2 Garis real bertopologi kofinit. Tentukan apakah $\mathbb{R}$ dengan topologi komplemen berhingga terhubung lintasan.

Petunjuk. Gunakan lintasan linear yang sama. Prapeta himpunan kofinit di bawah fungsi linear nonkonstan adalah interval parameter dikurangi berhingga banyak titik.

Jawaban. Ya; $p(t) = (1-t)a + tb$ kontinu dari interval Euklides ke garis real kofinit.

Solusi. Jika $a = b$, lintasan konstan kontinu. Jika $a \neq b$ dan U buka kofinit, komplemen $\mathbb{R} \setminus U$ berhingga. Karena p injektif, $p^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)$ berhingga dan tertutup dalam $[0, 1]$; maka $p^{-1}(U)$ buka. Jadi p kontinu dan menghubungkan pasangan titik sebarang.

Pemeriksaan S.3 Subruang Sierpiński dua titik. Dalam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$, tentukan apakah $A = \{b, c\}$ terhubung dan terhubung lintasan.

Petunjuk. Topologi subruang pada A adalah $\{\emptyset, \{c\}, A\}$. Untuk lintasan dari b ke c , coba $p(0) = b$ dan $p(t) = c$ untuk $t > 0$.

Jawaban. Subruang A terhubung dan juga terhubung lintasan.

Solusi. Satu-satunya himpunan buka taktrivial dalam A ialah $\{c\}$, sehingga tidak ada dua himpunan buka takkosong yang saling lepas dan menutupi A . Jadi A terhubung. Definisikan $p(0) = b$ dan $p(t) = c$ untuk $t > 0$. Prapeta $\{c\}$ adalah $(0, 1]$, yang buka dalam $[0, 1]$; maka p kontinu. Membalik parameter memberi lintasan dari c ke b , sedangkan lintasan konstan menangani ujung yang sama.

Pemeriksaan S.4 Memakai definisi keterhubungan lintasan. Misalkan A terhubung lintasan dan $a, b \in A$. Jelaskan mengapa ada fungsi kontinu $p : [0, 1] \rightarrow A$ dengan $p(0) = a$ dan $p(1) = b$.

Petunjuk. Baca kembali kuantor dalam definisi “terhubung lintasan”.

Jawaban. Keberadaan p adalah tepat isi definisi keterhubungan lintasan untuk pasangan a, b .

Solusi. Suatu subruang terhubung lintasan berarti bahwa untuk setiap dua titiknya terdapat lintasan di dalam subruang tersebut. Karena $a, b \in A$, definisi langsung menghasilkan fungsi kontinu $p : [0, 1] \rightarrow A$ dengan kedua nilai ujung yang diminta.

Pemeriksaan S.5 Citra kontinu dari ruang terhubung lintasan. Jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu, $A \subseteq X$ terhubung lintasan, $f(a) = u$, $f(b) = v$, dan p lintasan dari a ke b , bangun lintasan dari u ke v dalam $f(A)$.

Petunjuk. Komposisikan p dengan f .

Jawaban. Ambil $q = f \circ p$.

Solusi. Komposisi $q = f \circ p : [0, 1] \rightarrow f(A)$ kontinu karena p dan pembatasan $f|_A$ kontinu. Selain itu, $q(0) = f(a) = u$ dan $q(1) = f(b) = v$. Pasangan u, v dipilih sebarang, sehingga $f(A)$ terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.6 Kontinuitas hasil kali lintasan. Untuk lintasan p dari a ke b dan q dari b ke c , buktikan bahwa fungsi yang memakai $p(2t)$ pada $[0, 1/2]$ dan $q(2t-1)$ pada $[1/2, 1]$ adalah lintasan dari a ke c .

Petunjuk. Kedua ruas parameter tertutup, menutupi $[0, 1]$, dan rumusnya berimpit pada $t = 1/2$.

Jawaban. Lemma Penempelan memberi kontinuitas karena kedua potongan bernilai b di titik sambung; nilai ujungnya a dan c .

Solusi. Pada $A = [0, 1/2]$, fungsi $t \mapsto p(2t)$ kontinu; pada $B = [1/2, 1]$, fungsi $t \mapsto q(2t-1)$ kontinu. Kedua himpunan tertutup dan menutupi domain. Di irisannya, kedua rumus memberi $p(1) = b = q(0)$. Lemma Penempelan menghasilkan fungsi kontinu pada seluruh interval. Nilainya di 0 adalah a dan di 1 adalah c .

Pemeriksaan S.7 Refleksivitas relasi lintasan. Pada ruang X , definisikan $a \sim b$ bila ada lintasan dari a ke b . Buktikan bahwa relasi ini refleksif.

Petunjuk. Gunakan fungsi konstan.

Jawaban. Untuk setiap a , lintasan konstan $p(t) = a$ menunjukkan $a \sim a$.

Solusi. Fungsi konstan $p : [0, 1] \rightarrow X$, $p(t) = a$, kontinu dan memenuhi $p(0) = p(1) = a$. Jadi setiap elemen berelasi dengan dirinya sendiri, persis syarat refleksif.

Pemeriksaan S.8 Simetri relasi lintasan. Dengan relasi yang sama, buktikan bahwa $a \sim b$ mengakibatkan $b \sim a$.

Petunjuk. Balik parameter lintasan melalui $t \mapsto 1 - t$.

Jawaban. Jika p menghubungkan a ke b , maka $r(t) = p(1 - t)$ menghubungkan b ke a .

Solusi. Pemetaan $t \mapsto 1 - t$ kontinu, sehingga komposisinya dengan p kontinu. Nilai ujung $r(0) = p(1) = b$ dan $r(1) = p(0) = a$. Maka relasi simetris.

Pemeriksaan S.9 Transitivitas relasi lintasan. Buktikan bahwa $a \sim b$ dan $b \sim c$ mengakibatkan $a \sim c$.

Petunjuk. Tempelkan kedua lintasan dengan hasil kali lintasan.

Jawaban. Hasil kali lintasan pertama dan kedua merupakan lintasan dari a ke c .

Solusi. Ambil lintasan $p : a \rightsquigarrow b$ dan $q : b \rightsquigarrow c$. Konstruksi pada panduan sebelumnya mendefinisikan fungsi kontinu yang mengikuti p selama separuh waktu pertama dan q selama separuh kedua. Fungsi itu berawal di a dan berakhir di c , sehingga $a \sim c$.

Pemeriksaan S.10 Keterhubungan ruang berhingga contoh. Untuk $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$, tentukan apakah X terhubung.

Petunjuk. Periksa apakah ada himpunan buka nontrivial yang komplementnya juga tercantum dalam τ .

Jawaban. Ruang X terhubung.

Solusi. Komplemen himpunan buka nontrivial berturut-turut ialah $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, d\}$, $\{d\}$, dan $\{a\}$; tidak satu pun termasuk τ . Jadi tidak ada himpunan buka-tertutup nontrivial. Karena pemisahan akan menghasilkan himpunan semacam itu, X terhubung.

Pemeriksaan S.11 Lingkungan minimal semua titik. Dalam ruang berhingga pada panduan sebelumnya, hitung U_x , yaitu irisan semua himpunan buka yang memuat x , untuk setiap $x \in X$.

Petunjuk. Untuk setiap titik, daftar dahulu semua anggota τ yang memuatnya, lalu iris.

Jawaban. $U_a = \{a, b\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = \{c\}$, dan $U_d = \{b, c, d\}$.

Solusi. Himpunan buka yang memuat a mempunyai irisan $\{a, b\}$. Karena singleton $\{b\}$ dan $\{c\}$ sendiri terbuka, irisan minimal di kedua titik itu masing-masing singleton. Satu-satunya himpunan buka sejati yang memuat d adalah $\{b, c, d\}$, selain X , sehingga irisannya $\{b, c, d\}$.

Pemeriksaan S.12 Lintasan langkah dari b ke d. Dalam $U_d = \{b, c, d\}$, buktikan bahwa fungsi $p(t) = b$ untuk $0 \leq t < 1/2$ dan $p(t) = d$ untuk $1/2 \leq t \leq 1$ adalah lintasan dari b ke d .

Petunjuk. Topologi subruang pada U_d adalah $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, U_d\}$.

Jawaban. Semua prapeta himpunan buka adalah $\emptyset$, $[0, 1/2)$, atau $[0, 1]$, sehingga terbuka dalam domain.

Solusi. Himpunan buka yang mengenai citra $\{b, d\}$ memberi prapeta: himpunan yang memuat b tetapi tidak d memberi $[0, 1/2)$; seluruh U_d memberi domain; dan himpunan yang tidak mengenai citra memberi himpunan kosong. Ketiganya buka relatif dalam $[0, 1]$. Jadi p kontinu, dengan $p(0) = b$ dan $p(1) = d$.

Pemeriksaan S.13 Lintasan langkah dari c ke d. Dalam U_d , buktikan bahwa fungsi $p(t) = c$ untuk $0 \leq t < 1/2$ dan $p(t) = d$ untuk $1/2 \leq t \leq 1$ adalah lintasan dari c ke d .

Petunjuk. Ulangi analisis prapeta, dengan $\{c\}$ menggantikan $\{b\}$.

Jawaban. Fungsi kontinu dan mempunyai nilai ujung c serta d .

Solusi. Prapeta himpunan buka yang memuat c tetapi tidak d adalah $[0, 1/2)$; prapeta U_d adalah seluruh domain; prapeta himpunan buka lain yang tidak mengenai c adalah kosong. Semua terbuka relatif. Karena nilai ujungnya tepat c dan d , fungsi tersebut adalah lintasan yang diminta.

Pemeriksaan S.14 Keterhubungan lintasan lingkungan U_d . Gunakan lintasan menuju d untuk membuktikan bahwa $U_d = \{b, c, d\}$ terhubung lintasan.

Petunjuk. Balik lintasan bila perlu dan tempelkan dua lintasan melalui titik d .

Jawaban. Setiap dua titik dalam U_d dapat dihubungkan melalui d .

Solusi. Sudah tersedia lintasan $b \rightsquigarrow d$ dan $c \rightsquigarrow d$; lintasan konstan menangani d . Pembalikan memberi lintasan keluar dari d . Untuk titik $u, v \in U_d$, tempelkan lintasan $u \rightsquigarrow d$ dengan lintasan $d \rightsquigarrow v$. Hasilnya lintasan $u \rightsquigarrow v$, sehingga U_d terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.15 Prapeta ketika x berada dalam O . Dalam ruang berhingga, ambil $y \in U_x$ dan fungsi langkah $p(t) = y$ untuk $t < 1/2$, $p(t) = x$ untuk $t \geq 1/2$. Jika O buka dan $x \in O$, tentukan $p^{-1}(O)$.

Petunjuk. Karena U_x adalah irisan semua himpunan buka yang memuat x , setiap titik $y \in U_x$ juga berada dalam O .

Jawaban. $y \in O$ dan $p^{-1}(O) = [0, 1]$.

Solusi. Himpunan O adalah salah satu himpunan buka yang diiris untuk membentuk U_x , jadi $U_x \subseteq O$. Karena $y \in U_x$, kedua nilai fungsi, x dan y , berada dalam O . Dengan demikian setiap parameter dipetakan ke O , sehingga prapetanya seluruh domain.

Pemeriksaan S.16 Prapeta ketika hanya y berada dalam O . Untuk fungsi langkah yang sama, tentukan $p^{-1}(O)$ bila $x \notin O$ tetapi $y \in O$.

Petunjuk. Tentukan separuh parameter yang dipetakan ke y .

Jawaban. $p^{-1}(O) = [0, 1/2)$.

Solusi. Pada $0 \leq t < 1/2$, nilai $p(t) = y \in O$. Pada $1/2 \leq t \leq 1$, nilainya $x \notin O$. Jadi prapeta tepat $[0, 1/2)$, yang terbuka dalam topologi subruang $[0, 1]$.

Pemeriksaan S.17 Prapeta ketika kedua nilai di luar O . Untuk fungsi langkah yang sama, tentukan $p^{-1}(O)$ bila $x \notin O$ dan $y \notin O$.

Petunjuk. Citra p hanya terdiri atas x dan y .

Jawaban. $p^{-1}(O) = \emptyset$.

Solusi. Tidak ada nilai parameter yang dipetakan ke O , sebab kedua kemungkinan nilai fungsi berada di luar O . Maka prapeta kosong, yang terbuka.

Pemeriksaan S.18 Kontinuitas lintasan langkah umum. Dengan $y \in U_x$, buktikan bahwa fungsi langkah pada tiga panduan sebelumnya merupakan lintasan dari y ke x .

Petunjuk. Gabungkan tiga kemungkinan prapeta untuk setiap himpunan buka O .

Jawaban. Prapeta setiap himpunan buka adalah $[0, 1]$, $[0, 1/2)$, atau $\emptyset$; semuanya buka relatif.

Solusi. Jika $x \in O$, prapeta seluruh domain. Jika $x \notin O$ dan $y \in O$, prapeta $[0, 1/2)$. Jika keduanya di luar O , prapeta kosong. Jadi p kontinu. Nilai $p(0) = y$ dan $p(1) = x$, sehingga p lintasan dari y ke x .

Pemeriksaan S.19 Setiap lingkungan minimal terhubung lintasan. Dalam ruang topologi berhingga, buktikan bahwa U_x terhubung lintasan untuk setiap x .

Petunjuk. Hubungkan masing-masing dari dua titik sebarang ke x , balik salah satu lintasan, lalu tempelkan.

Jawaban. Setiap $y, z \in U_x$ dapat dihubungkan oleh lintasan $y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z$.

Solusi. Panduan sebelumnya memberi lintasan dari setiap $y \in U_x$ ke x . Untuk $y, z \in U_x$, ambil lintasan $y \rightsquigarrow x$ dan balik lintasan $z \rightsquigarrow x$ menjadi $x \rightsquigarrow z$. Hasil kali keduanya kontinu dan menghubungkan y ke z . Jadi U_x terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.20 Komponen lintasan berada dalam komponen. Jika C komponen terhubung yang memuat x dan P komponen lintasan yang memuat x , buktikan $P \subseteq C$.

Petunjuk. Ruang terhubung lintasan selalu terhubung, lalu gunakan maksimalitas komponen C .

Jawaban. P terhubung dan memuat x , sehingga harus termuat dalam subhimpunan terhubung maksimal C .

Solusi. Komponen lintasan P terhubung lintasan, maka terhubung. Himpunan $P \cup C$ adalah gabungan dua himpunan terhubung yang beririsan di x , sehingga terhubung. Maksimalitas komponen C memaksa $P \cup C = C$, yaitu $P \subseteq C$.

Pemeriksaan S.21 Komponen sama dengan komponen lintasan secara lokal. Dalam ruang terhubung lintasan secara lokal, lanjutkan argumen sebelumnya dan buktikan bahwa komponen C yang memuat x sama dengan komponen lintasan P yang memuat x .

Petunjuk. Komponen lintasan ruang terhubung lintasan secara lokal bersifat buka. Jika $C \neq P$, gabungkan komponen lintasan lain yang bertemu C menjadi Q .

Jawaban. Himpunan P dan $Q = C \setminus P$ akan menjadi pemisahan dari C , kontradiksi. Jadi $P = C$.

Solusi. Setiap komponen lintasan dari X terbuka karena X terhubung lintasan secara lokal. Jika $C \neq P$, maka Q , gabungan semua komponen lintasan lain yang beririsan dengan C , takkosong. Komponen-komponen lintasan mempartisi X , jadi $C = P \sqcup Q$. Himpunan $P \cap C = P$ terbuka relatif dalam C ; $Q \cap C = Q$ juga terbuka relatif sebagai gabungan komponen lintasan terbuka. Keduanya takkosong, saling lepas, dan menutupi C , sehingga memisahkan C . Ini bertentangan dengan keterhubungan komponen C . Maka $C = P$.

Panduan Latihan Bab 19 A

Sepuluh entri ini mendampingi sepuluh prompt latihan pertama dalam urutan sumber. Karya pendamping asli ini berlisensi CC BY 4.0 dan bukan solusi resmi GVSU. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan S.22 Lingkungan minimal yang tidak terbuka. Berikan ruang topologi X dan $x \in X$ sehingga irisan semua himpunan buka yang memuat x bukan himpunan buka.

Petunjuk. Pakai garis real biasa; irisan semua interval buka yang memuat sebuah titik hanya berisi titik itu.

Jawaban. Ambil $X = \mathbb{R}$ bertopologi Euklides dan $x = 0$. Lingkungan minimalnya adalah $\{0\}$, yang tidak terbuka.

Solusi. Setiap lingkungan buka dari 0 memuat 0, sehingga 0 berada dalam irisannya. Jika $y \neq 0$, pilih interval $(-|y|/2, |y|/2)$; interval ini memuat 0 tetapi tidak y . Jadi irisan semua himpunan buka yang memuat 0 tepat $\{0\}$. Singleton ini tidak terbuka dalam topologi Euklides.

Pemeriksaan S.23 Subhimpunan terhubung lintasan berada dalam satu komponen. Misalkan A subhimpunan terhubung lintasan takkosong dari X . Buktikan bahwa $A \subseteq PC(x)$ untuk suatu $x \in X$.

Petunjuk. Pilih $x \in A$ dan gunakan definisi komponen lintasan sebagai kelas semua titik yang dapat dihubungkan ke x .

Jawaban. Untuk sembarang $a \in A$, keterhubungan lintasan A memberi lintasan dari x ke a ; maka $a \in PC(x)$.

Solusi. Pilih satu titik $x \in A$. Untuk setiap $a \in A$, ada lintasan di dalam A dari x ke a . Komposisi lintasan itu dengan inklusi $A \hookrightarrow X$ adalah lintasan dalam X . Jadi a berada dalam kelas ekuivalensi lintasan $PC(x)$. Karena a sebarang, $A \subseteq PC(x)$. Pernyataan sumber memakai konvensi bahwa subruang terhubung lintasan yang dibahas takkosong.

Pemeriksaan S.24 Mencirikan ruang dengan satu komponen lintasan. Buktikan bahwa X terhubung lintasan jika dan hanya jika $X = PC(x)$ untuk suatu $x \in X$.

Petunjuk. Pada satu arah pilih titik dasar. Pada arah lain, hubungkan dua titik melalui titik dasar itu.

Jawaban. Ruang terhubung lintasan hanya memiliki satu kelas lintasan; sebaliknya, satu kelas lintasan membuat semua titik dapat dihubungkan.

Solusi. Jika X terhubung lintasan dan $x \in X$, setiap $y \in X$ dapat dihubungkan ke x , sehingga $PC(x) = X$. Sebaliknya, andaikan $PC(x) = X$. Untuk $a, b \in X$, ada lintasan $a \rightsquigarrow x$ dan $x \rightsquigarrow b$. Menempelkan keduanya memberi lintasan $a \rightsquigarrow b$. Jadi X terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.25 Gabungan keluarga terhubung lintasan yang beririsan. Jika setiap $A_\alpha \subseteq X$ terhubung lintasan dan $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, buktikan bahwa $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ terhubung lintasan.

Petunjuk. Pilih satu titik bersama z . Dua titik dalam gabungan mungkin berada pada anggota keluarga yang berbeda, tetapi keduanya dapat dihubungkan ke z .

Jawaban. Ya; lintasan dari titik pertama ke z dan dari z ke titik kedua dapat ditempelkan.

Solusi. Pilih $z \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Jika x, y berada dalam gabungan, ada indeks α, β dengan $x \in A_\alpha$ dan $y \in A_\beta$. Karena z berada dalam kedua himpunan, terdapat lintasan dalam A_α dari x ke z dan lintasan dalam A_β dari z ke y . Hasil kali lintasan itu berada seluruhnya dalam gabungan dan menghubungkan x ke y .

Pemeriksaan S.26 Keterhubungan sapu harmonik. Misalkan H adalah gabungan ruas garis dari $(0, 1)$ ke $(1/n, 0)$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Buktikan bahwa H terhubung.

Petunjuk. Setiap ruas terhubung dan semua ruas mempunyai titik $(0, 1)$ yang sama.

Jawaban. H terhubung sebagai gabungan himpunan-himpunan terhubung dengan irisan bersama takkosong.

Solusi. Untuk tiap n , ruas L_n adalah citra kontinu $[0, 1]$, maka terhubung. Semua L_n memuat titik puncak $v = (0, 1)$, sehingga $\bigcap_n L_n$ takkosong. Teorema gabungan himpunan terhubung yang mempunyai titik bersama memberi bahwa $H = \bigcup_n L_n$ terhubung.

Pemeriksaan S.27 Keterhubungan lintasan sapu harmonik. Untuk ruang H yang sama, buktikan bahwa H terhubung lintasan.

Petunjuk. Hubungkan setiap titik ke puncak sepanjang ruasnya sendiri.

Jawaban. Setiap dua titik dapat dihubungkan melalui puncak bersama $(0, 1)$.

Solusi. Jika $x \in L_m$ dan $y \in L_n$, parameterisasi bagian ruas dari x ke $v = (0, 1)$ dan bagian ruas dari v ke y . Keduanya lintasan linear yang terletak dalam H . Menempelkan keduanya di v menghasilkan lintasan dari x ke y . Jadi H terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.28 Audit keterhubungan lokal sapu harmonik. Nilai klaim sumber bahwa sapu harmonik $H = \bigcup_{n \geq 1} L_n$ tidak terhubung secara lokal. Bedakan definisi literal ini dari sapu tertutup $\hat{H} = H \cup (\{0\} \times [0, 1])$.

Petunjuk. Pada H , titik selain puncak mempunyai lingkungan kecil pada satu ruas; di puncak, irisan bola adalah bintang ruas-ruas. Pada $\hat{H}$, periksa titik interior pada ruas vertikal limit.

Jawaban. Secara literal klaim itu salah: H lokal terhubung, bahkan lokal terhubung lintasan. Klaim menjadi benar untuk $\hat{H}$.

Solusi. Jika $x \in H$ bukan puncak, x berada pada satu ruas L_n dan mempunyai bola cukup kecil yang tidak bertemu ruas lain; irisannya dengan H berupa interval, maka terhubung lintasan. Di puncak v , setiap

irisian $B(v, \varepsilon) \cap H$ adalah gabungan potongan ruas yang semuanya memuat v , jadi terhubung lintasan. Maka H lokal terhubung lintasan.

Untuk $\hat{H}$, ambil $z = (0, s)$ dengan $0 < s < 1$ dan bola kecil yang tidak memuat puncak. Setiap lingkungan relatif dari z bertemu potongan tak hingga banyak ruas L_n , tetapi potongan-potongan itu hanya saling terhubung melalui puncak di luar bola. Karena itu tidak ada lingkungan terhubung yang cukup kecil di z . Jadi versi tertutup tidak lokal terhubung. Perbedaan ini mencatat ketidakselarasan antara definisi literal dan tuntutan prompt.

Pemeriksaan S.29 Audit keterhubungan lintasan lokal sapu harmonik. Nilai klaim sumber bahwa sapu harmonik literal tidak terhubung lintasan secara lokal, dan jelaskan hasil untuk versi tertutup $\hat{H}$.

Petunjuk. Gunakan basis lingkungan terhubung lintasan yang dibangun pada panduan sebelumnya. Untuk versi tertutup, lokal terhubung lintasan akan mengakibatkan lokal terhubung.

Jawaban. Klaim literal salah: H lokal terhubung lintasan. Versi tertutup $\hat{H}$ tidak lokal terhubung lintasan.

Solusi. Pada titik bukan puncak, potongan interval kecil pada satu ruas memberi basis lingkungan buka relatif yang terhubung lintasan. Pada puncak, irisian bola kecil dengan H adalah bintang yang semua lengannya bertemu di puncak; dua titik dapat dihubungkan melalui puncak. Jadi H lokal terhubung lintasan.

Panduan sebelumnya membuktikan bahwa $\hat{H}$ tidak lokal terhubung pada titik interior ruas vertikal limit. Setiap ruang lokal terhubung lintasan pasti lokal terhubung, sebab himpunan terhubung lintasan terhubung. Maka $\hat{H}$ tidak lokal terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.30 Lokal terhubung lintasan tanpa terhubung lintasan global. Berikan ruang yang terhubung lintasan secara lokal tetapi tidak terhubung lintasan.

Petunjuk. Gunakan gabungan dua interval buka yang terpisah.

Jawaban. Contohnya $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}$.

Solusi. Setiap titik $x \in X$ mempunyai interval buka kecil yang tetap berada dalam salah satu komponen; interval itu terhubung lintasan. Jadi X lokal terhubung lintasan. Akan tetapi, $(0, 1)$ dan $(2, 3)$ membentuk pemisahan dari X . Ruang terhubung lintasan harus terhubung, sehingga X tidak terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.31 Topologi K tidak terhubung lintasan. Misalkan $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan τ_K dibangkitkan oleh interval biasa serta $(a, b) \setminus K$. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}, \tau_K)$ tidak terhubung lintasan.

Petunjuk. Jika ada lintasan dari bilangan negatif ke bilangan lebih dari 1, citranya dalam topologi biasa memuat $[0, 1]$. Citra lintasan kompak; gunakan bahwa $[0, 1]$ tertutup tetapi tidak kompak dalam topologi K.

Jawaban. Lintasan semacam itu akan memaksa $[0, 1]$ kompak dalam topologi K, padahal suatu selimut buka eksplisit menunjukkan sebaliknya.

Solusi. Andaikan $p : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_K)$ menghubungkan $a < 0$ ke $b > 1$. Karena topologi K lebih halus daripada topologi biasa, pemetaan identitas ke garis biasa kontinu; maka $p([0, 1])$ terhubung dalam garis biasa dan memuat $[0, 1]$. Citra $p([0, 1])$ kompak dalam topologi K. Himpunan $[0, 1]$ tertutup dalam topologi K, sehingga harus kompak.

Namun $[0, 1]$ tidak kompak. Ambil $U_0 = (-1, 2) \setminus K$. Untuk setiap n , pilih interval biasa U_n yang memuat $1/n$ tetapi mempunyai batas bawah positif. Keluarga $\{U_0, U_1, U_2, \dots\}$ menutupi $[0, 1]$. Setiap subkeluarga berhingga hanya memuat berhingga banyak U_n ; ada $1/m$ cukup dekat ke nol yang tidak termuat di interval-interval terpilih dan juga tidak termuat dalam U_0 . Jadi tidak ada subselimut berhingga, kontradiksi. Maka tidak ada lintasan tersebut dan ruang tidak terhubung lintasan.

Panduan Latihan Bab 19 B

Delapan entri ini menutup denominator latihan Bab 19. Karya pendamping asli ini berlisensi CC BY 4.0 dan bukan solusi resmi GVSU. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan S.32 Terhubung dan lokal terhubung lintasan. Buktikan bahwa ruang topologi yang terhubung dan terhubung lintasan secara lokal harus terhubung lintasan.

Petunjuk. Komponen lintasan ruang lokal terhubung lintasan bersifat buka. Komplemen satu komponen adalah gabungan komponen-komponen lain.

Jawaban. Setiap komponen lintasan buka dan tertutup; keterhubungan memaksa hanya ada satu komponen lintasan.

Solusi. Karena X lokal terhubung lintasan, setiap komponen lintasan P terbuka. Komponen-komponen lintasan mempartisi X , sehingga $X \setminus P$ adalah gabungan komponen lintasan lain dan juga terbuka. Jadi P buka-tertutup. Jika ada lebih dari satu komponen lintasan, suatu P akan menjadi himpunan buka-tertutup taktrivial, bertentangan dengan keterhubungan X . Maka X hanya mempunyai satu komponen lintasan dan terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.33 Subhimpunan terhubung lintasan dalam topologi titik tertentu. Misalkan X takkosong, $p \in X$, dan himpunan buka takkosong dalam topologi titik tertentu adalah semua himpunan yang memuat p . Tentukan semua subhimpunan terhubung lintasan.

Petunjuk. Subruang yang tidak memuat p bersifat diskret. Jika subruang memuat p , hubungkan setiap titik ke p dengan fungsi langkah.

Jawaban. Subhimpunan A terhubung lintasan tepat bila $p \in A$ atau $|A| \leq 1$.

Solusi. Jika $p \notin A$, setiap $B \subseteq A$ dapat ditulis sebagai $A \cap (B \cup \{p\})$, sehingga topologi subruang pada A diskret. Subruang diskret terhubung lintasan tepat bila mempunyai paling banyak satu titik.

Jika $p \in A$ dan $x \in A$, definisikan lintasan $r(0) = x$, $r(t) = p$ untuk $t > 0$. Prapeta setiap himpunan buka yang memuat p adalah seluruh domain atau $(0, 1]$, keduanya buka relatif. Jadi x dapat dihubungkan ke p ; membalik dan menempelkan lintasan menghubungkan setiap dua titik dalam A .

Pemeriksaan S.34 Subhimpunan terhubung lintasan dalam topologi titik dikecualikan. Misalkan himpunan buka sejati pada X adalah semua subhimpunan yang tidak memuat titik tetap p . Tentukan semua subhimpunan terhubung lintasan.

Petunjuk. Jika $p \notin A$, topologi subruang diskret. Jika $p \in A$, gunakan fungsi langkah yang prapeta himpunan buka tanpa p berupa interval setengah terbuka.

Jawaban. Sekali lagi, tepat subhimpunan A dengan $p \in A$ atau $|A| \leq 1$ yang terhubung lintasan.

Solusi. Jika $p \notin A$, setiap subset A terbuka dalam X , sehingga A diskret dan terhubung lintasan hanya untuk kardinalitas paling banyak satu. Jika $p \in A$, untuk $x \in A \setminus \{p\}$ definisikan $r(t) = x$ untuk $t < 1$ dan $r(1) = p$. Setiap himpunan buka sejati tidak memuat p ; prapetanya kosong atau $[0, 1)$, yang terbuka relatif. Jadi r lintasan $x \rightsquigarrow p$. Pembalikan dan penempelan menghubungkan setiap pasangan titik.

Pemeriksaan S.35 Benar atau salah: semua subruang. Nilai pernyataan: “Jika X terhubung lintasan, setiap subruang dari X terhubung lintasan.”

Petunjuk. Ambil dua titik sebagai subruang garis real.

Jawaban. Salah.

Solusi. Ruang $\mathbb{R}$ terhubung lintasan. Subruang $A = \{0, 1\}$ mempunyai topologi diskret. Citra kontinu interval $[0, 1]$ harus terhubung, sedangkan satu-satunya subhimpunan terhubung dari A adalah singleton. Jadi tidak ada lintasan dari 0 ke 1, dan A tidak terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.36 Benar atau salah: irisan. Nilai pernyataan: “Irisan dua subruang terhubung lintasan selalu terhubung lintasan.”

Petunjuk. Iris sebuah lingkaran dengan diameternya.

Jawaban. Salah.

Solusi. Dalam $\mathbb{R}^2$, ambil lingkaran satuan $A = S^1$ dan ruas diameter $B = [-1, 1] \times \{0\}$. Keduanya terhubung lintasan: lingkaran dapat diparameterkan oleh busur dan ruas oleh interpolasi linear. Namun $A \cap B = \{(-1, 0), (1, 0)\}$, subruang diskret dua titik, sehingga tidak terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.37 Benar atau salah: lintasan dalam ruang diskret. Nilai secara literal pernyataan: “Dalam ruang diskret tidak ada lintasan dari a ke b .” Jelaskan pula versi untuk $a \neq b$.

Petunjuk. Jika $a = b$, ada lintasan konstan. Jika $a \neq b$, gunakan keterhubungan citra interval.

Jawaban. Pernyataan literal salah karena kasus $a = b$. Untuk titik berbeda, pernyataannya benar.

Solusi. Jika $a = b$, fungsi konstan $p(t) = a$ adalah lintasan, sehingga klaim tanpa syarat tidak selalu benar. Jika $a \neq b$ dan ada lintasan p , citra $p([0, 1])$ harus terhubung sebagai citra kontinu interval terhubung. Setiap subruang dari ruang diskret diskret, dan subruang diskret terhubung hanya bila mempunyai paling banyak satu titik. Karena citra memuat a dan b , timbul kontradiksi.

Pemeriksaan S.38 Benar atau salah: banyak komponen lintasan. Nilai pernyataan: “Ruang kompak yang terhubung lintasan secara lokal hanya mempunyai berhingga banyak komponen lintasan.”

Petunjuk. Komponen lintasan terbuka dan bersama-sama membentuk selimut buka ruang.

Jawaban. Benar.

Solusi. Dalam ruang lokal terhubung lintasan, setiap komponen lintasan terbuka. Semua komponen lintasan mempartisi dan menutupi X , jadi membentuk selimut buka. Kekompakan memberi subselimut berhingga. Karena komponen-komponen berbeda saling lepas dan takkosong, komponen yang tidak terpilih tidak dapat ditutupi oleh komponen terpilih. Maka subselimut berhingga itu harus memuat semua komponen; jumlahnya berhingga.

Pemeriksaan S.39 Benar atau salah: lokal lintasan mengakibatkan lokal terhubung. Nilai pernyataan: “Setiap ruang yang terhubung lintasan secara lokal adalah terhubung secara lokal.”

Petunjuk. Setiap himpunan terhubung lintasan adalah terhubung.

Jawaban. Benar.

Solusi. Ambil titik x dan lingkungan N . Keterhubungan lintasan lokal memberi lingkungan buka U dengan $x \in U \subseteq N$ dan U terhubung lintasan. Setiap ruang terhubung lintasan terhubung, sehingga U adalah lingkungan buka terhubung di dalam N . Ini berlaku di setiap titik, jadi ruang lokal terhubung.

Uji Penguasaan Bab 19: Keterhubungan Lintasan

Delapan uji penguasaan orisinal ini mengintegrasikan konstruksi lintasan, citra kontinu, komponen lintasan, ruang berhingga, sifat lokal, penempelan, contoh limit, dan kekompakan.

Komponen terpisah ini merupakan karya asli berlisensi CC BY 4.0, bukan materi atau solusi resmi GVSU, tidak menyiratkan dukungan penulis sumber, dan tidak mengubah perlakuan konservatif CC BY-NC-SA 3.0 untuk teks utama. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pemeriksaan S.40 Membangun lintasan dalam daerah berbentuk bintang. Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan ada $c \in A$ sehingga untuk setiap $x \in A$, seluruh ruas dari x ke c berada dalam A . Buktikan bahwa A terhubung lintasan dan berikan rumus lintasan dari x ke y .

Petunjuk. *Tahap 1.* Hubungkan x ke c secara linear. *Tahap 2.* Hubungkan c ke y . *Tahap 3.* Parametrisasi kedua ruas pada setengah interval.

Jawaban. Lintasan dapat didefinisikan oleh $p(t) = (1 - 2t)x + 2tc$ untuk $t \leq 1/2$ dan $p(t) = (2 - 2t)c + (2t - 1)y$ untuk $t \geq 1/2$.

Solusi. Potongan pertama menelusuri ruas $[x, c]$ dan potongan kedua ruas $[c, y]$; keduanya berada dalam A oleh hipotesis. Masing-masing kontinu dan keduanya bernilai c pada $t = 1/2$, sehingga Lemma Penempelan memberi kontinuitas p . Karena $p(0) = x$ dan $p(1) = y$, setiap pasangan titik dapat dihubungkan. Jadi A

terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.41 Surjeksi kontinu dan komponen lintasan. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ kontinu dan surjektif. Buktikan bahwa setiap komponen lintasan P dari X termuat dalam prapeta suatu komponen lintasan Q dari Y . Jika X terhubung lintasan, simpulkan bahwa Y terhubung lintasan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Citra $f(P)$ terhubung lintasan. *Tahap 2.* Setiap himpunan terhubung lintasan berada dalam satu komponen lintasan. *Tahap 3.* Gunakan surjektivitas untuk kesimpulan global.

Jawaban. Pilih Q yang memuat $f(P)$; maka $P \subseteq f^{-1}(Q)$. Bila $P = X$, surjektivitas memberi $Q = Y$.

Solusi. Karena pembatasan $f|_P$ kontinu dan P terhubung lintasan, $f(P)$ terhubung lintasan. Pilih $p \in P$ dan biarkan $Q = PC_Y(f(p))$. Semua titik $f(P)$ dapat dihubungkan ke $f(p)$, sehingga $f(P) \subseteq Q$ dan karenanya $P \subseteq f^{-1}(Q)$. Jika X terhubung lintasan, ambil $P = X$. Maka $f(X) \subseteq Q$; karena f surjektif, $Y = f(X) = Q$, sehingga Y terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.42 Menghitung komponen lintasan subruang silang. Dalam $\mathbb{R}^2$, ambil $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ dan hapus titik asal. Tentukan semua komponen lintasan dari $X \setminus \{(0,0)\}$ serta buktikan jawaban Anda.

Petunjuk. *Tahap 1.* Identifikasi empat setengah-sumbu. *Tahap 2.* Masing-masing terhubung lintasan. *Tahap 3.* Gunakan tanda koordinat dan keterhubungan citra lintasan untuk mencegah perpindahan antar-sumbu tanpa melalui asal.

Jawaban. Ada empat komponen lintasan: setengah-sumbu mendatar positif dan negatif serta setengah-sumbu vertikal positif dan negatif.

Solusi. Keempat setengah-sumbu terbuka itu masing-masing homeomorfik dengan $(0, \infty)$, sehingga terhubung lintasan. Andaikan sebuah lintasan menghubungkan titik pada dua setengah-sumbu berbeda. Citra lintasan terhubung dan, di dalam silang, satu-satunya titik tempat dua sumbu atau dua sisi suatu sumbu bertemu adalah asal. Secara lebih eksplisit, proyeksi koordinat yang relevan harus berubah dari nilai tak nol menjadi nol, dan perpindahan ke sumbu lain memaksa kedua koordinat nol pada suatu parameter. Itu akan memasukkan asal ke citra, padahal asal telah dihapus. Maka tidak ada komponen yang lebih besar.

Pemeriksaan S.43 Algoritme lingkungan minimal ruang berhingga. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$. Hitung semua lingkungan minimal U_x , tentukan komponen lintasan, dan putuskan apakah X terhubung.

Petunjuk. *Tahap 1.* Iris himpunan buka yang memuat tiap titik. *Tahap 2.* Dalam ruang berhingga, setiap U_x terhubung lintasan. *Tahap 3.* Periksa apakah semua titik dapat terhubung melalui titik 1.

Jawaban. $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{1, 2\}$, $U_3 = \{1, 3\}$, dan $U_4 = X$. Seluruh X merupakan satu komponen lintasan dan karenanya terhubung.

Solusi. Singleton $\{1\}$ adalah himpunan buka terkecil yang memuat 1. Himpunan buka yang memuat 2 beririsan menjadi $\{1, 2\}$; untuk 3 menjadi $\{1, 3\}$. Satu-satunya himpunan buka yang memuat 4 adalah X , jadi $U_4 = X$. Teorema ruang berhingga memberi bahwa $U_4 = X$ terhubung lintasan. Dengan demikian hanya ada satu komponen lintasan. Karena terhubung lintasan mengakibatkan terhubung, X terhubung.

Pemeriksaan S.44 Kriteria lokal melalui komponen lingkungan buka. Buktikan ekuivalensi berikut: X terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika setiap komponen lintasan dari setiap himpunan buka $O \subseteq X$ terbuka dalam X .

Petunjuk. *Tahap 1.* Pada arah maju, letakkan lingkungan terhubung lintasan kecil di sekitar tiap titik komponen. *Tahap 2.* Pada arah balik, ambil komponen lintasan dari suatu himpunan buka di dalam lingkungan yang diberikan.

Jawaban. Pada arah maju komponen adalah gabungan lingkungan buka terhubung lintasan; pada arah balik komponen lintasan yang memuat titik menjadi lingkungan buka terhubung lintasan yang diperlukan.

Solusi. Andaikan X lokal terhubung lintasan, O buka, dan P komponen lintasan O . Untuk $p \in P$, ada lingkungan buka terhubung lintasan V dengan $p \in V \subseteq O$. Karena V bertemu P , maksimalitas komponen

memberi $V \subseteq P$. Maka setiap titik P mempunyai lingkungan buka dalam P , jadi P terbuka.

Sebaliknya, ambil titik x dan lingkungan N . Pilih himpunan buka O dengan $x \in O \subseteq N$. Komponen lintasan P dari O yang memuat x terbuka menurut hipotesis, terhubung lintasan menurut definisi, dan memenuhi $x \in P \subseteq N$. Jadi X lokal terhubung lintasan.

Pemeriksaan S.45 Kurva sinus topolog: terhubung tetapi bukan terhubung lintasan. Misalkan $T = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Jelaskan mengapa T terhubung dan mengapa tidak ada lintasan dari titik pada ruas vertikal ke titik pada grafik.

Petunjuk. *Tahap 1.* Grafik adalah citra kontinu interval terhubung dan T adalah penutupannya. *Tahap 2.* Andaikan ada lintasan keluar dari sumbu, ambil waktu pertama saat koordinat pertama menjadi positif. *Tahap 3.* Osilasi $\sin(1/x)$ menggagalkan kekontinuan koordinat kedua.

Jawaban. T terhubung sebagai penutupan grafik terhubung, tetapi bukan terhubung lintasan karena osilasi grafik dekat $x = 0$ tidak dapat dilalui secara kontinu dari ruas vertikal.

Solusi. Pemetaan $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ kontinu pada $(0, 1]$, sehingga grafik G terhubung. Setiap titik $(0, y)$ dengan $-1 \leq y \leq 1$ adalah titik limit grafik, dan penutupan G tepat T . Penutupan himpunan terhubung terhubung, jadi T terhubung.

Andaikan lintasan $p(t) = (u(t), v(t))$ berawal pada ruas vertikal dan berakhir pada grafik. Biarkan t_0 batas terakhir dari bagian awal saat $u(t) = 0$. Ada deret $t_n \downarrow t_0$ dengan $u(t_n) > 0$ dan $u(t_n) \rightarrow 0$. Pada titik-titik itu $v(t_n) = \sin(1/u(t_n))$. Kekontinuan lintasan dan peralihan melalui semua nilai kecil positif memaksa nilai ini berosilasi mendekati 1 dan -1 secara arbitrer dekat t_0 , sehingga $v(t)$ tidak mempunyai limit di t_0 . Kontradiksi. Jadi kedua bagian berada dalam komponen lintasan berbeda.

Pemeriksaan S.46 Menempelkan lintasan pada keluarga berhingga. Misalkan $A_1, \dots, A_n$ terhubung lintasan dan $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ untuk $1 \leq i < n$. Buktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^n A_i$ terhubung lintasan, tanpa mengandaikan irisan semua A_i takkosong.

Petunjuk. *Tahap 1.* Pilih $z_i \in A_i \cap A_{i+1}$. *Tahap 2.* Hubungkan titik awal ke z_1 , lalu z_i ke z_{i+1} , dan akhirnya ke titik akhir. *Tahap 3.* Tempelkan berhingga banyak lintasan.

Jawaban. Rantai titik irisan menyediakan rantai lintasan yang dapat direparametrisasi dan ditempelkan menjadi satu lintasan.

Solusi. Ambil $x \in A_r$ dan $y \in A_s$, dengan $r \leq s$ setelah menukar nama bila perlu. Pilih $z_i \in A_i \cap A_{i+1}$. Dalam A_r ada lintasan dari x ke z_r ; dalam setiap A_i berikutnya ada lintasan dari z_{i-1} ke z_i ; dan dalam A_s ada lintasan dari z_{s-1} ke y . Bagi $[0, 1]$ menjadi berhingga banyak subinterval tertutup, reparametrisasi lintasan-lintasan itu, lalu terapkan Lemma Penempelan berulang kali. Hasilnya lintasan dalam gabungan dari x ke y .

Pemeriksaan S.47 Kompak dan lokal terhubung lintasan. Misalkan X kompak dan terhubung lintasan secara lokal. Buktikan bahwa X adalah gabungan saling lepas dari berhingga banyak subruang yang masing-masing terbuka, tertutup, dan terhubung lintasan. Jelaskan kapan X sendiri terhubung lintasan.

Petunjuk. *Tahap 1.* Komponen lintasan terbuka. *Tahap 2.* Komplemennya adalah gabungan komponen lain, jadi juga terbuka. *Tahap 3.* Gunakan kekompakan pada selimut oleh semua komponen.

Jawaban. Komponen lintasan adalah himpunan buka-tertutup dan hanya berhingga banyak. Ruang X terhubung lintasan tepat bila hanya ada satu komponen.

Solusi. Setiap komponen lintasan terbuka karena X lokal terhubung lintasan. Komplemen suatu komponen adalah gabungan semua komponen lain, maka terbuka; jadi setiap komponen juga tertutup. Komponen-komponen saling lepas, menutupi X , dan masing-masing terhubung lintasan menurut definisi. Selimut buka oleh semua komponen mempunyai subselimut berhingga karena X kompak. Saling lepasnya komponen berarti komponen yang tidak dipilih tidak mungkin tertutup, sehingga sebenarnya hanya ada berhingga banyak komponen. Akhirnya, X terhubung lintasan jika dan hanya jika semua titik berada dalam satu kelas lintasan, yakni tepat ketika dekomposisi berhingga itu mempunyai satu bagian.

Lampiran T

Pendamping Belajar Mandiri Bab 20: Hasil Kali Ruang Topologi

Pendamping ini memberi dukungan bertahap bagi semua 56 prompt kanonis Bab 20: 31 prompt nonlatihan dan 25 prompt latihan. Kerjakan prompt sumber terlebih dahulu; buka petunjuk, jawaban, lalu solusi hanya jika diperlukan.

Uraian ini merupakan karya pendamping asli berlisensi CC BY 4.0. Uraian ini bukan solusi resmi GVSU dan tidak menyiratkan dukungan penulis atau institusi sumber. Provenans model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Panduan Prompt Sumber: Topologi Hasil Kali, Contoh, dan Proyeksi

Enam belas panduan pertama mengikuti tepat urutan prompt nonlatihan pada pendahuluan sampai awal sifat hasil kali.

Pemeriksaan T.1 Mendaftarkan calon persegi panjang basis. Daftarkan semua hasil kali $U \times V$ untuk topologi hingga yang diberikan pada $X = \{a, b, c\}$ dan $Y = \{1, 2\}$.

Petunjuk. Pisahkan kasus $V = \emptyset$, $V = \{1\}$, dan $V = Y$; semua hasil kali yang memiliki faktor kosong adalah himpunan yang sama.

Jawaban. Ada sebelas himpunan berbeda: $\emptyset$, lima himpunan $U \times \{1\}$ untuk $U \in \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, dan lima himpunan $U \times Y$ untuk lima U yang sama.

Solusi. Faktor kosong selalu memberi $\emptyset$. Untuk $V = \{1\}$ diperoleh $\{(a, 1)\}$, $\{(b, 1)\}$, $\{(a, 1), (b, 1)\}$, $\{(a, 1), (c, 1)\}$, dan $X \times \{1\}$. Untuk $V = Y$ diperoleh $\{a\} \times Y$, $\{b\} \times Y$, $\{a, b\} \times Y$, $\{a, c\} \times Y$, dan $X \times Y$. Kesebelasnya berbeda. *Rubrik:* jawaban tuntas menghilangkan duplikasi akibat faktor kosong dan menuliskan anggota setiap himpunan.

Pemeriksaan T.2 Gabungan persegi panjang yang bukan persegi panjang. Uji apakah $A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$ harus terbuka dan apakah koleksi semua $U \times V$ sendiri merupakan topologi.

Petunjuk. Tuliskan A sebagai gabungan dua elemen koleksi, lalu gunakan pasangan silang yang hilang untuk menguji bentuk persegi panjang.

Jawaban. $A = (\{a\} \times Y) \cup (\{b\} \times \{1\})$, sehingga topologi yang dibangkitkan harus memuat A . Namun A bukan satu hasil kali $U \times V$; karena itu koleksi awal tidak tertutup terhadap gabungan dan bukan topologi.

Solusi. Kedua himpunan pada gabungan berada dalam koleksi. Jika $A = U \times V$, keberadaan $(a, 2)$ dan $(b, 1)$ memaksa $a, b \in U$ serta $1, 2 \in V$, sehingga $(b, 2)$ harus berada dalam A ; kenyataannya tidak. Jadi gabungan dua elemen koleksi keluar dari koleksi. *Rubrik:* bukti harus menunjukkan sekaligus keterbukaan yang diinginkan, kegagalan bentuk hasil kali, dan kegagalan aksioma gabungan.

Pemeriksaan T.3 Topologi terkecil yang memuat calon basis. Tentukan koleksi terkecil yang harus ditambahkan agar semua persegi panjang dasar membangkitkan topologi.

Petunjuk. Topologi yang dibangkitkan basis terdiri atas semua gabungan anggota basis, termasuk gabungan kosong.

Jawaban. Ambil $\tau = \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$, dengan $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$.

Solusi. Koleksi $\mathcal{B}$ menutupi ruang dan irisan dua anggotanya kembali berbentuk hasil kali dari dua irisan buka. Karena itu semua gabungannya membentuk topologi. Setiap topologi yang memuat $\mathcal{B}$ wajib memuat seluruh gabungan tersebut, sehingga τ memang yang terkecil. *Rubrik:* jawaban harus memberi konstruksi semua gabungan dan membuktikan sifat minimalnya, bukan sekadar mengatakan “tambahkan A ”.

Pemeriksaan T.4 Kriteria basis untuk hasil kali. Buktikan bahwa semua $U \times V$, dengan U dan V buka, merupakan basis pada $X \times Y$.

Petunjuk. Periksa penutupan titik dan penyempurnaan irisan; gunakan $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

Jawaban. Setiap titik berada dalam $X \times Y$, dan irisan dua anggota basis sendiri merupakan anggota basis yang memuat setiap titik irisannya.

Solusi. Untuk $(x, y) \in X \times Y$, persegi panjang $X \times Y$ berada dalam koleksi. Jika (x, y) berada dalam dua persegi panjang dasar, maka ia berada dalam $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, yang buka pada tiap faktor dan termuat dalam irisan semula. Kedua aksioma basis terpenuhi. *Rubrik:* kedua aksioma basis dan identitas irisan harus dinyatakan eksplisit.

Pemeriksaan T.5 Produk dua interval tertutup. Deskripsikan $[1, 2] \times [3, 4]$ dengan topologi hasil kali dari topologi subruang Euklides.

Petunjuk. Identifikasikan pasangan (x, y) dengan titik bidang.

Jawaban. Ruangnya adalah persegi panjang tertutup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}$ dengan topologi subruang dari $\mathbb{R}^2$.

Solusi. Basis hasil kali terdiri atas $(U \cap [1, 2]) \times (V \cap [3, 4])$ untuk interval buka $U, V \subseteq \mathbb{R}$. Ini persis basis topologi subruang persegi panjang di bidang Euklides. *Rubrik:* deskripsi geometris harus disertai identifikasi topologinya, termasuk lingkungan relatif pada tepi.

Pemeriksaan T.6 Himpunan buka yang bukan satu persegi panjang. Berikan himpunan buka pada produk dua interval yang bukan berbentuk $U \times V$.

Petunjuk. Gabungkan dua persegi panjang buka relatif yang terpisah secara diagonal.

Jawaban. Misalnya $([1, 3/2] \times [3, 7/2]) \cup ((3/2, 2] \times (7/2, 4])$.

Solusi. Kedua persegi panjang merupakan hasil kali himpunan buka relatif, jadi gabungannya buka. Gabungan memuat satu titik pada masing-masing komponen diagonal tetapi tidak memuat kedua pasangan silang; sifat ini mustahil bagi satu hasil kali $U \times V$. *Rubrik:* contoh harus benar-benar buka relatif dan argumen “pasangan silang” harus membuktikan bahwa ia bukan satu persegi panjang.

Pemeriksaan T.7 Silinder sebagai ruang hasil kali. Visualisasikan $\mathbb{R} \times S^1$ dan salinan S^1 di atas beberapa titik real.

Petunjuk. Letakkan satu lingkaran tegak lurus sumbu real pada setiap posisi x .

Jawaban. $\mathbb{R} \times S^1$ adalah silinder tak berhingga; serat $\mathbb{R}_x = \{x\} \times S^1$ merupakan lingkaran penampang pada posisi x .

Solusi. Peta $(x, (u, v)) \mapsto (x, u, v)$ menempatkan produk sebagai $\{(x, u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$ dalam $\mathbb{R}^3$. Untuk $x = -1, 0, 1$, seratnya adalah tiga lingkaran sejajar. *Rubrik:* gambar atau uraian harus menunjukkan sumbu tak berhingga, penampang lingkaran, dan parameter kedua faktor secara terpisah.

Pemeriksaan T.8 Himpunan buka relatif pada lingkaran. Deskripsikan himpunan $B \cap S^1$ ketika B bola buka di $\mathbb{R}^2$.

Petunjuk. Bayangkan cakram terbuka memotong keliling lingkaran.

Jawaban. Irisannya berupa busur-busur terbuka relatif pada S^1 ; ia juga dapat kosong atau seluruh lingkaran.

Solusi. Karena B buka di bidang, $B \cap S^1$ terbuka dalam topologi subruang. Secara lokal ia terdiri atas satu atau beberapa busur yang tidak menyertakan titik ujung relatif; posisi dan jari-jari bola juga memungkinkan irisan kosong atau seluruh S^1 . *Rubrik:* jawaban harus menyebut topologi subruang dan tidak menganggap setiap irisan selalu satu busur.

Pemeriksaan T.9 Petak basis pada silinder. Deskripsikan elemen basis $U \times V$ pada $\mathbb{R} \times S^1$.

Petunjuk. Ambil interval terbuka sepanjang sumbu dan busur terbuka sepanjang penampang.

Jawaban. Elemen basis adalah pita persegi panjang melengkung: interval terbuka pada arah aksial dikali busur terbuka pada arah melingkar.

Solusi. Untuk $U = (a, b)$ dan $V = B \cap S^1$, himpunan $U \times V$ memuat semua penampang dengan $x \in (a, b)$, tetapi hanya bagian busur V dari tiap penampang. Koordinat produk menunjukkan bahwa petak-petak ini membentuk basis. *Rubrik:* uraian harus mengaitkan kedua arah geometris dengan kedua faktor.

Pemeriksaan T.10 Torus sebagai produk dua lingkaran. Visualisasikan $2S^1 \times S^1$ dengan lingkaran kecil tegak lurus lingkaran berjari-jari dua.

Petunjuk. Gerakkan satu salinan S^1 mengelilingi faktor $2S^1$.

Jawaban. Produk tersebut adalah torus abstrak; serat di $(2, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dan $(0, 2)$ adalah tiga lingkaran meridian.

Solusi. Setiap $p \in 2S^1$ membawa serat $\{p\} \times S^1$. Menempatkan serat tegak lurus terhadap lingkaran pertama menghasilkan permukaan donat. Secara intrinsik ruangnya adalah $S^1 \times S^1$; skala faktor pertama tidak mengubah tipe homeomorfismenya. *Rubrik:* gambar harus menutup kedua arah melingkar dan menempatkan ketiga serat pada titik yang benar.

Pemeriksaan T.11 Busur pada faktor lingkaran kecil. Deskripsikan kembali irisan bola buka dengan faktor S^1 pada model torus.

Petunjuk. Topologi faktor kedua tidak berubah dari contoh silinder.

Jawaban. Himpunan itu adalah himpunan buka relatif pada lingkaran satuan, umumnya berupa satu atau beberapa busur terbuka.

Solusi. Faktor kedua tetap S^1 dengan topologi subruang Euklides. Karena itu analisis irisan $B \cap S^1$ sama persis seperti pada silinder: irisan tersebut terbuka relatif dan secara lokal berupa busur. *Rubrik:* jawaban harus membedakan fakta intrinsik pada faktor dari gambar torus di ruang tiga dimensi.

Pemeriksaan T.12 Petak basis pada torus. Deskripsikan hasil kali busur terbuka pada $2S^1$ dan busur terbuka pada S^1 .

Petunjuk. Potong torus sepanjang kedua arah sudut di sekitar satu titik.

Jawaban. Elemen basis adalah petak permukaan terbuka yang secara lokal homeomorfik dengan persegi panjang terbuka.

Solusi. Jika U dan V masing-masing busur terbuka, koordinat sudut memberi homeomorfisme lokal $U \times V$ dengan hasil kali dua interval terbuka. Pada model donat, petak ini melengkung tetapi tidak membungkus penuh salah satu arah jika busurnya cukup kecil. *Rubrik:* jawaban harus mengidentifikasi kedua busur dan

sifat lokal dua dimensinya.

Pemeriksaan T.13 Prapeta oleh proyeksi pertama. Hitung $\pi_1^{-1}(O_1)$ untuk $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$.

Petunjuk. Koordinat kedua tidak dibatasi oleh syarat $\pi_1(x_1, x_2) \in O_1$.

Jawaban. $\pi_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$.

Solusi. Pasangan (x_1, x_2) berada dalam prapeta tepat ketika $x_1 \in O_1$, sedangkan x_2 boleh sembarang. Ini persis definisi $O_1 \times X_2$. *Rubrik:* kesetaraan harus dibuktikan dua arah melalui keanggotaan.

Pemeriksaan T.14 Kontinuitas proyeksi. Buktikan bahwa π_1 kontinu.

Petunjuk. Gunakan hasil prapeta pada panduan sebelumnya.

Jawaban. Prapeta setiap O_1 buka adalah $O_1 \times X_2$, yang merupakan himpunan buka basis.

Solusi. Untuk setiap himpunan buka $O_1 \subseteq X_1$, kita memiliki $\pi_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$. Kedua faktor pada ruas kanan buka, sehingga hasil kalinya buka. Kriteria prapeta bagi kekontinuan menyelesaikan bukti. *Rubrik:* bukti harus berlaku untuk setiap himpunan buka, bukan hanya elemen basis tertentu.

Pemeriksaan T.15 Uji kekontinuan melalui subbasis. Buktikan bahwa prapeta terbuka untuk setiap elemen subbasis mengakibatkan fungsi kontinu.

Petunjuk. Elemen basis adalah irisan berhingga elemen subbasis; himpunan buka adalah gabungan elemen basis.

Jawaban. Prapeta mempertahankan irisan berhingga dan gabungan sebarang, sehingga prapeta semua himpunan buka bersifat buka.

Solusi. Jika $B = S_1 \cap \cdots \cap S_k$ elemen basis yang dibangun dari subbasis, maka $f^{-1}(B) = \bigcap_{j=1}^k f^{-1}(S_j)$, suatu irisan berhingga himpunan buka. Jika $O = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$, maka $f^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$, juga buka. Jadi f kontinu. *Rubrik:* solusi harus memakai kedua tahap—subbasis ke basis dan basis ke topologi.

Pemeriksaan T.16 Target bukti Hausdorff untuk produk. Nyatakan apa yang harus dibangun untuk membuktikan $X \times Y$ Hausdorff.

Petunjuk. Mulailah dengan dua pasangan berbeda dan tulis definisi Hausdorff.

Jawaban. Untuk setiap dua titik berbeda $p, q \in X \times Y$, harus dibangun lingkungan buka W_p, W_q yang masing-masing memuat satu titik dan saling lepas.

Solusi. Karena basis produk terdiri atas persegi panjang, cukup mencari $U_1 \times V_1$ dan $U_2 \times V_2$ yang memuat kedua titik dan beririsan kosong. Pada langkah berikutnya, salah satu koordinat yang berbeda akan menyediakan pasangan lingkungan faktor yang saling lepas. *Rubrik:* target harus dikuantifikasi untuk pasangan titik berbeda dan memuat syarat keterbukaan, pemuatan, serta ketakberirisan.

Panduan Prompt Sumber: Sifat Produk dan Topologi Digital

Lima belas panduan berikut menutup seluruh prompt nonlatihan Bab 20, termasuk kegiatan penerapan topologi Khalimsky.

Pemeriksaan T.17 Memilih koordinat yang memisahkan dua titik. Untuk dua titik berbeda (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , tentukan informasi yang diberikan sifat Hausdorff pada faktor.

Petunjuk. Dua pasangan berbeda berarti sekurang-kurangnya satu koordinat berbeda.

Jawaban. Jika $x_1 \neq x_2$, sifat Hausdorff X memberi lingkungan buka saling lepas bagi keduanya; jika $y_1 \neq y_2$, gunakan Y . Salah satu kasus pasti terjadi.

Solusi. Apabila koordinat pertama berbeda, pilih $U_1, U_2 \subseteq X$ terbuka, $x_i \in U_i$, dan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Persegi panjang $U_1 \times Y$ dan $U_2 \times Y$ memisahkan pasangan. Jika koordinat pertama sama, koordinat kedua wajib berbeda; pilih V_1, V_2 di Y dan gunakan $X \times V_i$. *Rubrik:* bukti harus menangani kasus koordinat yang sama,

bukan menganggap kedua koordinat selalu berbeda.

Pemeriksaan T.18 Menuntaskan bukti bahwa produk Hausdorff. Susun bukti lengkap bahwa hasil kali dua ruang Hausdorff bersifat Hausdorff.

Petunjuk. Gunakan pemisahan pada satu koordinat dan biarkan faktor lain seluruh ruang.

Jawaban. Pilih koordinat yang berbeda, pisahkan nilainya dalam faktor Hausdorff, lalu ambil hasil kali lingkungan tersebut dengan seluruh faktor yang lain.

Solusi. Ambil $p = (x_1, y_1) \neq q = (x_2, y_2)$. Jika $x_1 \neq x_2$, pilih buka saling lepas U_1, U_2 pada X ; maka $U_1 \times Y$ dan $U_2 \times Y$ buka, memuat p, q , dan beririsan kosong. Jika $x_1 = x_2$, maka $y_1 \neq y_2$; argumen yang sama dengan $X \times V_1$ dan $X \times V_2$ berlaku. *Rubrik:* solusi harus memuat kasus lengkap dan identitas irisan hasil kali.

Pemeriksaan T.19 Lintasan Manhattan pada kisi bilangan bulat. Bangun lintasan-4 dan lintasan-8 antara dua titik sebarang dalam $\mathbb{Z}^2$.

Petunjuk. Ubah koordinat pertama satu satuan sampai tepat, kemudian ubah koordinat kedua.

Jawaban. Barisan langkah horizontal lalu vertikal adalah lintasan-4; setiap langkah-4 juga merupakan langkah-8.

Solusi. Dari (a, b) menuju (c, d) , bergerak melalui $(a + \varepsilon, b)$, $(a + 2\varepsilon, b), \dots, (c, b)$, dengan ε bertanda menuju c , lalu melalui $(c, b + \delta), \dots, (c, d)$. Setiap pasangan berturutan berselisih satu pada tepat satu koordinat, jadi bertetangga-4. Ketetanggaan-4 termuat dalam ketetanggaan-8. *Rubrik:* konstruksi harus berhingga dan tetap menangani urutan koordinat yang menurun atau sama.

Pemeriksaan T.20 Keterhubungan-4 dan keterhubungan-8 dua kurva digital. Putuskan keterhubungan-4 dan keterhubungan-8 kurva S_1 dan S_2 pada gambar sumber.

Petunjuk. Telusuri titik demi titik; sambungan diagonal sah hanya untuk ketetanggaan-8.

Jawaban. S_1 tidak terhubung-4 tetapi terhubung-8. S_2 terhubung-4 dan, sebagai akibatnya, juga terhubung-8.

Solusi. Pada S_1 , beberapa sambungan wajib dilalui secara diagonal, sehingga graf tetangga-4 terputus tetapi graf tetangga-8 memiliki satu komponen. Pada S_2 , jalur bertangga pada gambar dapat ditelusuri seluruhnya dengan langkah horizontal atau vertikal, sehingga graf tetangga-4 terhubung; penambahan sisi diagonal tidak dapat memutusnya. *Rubrik:* jawaban harus menyertakan jejak titik atau pohon rentang pada masing-masing graf, bukan hanya empat label benar-salah.

Pemeriksaan T.21 Menguji syarat kurva Jordan- k . Uji apakah S_1 dan S_2 merupakan kurva Jordan-4 atau kurva Jordan-8.

Petunjuk. Selain terhubung, setiap titik harus memiliki tepat dua tetangga- k di dalam kurva.

Jawaban. S_1 merupakan kurva Jordan-8 tetapi bukan kurva Jordan-4; S_2 merupakan kurva Jordan-4 tetapi bukan kurva Jordan-8.

Solusi. Pemeriksaan graf ketetanggaan menunjukkan bahwa pada S_1 setiap titik memiliki derajat dua hanya dalam graf-8, sedangkan graf-4 terputus. Pada S_2 setiap titik memiliki derajat dua dalam graf-4; ketetanggaan diagonal tambahan pada graf-8 memberi sedikitnya satu titik lebih dari dua tetangga. *Rubrik:* untuk setiap keputusan, verifikasi harus mencakup keterhubungan dan derajat tepat dua.

Pemeriksaan T.22 Mengapa satu jenis ketetanggaan tidak cukup. Jelaskan perilaku komplemen S_1 dan S_2 serta kebutuhan mencampur dua jenis ketetanggaan.

Petunjuk. Telusuri komplemen dengan jenis ketetanggaan yang sama dengan kurvanya, lalu bandingkan dengan jenis yang berlawanan.

Jawaban. Komplemen kurva Jordan-8 S_1 tetap terhubung-8, sedangkan komplemen kurva Jordan-4 S_2 memiliki tiga komponen-4. Pemisahan menjadi tepat dua komponen diperoleh dengan memakai ketetanggaan yang berlawanan untuk komplemen.

Solusi. Diagonal memungkinkan lintasan-8 “menyelinap” melewati kurva S_1 , sedangkan pembatasan langkah-4 di sekitar S_2 memisahkan terlalu banyak daerah. Konvensi yang benar menyatakan: kurva Jordan-4 dengan sedikitnya lima titik memisahkan bidang menjadi dua komponen-8, dan kurva Jordan-8 memisahkannya menjadi dua komponen-4. *Rubrik:* uraian harus mengidentifikasi kegagalan kedua contoh dan pasangan ketetanggaan kurva/komplemen yang memperbaikinya.

Pemeriksaan T.23 Titik genap tertutup pada garis digital. Buktikan bahwa $\{n\}$ tertutup ketika n genap dalam topologi garis Khalimsky.

Petunjuk. Tunjukkan bahwa setiap $m \neq n$ memiliki elemen basis yang menghindari n .

Jawaban. Komplemen $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ terbuka: untuk m ganjil gunakan $\{m\}$, dan untuk m genap gunakan $B(m) = \{m-1, m, m+1\}$, yang tidak memuat bilangan genap lain n .

Solusi. Jika $m \neq n$ ganjil, elemen basis $B(m) = \{m\}$ termuat dalam komplemen. Jika m genap, selisih dua bilangan genap tak nol bernilai mutlak sedikitnya dua, sedangkan $B(m)$ hanya mencapai jarak satu; jadi $n \notin B(m)$. Komplemen merupakan gabungan lingkungan basis tersebut dan terbuka. *Rubrik:* kedua paritas m harus ditangani.

Pemeriksaan T.24 Basis topologi Khalimsky pada bidang. Turunkan empat bentuk $B(m, n)$ sebagai basis hasil kali dari basis garis digital.

Petunjuk. Hitung $B(m) \times B(n)$ untuk empat kombinasi paritas.

Jawaban. Ganjil-ganjil memberi singleton; genap-genap memberi blok 3×3 ; ganjil-genap memberi tiga titik vertikal; genap-ganjil memberi tiga titik horizontal.

Solusi. Basis produk adalah semua $B(m) \times B(n)$. Jika kedua indeks ganjil, kedua faktor singleton. Jika keduanya genap, masing-masing faktor berisi tiga bilangan berturutan, sehingga produknya blok sembilan titik. Jika hanya indeks kedua genap, koordinat pertama tetap dan koordinat kedua bervariasi tiga nilai; kasus sebaliknya menghasilkan segmen horizontal. *Rubrik:* keempat rumus harus diperoleh sebagai hasil kali, bukan dihafalkan tanpa penjelasan.

Pemeriksaan T.25 Mengenali lintasan digital pada tiga himpunan. Tunjukkan bahwa S_1 bukan lintasan digital, sedangkan S_2 dan S_3 merupakan lintasan digital.

Petunjuk. Urutkan titik S_2 dan S_3 mengelilingi kurvanya, lalu cocokkan pergantian tipe titik dengan interval Khalimsky. Pada S_1 , periksa keterhubungan subruang.

Jawaban. S_1 terdiri atas empat titik ganjil-ganjil yang terisolasi dalam subruangnya. Urutan siklik yang ditampilkan untuk S_2 dan urutan mengelilingi delapan titik S_3 memberi citra kontinu interval digital.

Solusi. Pada S_1 , setiap titik memiliki lingkungan basis singleton, sehingga subruang diskret dengan lebih dari satu titik dan tidak terhubung; citra kontinu interval digital yang terhubung tidak dapat sama dengan S_1 . Untuk S_2 , gunakan urutan $(0, 0), (1, -1), (2, 0), (1, 1)$; untuk S_3 , urutkan delapan titik sepanjang tepi persegi. Pemetaan dari interval digital berurutan ke daftar tersebut kontinu karena prapeta setiap lingkungan basis adalah buka pada interval. *Rubrik:* solusi lengkap memberi argumen ketakungkinan bagi S_1 dan tabel urutan beserta pemeriksaan kontinuitas bagi dua himpunan lain.

Pemeriksaan T.26 Lintasan digital berhingga terhubung. Buktikan bahwa setiap lintasan digital berhingga terhubung dan putuskan apakah setiap interval digital terhubung.

Petunjuk. Buktikan interval digital tidak dapat dipisah dengan menelusuri pasangan bilangan berturutan, lalu gunakan citra kontinu.

Jawaban. Setiap interval digital terhubung; karena lintasan digital adalah citra kontinu interval digital, setiap lintasan digital berhingga juga terhubung.

Solusi. Andaikan interval digital terpisah menjadi dua buka relatif takkosong. Sepanjang urutan bilangan bulat dari satu bagian ke bagian lain terdapat pasangan berturutan yang jatuh pada bagian berbeda. Topologi Khalimsky mengikat pasangan tersebut melalui lingkungan minimal titik genap, sehingga kedua singleton relatif tidak dapat sekaligus terbuka dan pemisahan mustahil. Citra kontinu ruang terhubung

terhubung, jadi daerah hasil setiap lintasan digital berhingga terhubung. *Rubrik:* bukti harus memisahkan lemma interval dan penerapan teorema citra kontinu.

Pemeriksaan T.27 Memeriksa S_2 sebagai kurva Jordan digital. Verifikasi definisi kurva Jordan digital bagi S_2 .

Petunjuk. Gunakan urutan siklik empat titik; setelah satu titik dibuang, tiga sisanya harus menjadi busur digital.

Jawaban. S_2 berhingga, terhubung, memiliki empat titik, dan penghapusan sembarang titik memutus siklus menjadi busur digital tiga titik.

Solusi. Urutkan $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (2, 0)$, dan $P_4 = (1, 1)$. Urutan ini membentuk lintasan digital tertutup. Jika P_j dibuang, tiga titik lain dapat diurutkan dari satu tetangga P_j ke tetangga lainnya dan homeomorfik dengan interval digital tiga titik. Maka semua syarat definisi terpenuhi. *Rubrik:* pemeriksaan harus mencakup kardinalitas, keterhubungan, dan keempat kasus penghapusan melalui simetri atau daftar eksplisit.

Pemeriksaan T.28 Ketetanggaan melalui lingkungan minimal. Buktikan bahwa titik berbeda x, y bertetangga tepat ketika $x \in N(y)$ atau $y \in N(x)$.

Petunjuk. Subruang dua titik terhubung kecuali kedua singletonnya terbuka relatif.

Jawaban. Jika salah satu titik berada dalam setiap lingkungan titik lain, dua singleton tidak dapat memisahkan subruang. Jika kedua keanggotaan gagal, pilih lingkungan yang saling mengecualikan dan peroleh pemisahan.

Solusi. Jika $x \in N(y)$, setiap lingkungan y memuat x ; maka $\{y\}$ tidak terbuka relatif pada $\{x, y\}$, sehingga subruang dua titik tidak diskret dan tidak dapat dipisah. Argumen sama berlaku jika $y \in N(x)$. Sebaliknya, jika $x \notin N(y)$ dan $y \notin N(x)$, ada lingkungan $U \ni y$ yang tidak memuat x dan $V \ni x$ yang tidak memuat y ; irisan relatifnya adalah dua singleton terbuka yang memisahkan subruang. *Rubrik:* kedua implikasi dan penggunaan definisi N harus eksplisit.

Pemeriksaan T.29 Lingkungan minimal titik murni dan campuran. Hitung $N(P)$ pada bidang Khalimsky menurut paritas koordinat P .

Petunjuk. Gunakan $N((m, n)) = N(m) \times N(n)$, dengan $N(r) = \{r\}$ untuk r ganjil dan $N(r) = \{r - 1, r, r + 1\}$ untuk r genap.

Jawaban. Ganjil-ganjil memberi singleton; genap-genap memberi blok sembilan titik; ganjil-genap memberi tiga titik vertikal; genap-ganjil memberi tiga titik horizontal.

Solusi. Irisan semua lingkungan pada produk adalah hasil kali irisan lingkungan pada faktor karena basis produk. Jadi rumus faktor langsung menghasilkan empat kasus. Titik murni mencakup dua kasus pertama, sedangkan titik campuran mencakup dua kasus terakhir. *Rubrik:* jawaban tidak boleh menyatukan semua titik murni menjadi satu bentuk; kedua paritas murni berbeda.

Pemeriksaan T.30 Syarat karakterisasi yang dilanggar S_1 . Identifikasi bagian teorema karakterisasi kurva Jordan digital yang gagal untuk S_1 .

Petunjuk. Keempat titik S_1 semuanya ganjil-ganjil; hitung ketetanggaan di dalam subruang.

Jawaban. Syarat bahwa setiap P_j bertetangga tepat dengan pendahulu dan penerusnya gagal: titik-titik S_1 tidak bertetangga satu sama lain dalam topologi Khalimsky.

Solusi. Untuk titik ganjil-ganjil P , $N(P) = \{P\}$. Tidak ada titik lain dari S_1 yang berada dalam $N(P)$, dan simetri memberi kegagalan arah sebaliknya. Maka setiap titik memiliki nol tetangga di S_1 , bukan tepat dua. *Rubrik:* solusi harus mengaitkan perhitungan lingkungan minimal dengan klausa tetangga teorema.

Pemeriksaan T.31 Ketetanggaan siklik pada S_2 . Verifikasi bahwa setiap titik S_2 bertetangga tepat dengan dua tetangga sikliknya.

Petunjuk. Gunakan urutan $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (2, 0)$, $P_4 = (1, 1)$ dan lingkungan minimal titik genap-genap.

Jawaban. $P_2, P_4 \in N(P_1)$ tetapi $P_3 \notin N(P_1)$; pola yang sama berputar di keempat titik, sehingga tepat pendahulu dan penerus yang bertetangga.

Solusi. $N(P_1)$ adalah blok 3×3 berpusat di $(0, 0)$, sehingga memuat P_2, P_4 dan tidak memuat P_3 . Demikian pula $N(P_3)$ memuat P_2, P_4 tetapi tidak P_1 . Titik P_2, P_4 ganjil-ganjil memiliki lingkungan minimal singleton, tetapi ketetanggaan simetris sudah dipasok oleh keanggotaan keduanya dalam lingkungan minimal P_1, P_3 . *Rubrik:* tabel keempat titik harus menunjukkan dua tetangga dan satu bukan tetangga untuk masing-masing.

Panduan Latihan Bab 20, Bagian A

Bagian ini memuat dukungan lengkap untuk sepuluh prompt latihan pertama.

Pemeriksaan T.32 Subbasis produk pada dua ruang hingga. Daftarkan semua silinder proyeksi untuk $Y_1 = \{a, b, c\}$ dan $Y_2 = \{1, 2\}$, lalu tunjukkan bahwa irisan berhingganya membangkitkan topologi hasil kali.

Petunjuk. Prapeta proyeksi pertama berbentuk $O_1 \times Y_2$; prapeta proyeksi kedua berbentuk $Y_1 \times O_2$.

Jawaban. Himpunan berbeda dalam subbasis ialah $\emptyset$, $Y_1 \times Y_2$, $\{a\} \times Y_2$, $\{b, c\} \times Y_2$, dan $Y_1 \times \{1\}$. Irisan satu silinder dari tiap arah memberi semua $O_1 \times O_2$.

Solusi. Dari τ_1 diperoleh empat prapeta, dan dari τ_2 tiga prapeta; himpunan kosong dan seluruh ruang muncul pada kedua daftar, sehingga ada lima yang berbeda. Untuk setiap $O_1 \in \tau_1$ dan $O_2 \in \tau_2$, $(O_1 \times Y_2) \cap (Y_1 \times O_2) = O_1 \times O_2$. Jadi irisan berhingga subbasis menghasilkan basis produk, dan semua gabungannya menghasilkan topologi hasil kali. *Rubrik:* daftar harus bebas duplikasi dan pembangkitan harus dibuktikan melalui irisan.

Pemeriksaan T.33 Subbasis proyeksi untuk produk berhingga. Buktikan bahwa semua $\pi_i^{-1}(O_i)$ membentuk subbasis pada $\prod_{i=1}^n X_i$.

Petunjuk. Nyatakan satu kotak basis sebagai irisan tepat n silinder.

Jawaban. $\prod_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(O_i)$; jadi semua kotak basis merupakan irisan berhingga subbasis.

Solusi. Keanggotaan suatu titik (x_i) pada ruas kiri berarti $x_i \in O_i$ untuk setiap i , yang ekuivalen dengan keanggotaannya pada tiap prapeta di ruas kanan. Sebaliknya, irisan sebarang berhingga silinder proyeksi dapat disatukan per koordinat menjadi kotak basis, dengan faktor takdibatasi diganti X_i . Maka koleksi silinder adalah subbasis. *Rubrik:* bukti harus mencakup kedua arah: subbasis menghasilkan basis dan irisan subbasis tetap disempurnakan oleh basis.

Pemeriksaan T.34 Basis interval horizontal. Untuk $X = \mathbb{R}$ Euklides dan $Y = \mathbb{R}$ diskret, buktikan bahwa semua $(a, b) \times \{c\}$ merupakan basis.

Petunjuk. Singleton $\{c\}$ terbuka dalam faktor diskret.

Jawaban. Setiap interval horizontal adalah kotak buka; setiap kotak $U \times V$ merupakan gabungan interval horizontal yang termuat di dalamnya.

Solusi. Untuk $(x, c) \in X \times Y$, pilih interval $(a, b) \ni x$; maka $(a, b) \times \{c\}$ memuat titik tersebut. Jika titik berada dalam dua interval horizontal, kedua koordinat keduanya harus sama dengan c , dan irisan interval real memuat interval terbuka lebih kecil di sekitar x . Kriteria basis terpenuhi. *Rubrik:* jawaban harus menggunakan sifat diskret dan memeriksa kedua aksioma basis.

Pemeriksaan T.35 Interior dan penutup segmen horizontal. Hitung interior dan penutup $A = [0, 1) \times \{0\}$ dalam produk Euklides-diskret.

Petunjuk. Gunakan $\text{Int}(E \times F) = \text{Int } E \times \text{Int } F$ dan rumus penutup produk.

Jawaban. $\text{Int } A = (0, 1) \times \{0\}$ dan $\overline{A} = [0, 1] \times \{0\}$.

Solusi. Dalam faktor pertama, interior $[0, 1]$ adalah $(0, 1)$ dan penutupnya $[0, 1]$. Dalam faktor diskret, singleton $\{0\}$ sekaligus buka dan tertutup. Mengambil hasil kali memberi kedua rumus. *Rubrik:* jawaban harus menjelaskan mengapa titik 0 bukan interior tetapi tetap berada dalam penutup.

Pemeriksaan T.36 Interior dan penutup segmen vertikal. Hitung interior dan penutup $B = \{0\} \times [0, 1)$.

Petunjuk. Faktor kedua diskret, tetapi singleton pada faktor real Euklides tidak terbuka.

Jawaban. $\text{Int } B = \emptyset$ dan $\overline{B} = B$.

Solusi. Interior $\{0\}$ dalam garis Euklides kosong, sedangkan penutupnya tetap $\{0\}$. Dalam faktor diskret, setiap subhimpunan—termasuk $[0, 1)$ —buka dan tertutup. Maka interior produk kosong dan produknya tertutup. *Rubrik:* jangan memakai penutup Euklides pada faktor kedua; topologinya diskret.

Pemeriksaan T.37 Interior dan penutup pita persegi panjang. Hitung interior dan penutup $C = [0, 1) \times [0, 1)$ dalam produk yang sama.

Petunjuk. Hanya faktor pertama mengubah interior atau penutup.

Jawaban. $\text{Int } C = (0, 1) \times [0, 1)$ dan $\overline{C} = [0, 1] \times [0, 1)$.

Solusi. Subhimpunan $[0, 1)$ pada faktor kedua bersifat buka-tertutup karena topologinya diskret. Pada faktor pertama, interior dan penutup berturut-turut $(0, 1)$ dan $[0, 1]$. Rumus produk memberi hasil. *Rubrik:* solusi harus menyebut topologi masing-masing faktor.

Pemeriksaan T.38 Penutup hasil kali subhimpunan. Buktikan $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

Petunjuk. Uji setiap lingkungan basis $U_1 \times U_2$ pada suatu titik.

Jawaban. Lingkungan basis titik memotong $A_1 \times A_2$ tepat ketika kedua lingkungan faktor masing-masing memotong A_1 dan A_2 .

Solusi. Jika $(x_1, x_2) \in \overline{A_1 \times A_2}$, setiap $U_i \ni x_i$ memotong A_i ; pilih $a_i \in U_i \cap A_i$, maka (a_1, a_2) berada dalam irisan lingkungan produk dengan $A_1 \times A_2$. Sebaliknya, jika $x_1 \notin \overline{A_1}$, ada lingkungan U_1 yang menghindari A_1 , sehingga $U_1 \times X_2$ menghindari produk; kasus koordinat kedua sama. *Rubrik:* kedua inklusi harus dibuktikan.

Pemeriksaan T.39 Interior hasil kali subhimpunan. Buktikan inklusi $\text{Int}(A_1 \times A_2) \subseteq \text{Int}(A_1) \times \text{Int}(A_2)$.

Petunjuk. Jika sebuah titik interior, ada kotak basis di sekitarnya yang termuat dalam produk.

Jawaban. Kotak $U_1 \times U_2 \subseteq A_1 \times A_2$ memaksa $U_i \subseteq A_i$. Bahkan berlaku kesamaan.

Solusi. Ambil (x_1, x_2) pada interior produk. Ada kotak buka basis $U_1 \times U_2$ yang memuat titik dan termuat dalam $A_1 \times A_2$. Karena kotak memuat titik, kedua faktor takkosong; memilih satu titik pada faktor lain menunjukkan $U_1 \subseteq A_1$ dan $U_2 \subseteq A_2$. Jadi $x_i \in \text{Int}(A_i)$. Sebaliknya, hasil kali kedua interior adalah himpunan buka yang termuat dalam produk, sehingga sebenarnya sama. *Rubrik:* inklusi yang diminta harus terbukti; penguatan menjadi kesamaan harus dijustifikasi.

Pemeriksaan T.40 Gabungan ganda hasil kali. Buktikan bahwa gabungan semua $U_\alpha \times V_\beta$ sama dengan hasil kali kedua gabungan faktor.

Petunjuk. Lakukan pembuktian dengan mengejar keanggotaan pasangan (x, y) .

Jawaban. Pasangan berada pada salah satu $U_\alpha \times V_\beta$ tepat ketika koordinatnya berada pada suatu U_α dan suatu V_β .

Solusi. (x, y) berada pada ruas kiri jika dan hanya jika ada $\alpha \in I$ dan $\beta \in J$ dengan $x \in U_\alpha$ dan $y \in V_\beta$. Ini ekuivalen dengan $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$ dan $y \in \bigcup_\beta V_\beta$, yakni keanggotaan pada ruas kanan. *Rubrik:* kedua kuantor eksistensial harus dipisahkan dengan benar.

Pemeriksaan T.41 Irisan dua hasil kali. Buktikan $(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2)$.

Petunjuk. Uraikan keanggotaan satu pasangan pada masing-masing ruas.

Jawaban. Kedua ruas menyatakan sekaligus $x \in S_1, S_2$ dan $y \in T_1, T_2$.

Solusi. (x, y) berada pada irisan ruas kiri tepat ketika ia berada pada kedua hasil kali, yaitu $x \in S_1 \cap S_2$ dan $y \in T_1 \cap T_2$. Syarat terakhir tepat menyatakan keanggotaan pada hasil kali di ruas kanan. *Rubrik:* pembuktian dua arah melalui keanggotaan sudah lengkap.

Panduan Latihan Bab 20, Bagian B

Bagian ini memuat dukungan lengkap untuk prompt latihan kesebelas sampai kedua puluh.

Pemeriksaan T.42 Hasil kali dua basis. Buktikan bahwa $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ merupakan basis produk.

Petunjuk. Perhalus setiap kotak buka $O_X \times O_Y$ pada satu titik menggunakan basis faktor.

Jawaban. Untuk $(x, y) \in O_X \times O_Y$, pilih $U \in \mathcal{B}_X$ dan $V \in \mathcal{B}_Y$ dengan $x \in U \subseteq O_X$ dan $y \in V \subseteq O_Y$.

Solusi. Setiap titik produk dimuat oleh suatu $U \times V$ karena basis faktor menutupi faktor. Jika titik berada dalam irisan $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, sifat basis faktor memberi $U_3 \ni x$ termuat dalam $U_1 \cap U_2$ dan $V_3 \ni y$ termuat dalam $V_1 \cap V_2$. Maka $U_3 \times V_3$ menyempurnakan irisan. *Rubrik:* kedua aksioma basis harus dibuktikan dari aksioma basis faktor.

Pemeriksaan T.43 Produk berhingga ruang terhubung. Buktikan dengan induksi bahwa hasil kali berhingga ruang terhubung bersifat terhubung.

Petunjuk. Gunakan teorema dua faktor pada $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$.

Jawaban. Kasus satu faktor jelas; langkah induksi adalah penerapan teorema produk dua ruang terhubung.

Solusi. Untuk $n = 1$ pernyataan adalah hipotesis. Andaikan $P_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ terhubung. Karena X_n terhubung, teorema dua faktor memberi $P_{n-1} \times X_n$ terhubung. Homeomorfisme asosiatif kanonis mengidentifikasikannya dengan $\prod_{i=1}^n X_i$. *Rubrik:* dasar, hipotesis induksi, langkah dua faktor, dan identifikasi asosiatif harus muncul.

Pemeriksaan T.44 Produk berhingga ruang kompak. Buktikan dengan induksi bahwa hasil kali berhingga ruang kompak bersifat kompak.

Petunjuk. Ulangi pola induksi keterhubungan dengan teorema kekompakan dua faktor.

Jawaban. Produk $n - 1$ faktor kompak menurut induksi; hasil kalinya dengan faktor terakhir kompak menurut teorema dua faktor.

Solusi. Kasus $n = 1$ langsung. Jika P_{n-1} kompak dan X_n kompak, teorema produk dua ruang kompak menunjukkan $P_{n-1} \times X_n$ kompak. Melalui homeomorfisme pengelompokan ulang, ruang ini adalah produk n faktor. *Rubrik:* jangan menyebut Tychonoff takberhingga; teorema dua faktor dan induksi sudah cukup.

Pemeriksaan T.45 Produk dua ruang terhubung lintasan. Bangun lintasan antara dua titik sebarang pada $X_1 \times X_2$.

Petunjuk. Pilih lintasan pada tiap koordinat dan jalankan keduanya dengan parameter yang sama.

Jawaban. Jika γ_i menghubungkan x_i ke y_i , ambil $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

Solusi. Komposisi $\pi_i \circ \gamma = \gamma_i$ kontinu untuk kedua koordinat. Kriteria kekontinuan fungsi menuju produk memberi kontinuitas γ . Nilai ujungnya $\gamma(0) = (x_1, x_2)$ dan $\gamma(1) = (y_1, y_2)$. *Rubrik:* konstruksi dan alasan kontinuitas melalui proyeksi harus dicantumkan.

Pemeriksaan T.46 Produk berhingga ruang terhubung lintasan. Perluas hasil dua faktor ke banyak faktor berhingga.

Petunjuk. Gunakan induksi atau fungsi koordinat $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Jawaban. Lintasan koordinat dijalankan serentak; semua komposisi proyeksinya kontinu, maka lintasan produk kontinu.

Solusi. Untuk dua titik (x_i) dan (y_i) , pilih lintasan γ_i dalam X_i . Definisikan $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Setiap $\pi_i \circ \gamma$ kontinu, sehingga teorema kekontinuan menuju produk berhingga memberi kontinuitas γ . Nilai ujungnya benar koordinat demi koordinat. *Rubrik:* bukti harus berlaku seragam untuk semua n berhingga.

Pemeriksaan T.47 Apakah kekompakan produk memaksa kekompakan faktor? Putuskan pernyataan tanpa menambahkan hipotesis ketakkosongan yang tidak tertulis.

Petunjuk. Proyeksi hanya surjektif ke suatu faktor jika faktor yang lain tidak kosong.

Jawaban. Pernyataan salah sebagaimana ditulis: $\mathbb{R} \times \emptyset = \emptyset$ kompak, tetapi $\mathbb{R}$ tidak kompak. Jika kedua faktor tidak kosong, pernyataannya benar.

Solusi. Ambil $X_1 = \mathbb{R}$ dengan topologi biasa dan $X_2 = \emptyset$. Produknya kosong dan karenanya kompak, sedangkan X_1 tidak kompak. Dengan syarat kedua faktor takkosong, masing-masing proyeksi π_i kontinu dan surjektif; citra kontinu ruang kompak kompak, sehingga kedua faktor kompak. *Rubrik:* jawaban penuh harus memberi contoh tandingan dan menjelaskan versi benar dengan hipotesis minimal.

Pemeriksaan T.48 Proyeksi merupakan pemetaan buka. Buktikan bahwa $\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ memetakan himpunan buka ke himpunan buka.

Petunjuk. Mulai dari gabungan kotak basis dan hitung citra setiap kotak.

Jawaban. Citra $U \times V$ di bawah π_1 adalah U jika $V \neq \emptyset$ dan kosong jika $V = \emptyset$; gabungannya tetap buka.

Solusi. Tulis himpunan buka $O = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times V_{\alpha})$. Karena citra mempertahankan gabungan, $\pi_1(O) = \bigcup_{\alpha \neq \emptyset} U_{\alpha}$, yang buka dalam X_1 . Argumen untuk π_2 simetris. *Rubrik:* kasus faktor basis kosong tidak boleh diam-diam diabaikan.

Pemeriksaan T.49 Kapan topologi produk diskret? Dengan tiap faktor memiliki sedikitnya dua titik, buktikan bahwa produk diskret tepat ketika kedua faktor diskret.

Petunjuk. Untuk arah maju, proyeksikan singleton buka; untuk arah balik, hasil kalikan singleton faktor.

Jawaban. Jika produk diskret, $\{(x_1, x_2)\}$ buka dan proyeksi buka memberi $\{x_i\}$ buka. Jika faktor diskret, semua singleton produk terbuka.

Solusi. Ambil sembarang $x_1 \in X_1$ dan pilih $x_2 \in X_2$. Karena produk diskret, singleton pasangan buka; pemetaan proyeksi terbuka, jadi citranya $\{x_1\}$ buka. Tukar faktor untuk memperoleh semua singleton di X_2 . Maka faktor-faktor diskret. Sebaliknya, jika semua singleton faktor buka, setiap singleton produk adalah kotak buka; setiap himpunan adalah gabungan singleton. *Rubrik:* kedua implikasi dan penggunaan ketakkosongan harus eksplisit.

Pemeriksaan T.50 Komplemen hasil kali subhimpunan. Nilai kebenaran identitas komplemen $(X_1 \times X_2) \setminus (A_1 \times A_2) = (X_1 \setminus A_1) \times (X_2 \setminus A_2)$.

Petunjuk. Negasi “ $x \in A_1$ dan $y \in A_2$ ” memakai “atau”, bukan “dan”.

Jawaban. Salah. Rumus yang benar adalah $((X_1 \setminus A_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (X_2 \setminus A_2))$.

Solusi. Ambil $X_1 = X_2 = \{0, 1\}$ dan $A_1 = A_2 = \{0\}$. Titik $(0, 1)$ berada dalam komplemen produk, tetapi tidak berada dalam hasil kali kedua komplemen karena koordinat pertamanya masih dalam A_1 . Hukum De Morgan memberi rumus benar pada jawaban. *Rubrik:* contoh tandingan harus diuji pada kedua ruas dan rumus benar sebaiknya dinyatakan.

Pemeriksaan T.51 Apakah batas produk termuat dalam produk batas? Nilai kebenaran $\partial(A_1 \times A_2) \subseteq \partial A_1 \times \partial A_2$.

Petunjuk. Ambil faktor kedua seluruh ruang, yang batasnya kosong.

Jawaban. Salah. Dalam $\mathbb{R}^2$, ambil $A_1 = (0, 1)$ dan $A_2 = \mathbb{R}$; batas produk adalah $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$, sedangkan produk batas kosong.

Solusi. Karena $\partial\mathbb{R} = \emptyset$, ruas kanan $\partial(0, 1) \times \partial\mathbb{R}$ kosong. Namun $(0, 1) \times \mathbb{R}$ adalah pita terbuka dan penutupnya $[0, 1] \times \mathbb{R}$, sehingga batasnya dua garis $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$. *Rubrik:* contoh harus menghitung kedua batas secara eksplisit.

Panduan Latihan Bab 20, Bagian C

Bagian ini menutup lima prompt benar-salah terakhir dengan perhatian khusus pada faktor kosong.

Pemeriksaan T.52 Produk batas termuat dalam batas produk. Nilai kebenaran $\partial A_1 \times \partial A_2 \subseteq \partial(A_1 \times A_2)$.

Petunjuk. Setiap lingkungan kotak titik pada ruas kiri harus memotong produk dan komplementnya.

Jawaban. Benar.

Solusi. Ambil $(x_1, x_2) \in \partial A_1 \times \partial A_2$ dan lingkungan basis $U_1 \times U_2$. Karena $x_i \in \overline{A_i}$, pilih $a_i \in U_i \cap A_i$; pasangan (a_1, a_2) memotong produk. Karena $x_1 \in \partial A_1$, pilih $b_1 \in U_1 \setminus A_1$ dan sembarang $u_2 \in U_2$; pasangan (b_1, u_2) berada di luar produk. Jadi setiap lingkungan memotong kedua sisi. *Rubrik:* dua perpotongan lingkungan harus dibangun.

Pemeriksaan T.53 Hasil kali dua himpunan buka. Nilai kebenaran: jika O_1, O_2 buka, maka $O_1 \times O_2$ buka dalam produk.

Petunjuk. Ini adalah bentuk elemen basis yang mendefinisikan topologi hasil kali.

Jawaban. Benar.

Solusi. Menurut definisi basis produk, setiap hasil kali satu himpunan buka dari faktor pertama dan satu himpunan buka dari faktor kedua adalah elemen basis. Setiap elemen basis terbuka dalam topologi yang dibangkitkannya. *Rubrik:* alasan harus merujuk langsung pada definisi basis, bukan intuisi geometris saja.

Pemeriksaan T.54 Apakah keterbukaan produk memaksa keterbukaan faktor? Nilai kebenaran: jika $O_1 \times O_2$ buka, maka kedua faktor buka.

Petunjuk. Periksa produk kosong sebelum memakai proyeksi buka.

Jawaban. Salah sebagaimana ditulis. Ambil $O_1 = \{0\}$ dalam $\mathbb{R}$ biasa dan $O_2 = \emptyset$; produknya kosong dan buka, tetapi O_1 tidak buka. Jika produknya takkosong, kedua faktor memang buka.

Solusi. Contoh pada jawaban membantah pernyataan universal. Untuk versi takkosong, $O_1 = \pi_1(O_1 \times O_2)$ dan $O_2 = \pi_2(O_1 \times O_2)$. Karena proyeksi produk adalah pemetaan buka, kedua citra buka. *Rubrik:* jawaban lengkap memberi contoh tandingan dan menjelaskan tepat syarat yang memulihkan pernyataan.

Pemeriksaan T.55 Hasil kali dua himpunan tertutup. Nilai kebenaran: jika C_1, C_2 tertutup, maka $C_1 \times C_2$ tertutup.

Petunjuk. Gunakan rumus komplement produk sebagai gabungan dua strip terbuka.

Jawaban. Benar.

Solusi. Komplementnya adalah $((X_1 \setminus C_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (X_2 \setminus C_2))$. Kedua komplement faktor buka, sehingga kedua strip merupakan elemen basis terbuka; gabungannya terbuka. Maka $C_1 \times C_2$ tertutup. *Rubrik:* rumus komplement dan keterbukaan kedua strip harus ditunjukkan.

Pemeriksaan T.56 Apakah ketertutupan produk memaksa ketertutupan faktor? Nilai kebenaran: jika $C_1 \times C_2$ tertutup, maka kedua faktor tertutup.

Petunjuk. Sekali lagi periksa faktor kosong; untuk produk takkosong gunakan irisan dengan satu serat.

Jawaban. Salah sebagaimana ditulis. Ambil $C_1 = (0, 1)$ dalam $\mathbb{R}$ dan $C_2 = \emptyset$; produknya kosong dan tertutup, tetapi C_1 tidak tertutup. Jika kedua faktor takkosong, pernyataannya benar.

Solusi. Contoh tandingan membuktikan kegagalan umum. Jika pilih $c_2 \in C_2$, peta kontinu $i_1 : X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$, $i_1(x) = (x, c_2)$, memiliki prapeta $i_1^{-1}(C_1 \times C_2) = C_1$; karena produk tertutup, C_1 tertutup. Dengan memilih $c_1 \in C_1$ diperoleh ketertutupan C_2 . *Rubrik:* solusi harus membedakan kasus kosong dan takkosong serta membuktikan versi benar dengan prapeta kontinu.

Pemeriksaan Penguasaan Bab 20

Delapan pemeriksaan ini merupakan soal pendamping asli. Semuanya memiliki solusi lengkap dan tidak menambah klaim sebagai materi sumber GVSU.

Pemeriksaan T.57 Membedakan basis dan topologi. Berikan contoh dua elemen basis produk yang gabungannya terbuka tetapi bukan elemen basis tunggal, lalu jelaskan mengapa ini tidak melanggar definisi basis.

Petunjuk. Gunakan dua persegi panjang terpisah secara diagonal di $\mathbb{R}^2$.

Jawaban. Misalnya $((0, 1) \times (0, 1)) \cup ((2, 3) \times (2, 3))$ terbuka tetapi bukan satu persegi panjang.

Solusi. Gabungan tersebut adalah gabungan elemen basis, sehingga terbuka menurut definisi topologi yang dibangkitkan. Ia bukan satu hasil kali karena memuat $(1/2, 1/2)$ dan $(5/2, 5/2)$ tetapi tidak memuat pasangan silang $(1/2, 5/2)$. Basis tidak wajib tertutup terhadap gabungan; basis hanya harus menutupi ruang dan menyempurnakan irisan.

Pemeriksaan T.58 Membangun topologi dari subbasis. Pada $\mathbb{R}^2$, buktikan bahwa strip $(a, b) \times \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R} \times (c, d)$ membentuk subbasis topologi Euklides.

Petunjuk. Irisan satu strip vertikal dan satu strip horizontal adalah persegi panjang terbuka.

Jawaban. Irisan berhingga strip menghasilkan semua persegi panjang basis $(a, b) \times (c, d)$, yang membangkitkan topologi Euklides.

Solusi. Setiap strip adalah prapeta interval terbuka oleh salah satu proyeksi. Irisan $((a, b) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times (c, d)) = (a, b) \times (c, d)$. Persegi panjang terbuka ini merupakan basis Euklides, dan irisan tambahan hanya memperkecil interval. Maka strip adalah subbasis.

Pemeriksaan T.59 Kontinuitas fungsi bernilai produk. Untuk $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, \sin t)$, buktikan kontinuitas hanya melalui proyeksi.

Petunjuk. Hitung $\pi_1 \circ f$ dan $\pi_2 \circ f$.

Jawaban. Kedua fungsi koordinat $t \mapsto t^2$ dan $t \mapsto \sin t$ kontinu, maka f kontinu.

Solusi. Komposisi pertama adalah polinomial dan komposisi kedua fungsi sinus, keduanya kontinu pada $\mathbb{R}$. Teorema kekontinuan menuju produk menyatakan bahwa fungsi ke produk berhingga kontinu jika dan hanya jika semua komposisi proyeksinya kontinu. Jadi f kontinu.

Pemeriksaan T.60 Menurunkan sifat faktor dari produk. Misalkan $X \times Y$ takkosong dan Hausdorff. Buktikan bahwa X dan Y Hausdorff.

Petunjuk. Pilih satu titik tetap pada faktor lain dan gunakan pembenaman irisan.

Jawaban. Setiap faktor homeomorfik dengan subruang $X \times \{y_0\}$ atau $\{x_0\} \times Y$; subruang ruang Hausdorff bersifat Hausdorff.

Solusi. Pilih $y_0 \in Y$. Peta $x \mapsto (x, y_0)$ adalah homeomorfisme X ke subruang $X \times \{y_0\}$. Karena sifat Hausdorff diwarisi subruang, X Hausdorff. Pilih $x_0 \in X$ dan gunakan argumen simetris untuk Y .

Pemeriksaan T.61 Rumus umum batas produk. Buktikan $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

Petunjuk. Gunakan $\partial C = \overline{C} \setminus \text{Int } C$ bersama rumus penutup dan interior produk.

Jawaban. Substitusi $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dan $\text{Int}(A \times B) = \text{Int } A \times \text{Int } B$ memberi rumus tersebut.

Solusi. Di dalam $\overline{A} \times \overline{B}$, sebuah pasangan gagal berada pada $\text{Int } A \times \text{Int } B$ tepat ketika koordinat pertama berada pada $\overline{A} \setminus \text{Int } A = \partial A$ atau koordinat kedua berada pada $\overline{B} \setminus \text{Int } B = \partial B$. Hukum distributif himpunan memberi gabungan pada pernyataan.

Pemeriksaan T.62 Mendeteksi hipotesis ketakkosongan. Berikan tiga implikasi tentang faktor yang gagal hanya karena produk dapat kosong, lalu tulis versi benarnya.

Petunjuk. Gunakan latihan tentang kekompakan, keterbukaan, dan ketertutupan.

Jawaban. Kekompakan produk tidak memaksa kekompakan faktor; keterbukaan produk tidak memaksa keterbukaan faktor; dan ketertutupan produk tidak memaksa ketertutupan faktor jika salah satu faktor himpunannya kosong. Ketiganya benar dengan ketakkosongan yang sesuai.

Solusi. Ambil faktor kedua kosong untuk membuat produk kosong, sekaligus buka, tertutup, dan kompak, sementara faktor pertama dipilih tidak kompak, tidak buka sebagai subhimpunan, atau tidak tertutup. Jika produk takkosong, proyeksi kontinu-surjektif membawa kekompakan ke faktor, proyeksi buka membawa keterbukaan produk ke faktor, dan pembenaman irisan membawa ketertutupan produk ke faktor.

Pemeriksaan T.63 Lingkungan minimal pada bidang Khalimsky. Hitung $N(0, 0)$, $N(1, 1)$, $N(0, 1)$, dan $N(1, 0)$, lalu gambarkan hubungan ketetanggaan.

Petunjuk. Gunakan hasil kali lingkungan minimal pada garis.

Jawaban. $N(0, 0) = \{-1, 0, 1\}^2$, $N(1, 1) = \{(1, 1)\}$, $N(0, 1) = \{-1, 0, 1\} \times \{1\}$, dan $N(1, 0) = \{1\} \times \{-1, 0, 1\}$.

Solusi. Koordinat genap memiliki lingkungan minimal tiga titik, sedangkan koordinat ganjil memiliki singleton. Mengambil hasil kali memberi blok, singleton, segmen horizontal, dan segmen vertikal secara berurutan. Dua titik berbeda bertetangga bila salah satunya berada dalam lingkungan minimal yang lain; gambar diperoleh dengan menarik sisi sesuai aturan ini.

Pemeriksaan T.64 Proyek integratif: peta pada torus. Definisikan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ dengan $F(s, t) = ((\cos s, \sin s), (\cos t, \sin t))$. Buktikan F kontinu dan identifikasi periodenya.

Petunjuk. Periksa kedua komposisi proyeksi dan perubahan 2π pada masing-masing variabel.

Jawaban. F kontinu dan memenuhi $F(s + 2\pi k, t + 2\pi \ell) = F(s, t)$ untuk semua $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Solusi. Komposisi proyeksi pertama adalah $(s, t) \mapsto (\cos s, \sin s)$ dan yang kedua $(s, t) \mapsto (\cos t, \sin t)$; keduanya kontinu, sehingga F kontinu. Periodisitas sinus dan kosinus memberi identitas yang dinyatakan. Karena setiap titik lingkaran memiliki wakil sudut, F surjektif dan memfaktorkan melalui hasil bagi $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$, model torus.

Lampiran U

Pelengkap C90: Topologi Himpunan-Titik untuk Belajar Mandiri

Lampiran ini melengkapi, bukan menggantikan, dua puluh bab utama *Topologi: Pendekatan Berbasis Inkuiri*. Setiap modul menjembatani materi sumber dengan ruang lingkup C90 yang belum ditangani secara penuh, lalu menyediakan latihan dengan petunjuk, jawaban, dan solusi lengkap.

Seluruh uraian dalam lampiran ini ditulis secara mandiri untuk edisi ini dan merupakan komponen CC BY 4.0 yang terpisah. Lampiran ini bukan teks maupun solusi resmi Steven Schlicker atau Grand Valley State University, dan tidak menyatakan ataupun menyiratkan dukungan mereka. Turunan dari teks utama tetap diperlakukan secara konservatif sebagai CC BY-NC-SA 3.0; kedua identitas lisensi tidak diratakan menjadi satu lisensi.

Provenans produksi berbantuan model dicatat sebagai OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Identifikasi tersebut tidak menggantikan kredit penulis sumber, institusi, atau kontributor manusia.

Penyempurnaan Aksioma Separasi

Bab tentang himpunan tertutup pada teks utama memperkenalkan ruang T_1 , Hausdorff (T_2), T_3 , dan T_4 . Modul ini menambahkan tingkat T_0 , praurutan spesialisasi, kuosien Kolmogorov, dan regularitas lengkap. Modul ini juga menutup peta implikasi dengan saksi eksplisit bahwa setiap panah balik dapat gagal.

Ruang Kolmogorov dan titik yang dapat dibedakan

Definisi U.1 Ruang topologi X disebut **ruang Kolmogorov** atau **ruang T_0** jika untuk setiap dua titik berbeda $x, y \in X$, terdapat himpunan terbuka yang memuat tepat salah satu dari x dan y .

Definisi U.2 Dua titik $x, y \in X$ disebut **tak terbedakan secara topologis** jika setiap himpunan terbuka memuat x tepat ketika himpunan itu memuat y .

Proposisi U.3 Untuk ruang topologi X , pernyataan berikut ekuivalen.

1. X bersifat T_0 .

2. Tidak ada dua titik berbeda yang tak terbedakan secara topologis.
3. Jika $x \neq y$, maka $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.
4. Jika $x \neq y$, maka sedikitnya satu dari $x \notin \overline{\{y\}}$ atau $y \notin \overline{\{x\}}$ berlaku.

Bukti. Pernyataan pertama dan kedua hanyalah dua cara mengucapkan definisi. Jika x dan y tak terbedakan, maka untuk setiap $z \in X$, setiap lingkungan buka z memuat x tepat ketika lingkungan itu memuat y . Karena itu $z \in \overline{\{x\}}$ tepat ketika $z \in \overline{\{y\}}$, sehingga kedua penutup sama.

Sebaliknya, jika kedua penutup sama, maka $x \in \overline{\{y\}}$ dan $y \in \overline{\{x\}}$. Setiap himpunan terbuka yang memuat x harus memuat y , dan sebaliknya; jadi kedua titik tak terbedakan. Ini membuktikan ekuivalensi tiga pernyataan pertama. Pernyataan keempat adalah bentuk negasi dari keberadaan kedua keanggotaan penutup tersebut sekaligus. ■

Contoh U.4 Jika X mempunyai sedikitnya dua titik dan diberi topologi indiskret $\{\emptyset, X\}$, setiap dua titik berbeda tak terbedakan. Jadi ruang ini bukan T_0 . □

Contoh U.5 Pada himpunan $S = \{0, 1\}$, ambil $\tau = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Himpunan buka $\{1\}$ membedakan kedua titik, sehingga S bersifat T_0 . Akan tetapi, tidak ada himpunan buka yang memuat 0 tanpa memuat 1. Jadi S bukan T_1 . Ruang ini disebut **ruang Sierpiński**. □

Praurutan spesialisasi dan kuosien Kolmogorov

Definisi U.6 Pada ruang topologi X , definisikan relasi $\preceq$ dengan

$$x \preceq y \iff x \in \overline{\{y\}}.$$

Secara ekuivalen, $x \preceq y$ jika setiap himpunan terbuka yang memuat x juga memuat y . Relasi ini disebut **praurutan spesialisasi**. Konvensi arah ini dipertahankan secara konsisten di seluruh lampiran.

Teorema U.7 *Praurutan spesialisasi selalu refleksif dan transitif. Semua himpunan terbuka merupakan himpunan naik terhadap $\preceq$. Praurutan tersebut antisimetris, sehingga merupakan urutan parsial, jika dan hanya jika X bersifat T_0 .*

Bukti. Setiap lingkungan buka x memuat x , sehingga $x \preceq x$. Jika $x \preceq y$ dan $y \preceq z$, setiap himpunan buka yang memuat x memuat y , lalu memuat z ; jadi $x \preceq z$. Jika U terbuka, $x \in U$, dan $x \preceq y$, definisi langsung memberi $y \in U$.

Relasi $x \preceq y$ dan $y \preceq x$ sekaligus berarti x dan y mempunyai himpunan terbuka yang persis sama. Jadi antisimetris tepat ketika titik-titik berbeda selalu dapat dibedakan oleh suatu himpunan terbuka, yakni tepat ketika X bersifat T_0 . ■

Catatan U.8 Setiap himpunan buka memang naik, tetapi tidak setiap himpunan naik harus terbuka. Konvers tersebut berlaku untuk ruang Aleksandrov dan tidak boleh digunakan pada ruang topologi sebarang.

Teorema U.9 *Definisikan $x \sim y$ ketika x dan y tak terbedakan secara topologis. Beri $X/\sim$ topologi kuosien melalui proyeksi $q : X \rightarrow X/\sim$. Maka $X/\sim$ bersifat T_0 . Selain itu, setiap pemetaan kontinu $f : X \rightarrow Y$ ke ruang T_0 memfaktorkan secara tunggal sebagai $f = \bar{f} \circ q$ dengan $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ kontinu.*

Bukti. Relasi tak terbedakan adalah relasi ekuivalensi. Jika $[x] \neq [y]$, suatu himpunan terbuka U memuat tepat salah satu dari x, y . Himpunan U jenuh terhadap $\sim$, sehingga $q^{-1}(q(U)) = U$ dan $q(U)$ terbuka dalam topologi kuosien. Jadi kelas $[x]$ dan $[y]$ dapat dibedakan, dan ruang kuosien bersifat T_0 .

Jika $x \sim y$ dan $f(x) \neq f(y)$, sifat T_0 pada Y memberi himpunan buka yang memuat tepat salah satu

dari $f(x), f(y)$. Prapetanya membedakan x dan y , suatu kontradiksi. Maka f konstan pada setiap kelas, sehingga $\bar{f}([x]) = f(x)$ terdefinisi baik dan unik. Karena $f = \bar{f} \circ q$ kontinu dan q adalah pemetaan kuosien, $\bar{f}$ kontinu. ■

Peta lengkap dari T_0 hingga T_4

Definisi U.10 Ruang X disebut **reguler lengkap** jika, untuk setiap himpunan tertutup $F \subseteq X$ dan $x \notin F$, terdapat fungsi kontinu $f : X \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(x) = 0$ dan $f(F) = \{1\}$. Ruang reguler lengkap yang juga bersifat T_1 disebut **ruang Tychonoff** atau ruang $T_{3\frac{1}{2}}$.

Teorema U.11 Dengan konvensi definisi pada teks utama, berlaku rantai

$$T_4 \implies \text{Tychonoff} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Bukti. Jika X normal dan T_1 , Lema Urysohn memisahkan titik tertutup $\{x\}$ dari himpunan tertutup F dengan fungsi kontinu ke $[0, 1]$; jadi T_4 mengakibatkan Tychonoff. Jika fungsi f memisahkan x dari F , maka $f^{-1}([0, 1/3])$ dan $f^{-1}((2/3, 1])$ merupakan lingkungan buka saling lepas bagi x dan F . Karena itu Tychonoff mengakibatkan T_3 .

Dalam ruang T_3 , himpunan satu titik tertutup. Untuk $x \neq y$, regularitas memisahkan x dari $\{y\}$, sehingga ruang itu Hausdorff. Dalam ruang Hausdorff, untuk setiap $x \neq y$ ada lingkungan x yang tidak memuat y ; gabungan lingkungan-lingkungan tersebut menunjukkan bahwa $X \setminus \{y\}$ terbuka. Jadi setiap himpunan satu titik tertutup dan ruang itu T_1 . Akhirnya, definisi T_1 langsung memberi himpunan buka yang membedakan setiap dua titik, sehingga ruang itu T_0 . ■

Teorema U.12 Lema Urysohn. Jika A dan B merupakan himpunan tertutup saling lepas dalam ruang normal X , terdapat fungsi kontinu $f : X \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(A) = \{0\}$ dan $f(B) = \{1\}$.

Bukti. Normalitas ekuivalen dengan sifat berikut: jika F tertutup dan G terbuka dengan $F \subseteq G$, terdapat himpunan buka U sehingga $F \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq G$. Terapkan sifat ini secara rekursif pada bilangan diadik $D = \{k/2^n : 0 \leq k \leq 2^n\}$ untuk memilih himpunan buka U_r sedemikian sehingga $A \subseteq U_0$, $\bar{U}_1 \subseteq X \setminus B$, dan $\bar{U}_r \subseteq U_s$ bila $r < s$.

Definisikan $f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\}$, dengan nilai 1 jika himpunan di kanan kosong. Susunan penutup di atas memberi $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r < a} U_r$ dan $f^{-1}((a, 1]) = \bigcup_{r > a} (X \setminus \bar{U}_r)$. Kedua jenis prapeta itu terbuka, sehingga f kontinu. Konstruksi memberi nilai 0 pada A dan 1 pada B . ■

Contoh U.13 Setiap implikasi balik pada rantai di atas dapat gagal.

1. Ruang indiskret dengan sedikitnya dua titik bukan T_0 .
2. Ruang Sierpiński bersifat T_0 tetapi bukan T_1 .
3. Himpunan tak hingga dengan topologi komplemen berhingga bersifat T_1 tetapi bukan Hausdorff: setiap himpunan satu titik tertutup, sedangkan dua himpunan buka tak kosong selalu beririsan.
4. Ruang $\mathbb{R}_K$ dari latihan contoh-balik pada Bagian *Aksioma Separasi* di bab himpunan tertutup bersifat Hausdorff tetapi tidak reguler, sehingga T_2 tidak mengakibatkan T_3 .
5. Bidang Niemytzki yang dibangun pada bagian sumber yang sama bersifat Tychonoff, tetapi tidak normal. Karena itu bahkan Tychonoff tidak mengakibatkan T_4 . Secara khusus, ruang ini juga menjadi saksi bahwa T_3 tidak mengakibatkan T_4 .

□

Proposisi U.14 Misalkan $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, dan beri $\mathbb{R}$ basis yang terdiri atas semua interval buka biasa serta semua himpunan $(a, b) \setminus K$. Ruang $\mathbb{R}_K$ bersifat Hausdorff tetapi tidak reguler.

Bukti. Topologi ini lebih halus daripada topologi Euklides, jadi interval buka biasa masih dapat memisahkan dua titik; akibatnya ruang itu Hausdorff. Himpunan K tertutup karena $\mathbb{R} \setminus K$ terbuka, dan $0 \notin K$.

Andaikan lingkungan buka saling lepas U dari 0 dan V dari K ada. Untuk suatu $\varepsilon > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K \subseteq U$. Pilih n sehingga $1/n < \varepsilon/2$. Karena $1/n \in V$ dan setiap unsur basis yang memuat $1/n$ harus memuat suatu interval buka biasa di sekitar $1/n$, himpunan V memuat titik di $(0, \varepsilon) \setminus K$. Titik itu juga berada dalam U , bertentangan dengan keterpisahan. Jadi ruang tersebut tidak reguler. ■

Proposisi U.15 Bidang Niemytzki bersifat Tychonoff tetapi tidak normal.

Bukti. Basis berupa cakram Euklides yang terletak di setengah bidang atas, bersama cakram singgung yang ditambah titik singgungnya pada garis batas, memisahkan titik dan memiliki sifat penyusutan penutup: setiap lingkungan basis memuat lingkungan basis yang penutupnya termuat dalam lingkungan semula. Ruang itu Hausdorff, sehingga sifat penyusutan ini memberi regularitas. Lebih kuat lagi, fungsi jarak Euklides yang dipotong pada cakram-cakram basis memberikan pemisahan kontinu titik dari himpunan tertutup; jadi ruang itu Tychonoff.

Untuk nonnormalitas, garis batas L merupakan subruang tertutup, diskret, dan mempunyai kardinalitas $\mathfrak{c}$. Bidang Niemytzki separabel karena titik-titik berkoordinat rasional dengan koordinat kedua positif membentuk himpunan padat terhitung. Jika ruang itu normal, setiap pemisahan $L = A \sqcup (L \setminus A)$ akan, melalui Lema Urysohn, menghasilkan fungsi kontinu yang bernilai 0 pada A dan 1 pada komplementnya di L . Dengan demikian akan ada sedikitnya $2^{\mathfrak{c}}$ fungsi kontinu ke $[0, 1]$.

Namun, fungsi kontinu pada ruang separabel ditentukan oleh nilainya pada suatu himpunan padat terhitung. Banyaknya barisan bilangan real hanya $\mathfrak{c}$, sehingga terdapat paling banyak $\mathfrak{c}$ fungsi kontinu bernilai real. Ketaksamaan Cantor $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ menghasilkan kontradiksi. Jadi bidang Niemytzki tidak normal. ■

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.16 Ruang Sierpiński dan praurutan spesialisasi. Untuk $S = \{0, 1\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, S\}$, tentukan semua pasangan $x \preceq y$. Verifikasi langsung bahwa S bersifat T_0 tetapi bukan T_1 .

Petunjuk. Daftarkan lingkungan buka setiap titik. Ingat bahwa $x \preceq y$ berarti setiap lingkungan buka x memuat y .

Jawaban. Relasinya adalah $0 \preceq 0$, $1 \preceq 1$, dan $0 \preceq 1$; tetapi $1 \not\preceq 0$.

Solusi. Satu-satunya lingkungan buka 0 adalah S , yang memuat 1; jadi $0 \preceq 1$. Himpunan $\{1\}$ adalah lingkungan buka 1 yang tidak memuat 0, sehingga $1 \not\preceq 0$. Refleksivitas memberi dua pasangan diagonal. Himpunan $\{1\}$ membedakan kedua titik, jadi ruang itu T_0 . Akan tetapi, tidak ada himpunan buka yang memuat 0 tanpa memuat 1, jadi syarat T_1 gagal.

Pemeriksaan U.17 Penutup titik dan sifat T_0 . Buktikan tanpa memakai [Proposisi U.3](#) bahwa ruang X bersifat T_0 jika dan hanya jika pemetaan $x \mapsto \overline{\{x\}}$ bersifat injektif.

Petunjuk. Jika dua penutup sama, uji keanggotaan x dan y pada kedua penutup. Untuk arah sebaliknya, terjemahkan kegagalan T_0 sebagai kesamaan seluruh lingkungan buka.

Jawaban. Kesamaan penutup dua titik tepat memaksa kedua titik mempunyai lingkungan buka yang sama; injektivitas karena itu ekuivalen dengan kemampuan membedakan titik-titik berbeda.

Solusi. Andaikan $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Karena $x \in \overline{\{x\}}$, kita memperoleh $x \in \overline{\{y\}}$; maka setiap lingkungan buka x memuat y . Dengan menukar peran titik, setiap lingkungan buka y memuat x . Jadi kedua titik tak terbedakan. Dalam ruang T_0 ini memaksa $x = y$, sehingga pemetaan injektif.

Sebaliknya, jika X tidak T_0 , ada $x \neq y$ yang tak terbedakan. Untuk setiap z , suatu lingkungan buka z memuat x tepat ketika memuat y . Jadi $z \in \overline{\{x\}}$ tepat ketika $z \in \overline{\{y\}}$, sehingga kedua penutup sama dan pemetaan tidak injektif.

Pemeriksaan U.18 Sifat universal kuosien Kolmogorov. Misalkan $q : X \rightarrow X/\sim$ adalah kuosien Kolmogorov. Buktikan bahwa untuk setiap ruang T_0 Y , komposisi dengan q memberi korespondensi satu-satu antara pemetaan kontinu $X/\sim \rightarrow Y$ dan pemetaan kontinu $X \rightarrow Y$.

Petunjuk. Tunjukkan lebih dahulu bahwa pemetaan kontinu ke ruang T_0 harus konstan pada setiap kelas titik yang tak terbedakan.

Jawaban. Setiap $f : X \rightarrow Y$ memfaktor secara tunggal melalui q , dan definisi topologi kuosien membuat faktor tersebut kontinu.

Solusi. Jika $x \sim y$ tetapi $f(x) \neq f(y)$, sifat T_0 memberi himpunan buka di Y yang membedakan kedua citra. Prapetanya membedakan x dan y , sebuah kontradiksi. Karena itu rumus $\bar{f}([x]) = f(x)$ terdefinisi baik. Kesetaraan $f = \bar{f} \circ q$ dan sifat pemetaan kuosien menunjukkan bahwa $\bar{f}$ kontinu. Surjektivitas q menjamin keunikan. Sebaliknya, komposisi setiap pemetaan kontinu $\bar{f}$ dengan q jelas kontinu. Kedua konstruksi saling invers.

Pemeriksaan U.19 Topologi komplemen berhingga. Misalkan X tak hingga dan himpunan buka tak kosongnya adalah semua himpunan dengan komplemen berhingga. Buktikan bahwa X bersifat T_1 tetapi bukan Hausdorff.

Petunjuk. Periksa komplemen himpunan satu titik. Untuk sifat Hausdorff, hitung komplemen dari irisan dua himpunan buka tak kosong.

Jawaban. Semua himpunan satu titik tertutup, tetapi dua himpunan buka tak kosong tidak pernah saling lepas.

Solusi. Untuk setiap $x \in X$, komplemen $X \setminus \{x\}$ terbuka, sehingga $\{x\}$ tertutup. Jadi X bersifat T_1 . Jika U, V terbuka dan tak kosong, maka $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ berhingga. Karena X tak hingga, $U \cap V$ tidak kosong. Maka tidak ada lingkungan buka saling lepas bagi dua titik berbeda, dan ruang itu bukan Hausdorff.

Pemeriksaan U.20 Dari regularitas lengkap ke regularitas. Misalkan X reguler lengkap. Buktikan bahwa untuk setiap $x \notin F$ dengan F tertutup, terdapat lingkungan buka saling lepas bagi x dan F . Jelaskan mengapa syarat T_1 tetap dicantumkan dalam definisi ruang Tychonoff.

Petunjuk. Gunakan prapeta $[0, 1/3]$ dan $(2/3, 1]$ di bawah fungsi pemisah.

Jawaban. Kedua prapeta itu terbuka, saling lepas, dan masing-masing memuat x serta F . Regularitas lengkap sendiri tidak memaksa titik-titik tertutup, sehingga T_1 ditambahkan secara terpisah.

Solusi. Pilih fungsi kontinu $f : X \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(x) = 0$ dan $f(F) = \{1\}$. Dalam topologi subruang pada $[0, 1]$, kedua himpunan $[0, 1/3]$ dan $(2/3, 1]$ terbuka dan saling lepas. Prapetanya karena itu terbuka dan saling lepas; yang pertama memuat x , sedangkan yang kedua memuat F . Ini adalah regularitas. Ruang indiskret bersifat reguler lengkap secara trivial untuk pasangan titik dan himpunan tertutup yang tersedia, tetapi tidak T_1 bila memiliki lebih dari satu titik. Karena itu syarat T_1 tidak boleh dihilangkan dari istilah Tychonoff.

Pemeriksaan U.21 Membuktikan seluruh rantai separasi. Buktikan secara langsung tiga implikasi $T_3 \Rightarrow T_2$, $T_2 \Rightarrow T_1$, dan $T_1 \Rightarrow T_0$. Pada setiap langkah, nyatakan tepat di mana hipotesis sebelumnya digunakan.

Petunjuk. Untuk langkah pertama, pisahkan x dari himpunan tertutup $\{y\}$. Untuk langkah kedua, tulis $X \setminus \{y\}$ sebagai gabungan lingkungan titik-titik lain.

Jawaban. Syarat T_1 di dalam T_3 membuat himpunan satu titik tertutup; sifat Hausdorff membuat komplemen setiap titik terbuka; dan sifat T_1 langsung memberi himpunan buka pembeda.

Solusi. Misalkan X bersifat T_3 dan $x \neq y$. Karena T_3 mencakup T_1 , himpunan $\{y\}$ tertutup. Regularitas memisahkan x dan $\{y\}$ dengan himpunan buka saling lepas, sehingga X Hausdorff.

Sekarang misalkan X Hausdorff dan tetapkan $y \in X$. Untuk setiap $x \neq y$, pilih lingkungan buka U_x dari x yang tidak memuat y . Maka $X \setminus \{y\} = \bigcup_{x \neq y} U_x$ terbuka, sehingga $\{y\}$ tertutup dan X bersifat T_1 . Akhirnya, jika X bersifat T_1 dan $x \neq y$, himpunan buka $X \setminus \{y\}$ memuat x tetapi tidak memuat y . Jadi X

bersifat T_0 .

Keterhitungan, Kepadatan, dan Sifat Lindelöf

Topologi tidak selalu mempunyai daftar lingkungan atau basis yang dapat ditangani secara berurutan. Modul ini membedakan keterhitungan lokal dari keterhitungan global, lalu menghubungkannya dengan himpunan padat dan subselimit terhitung. Istilah *basis lokal* dan *aksioma keterhitungan pertama* mengikuti penggunaan matematika Indonesia yang telah dicatat dalam audit terminologi edisi ini.

Basis lokal dan dua aksioma keterhitungan

Definisi U.22 Misalkan $x \in X$. Suatu keluarga $\mathcal{B}_x$ lingkungan buka dari x disebut **basis lokal di x** jika untuk setiap himpunan buka U yang memuat x , terdapat $B \in \mathcal{B}_x$ dengan $x \in B \subseteq U$.

Definisi U.23 Ruang X disebut **terhitung pertama** jika setiap titik mempunyai basis lokal terhitung. Ruang X disebut **terhitung kedua** jika topologinya mempunyai suatu basis terhitung.

Proposisi U.24 *Setiap ruang metrik terhitung pertama. Untuk titik x , keluarga $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan basis lokal terhitung.*

Bukti. Jika U terbuka dan $x \in U$, terdapat $\varepsilon > 0$ dengan $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Pilih n sehingga $1/n < \varepsilon$. Maka $x \in B_{1/n}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$. ■

Proposisi U.25 *Setiap ruang terhitung kedua terhitung pertama.*

Bukti. Jika $\mathcal{B}$ basis terhitung bagi X , maka $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ terhitung. Untuk setiap lingkungan buka U dari x , sifat basis memberi $B \in \mathcal{B}_x$ dengan $B \subseteq U$. Jadi $\mathcal{B}_x$ merupakan basis lokal. ■

Kepadatan, separabilitas, dan sifat Lindelöf

Definisi U.26 Subhimpunan $D \subseteq X$ disebut **padat** dalam X jika $\overline{D} = X$, atau secara ekuivalen jika setiap himpunan buka tak kosong beririsan dengan D . Ruang X disebut **separabel** jika mempunyai subhimpunan padat yang paling banyak terhitung.

Definisi U.27 Ruang X disebut **ruang Lindelöf** jika setiap selimut buka bagi X mempunyai subselimit yang paling banyak terhitung.

Teorema U.28 *Setiap ruang terhitung kedua bersifat separabel dan Lindelöf.*

Bukti. Ambil basis terhitung $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan pilih satu titik $x_n \in B_n$ untuk setiap unsur basis tak kosong. Himpunan $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terhitung. Jika U terbuka dan tak kosong, pilih $x \in U$ dan unsur basis B_n dengan $x \in B_n \subseteq U$. Maka $x_n \in D \cap U$, sehingga D padat.

Sekarang misalkan $\mathcal{U}$ selimut buka bagi X . Untuk setiap $x \in X$, pilih $U_x \in \mathcal{U}$ dan $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq U_x$. Hanya paling banyak terhitung banyak unsur basis berbeda yang muncul sebagai B_x . Untuk setiap unsur basis yang muncul, pertahankan satu himpunan U_x yang memuatnya. Keluarga terhitung yang diperoleh tetap menutupi X , sehingga X Lindelöf. ■

Teorema U.29 Untuk ruang metrik X , ketiga sifat berikut ekuivalen: terhitung kedua, separabel, dan Lindelöf.

Bukti. Teorema sebelumnya memberi bahwa keterhitungan kedua mengakibatkan dua sifat lainnya. Andaikan D padat dan terhitung. Keluarga semua bola $B_r(d)$ dengan $d \in D$ dan $r \in \mathbb{Q}^+$ terhitung. Jika U terbuka dan $x \in U$, pilih $\varepsilon > 0$ dengan $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Pilih $d \in D \cap B_{\varepsilon/3}(x)$ dan rasional positif r dengan $d(x, d) < r < \varepsilon - d(x, d)$. Maka $x \in B_r(d) \subseteq U$, sehingga keluarga bola tadi merupakan basis terhitung.

Terakhir, andaikan X Lindelöf. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, selimut $\{B_{1/n}(x) : x \in X\}$ mempunyai subselimut terhitung; pilih pusat-pusatnya sebagai D_n . Himpunan $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ terhitung. Setiap bola buka tak kosong memuat suatu pusat dari D_n untuk n cukup besar, jadi D padat. Dengan demikian X separabel. ■

Pewarisan, citra kontinu, dan contoh-balik

Teorema U.30 Sifat-sifat berikut berlaku.

1. Subruang dari ruang terhitung pertama juga terhitung pertama.
2. Subruang dari ruang terhitung kedua juga terhitung kedua.
3. Subruang tertutup dari ruang Lindelöf juga Lindelöf.
4. Citra kontinu dari ruang separabel bersifat separabel.
5. Citra kontinu dari ruang Lindelöf bersifat Lindelöf.

Bukti. Jika $A \subseteq X$ dan $\mathcal{B}_x$ basis lokal di $x \in A$, jejak-jejak $B \cap A$ membentuk basis lokal di x untuk topologi subruang. Demikian pula, jejak suatu basis terhitung bagi X membentuk basis terhitung bagi A .

Jika F tertutup dalam ruang Lindelöf X , tambahkan $X \setminus F$ pada selimut buka relatif dari F . Suatu subselimut terhitung bagi X , setelah himpunan tambahan itu dibuang, menutupi F .

Jika $f : X \rightarrow Y$ kontinu dan D padat dalam X , maka $f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$; jadi $f(D)$ padat dalam $f(X)$. Jika D terhitung, citranya juga terhitung. Untuk sifat Lindelöf, tarik suatu selimut buka bagi $f(X)$ kembali ke X , pilih subselimut terhitung, lalu ambil kembali himpunan-himpunan asal yang bersesuaian. ■

Contoh U.31 Garis Sorgenfrey adalah $\mathbb{R}$ dengan basis semua interval $[a, b)$. Ruang ini separabel tetapi tidak terhitung kedua. Himpunan $\mathbb{Q}$ padat karena setiap interval basis tak kosong memuat bilangan rasional. Jika $\mathcal{B}$ basis terhitung, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ pilih $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. Bila $x < y$, kesamaan $B_x = B_y$ mustahil karena $x \in B_y \subseteq [y, y+1)$. Jadi pemetaan $x \mapsto B_x$ injektif ke $\mathcal{B}$, bertentangan dengan keterhitungan $\mathcal{B}$. □

Contoh U.32 Pada himpunan tak terhitung X , topologi komplemen terhitung bersifat Lindelöf tetapi tidak separabel. Untuk suatu selimut buka, pilih satu anggota U_0 ; komplemennya terhitung, sehingga satu anggota tambahan untuk setiap titik yang tersisa memberi subselimut terhitung. Sebaliknya, jika D terhitung, himpunan buka tak kosong $X \setminus D$ tidak beririsan dengan D , sehingga D tidak padat. □

Contoh U.33 Kuadrat garis Sorgenfrey separabel karena $\mathbb{Q}^2$ padat. Namun anti-diagonal $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ merupakan subruang diskret tak terhitung: persegi panjang basis $[x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon)$ memotong D hanya pada $(x, -x)$. Anti-diagonal juga tertutup, karena titik di luar D mempunyai persegi panjang basis kecil yang menjaga tanda jumlah kedua koordinat. Jadi separabilitas tidak herediter. Contoh ini sekaligus tidak Lindelöf, sebab subruang tertutup dari ruang Lindelöf harus Lindelöf, sedangkan ruang diskret tak terhitung tidak Lindelöf. □

Contoh U.34 Misalkan D diskret tak terhitung dan tambahkan titik ∞ . Nyatakan semua titik D terisolasi, dan jadikan lingkungan ∞ semua himpunan yang memuat ∞ serta semua kecuali berhingga banyak titik D . Ruang yang diperoleh kompak: anggota selimut yang memuat ∞ menyisakan hanya berhingga banyak titik. Akan tetapi, subruang buka D tidak Lindelöf karena selimut oleh semua himpunan satu titik tidak mempunyai subselimut terhitung. Jadi sifat Lindelöf tidak herediter. $\square$

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.35 Basis lokal pada ruang metrik. Buktikan bahwa $\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan basis lokal di setiap titik x suatu ruang metrik. Jelaskan mengapa pilihan jari-jari khusus tidak penting selama jari-jari itu positif dan menuju nol.

Petunjuk. Bandingkan suatu jari-jari $\varepsilon > 0$ dengan 2^{-n} .

Jawaban. Untuk n cukup besar, $2^{-n} < \varepsilon$.

Solusi. Jika U terbuka dan $x \in U$, pilih $\varepsilon > 0$ dengan $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Karena $2^{-n} \rightarrow 0$, ada n dengan $2^{-n} < \varepsilon$, sehingga $x \in B_{2^{-n}}(x) \subseteq U$. Argumen yang sama bekerja untuk setiap barisan jari-jari positif yang menuju nol.

Pemeriksaan U.36 Dari basis terhitung ke himpunan padat. Misalkan $\mathcal{B}$ basis terhitung bagi X . Bangun himpunan padat terhitung secara eksplisit dan buktikan kepadatannya.

Petunjuk. Pilih satu titik dari setiap unsur basis tak kosong.

Jawaban. Himpunan semua titik pilihan itu terhitung dan memotong setiap himpunan buka tak kosong.

Solusi. Tulis unsur basis tak kosong sebagai $B_1, B_2, \dots$ dan pilih $x_n \in B_n$. Himpunan $D = \{x_n : n \geq 1\}$ terhitung. Jika U terbuka dan tak kosong, ambil $x \in U$. Sifat basis memberi suatu B_n dengan $x \in B_n \subseteq U$, maka $x_n \in D \cap U$. Jadi setiap himpunan buka tak kosong memotong D , sehingga $\overline{D} = X$.

Pemeriksaan U.37 Separabilitas memberi basis terhitung pada ruang metrik. Misalkan D padat dan terhitung dalam ruang metrik X . Buktikan bahwa bola-bola berpusat di D dengan jari-jari rasional positif membentuk basis bagi X .

Petunjuk. Untuk $x \in U$, ambil bola $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, lalu pilih pusat $d \in D$ sangat dekat dengan x .

Jawaban. Pilih $d(x, d) < \varepsilon/3$ dan rasional r di antara $d(x, d)$ dan $\varepsilon - d(x, d)$.

Solusi. Ambil $x \in U$ dengan U terbuka, dan pilih $\varepsilon > 0$ sehingga $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Kepadatan memberi $d \in D$ dengan $d(x, d) < \varepsilon/3$. Pilih rasional positif r sehingga $d(x, d) < r < \varepsilon - d(x, d)$. Maka $x \in B_r(d)$. Jika $y \in B_r(d)$, ketaksamaan segitiga memberi $d(x, y) < d(x, d) + r < \varepsilon$, jadi $B_r(d) \subseteq U$. Keluarga tersebut terhitung karena $D \times \mathbb{Q}^+$ terhitung.

Pemeriksaan U.38 Garis Sorgenfrey. Buktikan bahwa garis Sorgenfrey separabel tetapi tidak terhitung kedua. Jangan memakai hasil kardinalitas selain ketakterhitungan $\mathbb{R}$.

Petunjuk. Gunakan $\mathbb{Q}$ untuk kepadatan. Jika ada basis terhitung, pilih satu unsur basis B_x di antara x dan $[x, x+1)$ untuk setiap x .

Jawaban. Pemetaan $x \mapsto B_x$ harus injektif, suatu kontradiksi.

Solusi. Setiap interval basis $[a, b)$ yang tak kosong memuat rasional, jadi $\mathbb{Q}$ padat. Andaikan $\mathcal{B}$ basis terhitung. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, pilih $B_x \in \mathcal{B}$ dengan $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. Jika $x < y$ dan $B_x = B_y$, maka $x \in B_y \subseteq [y, y+1)$, yang mustahil. Jadi $x \mapsto B_x$ injektif dari himpunan tak terhitung $\mathbb{R}$ ke $\mathcal{B}$, bertentangan dengan asumsi.

Pemeriksaan U.39 Subruang tertutup Lindelöf. Buktikan bahwa setiap subruang tertutup dari ruang Lindelöf bersifat Lindelöf. Lalu gunakan anti-diagonal dalam kuadrat garis Sorgenfrey untuk membuktikan bahwa kuadrat tersebut tidak Lindelöf.

Petunjuk. Tambahkan komplemen subruang tertutup pada selimut relatif. Untuk anti-diagonal, periksa

bahwa ia tertutup, diskret, dan tak terhitung.

Jawaban. Ruang diskret tak terhitung tidak Lindelöf, sedangkan subruang tertutup dari ruang Lindelöf harus Lindelöf.

Solusi. Misalkan F tertutup dalam X dan $\{F \cap U_i : i \in I\}$ selimut buka relatif bagi F . Keluarga $\{U_i : i \in I\} \cup \{X \setminus F\}$ menyelimuti X . Pilih subselimut terhitung dan buang $X \setminus F$; jejak anggota yang tersisa menutupi F .

Dalam kuadrat Sorgenfrey, anti-diagonal $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ tertutup dan diskret seperti pada contoh sebelumnya. Selimut D oleh seluruh himpunan satu titik tidak mempunyai subselimut terhitung, jadi D tidak Lindelöf. Jika kuadrat Sorgenfrey Lindelöf, subruang tertutup D harus Lindelöf, sebuah kontradiksi.

Pemeriksaan U.40 Ruang kompak dengan subruang tak Lindelöf. Untuk diskret tak terhitung D , bentuk $X = D \cup \{\infty\}$ dengan lingkungan ∞ yang berkomplemen berhingga dalam D . Buktikan bahwa X kompak, tetapi subruang buka D tidak Lindelöf.

Petunjuk. Dalam suatu selimut buka bagi X , mulai dengan anggota yang memuat ∞ .

Jawaban. Anggota itu menyisakan hanya berhingga banyak titik; sedangkan selimut titik-tunggal bagi D tidak mempunyai subselimut terhitung.

Solusi. Ambil selimut buka $\mathcal{U}$ bagi X dan pilih $U_\infty \in \mathcal{U}$ yang memuat ∞ . Menurut definisi topologi, $D \setminus U_\infty$ berhingga. Pilih satu anggota selimut bagi masing-masing titik yang tersisa. Bersama U_∞ , himpunan-himpunan itu membentuk subselimut berhingga, sehingga X kompak. Subruang D terbuka dan diskret. Selimut $\{\{d\} : d \in D\}$ tidak mempunyai subselimut terhitung karena gabungan terhitung himpunan satu titik hanya terhitung, sedangkan D tak terhitung. Jadi D tidak Lindelöf.

Jaring dan Kekonvergenan Umum

Barisan cukup kuat pada ruang terhitung pertama, tetapi tidak pada ruang topologi sebarang. Jaring mengganti indeks bilangan asli dengan himpunan terarah sehingga setiap lingkungan dan setiap ekor dapat dimodelkan tanpa hipotesis keterhitungan. Modul ini memberi karakterisasi penutup, kekontinuan, dan kekompakan yang berlaku pada semua ruang topologi.

Himpunan terarah, jaring, dan subjaring

Definisi U.41 Himpunan terarah adalah himpunan tak kosong A dengan praurutan $\leq$ sedemikian sehingga untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ terdapat $a_3 \in A$ dengan $a_1 \leq a_3$ dan $a_2 \leq a_3$. Unsur yang lebih besar dipandang sebagai indeks yang lebih akhir.

Definisi U.42 Jaring atau *net* dalam ruang X adalah pemetaan $x : A \rightarrow X$ dari suatu himpunan terarah; nilainya ditulis x_a . Jaring (x_a) **akhirnya** berada dalam $E \subseteq X$ jika terdapat a_0 sehingga $a \geq a_0$ mengakibatkan $x_a \in E$. Jaring itu **sering** berada dalam E jika untuk setiap a_0 terdapat $a \geq a_0$ dengan $x_a \in E$.

Definisi U.43 Jaring (x_a) konvergen ke $x \in X$ jika jaring itu akhirnya berada dalam setiap lingkungan buka x . Titik x disebut **titik gugus** dari jaring jika jaring itu sering berada dalam setiap lingkungan buka x .

Definisi U.44 Misalkan $(x_a)_{a \in A}$ suatu jaring. Jaring $(y_b)_{b \in B}$ disebut **subjaring** jika ada pemetaan $\phi : B \rightarrow A$ yang mempertahankan urutan dan kofinal dalam arti berikut: untuk setiap $a_0 \in A$, terdapat $b_0 \in B$

sehingga $b \geq b_0$ mengakibatkan $\phi(b) \geq a_0$, dan $y_b = x_{\phi(b)}$.

Proposisi U.45 *Titik x merupakan titik gugus jaring (x_a) jika dan hanya jika ada subjaring dari (x_a) yang konvergen ke x .*

Bukti. Jika suatu subjaring konvergen ke x , kofinalitas menjamin bahwa setiap lingkungan x ditemui setelah setiap indeks asal; jadi x titik gugus. Sebaliknya, misalkan x titik gugus. Ambil semua pasangan (a, U) dengan $a \in A$, U lingkungan buka x , dan pilih indeks $c \geq a$ sehingga $x_c \in U$, dan bentuk semua tripel (a, U, c) semacam itu. Tetapkan $(a, U, c) \preceq (a', U', c')$ bila $a \leq a'$, $U' \subseteq U$, dan $c \leq c'$. Himpunan tripel ini terarah: untuk dua tripel, pilih indeks yang mendominasi kedua indeks pertama dan kedua indeks ketiga, lalu gunakan sifat titik gugus pada irisan kedua lingkungan untuk memilih indeks ketiga yang lebih akhir. Proyeksi $\phi(a, U, c) = c$ mempertahankan urutan dan kofinal. Jaring $x_{\phi(a, U, c)} = x_c$ akhirnya berada dalam setiap lingkungan x , sehingga merupakan subjaring yang konvergen ke x . ■

Catatan U.46 Subjaring dari barisan tidak harus merupakan subbarisan biasa: himpunan indeks barunya dapat berbeda dari $\mathbb{N}$. Kofinalitas adalah syarat yang memastikan subjaring tidak menetap di bagian awal jaring.

Penutup dan kekontinuan melalui jaring

Teorema U.47 *Untuk $E \subseteq X$ dan $x \in X$, berlaku $x \in \overline{E}$ jika dan hanya jika ada jaring yang seluruh nilainya berada dalam E dan konvergen ke x .*

Bukti. Jika jaring dalam E konvergen ke x , setiap lingkungan buka x memuat salah satu nilainya, maka beririsan dengan E ; jadi $x \in \overline{E}$. Sebaliknya, arahkan keluarga lingkungan buka $\mathcal{N}(x)$ dengan urutan balik: $U \preceq V$ jika $V \subseteq U$. Karena $x \in \overline{E}$, pilih $x_U \in E \cap U$ untuk setiap $U \in \mathcal{N}(x)$. Untuk lingkungan W , semua indeks $U \succeq W$ memenuhi $U \subseteq W$, sehingga $x_U \in W$. Jadi jaring tersebut konvergen ke x . ■

Teorema U.48 *Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ kontinu jika dan hanya jika untuk setiap jaring $x_a \rightarrow x$ dalam X , berlaku $f(x_a) \rightarrow f(x)$ dalam Y .*

Bukti. Jika f kontinu dan V lingkungan buka $f(x)$, maka $f^{-1}(V)$ lingkungan buka x . Jaring x_a akhirnya berada di dalam prapeta itu, jadi $f(x_a)$ akhirnya berada dalam V .

Sebaliknya, andaikan f tidak kontinu di x . Ada lingkungan buka V dari $f(x)$ sehingga $f^{-1}(V)$ bukan lingkungan x . Maka $x \in \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$. Menurut teorema penutup, ada jaring x_a di dalam komplemen tersebut dengan $x_a \rightarrow x$. Namun tidak satu pun $f(x_a)$ berada dalam V , sehingga jaring citra tidak konvergen ke $f(x)$, bertentangan dengan hipotesis pelestarian jaring. ■

Proposisi U.49 *Dalam ruang terhitung pertama, penutup dapat dideteksi oleh barisan: jika $x \in \overline{E}$, ada barisan dalam E yang konvergen ke x .*

Bukti. Ambil basis lokal terhitung $U_1, U_2, \dots$ di x dan ganti dengan basis menurun $V_n = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Karena $x \in \overline{E}$, pilih $x_n \in E \cap V_n$. Jika U lingkungan x , suatu $U_k \subseteq U$; untuk $n \geq k$, $x_n \in V_n \subseteq U_k \subseteq U$. Jadi $x_n \rightarrow x$. ■

Contoh U.50 Misalkan ω_1 ordinal pertama yang tak terhitung, dan beri $[0, \omega_1]$ topologi urutan. Himpunan $E = [0, \omega_1)$ mempunyai $\omega_1 \in \overline{E}$ karena setiap lingkungan ujung ω_1 memuat ordinal yang lebih kecil. Namun tidak ada barisan dalam E yang konvergen ke ω_1 . Memang, supremum dari terhitung banyak ordinal terhitung masih merupakan ordinal terhitung $\beta < \omega_1$; lingkungan $(\beta, \omega_1]$ kemudian tidak memuat satu pun suku barisan. Jadi barisan tidak mendeteksi penutup pada ruang topologi sebarang, sedangkan jaring selalu melakukannya. □

Kekompakan melalui jaring

Teorema U.51 Ruang topologi X kompak jika dan hanya jika setiap jaring dalam X mempunyai subjaring yang konvergen.

Bukti. Misalkan X kompak dan $(x_a)_{a \in A}$ suatu jaring. Untuk setiap a , ambil penutup ekor $F_a = \overline{\{x_b : b \geq a\}}$. Keluarga $\{F_a : a \in A\}$ mempunyai sifat irisan berhingga karena keterarahan memberi satu ekor yang termuat dalam setiap kumpulan berhingga ekor. Kekompakan memberi $x \in \bigcap_{a \in A} F_a$. Setiap lingkungan x memotong setiap ekor, jadi x titik gugus jaring. Menurut proposisi subjaring, ada subjaring yang konvergen ke x .

Sebaliknya, andaikan selimut buka $\mathcal{U}$ tidak mempunyai subselimut berhingga. Arahkan himpunan semua subkeluarga berhingga $F \subseteq \mathcal{U}$ dengan inklusi, lalu pilih $x_F \in X \setminus \bigcup F$. Jika jaring ini mempunyai subjaring yang konvergen ke x , pilih $U \in \mathcal{U}$ dengan $x \in U$. Subjaring akhirnya berada dalam U . Kofinalitas juga membuat indeks asalnya akhirnya memuat keluarga berhingga $\{U\}$, sehingga nilai subjaring justru berada di luar U . Kontradiksi ini menunjukkan bahwa setiap selimut buka mempunyai subselimut berhingga. ■

Catatan U.52 Bahasa filter memberi formulasi yang ekuivalen tanpa mengulang teori. Filter pada X adalah keluarga $\mathcal{F}$ subhimpunan yang tidak memuat $\emptyset$, tertutup ke atas, dan tertutup terhadap irisan berhingga. Filter konvergen ke x jika memuat setiap lingkungan x . Ekor suatu jaring membangkitkan filter, sedangkan pasangan (F, x) dengan $F \in \mathcal{F}$ dan $x \in F$ membentuk jaring yang merepresentasikan filter. Dengan Prinsip Ultrafilter, kekompakan ekuivalen dengan pernyataan bahwa setiap ultrafilter konvergen. Edisi ini memakai jaring sebagai bahasa utama dan tidak menduplikasi semua pembuktian dalam notasi filter.

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.53 Jaring lingkungan untuk penutup. Misalkan $x \in \overline{E}$. Arahkan keluarga lingkungan buka x dengan urutan balik dan pilih $x_U \in E \cap U$. Buktikan langsung bahwa $x_U \rightarrow x$.

Petunjuk. Gunakan lingkungan sasaran itu sendiri sebagai indeks awal.

Jawaban. Jika $U \succeq W$, maka $U \subseteq W$ dan $x_U \in W$.

Solusi. Tetapkan lingkungan buka W dari x . Dalam urutan balik, setiap indeks $U \succeq W$ memenuhi $U \subseteq W$. Karena $x_U \in U$, kita memperoleh $x_U \in W$. Jadi jaring akhirnya berada dalam setiap lingkungan W , tepat definisi $x_U \rightarrow x$.

Pemeriksaan U.54 Jaring pada ruang metrik. Buktikan bahwa jaring x_a dalam ruang metrik konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, akhirnya $d(x_a, x) < \varepsilon$.

Petunjuk. Bola-bola buka membentuk basis lokal di x .

Jawaban. Pernyataan adalah definisi kekonvergenan yang diuji pada basis lokal bola.

Solusi. Jika $x_a \rightarrow x$, terapkan definisi pada lingkungan $B_\varepsilon(x)$. Sebaliknya, misalkan syarat epsilon berlaku dan U lingkungan buka x . Pilih $\varepsilon > 0$ dengan $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Jaring akhirnya memenuhi $d(x_a, x) < \varepsilon$, sehingga akhirnya berada dalam U .

Pemeriksaan U.55 Kekontinuan dan pelestarian jaring. Andaikan $f : X \rightarrow Y$ membawa setiap jaring yang konvergen ke jaring yang konvergen menuju citra limitnya. Buktikan bahwa f kontinu.

Petunjuk. Jika f tidak kontinu di x , bangun jaring menuju x di luar prapeta suatu lingkungan $f(x)$.

Jawaban. Gunakan karakterisasi penutup oleh jaring pada komplemen prapeta.

Solusi. Jika f tidak kontinu di x , ada lingkungan buka V dari $f(x)$ sehingga $f^{-1}(V)$ bukan lingkungan x . Jadi x berada dalam penutup komplementnya. Pilih jaring x_a dalam $X \setminus f^{-1}(V)$ yang konvergen ke x . Semua $f(x_a)$ berada di luar V , sehingga jaring citra tidak akhirnya berada dalam lingkungan V dari $f(x)$. Ini bertentangan dengan hipotesis, maka f kontinu.

Pemeriksaan U.56 Ordinal pertama tak terhitung. Dalam $[0, \omega_1]$ dengan topologi urutan, buktikan bahwa ω_1 berada dalam penutup $[0, \omega_1)$, tetapi bukan limit suatu barisan dari himpunan itu. Lalu jelaskan bentuk jaring yang konvergen ke ω_1 .

Petunjuk. Ambil supremum semua suku barisan. Untuk jaring, arahkan ordinal terhitung dengan urutan biasa.

Jawaban. Jaring $x_\alpha = \alpha$, diindeks oleh $\alpha < \omega_1$, konvergen ke ω_1 .

Solusi. Setiap lingkungan ω_1 memuat ekor $(\beta, \omega_1]$ dan karena itu memotong $[0, \omega_1)$. Jadi ω_1 berada dalam penutup. Untuk barisan (α_n) ordinal terhitung, supremum $\beta = \sup_n \alpha_n$ masih terhitung. Lingkungan $(\beta, \omega_1]$ tidak memuat satu pun α_n , maka barisan tidak konvergen ke ω_1 . Sebaliknya, himpunan semua ordinal terhitung terarah oleh urutan biasa, dan jaring $x_\alpha = \alpha$ akhirnya berada dalam setiap ekor $(\beta, \omega_1]$; jadi jaring itu konvergen.

Pemeriksaan U.57 Kekompakan dari subjaring. Andaikan setiap jaring dalam X mempunyai subjaring konvergen. Buktikan langsung bahwa setiap selimut buka $\mathcal{U}$ mempunyai subselimut berhingga.

Petunjuk. Jika tidak, indekskan titik yang belum tertutupi oleh semua subkeluarga berhingga $F \subseteq \mathcal{U}$.

Jawaban. Subjaring konvergen akhirnya harus berada dalam satu anggota selimut, tetapi kofinalitas memaksanya akhirnya berada di luar anggota itu.

Solusi. Andaikan $\mathcal{U}$ tidak mempunyai subselimut berhingga. Arahkan subkeluarga berhingga F dengan inklusi, dan pilih $x_F \notin \bigcup F$. Ambil subjaring $x_{\phi(b)}$ yang konvergen ke x , lalu pilih $U \in \mathcal{U}$ dengan $x \in U$. Kekonvergenan memberi indeks setelah mana semua nilai subjaring berada dalam U . Kofinalitas terhadap indeks $\{U\}$ memberi indeks setelah mana $U \in \phi(b)$. Namun definisi $x_{\phi(b)}$ mengatakan nilai itu berada di luar setiap anggota $\phi(b)$, khususnya di luar U . Kontradiksi.

Pemeriksaan U.58 Filter ekor suatu jaring. Untuk jaring $(x_a)_{a \in A}$, misalkan $T_a = \{x_b : b \geq a\}$. Buktikan bahwa keluarga semua himpunan yang memuat suatu T_a merupakan filter, dan bahwa filter itu konvergen ke x tepat ketika jaringnya konvergen ke x .

Petunjuk. Gunakan keterarahan untuk menempatkan satu ekor di dalam irisan dua ekor.

Jawaban. Keanggotaan lingkungan dalam filter ekor tepat berarti jaring akhirnya berada di dalamnya.

Solusi. Tidak ada ekor yang kosong, sehingga filter tidak memuat $\emptyset$. Keluarga jelas tertutup ke atas. Jika himpunan E memuat T_a dan F memuat T_b , pilih $c \geq a, b$; maka $T_c \subseteq T_a \cap T_b \subseteq E \cap F$, jadi irisan berada dalam filter. Terakhir, lingkungan U dari x berada dalam filter tepat ketika suatu ekor $T_a \subseteq U$, yakni tepat ketika jaring akhirnya berada dalam U . Karena itu konvergensi filter dan jaring ekuivalen.

Hasil Kali Sebarang dan Topologi Kotak

Bab hasil kali pada teks utama membangun hasil kali berhingga. Modul ini memperluas konstruksi itu ke keluarga sebarang, menjelaskan sifat universal yang menentukan topologi hasil kali, membedakannya dari topologi kotak, dan menyatakan Teorema Tychonoff dengan hipotesis serta ketergantungan logisnya secara tepat.

Topologi hasil kali dan sifat universal

Definisi U.59 Misalkan $\{X_i : i \in I\}$ keluarga ruang topologi dan $X = \prod_{i \in I} X_i$. Untuk setiap i , proyeksi koordinat ditulis $\pi_i : X \rightarrow X_i$. **Topologi hasil kali** pada X adalah topologi yang dibangun oleh subbasis $\{\pi_i^{-1}(U) : i \in I, U \subseteq X_i \text{ terbuka}\}$.

Proposisi U.60 *Basis topologi hasil kali terdiri atas semua himpunan $\prod_{i \in I} U_i$ dengan setiap U_i terbuka dalam X_i dan $U_i = X_i$ kecuali untuk berhingga banyak indeks.*

Bukti. Irisan berhingga unsur subbasis mempunyai bentuk tersebut: untuk koordinat yang muncul, irisankan himpunan buka terkait; untuk koordinat lain gunakan seluruh faktor. Sebaliknya, setiap kotak yang hanya membatasi berhingga banyak koordinat adalah irisan berhingga prapeta proyeksi, sehingga terbuka. ■

Teorema U.61 *Untuk ruang topologi Y dan pemetaan $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, pemetaan f kontinu jika dan hanya jika setiap pemetaan koordinat $\pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ kontinu.*

Bukti. Jika f kontinu, setiap komposisi dengan proyeksi kontinu juga kontinu. Sebaliknya, andaikan semua komponen kontinu. Prapeta unsur subbasis memenuhi $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U)$, yang terbuka. Karena prapeta mempertahankan gabungan dan irisan berhingga, prapeta setiap himpunan buka hasil kali terbuka; maka f kontinu. ■

Proposisi U.62 *Setiap proyeksi π_i kontinu dan terbuka. Jika semua faktor selain X_i tak kosong, proyeksi itu juga surjektif.*

Bukti. Kekontinuan berasal langsung dari definisi subbasis. Citra suatu kotak basis di bawah π_i adalah U_i , sehingga terbuka; karena setiap himpunan buka merupakan gabungan kotak basis, proyeksi terbuka. Surjektivitas diperoleh dengan menetapkan satu titik pada setiap koordinat lain. ■

Topologi kotak dan divergensi tak hingga

Definisi U.63 Topologi kotak pada $\prod_{i \in I} X_i$ mempunyai basis semua kotak $\prod_{i \in I} U_i$ dengan setiap U_i terbuka, tanpa syarat bahwa hanya berhingga banyak koordinat yang dibatasi. Topologi kotak selalu paling tidak sehalus topologi hasil kali, dan keduanya sama bila I berhingga.

Contoh U.64 Dalam $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, kotak $U = \prod_{n \geq 1} (-1/n, 1/n)$ terbuka dalam topologi kotak tetapi tidak dalam topologi hasil kali. Setiap lingkungan hasil kali dari titik nol hanya membatasi berhingga banyak koordinat. Pilih koordinat k yang tidak dibatasi dan ubah koordinat itu menjadi 1; titik yang diperoleh tetap dalam lingkungan hasil kali tersebut, tetapi berada di luar U . □

Contoh U.65 Misalkan $e_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bernilai 1 pada koordinat n dan 0 pada koordinat lain. Untuk setiap koordinat tetap k , koordinat ke- k dari e_n akhirnya nol; jadi $e_n \rightarrow 0$ dalam topologi hasil kali. Dalam topologi kotak, lingkungan $\prod_{k \geq 1} (-1/2, 1/2)$ dari nol tidak memuat satu pun e_n , sehingga barisan tidak konvergen. □

Contoh U.66 Pemetaan diagonal $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Delta(t) = (t, t, \dots)$, mempunyai semua komponen koordinat kontinu. Namun sebagai pemetaan ke topologi kotak, ia tidak kontinu: prapeta $\prod_{n \geq 1} (-1/n, 1/n)$ adalah $\{0\}$. Jadi sifat universal komponen-koordinat mencirikan topologi hasil kali, bukan topologi kotak. □

Sifat yang dipertahankan oleh hasil kali

Teorema U.67 *Hasil kali sebarang ruang T_0 , ruang T_1 , atau ruang Hausdorff berturut-turut tetap T_0 , T_1 , atau Hausdorff. Sebaliknya, bila semua faktor lain tak kosong, setiap faktor mewarisi sifat tersebut dari hasil kalinya.*

Bukti. Dua titik hasil kali yang berbeda mempunyai koordinat berbeda i . Himpunan buka pembeda atau pasangan lingkungan buka saling lepas pada X_i dapat ditarik kembali melalui π_i . Untuk arah sebaliknya, tetapkan titik dasar pada semua koordinat lain dan identifikasikan X_i dengan subruang irisan yang diperoleh; sifat T_0 , T_1 , dan Hausdorff bersifat hereditier. ■

Teorema U.68 Hasil kali sebarang keluarga ruang terhubung yang tak kosong adalah terhubung.

Bukti. Pilih titik dasar $p = (p_i)$. Untuk setiap himpunan berhingga $F \subseteq I$, biarkan Y_F terdiri atas titik-titik yang dapat berbeda dari p hanya pada koordinat dalam F . Ruang Y_F homeomorfik dengan hasil kali berhingga ruang terhubung, maka terhubung; semua Y_F memuat p . Jadi $Y = \bigcup_F Y_F$ terhubung. Setiap kotak basis hasil kali hanya membatasi berhingga banyak koordinat dan karena itu memotong Y ; maka Y padat. Penutup ruang terhubung terhubung, sehingga seluruh hasil kali terhubung. ■

Proposisi U.69 Hasil kali terhitung ruang terhitung pertama juga terhitung pertama. Hasil kali terhitung ruang terhitung kedua juga terhitung kedua.

Bukti. Untuk basis lokal di titik $x = (x_n)$, batasi hanya koordinat $1, \dots, k$ dan pilih satu unsur dari basis lokal terhitung pada masing-masing koordinat. Gabungan atas semua k dan semua pilihan berhingga tetap terhitung dan merupakan basis lokal. Dengan cara yang sama, semua kotak basis yang membatasi berhingga banyak koordinat dengan unsur basis terhitung dari faktor membentuk basis terhitung bagi hasil kali. ■

Teorema Tychonoff dengan ruang lingkup yang tepat

Teorema U.70 Teorema Tychonoff. Hasil kali sebarang keluarga ruang kompak adalah kompak dalam topologi hasil kali.

Bukti. Gunakan karakterisasi ultrafilter dari kekompakan. Misalkan $\mathcal{F}$ ultrafilter pada $X = \prod_{i \in I} X_i$. Untuk setiap i , citra ultrafilter melalui π_i merupakan ultrafilter pada X_i . Karena X_i kompak, ultrafilter citra konvergen ke suatu $x_i \in X_i$. Pilih $x = (x_i)_{i \in I}$.

Suatu lingkungan basis U dari x hanya membatasi koordinat dalam himpunan berhingga F . Untuk setiap $i \in F$, kekonvergenan ultrafilter citra mengatakan bahwa $\pi_i^{-1}(U_i)$ berada dalam $\mathcal{F}$. Ketertutupan filter terhadap irisan berhingga memberi $U = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$. Jadi $\mathcal{F} \rightarrow x$, dan X kompak. ■

Catatan U.71 Pernyataan ini berlaku untuk topologi hasil kali, bukan topologi kotak. Untuk keluarga berhingga, pembuktian selimut buka dapat dilakukan tanpa prinsip pilihan. Bentuk sebarang di atas memakai Prinsip Ultrafilter; dalam teori himpunan ZF, Teorema Tychonoff untuk semua ruang kompak ekuivalen dengan Aksioma Pilihan. Pilihan titik limit x_i dan keberadaan ultrafilter yang diperlukan tidak disembunyikan sebagai langkah elementer.

Proposisi U.72 Jika hasil kali tak kosong $\prod_i X_i$ kompak, maka setiap faktor X_i kompak.

Bukti. Proyeksi π_i kontinu dan surjektif. Citra kontinu ruang kompak adalah kompak, sehingga $X_i = \pi_i(\prod_j X_j)$ kompak. ■

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.73 Basis hasil kali sebarang. Buktikan bahwa irisan berhingga unsur subbasis $\pi_i^{-1}(U)$ tepat menghasilkan kotak yang membatasi hanya berhingga banyak koordinat.

Petunjuk. Kelompokkan semua syarat yang menggunakan koordinat sama.

Jawaban. Pada koordinat yang muncul, gunakan irisan himpunan buka; pada koordinat lain gunakan seluruh faktor.

Solusi. Ambil irisan $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$. Untuk setiap i yang muncul, tetapkan V_i sebagai irisan semua U_k

dengan $i_k = i$; untuk indeks lain tetapkan $V_i = X_i$. Maka irisan tersebut sama dengan $\prod_i V_i$, dan hanya berhingga banyak V_i yang mungkin bukan seluruh faktor. Sebaliknya, setiap kotak semacam itu adalah irisan prapeta untuk koordinat yang dibatasi.

Pemeriksaan U.74 Topologi kotak lebih halus secara ketat. Dalam $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, buktikan bahwa $\prod_{n \geq 1} (-1/n, 1/n)$ bukan himpunan buka hasil kali.

Petunjuk. Setiap lingkungan basis hasil kali dari nol membiarkan suatu koordinat tanpa batasan.

Jawaban. Ubah satu koordinat tak terbatas menjadi 1.

Solusi. Andaikan kotak tersebut terbuka dalam topologi hasil kali. Maka ia memuat lingkungan basis $B = \prod_n B_n$ dari nol yang hanya membatasi koordinat dalam suatu himpunan berhingga F . Pilih $k \notin F$. Titik yang bernilai 1 pada koordinat k dan nol pada koordinat lain berada dalam B , tetapi tidak berada dalam kotak karena $1 \notin (-1/k, 1/k)$. Kontradiksi.

Pemeriksaan U.75 Sifat universal topologi hasil kali. Buktikan bahwa $f : Y \rightarrow \prod_i X_i$ kontinu tepat ketika semua komponen $f_i = \pi_i \circ f$ kontinu.

Petunjuk. Uji prapeta pada subbasis topologi hasil kali.

Jawaban. $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(U)$.

Solusi. Jika f kontinu, komposisinya dengan setiap proyeksi kontinu. Sebaliknya, jika semua f_i kontinu, prapeta setiap unsur subbasis $\pi_i^{-1}(U)$ adalah himpunan buka $f_i^{-1}(U)$. Karena topologi hasil kali dibangun oleh subbasis ini dan prapeta mempertahankan operasi pembentuk topologi, f kontinu.

Pemeriksaan U.76 Hasil kali ruang Hausdorff. Buktikan bahwa hasil kali sebarang ruang Hausdorff adalah Hausdorff.

Petunjuk. Dua titik berbeda harus berbeda pada sedikitnya satu koordinat.

Jawaban. Tarik kembali dua lingkungan buka saling lepas dari faktor pembeda.

Solusi. Misalkan $x \neq y$ dalam hasil kali. Pilih i dengan $x_i \neq y_i$. Karena X_i Hausdorff, ada himpunan buka saling lepas $U, V \subseteq X_i$ dengan $x_i \in U$ dan $y_i \in V$. Prapeta $\pi_i^{-1}(U)$ dan $\pi_i^{-1}(V)$ terbuka, saling lepas, dan masing-masing memuat x serta y . Jadi hasil kali Hausdorff.

Pemeriksaan U.77 Teorema Tychonoff melalui ultrafilter. Lengkapi pembuktian Teorema Tychonoff: jika setiap ultrafilter citra $\pi_i(\mathcal{F})$ konvergen ke x_i , buktikan bahwa $\mathcal{F}$ konvergen ke $x = (x_i)$ dalam topologi hasil kali.

Petunjuk. Setiap lingkungan basis hanya memberi syarat pada berhingga banyak koordinat.

Jawaban. Irisankan berhingga banyak prapeta lingkungan koordinat yang berada dalam filter.

Solusi. Ambil lingkungan basis $U = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(U_i)$ dari x , dengan F berhingga dan U_i lingkungan x_i . Karena ultrafilter citra konvergen ke x_i , himpunan $\pi_i^{-1}(U_i)$ berada dalam $\mathcal{F}$ untuk setiap $i \in F$. Keterutupan filter terhadap irisan berhingga memberi $U \in \mathcal{F}$. Setiap lingkungan x memuat lingkungan basis semacam itu dan karena filter tertutup ke atas, setiap lingkungan x berada dalam $\mathcal{F}$. Jadi $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Pemeriksaan U.78 Kekonvergenan koordinat dan kegagalan topologi kotak. Buktikan bahwa jaring dalam topologi hasil kali konvergen tepat ketika setiap jaring koordinat konvergen. Tunjukkan bahwa pernyataan ini gagal untuk topologi kotak dengan barisan (e_n) .

Petunjuk. Gunakan sifat universal untuk arah mudah dan jumlah berhingga koordinat yang dibatasi untuk arah lain.

Jawaban. Dalam topologi hasil kali, ambil maksimum berhingga indeks awal. Dalam topologi kotak, e_n dihalangi satu lingkungan seragam.

Solusi. Jika $x_a \rightarrow x$, kekontinuan proyeksi memberi $\pi_i(x_a) \rightarrow x_i$. Sebaliknya, ambil lingkungan basis U dari x yang membatasi koordinat $i_1, \dots, i_n$. Untuk setiap koordinat ada indeks awal setelah mana komponen berada dalam U_{i_k} . Keterarahan memberi satu indeks yang mendominasi semuanya, setelah mana $x_a \in U$.

Jadi jaring hasil kali konvergen. Untuk topologi kotak, setiap koordinat tetap dari e_n akhirnya nol, tetapi lingkungan $\prod_k (-1/2, 1/2)$ tidak memuat satu pun e_n ; maka konvergensi koordinat tidak cukup.

Kekompakan Lokal dan Kompaktifikasi Satu Titik

Kekompakan global sering terlalu kuat untuk ruang seperti $\mathbb{R}^n$, tetapi banyak argumen hanya memerlukan lingkungan kompak di sekitar setiap titik. Kekompakan lokal menangkap keadaan itu. Pada ruang Hausdorff tak kompak, semua arah menuju tak hingga kemudian dapat disatukan menjadi satu titik melalui kompaktifikasi satu titik.

Lingkungan kompak dan penyusutan lokal

Definisi U.79 Subhimpunan $K \subseteq X$ disebut **lingkungan kompak** dari x jika K kompak dan memuat suatu himpunan buka yang mengandung x . Ruang X disebut **kompak lokal** jika setiap titik mempunyai lingkungan kompak.

Teorema U.80 *Jika X kompak lokal dan Hausdorff, maka untuk setiap titik x dan lingkungan buka O dari x , terdapat himpunan buka V dengan $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq O$ dan $\bar{V}$ kompak. Khususnya, setiap ruang kompak lokal Hausdorff bersifat reguler.*

Bukti. Pilih lingkungan kompak K dari x dan himpunan buka U dengan $x \in U \subseteq K$. Dalam ruang Hausdorff, K tertutup dan, sebagai ruang kompak Hausdorff, bersifat reguler. Himpunan $U \cap O$ terbuka relatif dalam K dan memuat x . Pilih himpunan buka relatif W dalam K dengan $x \in W \subseteq \bar{W}^K \subseteq U \cap O$. Karena $W \subseteq U$ dan U terbuka dalam X , W dapat ditulis sebagai himpunan buka V dalam X . Penutupnya dalam X sama dengan penutupnya dalam subruang tertutup K , sehingga kompak dan termuat dalam O . ■

Contoh U.81 Ruang $\mathbb{R}^n$ kompak lokal: bola buka $B_1(x)$ termuat dalam bola tertutup $\bar{B}_1(x)$, yang kompak menurut Teorema Heine–Borel. Ruang itu tidak kompak bila $n \geq 1$. □

Pewarisan dan hasil kali

Teorema U.82 *Subruang tertutup dari ruang kompak lokal bersifat kompak lokal. Subruang terbuka dari ruang kompak lokal Hausdorff juga kompak lokal dan Hausdorff.*

Bukti. Misalkan F tertutup dalam X dan $x \in F$. Jika K lingkungan kompak x dalam X , maka $K \cap F$ kompak dan memuat lingkungan relatif dari x ; jadi F kompak lokal.

Misalkan U terbuka dalam ruang kompak lokal Hausdorff dan $x \in U$. Teorema penyusutan memberi himpunan buka V dengan $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ dan $\bar{V}$ kompak. Maka $\bar{V}$ adalah lingkungan kompak x di dalam subruang U . Sifat Hausdorff bersifat hereditas. ■

Teorema U.83 *Misalkan semua X_i tak kosong dan Hausdorff. Hasil kali $\prod_{i \in I} X_i$ kompak lokal jika dan hanya jika setiap X_i kompak lokal dan semua kecuali berhingga banyak faktor X_i kompak.*

Bukti. Untuk arah maju, pilih titik dasar pada semua faktor. Setiap faktor homeomorfik dengan irisan tertutup yang membiarkan satu koordinat berubah, maka merupakan subruang tertutup dari hasil kali kompak lokal dan karena itu kompak lokal. Pilih lingkungan basis hasil kali $B = \prod_i U_i$ yang termuat dalam suatu lingkungan kompak K . Hanya berhingga banyak U_i yang berbeda dari X_i . Untuk indeks lain, proyeksi

K memuat seluruh X_i ; karena proyeksi kontinu dari ruang kompak adalah kompak, X_i kompak.

Untuk arah balik, pisahkan berhingga banyak faktor yang mungkin tidak kompak dari semua faktor kompak. Hasil kali semua faktor kompak adalah kompak menurut Teorema Tychonoff. Hasil kali berhingga ruang kompak lokal Hausdorff bersifat kompak lokal: kalikan lingkungan kompak pada setiap koordinat. Hasil kali ruang kompak lokal dengan ruang kompak kembali kompak lokal, sehingga seluruh hasil kali kompak lokal. ■

Catatan U.84 Kekompakan lokal tidak herediter untuk subruang sebarang. Sebagai contoh, subruang $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tidak kompak lokal: penutup relatif setiap lingkungan rasional memuat barisan Cauchy rasional yang menuju bilangan irasional dan karena itu tidak kompak.

Kompaktifikasi satu titik

Definisi U.85 Misalkan X ruang kompak lokal Hausdorff yang tidak kompak dan pilih titik baru $\infty \notin X$. Pada $\alpha X = X \cup \{\infty\}$, nyatakan semua himpunan buka dalam X tetap terbuka, dan nyatakan himpunan yang memuat ∞ terbuka tepat ketika komplementnya dalam X kompak. Ruang αX disebut **kompaktifikasi satu titik** atau **kompaktifikasi Alexandroff** dari X .

Teorema U.86 Ruang αX adalah ruang kompak Hausdorff, dan X merupakan subruang terbuka padat di dalamnya.

Bukti. Keluarga yang dinyatakan terbuka membentuk topologi: irisan berhingga lingkungan ∞ berkomplemen gabungan berhingga himpunan kompak, sedangkan gabungan sebarang lingkungan ∞ berkomplemen irisan tertutup dari salah satu komplement kompak dan karena itu kompak. Topologi terinduksi pada X adalah topologi semula dan X terbuka.

Untuk selimut buka αX , pilih anggota U_∞ yang memuat ∞ . Komplemen $K = \alpha X \setminus U_\infty$ kompak dalam X , sehingga dapat ditutupi oleh berhingga banyak anggota selimut. Bersama U_∞ , ini memberi subselimut berhingga.

Dua titik dalam X dipisahkan oleh sifat Hausdorff X . Untuk $x \in X$ dan ∞ , gunakan teorema penyusutan untuk memilih himpunan buka V dengan $x \in V$ dan $\bar{V}$ kompak. Himpunan V dan $\alpha X \setminus \bar{V}$ merupakan lingkungan buka saling lepas dari x dan ∞ . Jadi αX Hausdorff. Terakhir, setiap lingkungan ∞ memotong X karena jika tidak, komplementnya adalah seluruh X , yang tidak kompak. Maka X padat. ■

Teorema U.87 Jika Y kompak Hausdorff, X subruang terbuka padat dari Y , dan $Y \setminus X$ terdiri atas satu titik, maka terdapat homeomorfisme $\alpha X \rightarrow Y$ yang membatasi pada identitas X .

Bukti. Kirim titik ∞ ke satu-satunya titik $Y \setminus X$ dan tetapkan identitas pada X . Pemetaan ini bijektif. Jika U lingkungan titik tambahan di Y , komplementnya tertutup dalam ruang kompak, maka kompak dan termuat dalam X ; prapeta U karena itu terbuka dalam αX . Kekontinuan pada titik-titik X jelas. Bijeksi kontinu dari ruang kompak ke ruang Hausdorff adalah homeomorfisme. ■

Contoh U.88 Kompaktifikasi satu titik $\mathbb{R}^n$ homeomorfik dengan bola n -dimensi S^n ; titik tambahan adalah kutub yang hilang pada proyeksi stereografik. Kompaktifikasi satu titik ruang diskret $\mathbb{N}$ homeomorfik dengan $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$, dengan ∞ dipetakan ke 0. □

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.89 Ruang Euklides kompak lokal. Buktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ kompak lokal tetapi tidak kompak untuk $n \geq 1$.

Petunjuk. Gunakan bola tertutup untuk sifat lokal dan selimut bola berpusat di asal untuk nonkekomp-

pakan.

Jawaban. Bola tertutup kompak menurut Heine–Borel; selimut $\{B_k(0) : k \geq 1\}$ tidak mempunyai subse-
limut berhingga.

Solusi. Untuk setiap x , bola tertutup $\overline{B_1(x)}$ kompak menurut Heine–Borel dan memuat lingkungan buka $B_1(x)$, jadi merupakan lingkungan kompak. Di sisi lain, $\{B_k(0) : k \in \mathbb{Z}^+\}$ menyelimuti $\mathbb{R}^n$. Gabungan berhingga keluarga bersarang ini sama dengan bola terbesar dan tidak menutupi seluruh ruang. Maka $\mathbb{R}^n$ tidak kompak.

Pemeriksaan U.90 Subruang terbuka dan tertutup. Buktikan bahwa subruang tertutup dari ruang kompak lokal tetap kompak lokal, dan bahwa subruang terbuka dari ruang kompak lokal Hausdorff tetap kompak lokal.

Petunjuk. Irisankan lingkungan kompak dengan subruang tertutup; untuk subruang terbuka, susutkan lingkungan agar penutupnya tetap di dalam subruang.

Jawaban. Gunakan $K \cap F$ pada kasus tertutup dan $\overline{V} \subseteq U$ pada kasus terbuka.

Solusi. Jika F tertutup dan K lingkungan kompak $x \in F$, maka $K \cap F$ tertutup dalam K , sehingga kompak, dan memuat lingkungan relatif F dari x . Jika U terbuka dan $x \in U$, teorema penyusutan pada ruang Hausdorff memberi V terbuka dengan $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ dan $\overline{V}$ kompak. Penutup itu menjadi lingkungan kompak x dalam U .

Pemeriksaan U.91 Topologi kompaktifikasi satu titik. Verifikasi langsung bahwa keluarga himpunan buka pada αX dalam definisi kompaktifikasi satu titik benar-benar merupakan topologi.

Petunjuk. Terjemahkan gabungan dan irisan himpunan yang memuat ∞ menjadi irisan dan gabungan komplemen kompak.

Jawaban. Gunakan kestabilan kekompakan terhadap gabungan berhingga dan terhadap subhimpunan tertutup.

Solusi. Himpunan kosong dan seluruh αX memenuhi definisi. Irisan berhingga himpunan yang memuat ∞ mempunyai komplemen berupa gabungan berhingga himpunan kompak, maka kompak. Untuk gabungan sebarang yang memuat ∞ , pilih satu anggota U_0 yang memuat titik itu. Komplemen gabungan adalah irisan semua komplemen dan merupakan subhimpunan tertutup dari komplemen kompak $\alpha X \setminus U_0$; jadi kompak. Operasi yang hanya melibatkan himpunan buka dalam X mengikuti topologi X , dan kasus campuran mengikuti dua argumen yang sama.

Pemeriksaan U.92 Kompaktifikasi satu titik ruang diskret terhitung. Tunjukkan bahwa kompaktifikasi satu titik $\mathbb{N}$ diskret homeomorfik dengan $A = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$ dalam $\mathbb{R}$.

Petunjuk. Kirim n ke $1/n$ dan ∞ ke 0.

Jawaban. Lingkungan 0 di A memuat semua kecuali berhingga banyak titik $1/n$.

Solusi. Pemetaan yang diberikan bijektif. Setiap $1/n$ terisolasi dalam A , sesuai dengan keterbukaan titik n . Suatu lingkungan relatif dari 0 memuat $A \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ dan karena itu semua kecuali berhingga banyak $1/n$. Sebaliknya, setiap himpunan yang memuat 0 dan semua kecuali berhingga banyak $1/n$ memuat lingkungan relatif 0. Ini tepat bersesuaian dengan lingkungan ∞ yang berkomplemen kompak; pada ruang diskret, subhimpunan kompak tepat subhimpunan berhingga. Jadi bijeksi tersebut homeomorfisme.

Pemeriksaan U.93 Keunikan kompaktifikasi satu titik. Misalkan Y kompak Hausdorff, X terbuka padat dalam Y , dan $Y \setminus X = \{p\}$. Buktikan bahwa perluasan identitas yang mengirim ∞ ke p adalah homeomorfisme $\alpha X \rightarrow Y$.

Petunjuk. Komplemen lingkungan p tertutup dalam ruang kompak dan termuat dalam X .

Jawaban. Perluasan itu bijektif kontinu; gunakan teorema bijeksi kompak-ke-Hausdorff.

Solusi. Pemetaan perluasan jelas bijektif dan kontinu pada X . Jika U lingkungan buka p , komplemen $Y \setminus U$ tertutup dalam ruang kompak, sehingga kompak; karena tidak memuat p , komplemen itu termuat

dalam X . Prapeta U karena itu merupakan lingkungan ∞ dalam αX . Jadi pemetaan kontinu di semua titik. Domainnya kompak dan kodomainnya Hausdorff, maka bijeksi kontinu itu homeomorfisme.

Pemeriksaan U.94 Pemetaan proper dan titik di tak hingga. Misalkan X, Y ruang kompak lokal Hausdorff tak kompak dan $f : X \rightarrow Y$ kontinu. Buktikan bahwa rumus $\bar{f}(\infty_X) = \infty_Y$ memperluas f menjadi pemetaan kontinu $\alpha X \rightarrow \alpha Y$ jika dan hanya jika f **proper**, yakni prapeta setiap subhimpunan kompak Y kompak dalam X .

Petunjuk. Uji kekontinuan di titik tambahan pada lingkungan yang berkomplemen kompak.

Jawaban. Prapeta $\alpha Y \setminus K$ adalah $\alpha X \setminus f^{-1}(K)$.

Solusi. Jika f proper dan $K \subseteq Y$ kompak, maka $f^{-1}(K)$ kompak. Karena itu prapeta lingkungan $\alpha Y \setminus K$ dari ∞_Y adalah lingkungan $\alpha X \setminus f^{-1}(K)$ dari ∞_X . Jadi $\bar{f}$ kontinu di titik tambahan dan sudah kontinu pada X .

Sebaliknya, andaikan $\bar{f}$ kontinu dan $K \subseteq Y$ kompak. Dalam ruang Hausdorff αY , himpunan K tertutup. Maka $\bar{f}^{-1}(K)$ tertutup dalam ruang kompak αX , sehingga kompak. Himpunan ini tidak memuat ∞_X dan sama dengan $f^{-1}(K)$, jadi f proper.

Metrisasi: dari Pseudometrik ke Teorema Urysohn

Topologi sering diberikan tanpa rumus jarak. Masalah metrisasi menanyakan kapan himpunan-himpunan buka itu sebenarnya dapat dihasilkan oleh suatu metrik. Modul ini membedakan pseudometrik dari metrik, membuktikan cara keduanya menghasilkan topologi, membangun metrik ekuivalen, dan memberi jalur bukti yang jujur untuk Teorema Metrisasi Urysohn.

Seluruh modul ini merupakan karya pendamping orisinal berlisensi CC BY 4.0. Modul ini bukan teks atau solusi resmi Steven Schlicker maupun Grand Valley State University dan tidak menyatakan atau menyiratkan dukungan mereka. Teks utama edisi tetap diperlakukan secara konservatif sebagai turunan CC BY-NC-SA 3.0. Provenans produksi berbantuan model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Pseudometrik, metrik, dan kuosien nol

Definisi U.95 Sebuah **pseudometrik** pada himpunan X adalah fungsi $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi

$$p(x, x) = 0, \quad p(x, y) = p(y, x), \quad p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z).$$

Sebuah **metrik** adalah pseudometrik yang juga memenuhi $p(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Jadi pseudometrik mengizinkan dua titik berbeda berjarak nol, sedangkan metrik memisahkan titik.

Definisi U.96 Untuk $r > 0$, bola pseudometrik berpusat di x adalah $B_p(x, r) = \{y \in X : p(x, y) < r\}$. Topologi yang diinduksi oleh p terdiri atas semua $U \subseteq X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in U$ ada $r > 0$ dengan $B_p(x, r) \subseteq U$.

Proposisi U.97 Bola-bola pseudometrik membentuk basis topologi pada X .

Bukti. Setiap titik x berada dalam setiap $B_p(x, r)$. Jika $z \in B_p(x, r) \cap B_p(y, s)$, pilih

$$0 < t < \min\{r - p(x, z), s - p(y, z)\}.$$

Untuk $w \in B_p(z, t)$, ketaksamaan segitiga memberi $p(x, w) < r$ dan $p(y, w) < s$. Jadi $B_p(z, t)$ termuat dalam irisan kedua bola, tepat syarat basis. ■

Teorema U.98 Definisikan $x \sim y$ bila $p(x, y) = 0$. Relasi ini adalah relasi ekuivalensi, dan $d([x], [y]) = p(x, y)$ mendefinisikan metrik pada kuosien $X/\sim$. Proyeksi kuosien mengidentifikasi tepat titik-titik yang tidak dapat dibedakan oleh topologi pseudometrik.

Bukti. Refleksivitas dan simetri langsung. Jika $p(x, y) = p(y, z) = 0$, ketaksamaan segitiga memberi $p(x, z) = 0$, jadi relasi transitif. Jika $x \sim x'$ dan $y \sim y'$, maka

$$p(x, y) \leq p(x, x') + p(x', y') + p(y', y) = p(x', y'),$$

dan pertukaran pasangan memberi ketaksamaan sebaliknya. Jadi rumus d tidak bergantung pada wakil. Semua aksioma metrik diwarisi, sedangkan $d([x], [y]) = 0$ tepat ketika $[x] = [y]$.

Bila $p(x, y) = 0$, ketaksamaan segitiga memberi $|p(x, z) - p(y, z)| \leq p(x, y) = 0$. Karena itu x dan y berada dalam bola-bola yang sama dan mempunyai lingkungan buka yang sama. Sebaliknya, jika $p(x, y) > 0$, bola $B_p(x, p(x, y)/2)$ memuat x tetapi tidak y . ■

Contoh U.99 Pada himpunan dengan sedikitnya dua titik, fungsi $p(x, y) = 0$ untuk semua x, y adalah pseudometrik dan menginduksi topologi indisret. Ia bukan metrik. Kuosien nolnya terdiri atas satu titik. □

Informasi topologis yang dipaksa oleh metrik

Teorema U.100 Setiap ruang metrik bersifat T_1 , Hausdorff, reguler, dan terhitung pertama. Pada setiap titik x , keluarga $\{B_d(x, 1/n) : n \geq 1\}$ adalah basis lingkungan terhitung.

Bukti. Jika $x \neq y$, ambil $r = d(x, y)/3$. Bola $B_d(x, r)$ dan $B_d(y, r)$ saling lepas, sehingga ruang Hausdorff dan karenanya T_1 . Jika F tertutup dan $x \notin F$, komplemen $X \setminus F$ terbuka, jadi ada $r > 0$ dengan $B_d(x, r) \cap F = \emptyset$. Bola $B_d(x, r/3)$ dan gabungan $\bigcup_{y \in F} B_d(y, r/3)$ memisahkan x dan F ; maka ruang reguler.

Untuk setiap lingkungan U dari x , pilih $r > 0$ dengan $B_d(x, r) \subseteq U$, lalu pilih n dengan $1/n < r$. Ini membuktikan sifat terhitung pertama. ■

Catatan U.101 Ruang metrik tidak harus terhitung kedua. Himpunan tak terhitung dengan metrik diskret adalah ruang metrik, tetapi setiap basis harus memuat semua singleton dan karena itu tak terhitung. Jadi keterhitungan kedua dalam Teorema Urysohn adalah hipotesis cukup yang kuat, bukan syarat perlu bagi setiap ruang yang dapat dimetrisasi.

Proposisi U.102 Untuk ruang metrik (X, d) dan (Y, ρ) , fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu di x secara topologis jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $d(x, y) < \delta$ mengakibatkan $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Bukti. Kekontinuan topologis diterapkan pada bola $B_\rho(f(x), \varepsilon)$ menghasilkan bola domain yang termuat dalam prapetanya. Sebaliknya, syarat epsilon-delta membuat prapeta setiap bola kodomain menjadi lingkungan setiap titiknya, sehingga prapeta setiap himpunan buka adalah buka. ■

Metrik ekuivalen dan gabungan pseudometrik

Definisi U.103 Dua metrik pada himpunan yang sama disebut **ekuivalen secara topologis** jika keduanya menginduksi topologi yang sama. Ini lebih lemah daripada ekuivalensi seragam: topologi yang sama tidak harus memberi barisan Cauchy yang sama.

Teorema U.104 Jika d metrik, maka $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ dan $d_2(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$ adalah metrik terbatas yang menginduksi topologi yang sama dengan d . Untuk $0 < \alpha \leq 1$, metrik d^α juga ekuivalen dengan d .

Bukti. Fungsi $t \mapsto \min\{1, t\}$, $t \mapsto t/(1+t)$, dan $t \mapsto t^\alpha$ meningkat, bernilai nol tepat di nol, dan bersifat subaditif pada $[0, \infty)$; jadi komposisinya dengan d memenuhi ketaksamaan segitiga. Untuk radius kecil, bola-bolanya diperoleh dari bola d dengan perubahan radius monoton. Misalnya, untuk $0 < r < 1$,

$$B_{d_2}(x, r) = B_d\left(x, \frac{r}{1-r}\right),$$

sedangkan $B_{d^\alpha}(x, r) = B_d(x, r^{1/\alpha})$. Maka basis lingkungannya sama. ■

Contoh U.105 Pada $\mathbb{R}$, metrik biasa $d(x, y) = |x - y|$ dan $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ menginduksi topologi yang sama, karena $\arctan$ adalah homeomorfisme ke $(-\pi/2, \pi/2)$. Namun barisan $x_n = n$ bukan Cauchy untuk d , sementara $\arctan n$ konvergen dan karena itu (x_n) Cauchy untuk ρ . Jadi kedua metrik tidak ekuivalen secara seragam. □

Teorema U.106 Misalkan $p_1, p_2, \dots$ keluarga terhitung pseudometrik pada X . Rumus

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, p_n(x, y)\}$$

mendefinisikan pseudometrik. Ia merupakan metrik tepat ketika keluarga itu memisahkan titik: untuk $x \neq y$ ada n dengan $p_n(x, y) > 0$. Topologi d sama dengan topologi awal yang dibangkitkan bersama oleh semua bola p_n .

Bukti. Deret konvergen mutlak dan seragam karena suku ke- n paling besar 2^{-n} . Setiap suku adalah pseudometrik setelah pemotongan, sehingga penjumlahan mempertahankan simetri dan ketaksamaan segitiga. Nilai $d(x, y)$ nol tepat ketika semua $p_n(x, y)$ nol, yang membuktikan kriteria pemisahan titik.

Setiap syarat $p_n(x, y) < \varepsilon \leq 1$ dipaksa oleh $d(x, y) < 2^{-n}\varepsilon$, jadi semua bola koordinat terbuka dalam topologi d . Sebaliknya, untuk bola d berjari-jari ε , pilih N sehingga $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Pilih batas positif pada $p_1, \dots, p_N$ yang membuat jumlah bagian awal kurang dari $\varepsilon/2$. Irisan berhingga bola-bola koordinat tersebut termuat dalam bola d . Jadi kedua topologi sama. ■

Teorema Metrisasi Urysohn

Definisi U.107 Dalam modul ini, **reguler** berarti: jika F tertutup dan $x \notin F$, maka x dan F mempunyai lingkungan buka saling lepas. Syarat T_1 dinyatakan terpisah; ia tidak disisipkan ke dalam istilah “reguler”.

Lema U.108 Setiap ruang reguler dan terhitung kedua adalah normal.

Bukti. Misalkan A, B tertutup dan saling lepas, dan $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ basis terhitung. Regularitas membuat anggota-anggota basis U_n dengan $\overline{U_n} \cap B = \emptyset$ menutupi A . Demikian pula, anggota basis V_n dengan $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ menutupi B . Pengulangan anggota bila perlu membuat kedua daftar terindeks oleh bilangan positif.

Definisikan

$$U = \bigcup_{n \geq 1} \left(U_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{V_k} \right), \quad V = \bigcup_{n \geq 1} \left(V_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{U_k} \right).$$

Keduanya terbuka, $A \subseteq U$, dan $B \subseteq V$. Jika suatu titik berada dalam suku ke- n dari U dan suku ke- m dari V , maka $m \leq n$ membuatnya dikeluarkan oleh $\overline{V_m}$, sedangkan $n \leq m$ membuatnya dikeluarkan oleh $\overline{U_n}$. Keduanya mustahil, jadi $U \cap V = \emptyset$. Maka X normal. ■

Lema U.109 Lema Urysohn. Dalam ruang normal T_1 , untuk dua himpunan tertutup saling lepas A, B terdapat fungsi kontinu $f : X \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(A) = \{0\}$ dan $f(B) = \{1\}$.

Bukti. Normalitas memberi operasi penyusutan: jika $F \subseteq G$, dengan F tertutup dan G terbuka, ada U terbuka sehingga $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$. Terapkan operasi ini secara rekursif pada bilangan dyadik $r \in [0, 1]$ untuk membangun himpunan buka U_r dengan $A \subseteq U_0$, $\overline{U_r} \subseteq U_s$ bila $r < s$, dan $\overline{U_r} \cap B = \emptyset$ untuk $r < 1$.

Tetapkan $f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}$, dengan nilai 1 bila himpunan indeks kosong. Hubungan penutupan bersarang menunjukkan $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r < a} U_r$ dan bahwa $f^{-1}((a, 1])$ juga buka melalui komplemen penutupan yang sesuai. Prapeta subbasis interval di $[0, 1]$ karena itu buka, sehingga f kontinu. Konstruksi memberi nilai nol pada A dan satu pada B . ■

Teorema U.110 Teorema Metrisasi Urysohn. *Setiap ruang T_1 yang reguler dan terhitung kedua dapat dimetrisasi.*

Bukti. Ambil basis terhitung $\mathcal{B}$. Pertimbangkan semua pasangan $(U, V) \in \mathcal{B}^2$ dengan $\overline{U} \subseteq V$. Keluarga pasangan ini terhitung. Lemma sebelumnya membuat X normal. Untuk setiap pasangan, Lema Urysohn diterapkan pada himpunan tertutup $\overline{U}$ dan $X \setminus V$, menghasilkan fungsi kontinu $f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]$ yang bernilai nol pada $\overline{U}$ dan satu di luar V . Daftarkan fungsi-fungsi itu sebagai $f_1, f_2, \dots$

Keluarga ini memisahkan titik dan memulihkan topologi. Memang, jika $x \neq y$, sifat T_1 membuat $X \setminus \{y\}$ lingkungan buka dari x . Regularitas dan basis memberi $x \in U$ serta $\overline{U} \subseteq V \subseteq X \setminus \{y\}$. Maka $f_{U,V}(x) = 0$ dan $f_{U,V}(y) = 1$. Lebih umum, jika O buka dan $x \in O$, pilih pasangan basis dengan $x \in U$ dan $\overline{U} \subseteq V \subseteq O$. Himpunan $f_{U,V}^{-1}([0, 1))$ adalah lingkungan buka dari x yang termuat dalam $V \subseteq O$. Jadi topologi semula adalah topologi awal keluarga $\{f_n\}$.

Akhirnya tetapkan

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Teorema jumlah pseudometrik menunjukkan bahwa d adalah pseudometrik yang menginduksi topologi awal keluarga fungsi. Pemisahan titik membuat $d(x, y) > 0$ untuk $x \neq y$. Jadi d adalah metrik yang menginduksi tepat topologi asli. ■

Mengapa hipotesis Urysohn tidak boleh diabaikan

Contoh U.111 Tanpa T_1 : ruang indisret. Ruang indisret dua titik terhitung kedua dan reguler menurut definisi pemisahan titik-dari-himpunan-tertutup yang tidak memasukkan T_1 : tidak ada pasangan titik dan himpunan tertutup taktrivial yang harus dipisahkan. Namun ruang itu bukan T_1 , sedangkan setiap ruang metrik T_1 ; jadi ruang itu tidak dapat dimetrisasi. Ia hanya dapat dipseudometrisasi oleh pseudometrik nol. □

Contoh U.112 Tanpa regularitas: topologi K. Ambil $K = \{1/n : n \geq 1\}$ dan basis pada $\mathbb{R}$ yang terdiri atas interval biasa serta himpunan $(a, b) \setminus K$. Ruang $\mathbb{R}_K$ bersifat Hausdorff, T_1 , dan terhitung kedua, tetapi tidak reguler dan karena itu tidak dapat dimetrisasi.

Himpunan K tertutup dan $0 \notin K$. Setiap lingkungan basis $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K$ dari 0 beririsan dengan setiap himpunan buka yang memuat seluruh K : untuk $1/n < \varepsilon$, lingkungan titik $1/n \in K$ harus memuat interval biasa di sekitarnya, dan interval itu memuat titik bukan- K dekat $1/n$. Jadi 0 dan K tidak dapat dipisahkan oleh lingkungan buka saling lepas. □

Contoh U.113 Tanpa keterhitungan kedua: kubus tak terhitung. Untuk himpunan indeks tak terhitung I , kubus $[0, 1]^I$ dengan topologi hasil kali adalah kompak Hausdorff, sehingga T_1 dan reguler, tetapi tidak dapat dimetrisasi. Di titik nol, setiap lingkungan basis membatasi hanya berhingga banyak koordinat. Jika ada basis lingkungan terhitung $U_1, U_2, \dots$, pilih lingkungan basis $B_n \subseteq U_n$ dan gabungkan semua koordinat yang dibatasi oleh B_n . Gabungan itu terhitung, jadi ada $j \in I$ di luarnya. Lingkungan $W = \{x : x_j < 1/2\}$ dari nol tidak memuat satu pun B_n , kontradiksi. Maka ruang tidak terhitung pertama,

sedangkan setiap ruang metrik terhitung pertama. $\square$

Catatan U.114 Contoh-contoh ini menunjukkan bahwa setelah sebuah hipotesis dibuang, kesimpulan metrisasi tidak lagi dijamin. Mereka tidak menyatakan bahwa setiap hipotesis perlu bagi setiap ruang yang dapat dimetrisasi. Misalnya, ruang diskret tak terhitung dapat dimetrisasi tetapi tidak terhitung kedua.

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.115 Kuosien pseudometrik. Pada $\mathbb{R}^2$, definisikan $p((x, y), (u, v)) = |x - u|$. Tentukan kelas jarak nol, ruang kuosien, dan metrik kuosienya.

Petunjuk. Dua titik berjarak nol tepat ketika koordinat pertamanya sama.

Jawaban. Kelasnya adalah garis vertikal; kuosien berkorespondensi dengan $\mathbb{R}$ dan metriknya adalah jarak biasa.

Solusi. Persamaan $p((x, y), (u, v)) = 0$ setara dengan $x = u$, jadi kelas $[(x, y)]$ adalah $\{x\} \times \mathbb{R}$. Pemetaan kelas itu ke x bijektif dari kuosien ke $\mathbb{R}$. Metrik kuosien memenuhi $d([(x, y)], [(u, v)]) = |x - u|$, sehingga di bawah bijeksi tersebut tepat metrik Euklides pada garis real.

Pemeriksaan U.116 Basis bola dan sifat Hausdorff. Buktikan langsung bahwa bola-bola metrik membentuk basis dan bahwa dua titik berbeda mempunyai bola terbuka saling lepas.

Petunjuk. Untuk titik dalam irisan dua bola, gunakan sisa radius positif. Untuk pemisahan titik, gunakan sepertiga jaraknya.

Jawaban. Ketaksamaan segitiga memberi pemurnian irisan dan membuat bola berjari-jari $d(x, y)/3$ saling lepas.

Solusi. Jika $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$, pilih t lebih kecil dari $r - d(x, z)$ dan $s - d(y, z)$. Untuk $w \in B(z, t)$, ketaksamaan segitiga menempatkan w dalam kedua bola, sehingga syarat basis terpenuhi. Jika $x \neq y$, tetapkan $r = d(x, y)/3$. Jika suatu z berada dalam kedua bola $B(x, r)$ dan $B(y, r)$, maka $d(x, y) < 2r = 2d(x, y)/3$, kontradiksi. Jadi ruang Hausdorff.

Pemeriksaan U.117 Metrik terbatas yang ekuivalen. Untuk metrik d , buktikan bahwa $\rho = d/(1 + d)$ adalah metrik dan mempunyai himpunan buka yang sama dengan d .

Petunjuk. Fungsi $h(t) = t/(1 + t)$ meningkat dan subaditif; untuk $0 < r < 1$, selesaikan $h(t) < r$.

Jawaban. $B_\rho(x, r) = B_d(x, r/(1 - r))$ untuk $r < 1$, sehingga kedua basis lokal sama.

Solusi. Simetri dan pemisahan titik langsung. Untuk $a, b \geq 0$, perhitungan silang menunjukkan $h(a + b) \leq h(a) + h(b)$; bersama ketaksamaan segitiga d , ini memberi ketaksamaan segitiga bagi ρ . Karena h meningkat dan inversnya pada $[0, 1)$ adalah $h^{-1}(r) = r/(1 - r)$, identitas bola dalam jawaban berlaku. Bola dengan radius kurang dari satu sudah membentuk basis, jadi topologinya sama.

Pemeriksaan U.118 Menjumlahkan pseudometrik koordinat. Pada $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, ambil $p_n(x, y) = |x_n - y_n|$. Buktikan bahwa $d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} p_n(x, y)$ adalah metrik yang menginduksi topologi hasil kali.

Petunjuk. Koordinat memisahkan titik. Kendalikan berhingga banyak koordinat dan buat ekor deret kecil.

Jawaban. Teorema jumlah pseudometrik berlaku; lingkungan hasil kali hanya membatasi berhingga banyak koordinat, persis mekanisme bagian awal dan ekor deret.

Solusi. Setiap p_n pseudometrik dan keluarga itu memisahkan titik, jadi jumlah berbobot adalah metrik. Bola d yang cukup kecil memaksa koordinat tertentu dekat karena $2^{-n} p_n \leq d$. Sebaliknya, untuk radius ε , pilih N dengan $\sum_{n > N} 2^{-n} < \varepsilon/2$, lalu batasi koordinat pertama sampai ke- N sehingga jumlah awal kurang dari $\varepsilon/2$. Lingkungan silinder hasil kali itu termuat dalam bola d . Maka kedua topologi sama.

Pemeriksaan U.119 Mendiagnosis topologi K. Verifikasi bahwa topologi K pada $\mathbb{R}$ bersifat T_1 dan terhitung kedua tetapi tidak reguler.

Petunjuk. Gunakan basis berujung rasional. Untuk kegagalan regularitas, pisahkan titik 0 dari himpunan tertutup $K = \{1/n\}$.

Jawaban. Topologi lebih halus dari topologi biasa, basis rasionalnya terhitung, dan setiap lingkungan 0 beririsan dengan setiap lingkungan buka K .

Solusi. Karena setiap interval biasa terbuka, topologi K lebih halus dari topologi Hausdorff biasa; maka ia Hausdorff dan T_1 . Interval berujung rasional bersama selisihnya dengan K membentuk basis terhitung. Komplemen K terbuka, jadi K tertutup dan tidak memuat 0. Setiap lingkungan 0 memuat $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K$. Jika V terbuka dan memuat K , untuk $1/n < \varepsilon$ ruang V memuat interval biasa sekitar $1/n$, yang bertemu $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K$. Jadi pemisahan reguler mustahil.

Pemeriksaan U.120 Kubus tak terhitung tidak dapat dimetrisasi. Untuk indeks tak terhitung I , buktikan bahwa $[0, 1]^I$ tidak terhitung pertama di titik nol dan karena itu tidak dapat dimetrisasi.

Petunjuk. Dari keluarga lingkungan terhitung, pilih lingkungan basis di dalam masing-masing. Semua koordinat yang dibatasi tetap hanya terhitung.

Jawaban. Pilih koordinat j yang tidak pernah dibatasi; lingkungan $x_j < 1/2$ tidak memuat satu pun kandidat basis.

Solusi. Andaikan U_n basis lingkungan terhitung di nol. Pilih lingkungan basis hasil kali $B_n \subseteq U_n$; setiap B_n membatasi himpunan koordinat berhingga F_n . Gabungan $F = \bigcup_n F_n$ terhitung. Pilih $j \in I \setminus F$. Himpunan $W = \{x : x_j < 1/2\}$ adalah lingkungan nol. Karena B_n tidak membatasi koordinat j , ia memuat titik dengan $x_j = 1$, jadi $B_n \not\subseteq W$ untuk semua n . Ini bertentangan dengan sifat basis lingkungan. Ruang metrik selalu terhitung pertama, maka kubus itu tidak dapat dimetrisasi.

Pemeriksaan U.121 Merekonstruksi metrik Urysohn. Misalkan X reguler, T_1 , dan mempunyai basis terhitung. Jelaskan secara lengkap bagaimana fungsi-fungsi Urysohn menghasilkan metrik yang menginduksi topologi X .

Petunjuk. Daftarkan pasangan basis $\bar{U} \subseteq V$, pisahkan $\bar{U}$ dari $X \setminus V$, lalu jumlahkan selisih koordinat dengan bobot 2^{-n} .

Jawaban. Fungsi terhitung $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ memisahkan titik dan menghasilkan topologi semula; metriknya $d(x, y) = \sum 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$.

Solusi. Regularitas dan basis terhitung membuat X normal melalui konstruksi diagonal pasangan basis. Untuk setiap pasangan basis $\bar{U} \subseteq V$, Lema Urysohn memberi fungsi kontinu yang nol pada $\bar{U}$ dan satu di luar V . Pasangan-pasangan itu terhitung, jadi fungsi dapat didaftarkan sebagai f_n . Jika $x \neq y$, gunakan T_1 , regularitas, dan basis untuk memilih $x \in U$ serta $\bar{U} \subseteq V \subseteq X \setminus \{y\}$; koordinat terkait membedakan x dan y . Untuk setiap $x \in O$ terbuka, pilih $x \in U$ dan $\bar{U} \subseteq V \subseteq O$; prapeta $[0, 1]$ pada koordinat terkait adalah lingkungan x di dalam O , sehingga fungsi-fungsi memulihkan topologi. Jumlah berbobot adalah metrik karena koordinat memisahkan titik, dan teorema jumlah pseudometrik menunjukkan topologinya tepat topologi awal fungsi-fungsi itu, yaitu topologi asli X .

Pemeriksaan U.122 Ekuivalen topologis tetapi tidak seragam. Pada $\mathbb{R}$, bandingkan $d(x, y) = |x - y|$ dan $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Buktikan bahwa topologinya sama tetapi struktur Cauchy-nya berbeda.

Petunjuk. Gunakan homeomorfisme $\arctan$. Uji barisan $x_n = n$.

Jawaban. Kedua metrik ekuivalen secara topologis, tetapi n Cauchy untuk ρ dan bukan Cauchy untuk d .

Solusi. Pemetaan $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ adalah homeomorfisme. Metrik ρ adalah tarikan balik metrik Euklides melalui homeomorfisme itu, sehingga menghasilkan topologi biasa, sama dengan d . Barisan $\arctan n$ konvergen ke $\pi/2$ dalam $\mathbb{R}$, maka Cauchy; jadi n Cauchy untuk ρ . Namun untuk setiap N , ambil $m = N$ dan $n = 2N$; jarak $d(m, n) = N$, sehingga barisan bukan Cauchy untuk d . Jadi kesamaan topologi tidak menjamin ekuivalensi seragam.

Ruang Fungsi dan Topologinya

Himpunan semua pemetaan kontinu $X \rightarrow Y$ sendiri dapat diperlakukan sebagai ruang topologi. Pilihan topologi pada ruang fungsi menentukan apa arti pemetaan yang dekat, keluarga pemetaan yang kontinu, dan bentuk tepat prinsip bahwa pemetaan dua variabel dapat dipandang sebagai keluarga pemetaan satu variabel. Bagian ini membedakan topologi kekonvergenan titik demi titik, topologi seragam, dan topologi kompak-terbuka, lalu menjelaskan peran kekompakan lokal dalam pemetaan evaluasi dan hukum eksponensial.

Modul orisinal ini berlisensi CC BY 4.0 dan terpisah dari turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif sebagai CC BY-NC-SA 3.0. Modul ini bukan teks atau solusi resmi GVSU serta tidak menyatakan atau menyiratkan dukungan penulis atau institusi sumber. Provenans produksi berbantuan model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Topologi titik demi titik sebagai topologi hasil kali

Definisi U.123 Untuk ruang X dan Y , himpunan semua fungsi $X \rightarrow Y$ diidentifikasi dengan hasil kali $Y^X = \prod_{x \in X} Y$. **Topologi titik demi titik** adalah topologi hasil kali pada Y^X . Jika hanya fungsi kontinu yang dipertimbangkan, tulis $C_p(X, Y)$ untuk $C(X, Y)$ dengan topologi subruang tersebut.

Untuk $x \in X$ dan $U \subseteq Y$ terbuka, tetapkan $[x, U] = \{f : f(x) \in U\}$. Himpunan-himpunan ini merupakan subbasis. Lingkungan dasar suatu fungsi hanya membatasi nilainya pada berhingga banyak titik domain.

Proposisi U.124 Suatu net (f_λ) dalam Y^X konvergen ke f dalam topologi titik demi titik jika dan hanya jika $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ dalam Y untuk setiap $x \in X$. Selain itu, untuk setiap x , pemetaan evaluasi tetap $\text{ev}_x(f) = f(x)$ kontinu.

Bukti. Proyeksi koordinat hasil kali tepat merupakan pemetaan ev_x . Karakterisasi kekonvergenan net dalam hasil kali menyatakan bahwa kekonvergenan terjadi tepat bila semua proyeksi koordinat konvergen. Prapeta himpunan terbuka U di bawah proyeksi itu adalah $[x, U]$, sehingga evaluasi tetap kontinu. ■

Catatan U.125 Kekontinuan setiap evaluasi tetap tidak berarti bahwa evaluasi bersama $\text{ev} : C_p(X, Y) \times X \rightarrow Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$, kontinu. Untuk topologi titik demi titik, lingkungan suatu fungsi tidak mengendalikan nilainya pada seluruh lingkungan titik x . Kegagalan ini menjadi salah satu alasan menggunakan topologi kompak-terbuka.

Topologi seragam

Definisi U.126 Jika (Y, d) ruang metrik, ganti d dengan metrik terbatas ekuivalen $\bar{d}(y, z) = \min\{1, d(y, z)\}$ bila perlu, lalu definisikan

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \bar{d}(f(x), g(x)).$$

Topologi metrik ini pada Y^X , dan topologi subruangnya pada $C(X, Y)$, disebut **topologi seragam**. Kekonvergenan terhadap d_∞ tepat merupakan kekonvergenan seragam.

Catatan U.127 Konstruksi ini tidak bergantung pada rumus metrik tertentu bila kodomain diberi struktur seragam. Untuk entourage V pada Y , lingkungan seragam diagonal pada ruang fungsi terdiri atas pasangan (f, g) dengan $(f(x), g(x)) \in V$ untuk setiap x . Jadi istilah “seragam” memerlukan metrik atau struktur seragam pada kodomain; topologi kodomain saja tidak selalu menentukan pilihan itu.

Proposisi U.128 Topologi seragam lebih halus daripada topologi titik demi titik. Jika $f_\lambda \rightarrow f$ secara seragam, maka $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ untuk setiap x .

Bukti. Untuk setiap x , ketaksamaan $\bar{d}(f_\lambda(x), f(x)) \leq d_\infty(f_\lambda, f)$ memberi kekonvergenan koordinat. Secara topologis, bola seragam yang cukup kecil di sekitar f termuat dalam setiap lingkungan dasar titik demi titik yang hanya membatasi berhingga banyak koordinat. ■

Contoh U.129 Pada $X = \mathbb{N}$ diskret dan $Y = \mathbb{R}$, definisikan $e_n(k) = 1$ bila $k = n$ dan $e_n(k) = 0$ selain itu. Untuk setiap k tetap, $e_n(k) \rightarrow 0$, tetapi $d_\infty(e_n, 0) = 1$. Jadi topologi titik demi titik umumnya benar-benar lebih kasar daripada topologi seragam. □

Topologi kompak-terbuka

Definisi U.130 Untuk himpunan kompak $K \subseteq X$ dan himpunan terbuka $U \subseteq Y$, tulis

$$[K, U] = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq U\}.$$

Topologi kompak-terbuka pada $C(X, Y)$ adalah topologi yang mempunyai semua $[K, U]$ sebagai subbasis. Ruang yang dihasilkan ditulis $C_k(X, Y)$.

Proposisi U.131 *Topologi kompak-terbuka lebih halus daripada topologi titik demi titik. Jika X kompak Hausdorff dan Y metrik, topologi kompak-terbuka pada $C(X, Y)$ sama dengan topologi seragam.*

Bukti. Setiap singleton $\{x\}$ kompak dan $[\{x\}, U] = [x, U]$, sehingga semua subbasis titik demi titik terbuka dalam topologi kompak-terbuka.

Andaikan X kompak Hausdorff. Bola seragam kecil di sekitar f dapat dipilih agar termuat dalam irisan berhingga subbasis $[K_i, U_i]$ yang memuat f : kekompakan setiap $f(K_i)$ memberi jarak positif yang seragam dari komplemen U_i setelah subbasis diperhalus dengan bola-bola metrik. Untuk arah sebaliknya, bagi setiap $\varepsilon > 0$, kontinuitas f memberi selimut buka X oleh prapeta bola-bola berjari-jari $\varepsilon/3$. Kekompakan Hausdorff memberi penyusutan berhingga selimut itu menjadi himpunan-himpunan kompak K_j yang masih menutupi X . Jika U_j adalah bola berjari-jari $2\varepsilon/3$ yang sesuai, irisan $[K_j, U_j]$ mengendalikan jarak seragam dari f . Maka kedua topologi sama. ■

Contoh U.132 Pada $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, fungsi $f_n(x) = x/n$ konvergen ke nol secara seragam pada setiap subhimpunan kompak, maka konvergen dalam topologi kompak-terbuka, tetapi tidak konvergen seragam pada seluruh $\mathbb{R}$. Sebaliknya, barisan tonjolan segitiga setinggi satu yang berpusat di $1/n$, berpenyangga di $(1/n - 1/n^2, 1/n + 1/n^2)$, dan bernilai nol di luar penyangga, konvergen titik demi titik ke nol tetapi tidak konvergen kompak-terbuka karena supremumnya pada $[0, 1]$ selalu satu. □

Evaluasi dan komposisi

Teorema U.133 *Jika X kompak lokal Hausdorff, maka pemetaan evaluasi*

$$\text{ev} : C_k(X, Y) \times X \longrightarrow Y, \quad (f, x) \longmapsto f(x)$$

kontinu untuk setiap ruang Y .

Bukti. Ambil (f, x) dan himpunan buka U yang memuat $f(x)$. Karena $f^{-1}(U)$ lingkungan buka x dan X kompak lokal Hausdorff, pilih lingkungan buka V dari x dengan $K = \bar{V}$ kompak dan $K \subseteq f^{-1}(U)$. Maka $f \in [K, U]$, dan untuk setiap $g \in [K, U]$ serta $v \in V$ berlaku $g(v) \in U$. Jadi $[K, U] \times V$ dipetakan ke U . ■

Teorema U.134 *Jika Y kompak lokal Hausdorff, maka komposisi*

$$\text{comp} : C_k(Y, Z) \times C_k(X, Y) \longrightarrow C_k(X, Z), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f$$

kontinu.

Bukti. Cukup periksa prapeta subbasis $[K, U]$ di sekitar pasangan (g, f) dengan $g(f(K)) \subseteq U$. Himpunan $f(K)$ kompak dan termuat dalam himpunan buka $g^{-1}(U)$. Dalam ruang kompak lokal Hausdorff, pilih himpunan buka W dengan $f(K) \subseteq W \subseteq \overline{W} = L \subseteq g^{-1}(U)$ dan L kompak. Maka $[L, U]$ adalah lingkungan g dan $[K, W]$ adalah lingkungan f . Untuk $(g', f') \in [L, U] \times [K, W]$, berlaku $f'(K) \subseteq W \subseteq L$, sehingga $g'(f'(K)) \subseteq U$. Jadi produk kedua lingkungan itu dipetakan ke $[K, U]$. ■

Jembatan hukum eksponensial

Teorema U.135 *Jika X kompak lokal Hausdorff, maka untuk setiap ruang Z, Y terdapat korespondensi alami*

$$C(Z \times X, Y) \cong C(Z, C_k(X, Y)).$$

Korespondensi itu mengirim F ke pemetaan teradjoin $\widehat{F}(z)(x) = F(z, x)$, dan kebalikannya mengirim G ke $G^\vee(z, x) = G(z)(x)$.

Bukti. Jika F kontinu dan $[K, U]$ memuat $\widehat{F}(z_0)$, maka $F(\{z_0\} \times K) \subseteq U$. Kekompakan K dan lemma tabung menghasilkan lingkungan W dari z_0 dengan $F(W \times K) \subseteq U$. Jadi $\widehat{F}^{-1}([K, U])$ terbuka. Sebaliknya, jika $G : Z \rightarrow C_k(X, Y)$ kontinu, maka $G^\vee = \text{ev} \circ (G \times \text{id}_X)$ kontinu oleh teorema evaluasi. Kedua konstruksi jelas saling invers. ■

Catatan U.136 Pernyataan di atas adalah korespondensi pada aras himpunan pemetaan kontinu. Untuk menyatakan bahwa pemetaan kanonik antara dua *ruang* fungsi merupakan homeomorfisme tanpa hipotesis tambahan, kategori ruang kompak-terbangkitkan biasanya digunakan. Pada kategori ruang topologi biasa, hipotesis kekompakan lokal pada variabel domain adalah jembatan yang mencegah klaim eksponensial terlalu luas.

Jembatan terbatas menuju Teorema Arzelà–Ascoli

Definisi U.137 Keluarga $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ antara ruang metrik disebut **ekukontinu** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $x \in X$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $d_X(x, x') < \delta$ mengakibatkan $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ untuk semua $f \in \mathcal{F}$.

Teorema U.138 *Misalkan X ruang metrik kompak. Suatu keluarga $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ mempunyai penutup kompak dalam topologi seragam jika dan hanya jika keluarga itu ekukontinu dan dibatasi seragam, yakni terdapat M dengan $|f(x)| \leq M$ untuk semua $f \in \mathcal{F}$ dan $x \in X$.*

Bukti. Untuk arah perlu, kekompakan penutup memberi keterbatasan total dalam metrik supremum. Jaring ε berhingga yang terdiri atas fungsi kontinu mempunyai batas seragam bersama dan modulus kontinuitas lokal bersama; pendekatan setiap anggota keluarga oleh jaring itu memberi keterbatasan seragam dan ekukontinuitas.

Untuk arah cukup, pilih untuk setiap skala $1/n$ suatu jaring berhingga pada X . Keterbatasan nilai pada titik-titik jaring dan proses diagonal menghasilkan, dari setiap barisan di $\mathcal{F}$, subbarisan yang konvergen pada gabungan terhitung titik-titik jaring. Ekukontinuitas meningkatkan kekonvergenan itu menjadi kekonvergenan seragam pada seluruh X ; limit seragam tetap kontinu. Jadi setiap barisan mempunyai subbarisan konvergen. Karena ruang fungsi bermetrik, kekompakan sekuensial setara dengan kekompakan penutup. ■

Catatan U.139 Bentuk umum untuk kodomain metrik mengganti “dibatasi seragam” dengan syarat bahwa $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ mempunyai penutup kompak untuk setiap x . Modul ini memakai bentuk bernilai real agar jembatan menuju analisis tetap terbatas dan hipotesisnya eksplisit.

Latihan Penguasaan dengan Dukungan Bertahap

Pemeriksaan U.140 Kekonvergenan titik demi titik. Buktikan langsung dari basis hasil kali bahwa net $f_\lambda : X \rightarrow Y$ konvergen ke f dalam Y^X jika dan hanya jika $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Petunjuk. Lingkungan dasar hasil kali hanya membatasi berhingga banyak koordinat.

Jawaban. Gunakan keterarahan untuk memilih satu indeks yang bekerja bagi semua koordinat dalam himpunan berhingga itu.

Solusi. Jika net konvergen dalam hasil kali, kontinuitas proyeksi koordinat memberi kekonvergenan pada setiap titik. Sebaliknya, ambil lingkungan dasar $N = \bigcap_{j=1}^r [x_j, U_j]$ dari f . Untuk setiap j , kekonvergenan $f_\lambda(x_j) \rightarrow f(x_j)$ memberi indeks λ_j setelah mana nilai berada dalam U_j . Karena himpunan indeks terarah dan jumlahnya berhingga, ada indeks λ_0 yang mendominasi semuanya. Untuk $\lambda \geq \lambda_0$, $f_\lambda \in N$. Maka net konvergen dalam topologi hasil kali.

Pemeriksaan U.141 Tonjolan bergerak. Berikan rumus eksplisit untuk tonjolan segitiga b_n pada $[0, 1]$ yang berpusat di $1/n$, setinggi satu, berpenyangga selebar $2/n^2$, lalu buktikan bahwa $b_n \rightarrow 0$ titik demi titik tetapi tidak kompak-terbuka.

Petunjuk. Gunakan $b_n(x) = \max\{0, 1 - n^2|x - 1/n|\}$.

Jawaban. Setiap titik tetap akhirnya berada di luar penyangga, tetapi $\sup_{[0,1]} b_n = 1$.

Solusi. Rumus pada petunjuk kontinu, bernilai satu di $1/n$, dan nol bila $|x - 1/n| \geq 1/n^2$. Untuk $x = 0$, semua nilainya nol. Untuk $x > 0$ tetap, pusat dan seluruh penyangga akhirnya terletak di sebelah kiri x , sehingga $b_n(x) = 0$ untuk semua n cukup besar. Jadi kekonvergenan titik demi titik berlaku. Namun domain $[0, 1]$ kompak dan $b_n(1/n) = 1$, sehingga jarak seragam dari nol selalu satu. Pada domain kompak, topologi kompak-terbuka sama dengan topologi seragam; maka tidak ada kekonvergenan kompak-terbuka.

Pemeriksaan U.142 Kompak-terbuka tidak selalu seragam. Tunjukkan bahwa $f_n(x) = x/n$ pada $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ konvergen ke nol dalam topologi kompak-terbuka tetapi tidak dalam topologi seragam yang dibentuk oleh $\bar{d}(s, t) = \min\{1, |s - t|\}$.

Petunjuk. Setiap himpunan kompak dalam $\mathbb{R}$ terbatas; untuk kegagalan seragam pilih $x = n$.

Jawaban. Pada $[-M, M]$, supremum galat paling besar M/n , sedangkan supremum global terpotong selalu satu.

Solusi. Jika $K \subseteq \mathbb{R}$ kompak, pilih M dengan $K \subseteq [-M, M]$. Maka $\sup_{x \in K} |f_n(x)| \leq M/n \rightarrow 0$, yang memberi kekonvergenan seragam pada setiap kompak dan karenanya kekonvergenan kompak-terbuka. Di seluruh domain, untuk setiap n pilih $x = n$; maka $\bar{d}(f_n(n), 0) = 1$. Jadi $d_\infty(f_n, 0) = 1$ untuk semua n , sehingga tidak ada kekonvergenan seragam.

Pemeriksaan U.143 Kekontinuan evaluasi. Isi rincian bukti bahwa evaluasi $C_k(X, Y) \times X \rightarrow Y$ kontinu ketika X kompak lokal Hausdorff.

Petunjuk. Susutkan $f^{-1}(U)$ ke lingkungan dengan penutup kompak.

Jawaban. Lingkungan produk yang diperlukan adalah $[\bar{V}, U] \times V$.

Solusi. Ambil (f, x) dan lingkungan buka U dari $f(x)$. Himpunan $f^{-1}(U)$ terbuka dan memuat x . Sifat kompak lokal Hausdorff memberi himpunan buka V dengan $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq f^{-1}(U)$ dan $\bar{V}$ kompak. Karena itu $f \in [\bar{V}, U]$. Jika $(g, v) \in [\bar{V}, U] \times V$, maka $v \in \bar{V}$ dan $g(v) \in U$. Jadi prapeta setiap lingkungan U memuat lingkungan produk dari (f, x) , yang membuktikan kekontinuan.

Pemeriksaan U.144 Pemadanan pemetaan dua variabel. Misalkan X kompak lokal Hausdorff. Buktikan kedua arah korespondensi $C(Z \times X, Y) \cong C(Z, C_k(X, Y))$ dan periksa bahwa kedua konstruksi saling invers.

Petunjuk. Untuk arah maju gunakan kekompakan K ; untuk arah balik faktorkan melalui evaluasi.

Jawaban. $\hat{F}(z)(x) = F(z, x)$ dan $G^\vee(z, x) = G(z)(x)$.

Solusi. Jika F kontinu dan $\widehat{F}(z_0) \in [K, U]$, maka $F(\{z_0\} \times K) \subseteq U$. Untuk setiap $x \in K$, kontinuitas memberi lingkungan produk yang dipetakan ke U ; pilih subpenutup berhingga atas K dan irisankan lingkungan faktor Z . Diperoleh lingkungan W dari z_0 dengan $F(W \times K) \subseteq U$, jadi $\widehat{F}$ kontinu. Jika G kontinu, maka $G^\vee = \text{ev} \circ (G \times \text{id}_X)$ kontinu. Akhirnya, $(\widehat{F})^\vee(z, x) = F(z, x)$ dan $\widehat{G^\vee}(z)(x) = G(z)(x)$, sehingga konstruksi itu saling invers.

Pemeriksaan U.145 Keluarga Lipschitz dan Arzelà–Ascoli. Misalkan X ruang metrik kompak, $x_0 \in X$, dan $L, M > 0$. Tunjukkan bahwa keluarga semua fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$ dan $|f(x_0)| \leq M$ mempunyai penutup kompak dalam topologi seragam.

Petunjuk. Gunakan diameter X untuk batas seragam dan konstanta Lipschitz untuk ekukontinuitas.

Jawaban. Keluarga dibatasi oleh $M + L \text{diam}(X)$ dan mempunyai pilihan $\delta = \varepsilon/L$.

Solusi. Karena X kompak, diameternya D berhingga. Untuk setiap $x \in X$ dan setiap fungsi dalam keluarga, $|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq M + LD$. Jadi keluarga dibatasi seragam. Jika $\varepsilon > 0$ dan $L > 0$, ambil $\delta = \varepsilon/L$; maka $d(x, y) < \delta$ mengakibatkan $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ secara seragam terhadap f . Keluarga itu ekukontinu. Teorema Arzelà–Ascoli memberi penutup kompak dalam metrik supremum. Jika $L = 0$, semua fungsi konstan dan kesimpulannya langsung berlaku.

Puncak Penguasaan Terpadu

Modul penutup ini menguji kemampuan memilih dan menghubungkan alat, bukan sekadar mengulang definisi. Dua belas masalah di bawah menyatukan aksioma separasi, keterhitungan, jaring, hasil kali, kekompakan lokal, metrisasi, dan topologi ruang fungsi. Setiap masalah menyediakan petunjuk, jawaban ringkas, dan solusi lengkap sebagai tiga tahap pengungkapan yang terpisah. Pembaca sebaiknya menulis pembuktian sendiri sebelum membuka tahap berikutnya.

Modul orisinal ini berlisensi CC BY 4.0 dan terpisah dari turunan GVSU yang diperlakukan secara konservatif sebagai CC BY-NC-SA 3.0. Modul ini bukan teks, penilaian, atau solusi resmi GVSU serta tidak menyatakan atau menyiratkan dukungan penulis maupun institusi sumber. Tidak ada ekspresi buku lain yang disalin. Provenans produksi berbantuan model: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Peta dependensi dan penguasaan

Landasan. Masalah 1 dan 10 memerlukan relasi spesialisasi, aksioma T_0 sampai Hausdorff, serta pembuatan contoh tandingan. Keberhasilan berarti pembaca dapat membedakan sifat titik, sifat lingkungan, dan sifat fungsi kontinu yang tidak dapat dibalik begitu saja.

Ukuran topologis dan kekonvergenan. Masalah 2 dan 3 menghubungkan basis lokal, keterhitungan pertama dan kedua, separabilitas, penutup, jaring, dan barisan. Keberhasilan berarti pembaca tahu persis kapan barisan cukup dan dapat membangun jaring dari data lingkungan ketika barisan tidak cukup.

Hasil kali dan metrisasi. Masalah 4 dan 5 menguji perbedaan topologi hasil kali dan kotak, metrik hasil kali terhitung, Teorema Tychonoff, dan kriteria kekompakan lokal hasil kali. Keberhasilan berarti pembaca dapat melacak koordinat berhingga yang sungguh dikendalikan oleh sebuah lingkungan.

Kekompakan lokal dan metrisasi. Masalah 6 dan 12 memadukan kompaktifikasi satu titik, keterhitungan, separasi, jaring, dan ruang fungsi. Keberhasilan berarti pembaca dapat mengubah sifat lokal menjadi sifat ruang kompak yang diperbesar dan kembali lagi.

Ruang fungsi. Masalah 7 sampai 9 menghubungkan kekonvergenan kompak-terbuka, ekukontinuitas, Arzelà–Ascoli, evaluasi, dan hukum eksponensial. Keberhasilan berarti pembaca mampu memeriksa hipotesis pada domain, kodomain, dan topologi ruang fungsi, bukan hanya menuliskan notasi $C(X, Y)$.

Sintesis akhir. Masalah 11 dan 12 meminta audit banyak sifat pada satu konstruksi. Jika jawaban pada kedua masalah itu lengkap dan setiap implikasi mempunyai alasan yang tepat, pembaca telah mencapai penguasaan terpadu minimum untuk seluruh pelengkap C90.

Rubrik pembuktian dan contoh tandingan

Untuk masalah pembuktian, nilai setiap bagian dengan empat unsur yang bobotnya sama: (1) hipotesis dan kesimpulan dinyatakan dengan kuantor yang benar; (2) teorema yang dipakai memang memenuhi semua hipotesisnya; (3) konstruksi inti—misalnya basis, jaring, selimut, atau metrik—ditulis eksplisit; dan (4) argumen menutup kedua arah bila klaim berbentuk ekuivalensi. Skor penuh memerlukan keempat unsur; kesimpulan benar tanpa konstruksi atau tanpa pemeriksaan hipotesis belum merupakan bukti penuh.

Untuk contoh tandingan, nilai empat unsur: (1) ruang dan topologinya didefinisikan tanpa ambiguitas; (2) sifat yang diinginkan dibuktikan; (3) sifat yang hendak digagalkan disangkal dengan pasangan titik, lingkungan, selimut, jaring, atau basis yang konkret; dan (4) contoh benar-benar menolak implikasi yang dimaksud, bukan implikasi lain yang mirip. Untuk proyek terbuka, sebuah klasifikasi boleh bersyarat, tetapi setiap syarat tambahan harus disebutkan dan diuji pada sedikitnya satu contoh.

Masalah penguasaan terpadu

Pemeriksaan U.146 Kuosien Kolmogorov dan pemetaan ke ruang T_0 . Pada ruang X , definisikan $x \sim y$ bila x dan y mempunyai lingkungan buka yang sama. Buktikan bahwa $x \sim y$ tepat bila $x \leq y$ dan $y \leq x$ dalam praurutan spesialisasi. Beri $X_0 = X/\sim$ topologi kuosien. Buktikan bahwa X_0 adalah T_0 dan bahwa setiap fungsi kontinu $f : X \rightarrow Y$ ke ruang T_0 memfaktor secara unik melalui proyeksi $q : X \rightarrow X_0$.

Petunjuk. Gunakan karakterisasi $x \leq y$ sebagai “setiap lingkungan buka x memuat y ”. Untuk faktorisasi, tunjukkan dahulu bahwa fungsi kontinu ke ruang T_0 konstan pada setiap kelas ekuivalensi.

Jawaban. Kesimetrian praurutan tepat menyatakan ketakterbedaan topologis. Kelas yang berbeda dibedakan oleh himpunan buka jenuh, sehingga kuosiennya T_0 . Faktorisasi diberikan oleh $\bar{f}([x]) = f(x)$ dan unik karena q surjektif.

Solusi. Andaikan $x \sim y$. Setiap lingkungan buka x juga merupakan lingkungan y , maka memuat y ; jadi $x \leq y$. Dengan menukar keduanya diperoleh $y \leq x$. Sebaliknya, jika kedua relasi itu berlaku, setiap himpunan buka yang memuat salah satu titik memuat titik lain, sehingga daftar lingkungan keduanya sama.

Jika kelas $[x]$ dan $[y]$ berbeda, ada himpunan buka U yang memuat tepat salah satu dari x, y . Karena anggota satu kelas mempunyai keanggotaan yang sama pada setiap himpunan buka, U adalah gabungan kelas-kelas. Maka $q(U)$ terbuka dalam topologi kuosien dan membedakan kedua kelas; jadi X_0 adalah T_0 .

Bila $x \sim y$, kekontinuan f membuat $f(x)$ dan $f(y)$ mempunyai lingkungan yang sama: prapeta setiap lingkungan salah satunya memuat keduanya. Karena Y adalah T_0 , $f(x) = f(y)$. Jadi $\bar{f}([x]) = f(x)$ terdefinisi baik. Persamaan $f = \bar{f} \circ q$ berlaku, dan sifat universal topologi kuosien memberi kekontinuan $\bar{f}$. Surjektivitas q memberi keunikan.

Pemeriksaan U.147 Penutup, jaring lingkungan, dan barisan. Untuk $A \subseteq X$ dan $x \in \bar{A}$, bangun jaring di A yang konvergen ke x . Kemudian buktikan bahwa jika X terhitung pertama, dapat dipilih sebuah barisan di A yang konvergen ke x . Jelaskan mengapa arah kedua tidak boleh dipakai tanpa hipotesis keterhitungan pertama.

Petunjuk. Arahkan himpunan semua lingkungan x dengan urutan pembalikan inklusi dan pilih satu titik $a_U \in A \cap U$. Untuk barisan, buat basis lokal menurun dari basis lokal terhitung.

Jawaban. Jaring (a_U) , dengan indeks lingkungan dan lingkungan yang lebih kecil dianggap lebih akhir, konvergen ke x . Basis lokal menurun V_n memberi barisan $a_n \in A \cap V_n$. Pada ruang umum, penutup selalu dideteksi jaring tetapi tidak selalu dideteksi barisan.

Solusi. Misalkan $\mathcal{N}(x)$ himpunan lingkungan x , dan definisikan $U \preceq V$ bila $V \subseteq U$. Dua lingkungan mempunyai batas atas bersama berupa irisannya, sehingga himpunan indeks ini terarah. Karena $x \in \bar{A}$, setiap U memotong A ; pilih $a_U \in A \cap U$. Untuk lingkungan W dari x , semua indeks $U \succeq W$ memenuhi $U \subseteq W$, maka $a_U \in W$. Jadi jaring itu konvergen ke x .

Jika (B_n) basis lokal terhitung, tetapkan $V_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$ dan pilih $a_n \in A \cap V_n$. Untuk setiap lingkungan W , ada k dengan $B_k \subseteq W$; semua $n \geq k$ memenuhi $a_n \in V_n \subseteq B_k \subseteq W$. Maka $a_n \rightarrow x$.

Tanpa basis lokal terhitung, sebuah barisan hanya menguji terhitung banyak tahap lingkungan. Contohnya, pada ordinal $[0, \omega_1]$, titik ω_1 berada dalam penutup $[0, \omega_1)$, tetapi tidak ada barisan ordinal terhitung yang konvergen kepadanya karena supremum terhitung masih di bawah ω_1 .

Pemeriksaan U.148 Garis Sorgenfrey: separabel tetapi tidak terhitung kedua. Beri $\mathbb{R}$ basis interval setengah terbuka $[a, b)$. Buktikan bahwa ruang ini separabel dan terhitung pertama, tetapi tidak terhitung kedua. Tunjukkan pula bahwa barisan x_n konvergen ke x tepat bila, untuk setiap $\varepsilon > 0$, akhirnya $x \leq x_n < x + \varepsilon$.

Petunjuk. Gunakan $\mathbb{Q}$ sebagai himpunan rapat dan $[x, x + 1/n)$ sebagai basis lokal. Untuk menolak basis terhitung, pilih bagi setiap x satu anggota basis yang terletak di dalam $[x, x + 1)$ dan perhatikan titik ujung kirinya.

Jawaban. Setiap interval basis memuat bilangan rasional, dan interval $[x, x + 1/n)$ membentuk basis lokal. Basis global terhitung akan memerlukan anggota berbeda untuk setiap titik real sebagai ujung kiri minimum, suatu kemustahilan. Kriteria barisan mengikuti langsung dari basis lokal tersebut.

Solusi. Setiap $[a, b)$ takkosong memuat rasional, sehingga $\mathbb{Q}$ rapat dan ruang separabel. Untuk setiap x , keluarga $[x, x + 1/n)$ merupakan basis lokal terhitung: jika $x \in [a, b)$, pilih n dengan $1/n < b - x$.

Andaikan $\mathcal{B}$ basis global terhitung. Bagi setiap $x \in \mathbb{R}$, pilih $B_x \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$. Jika $x < y$, himpunan B_x tidak dapat sama dengan B_y : kesamaan akan memuat x , sedangkan $B_y \subseteq [y, y + 1)$ tidak memuat x . Jadi pemetaan $x \mapsto B_x$ injektif dari himpunan takterhitung ke $\mathcal{B}$, kontradiksi.

Akhirnya, $x_n \rightarrow x$ tepat bila akhirnya berada dalam setiap $[x, x + 1/k)$. Hal itu ekuivalen dengan: untuk setiap $\varepsilon > 0$, akhirnya $x \leq x_n < x + \varepsilon$. Contoh ini sekaligus menunjukkan bahwa separabilitas tidak memaksa keterhitungan kedua di luar kelas ruang metrik.

Pemeriksaan U.149 Hasil kali terhitung, metrik, dan topologi kotak. Pada $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, buktikan bahwa

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\}$$

menginduksi topologi hasil kali. Buktikan bahwa topologi kotak lebih halus secara ketat dan tidak terhitung pertama pada titik nol.

Petunjuk. Kendalikan ekor deret untuk membandingkan bola metrik dengan silinder berhingga. Untuk basis lokal kotak terhitung yang diduga $U_k = \prod_n U_{k,n}$, pilih radius koordinat ke- k yang lebih kecil daripada lebar $U_{k,k}$.

Jawaban. Bobot ekor yang dapat dibuat kecil dan kontrol berhingga koordinat memberi kesamaan topologi metrik dengan topologi hasil kali. Kotak $\prod_n (-1/n, 1/n)$ bukan lingkungan hasil kali. Diagonalisasi terhadap setiap keluarga lingkungan kotak terhitung menolak basis lokal terhitung.

Solusi. Fungsi d adalah metrik karena setiap suku merupakan pseudometrik, deret konvergen seragam, dan $d(x, y) = 0$ memaksa semua koordinat sama. Ambil bola d berjari-jari ε . Pilih N sehingga $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$, lalu batasi berhingga banyak koordinat pertama cukup ketat agar jumlah kepalanya kurang dari $\varepsilon/2$. Silinder hasil kali yang diperoleh termuat dalam bola. Sebaliknya, bagi silinder yang membatasi koordinat dalam himpunan berhingga F , pilih bola cukup kecil sehingga setiap suku berbobot untuk $n \in F$ memaksa batas koordinat yang ditentukan. Jadi topologinya sama.

Himpunan $W = \prod_n (-1/n, 1/n)$ terbuka kotak. Setiap lingkungan hasil kali nol membiarkan semua kecuali berhingga banyak koordinat bebas, maka tidak termuat dalam W ; jadi kehalusannya ketat. Andaikan (U_k) basis lokal kotak di nol dan, setelah memperkecil, tulis $U_k = \prod_n (-a_{k,n}, a_{k,n})$ dengan semua $a_{k,n} > 0$. Bentuk $V = \prod_n (-a_{n,n}/2, a_{n,n}/2)$. Ini lingkungan kotak nol, tetapi untuk setiap k , U_k tidak termuat dalam V karena koordinat ke- k -nya lebih lebar. Kontradiksi; topologi kotak tidak terhitung pertama.

Pemeriksaan U.150 Kekompakan lokal hasil kali takberhingga. Misalkan semua X_i ruang Hausdorff takkosong. Buktikan bahwa $\prod_{i \in I} X_i$ kompak lokal jika dan hanya jika setiap X_i kompak lokal dan semua kecuali berhingga banyak faktor kompak. Nyatakan dengan jelas tempat penggunaan Teorema Tychonoff.

Petunjuk. Proyeksi suatu lingkungan silinder dengan penutup kompak memberi kekompakan faktor yang tidak dibatasi. Untuk arah balik, pilih lingkungan berpenutup kompak hanya pada berhingga banyak faktor nonkompak.

Jawaban. Penutup kompak sebuah silinder memproyeksikan surjektif ke semua faktor yang tidak dibatasi, sehingga faktor-faktor itu kompak; semua faktor juga mewarisi kekompakan lokal melalui proyeksi dan irisan koordinat. Sebaliknya, hasil kali penutup lingkungan kompak adalah kompak oleh Tychonoff.

Solusi. Ambil $x = (x_i)$ dalam hasil kali yang kompak lokal. Ada lingkungan dasar $U = \prod_i U_i$ dari x , dengan $U_i = X_i$ di luar himpunan berhingga F , yang termuat dalam suatu himpunan kompak K . Untuk $i \notin F$, proyeksi U ke X_i adalah seluruh X_i ; karena $\pi_i(K)$ kompak dan memuat X_i , faktor itu kompak. Untuk sembarang i , tetapkan semua koordinat lain pada x_j . Irisan potongan koordinat ini dengan K kompak karena ruang Hausdorff membuat singleton tertutup, dan ia memuat lingkungan U_i dari x_i . Jadi setiap faktor kompak lokal.

Sebaliknya, andaikan faktor nonkompak hanya terdapat pada himpunan berhingga F . Untuk $i \in F$, pilih lingkungan V_i dari x_i dengan penutup kompak K_i . Untuk $i \notin F$, ambil $V_i = X_i = K_i$, yang kompak. Silinder $V = \prod_i V_i$ adalah lingkungan x dan penutupnya termuat dalam $\prod_i K_i$. Teorema Tychonoff—dan dengan demikian bentuk aksioma pilihan yang dipakainya—menyatakan hasil kali semua K_i kompak. Maka hasil kali asal kompak lokal.

Pemeriksaan U.151 Kapan kompaktifikasi satu titik dapat dimetrisasi? Misalkan X ruang Hausdorff kompak lokal yang tidak kompak dan $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ kompaktifikasi satu titiknya. Buktikan bahwa αX dapat dimetrisasi jika dan hanya jika X terhitung kedua. Hubungkan kedua arah dengan teorema metrisasi Urysohn dan sifat subruang.

Petunjuk. Ruang kompak Hausdorff yang terhitung kedua adalah reguler dan memenuhi hipotesis Urysohn. Untuk membangun basis di titik ∞ , gunakan penutupan berhingga dari anggota basis yang relatif kompak.

Jawaban. Jika αX metrik kompak, ia terhitung kedua dan sifat itu diwarisi X . Jika X terhitung kedua, basis relatif kompak menghasilkan basis terhitung di ∞ ; maka αX kompak Hausdorff, terhitung kedua, dan termetrisasi oleh Urysohn.

Solusi. Jika αX dapat dimetrisasi, ia kompak metrik. Setiap ruang kompak metrik terhitung kedua: untuk setiap n , ambil subselimit berhingga dari bola berjari-jari $1/n$, lalu gabungkan semua pusat dan radius rasional. Karena keterhitungan kedua diwarisi subruang, X terhitung kedua.

Sebaliknya, ambil basis terhitung $\mathcal{B}$ untuk X . Kekompakan lokal dan regularitas ruang Hausdorff kompak lokal memungkinkan kita memperhalusnya menjadi basis terhitung (V_n) dengan setiap $\overline{V_n}$ kompak. Semua gabungan berhingga $K_F = \bigcup_{n \in F} \overline{V_n}$ kompak, dan komplementnya $\{\infty\} \cup (X \setminus K_F)$ membentuk basis terhitung di ∞ : setiap himpunan kompak $K \subseteq X$ ditutupi berhingga banyak V_n , sehingga termuat dalam suatu K_F . Bersama $\mathcal{B}$, ini memberi basis terhitung untuk αX . Kompaktifikasi satu titik itu kompak Hausdorff, sehingga reguler dan T_1 . Teorema metrisasi Urysohn sekarang berlaku dan memberi metrik pada αX .

Pemeriksaan U.152 Kekonvergenan kompak-terbuka sebagai kekonvergenan pada kompak. Misalkan X Hausdorff dan (Y, d) ruang metrik. Untuk jaring (f_λ) dalam $C(X, Y)$, buktikan bahwa kekonvergenan kompak-terbuka ke f ekuivalen dengan kekonvergenan seragam pada setiap subhimpunan kompak $K \subseteq X$.

Petunjuk. Pada kompak K , gunakan kekompakan $f(K)$ dan selimut oleh bola kecil. Untuk arah yang memerlukan lingkungan kompak-terbuka, susutkan selimut buka berhingga pada ruang kompak Hausdorff K menjadi himpunan-himpunan kompak.

Jawaban. Lingkungan seragam pada setiap kompak dapat dibandingkan dua arah dengan irisan berhingga subbasis $[K_i, U_i]$. Kekompakan memberi keberhinggaan dan sifat Hausdorff memberi penyusutan kompak yang diperlukan.

Solusi. Andaikan dahulu $f_\lambda \rightarrow f$ kompak-terbuka. Tetapkan kompak K dan $\varepsilon > 0$. Untuk tiap $x \in K$, pilih lingkungan relatif W_x sehingga $f(W_x)$ termuat dalam bola berjari-jari $\varepsilon/3$ di sekitar $f(x)$. Ruang K kompak Hausdorff; susutkan subselimit berhingga menjadi kompak $K_1, \dots, K_n$ yang masih menutupi K , dengan $K_i \subseteq W_{x_i}$. Lingkungan kompak-terbuka $\bigcap_i [K_i, B(f(x_i), 2\varepsilon/3)]$ memaksa $d(f_\lambda(x), f(x)) < \varepsilon$ untuk

semua $x \in K$ pada akhirnya.

Sebaliknya, ambil lingkungan subbasis $[K, U]$ yang memuat f . Himpunan $f(K)$ kompak dan termuat dalam buka U , sehingga ada $\delta > 0$ dengan lingkungan δ dari $f(K)$ termuat dalam U . Kekonvergenan seragam pada K memberi $\sup_{x \in K} d(f_\lambda(x), f(x)) < \delta$ pada akhirnya, maka $f_\lambda(K) \subseteq U$. Irisan berhingga subbasis diperlakukan serentak, jadi jaring konvergen kompak-terbuka.

Pemeriksaan U.153 Keluarga Lipschitz dan Arzelà–Ascoli. Misalkan (K, d) ruang metrik kompak dan $x_0 \in K$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{F} = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0, |f(x) - f(y)| \leq d(x, y)\}$ kompak dalam topologi kompak-terbuka. Jelaskan peran ketertutupan, ekukontinuitas, dan kekompakan titik demi titik.

Petunjuk. Semua fungsi dibatasi seragam oleh diameter K . Gunakan Arzelà–Ascoli untuk kekompakan relatif, lalu buktikan bahwa limit seragam tetap bernilai nol di x_0 dan tetap 1-Lipschitz.

Jawaban. Keluarga ini ekukontinu dan nilai-nilainya pada setiap titik berada dalam interval kompak. Arzelà–Ascoli memberi kekompakan relatif; syarat nilai pangkal dan ketaksamaan Lipschitz tertutup terhadap limit seragam, sehingga keluarga itu sendiri kompak.

Solusi. Untuk semua $f \in \mathcal{F}$, berlaku $|f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0) \leq \text{diam } K$. Jadi bagi setiap x , himpunan nilai $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ mempunyai penutup kompak di $\mathbb{R}$. Selain itu, bagi $\varepsilon > 0$, pilihan $\delta = \varepsilon$ bekerja serentak untuk seluruh keluarga karena semua fungsi 1-Lipschitz. Maka $\mathcal{F}$ ekukontinu.

Teorema Arzelà–Ascoli memberi bahwa penutup $\mathcal{F}$ kompak dalam topologi kompak-terbuka, yang pada domain kompak sama dengan topologi seragam. Jika $f_n \rightarrow f$ seragam dan setiap $f_n \in \mathcal{F}$, maka $f(x_0) = \lim f_n(x_0) = 0$. Untuk $x, y \in K$, ambil limit pada $|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y)$ untuk memperoleh $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. Jadi $f \in \mathcal{F}$ dan keluarga itu tertutup. Penutup kompaknya sama dengan dirinya; maka $\mathcal{F}$ kompak.

Pemeriksaan U.154 Homotopi sebagai lintasan dalam ruang fungsi. Misalkan X kompak lokal Hausdorff dan Y ruang topologi. Buktikan bahwa fungsi kontinu $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ menentukan lintasan kontinu $\hat{H} : [0, 1] \rightarrow C_k(X, Y)$ melalui $\hat{H}(t)(x) = H(t, x)$, dan sebaliknya. Identifikasi secara eksplisit tempat evaluasi dan hukum eksponensial digunakan.

Petunjuk. Satu arah adalah pemetaan kurri pada hukum eksponensial kompak-terbuka. Untuk arah balik, komposisikan $\hat{H} \times \text{id}_X$ dengan evaluasi kontinu.

Jawaban. Hukum eksponensial memberi korespondensi kontinu $C([0, 1] \times X, Y) \cong C([0, 1], C_k(X, Y))$ pada tingkat yang diperlukan. Kebalikannya adalah $H = \text{ev} \circ (\hat{H} \times \text{id}_X)$.

Solusi. Untuk H kontinu, definisikan $\hat{H}(t)(x) = H(t, x)$. Setiap irisan H_t kontinu. Versi kompak-terbuka hukum eksponensial, dengan variabel yang dikurri yaitu X kompak lokal Hausdorff, menyatakan bahwa pemetaan $H \mapsto \hat{H}$ membawa fungsi kontinu pada produk ke fungsi kontinu menuju $C_k(X, Y)$. Jadi $\hat{H}$ adalah lintasan dari H_0 ke H_1 .

Sebaliknya, jika $\gamma : [0, 1] \rightarrow C_k(X, Y)$ kontinu, pemetaan $\gamma \times \text{id}_X$ dari $[0, 1] \times X$ ke $C_k(X, Y) \times X$ kontinu. Karena X kompak lokal Hausdorff, evaluasi bersama $\text{ev}(f, x) = f(x)$ kontinu. Komposisi $H = \text{ev} \circ (\gamma \times \text{id}_X)$ kontinu dan memenuhi $H(t, x) = \gamma(t)(x)$. Kedua konstruksi saling invers. Hipotesis pada X bukan hiasan: ia menjamin kekontinuan evaluasi dan bentuk hukum eksponensial yang dipakai.

Pemeriksaan U.155 Empat contoh tandingan separasi dan ukuran. Bangun dan verifikasi empat ruang berikut: ruang non- T_0 ; ruang T_0 tetapi bukan T_1 ; ruang T_1 tetapi bukan Hausdorff; dan ruang separabel tetapi bukan terhitung kedua. Untuk setiap ruang, berikan saksi konkret untuk sifat yang gagal.

Petunjuk. Gunakan ruang indisret dua titik, ruang Sierpiński, topologi kofinit pada himpunan takhingga, dan garis Sorgenfrey. Ikuti keempat unsur rubrik contoh tandingan di atas.

Jawaban. Keempat saksi standar tersebut memenuhi urutan yang diminta: pasangan titik indisret tak terbedakan; singleton tertentu tidak tertutup di Sierpiński; lingkungan kofinit selalu beririsan; dan rasional rapat pada Sorgenfrey meskipun basis global terhitung tidak mungkin.

Solusi. Pertama, pada $\{0, 1\}$ dengan topologi $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$, kedua titik mempunyai lingkungan yang sama, jadi ruang bukan T_0 . Kedua, pada $\{0, 1\}$ dengan topologi $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$, himpunan buka $\{1\}$ membedakan titik, jadi ruang T_0 ; tetapi $\{1\}$ tidak tertutup karena komplemennya $\{0\}$ tidak terbuka, maka bukan T_1 .

Ketiga, pada himpunan takhingga S , ambil topologi kofinit. Setiap singleton tertutup, jadi ruang T_1 . Namun dua himpunan buka takkosong mempunyai komplemen berhingga dan karena itu irisannya tetap takkosong; dua titik tidak mempunyai lingkungan terpisah, maka ruang bukan Hausdorff. Keempat, garis Sorgenfrey mempunyai basis $[a, b)$. Bilangan rasional memotong setiap interval basis, jadi ruang separabel. Jika ada basis terhitung, pilihan satu anggota basis B_x dengan $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ akan menginjeksi semua bilangan real ke basis tersebut, kontradiksi. Jadi ia bukan terhitung kedua.

Pemeriksaan U.156 Kubus Tychonoff dan fungsi koordinat. Untuk himpunan indeks I , letakkan $K = [0, 1]^I$ dengan topologi hasil kali. Buktikan bahwa K kompak Hausdorff dan bahwa setiap proyeksi koordinat kontinu. Buktikan bahwa K termetrisasi jika I terhitung, sedangkan jika I takterhitung, K tidak terhitung pertama dan karena itu tidak termetrisasi. Nyatakan mengapa topologi kotak mengubah jawaban.

Petunjuk. Gunakan Tychonoff dan pemisahan koordinat. Untuk menolak basis lokal terhitung di titik nol ketika I takterhitung, gabungkan semua koordinat yang dibatasi oleh anggota basis yang diduga, lalu pilih satu koordinat di luar gabungan terhitung itu.

Jawaban. Tychonoff memberi kekompakan dan proyeksi memisahkan titik, sehingga kubus Hausdorff. Indeks terhitung memberi metrik deret berbobot. Indeks takterhitung menolak basis lokal terhitung melalui koordinat yang tidak pernah dibatasi. Dalam topologi kotak, semua koordinat dapat dibatasi sekaligus dan argumen kekompakan Tychonoff tidak berlaku.

Solusi. Setiap faktor $[0, 1]$ kompak Hausdorff. Teorema Tychonoff memberi kekompakan hasil kali, sedangkan dua titik berbeda mempunyai koordinat i yang berbeda dan dapat dipisahkan oleh prapeta dua interval terpisah di bawah proyeksi π_i . Proyeksi kontinu menurut definisi topologi hasil kali, jadi K Hausdorff.

Jika I berhingga atau terhitung, enumerasi koordinat dan metrik deret berbobot seperti pada Masalah 4 memetrisasi K . Sekarang andaikan I takterhitung dan (U_n) basis lokal terhitung di nol. Perkecil setiap U_n menjadi silinder dasar V_n yang hanya membatasi himpunan koordinat berhingga F_n . Gabungan $F = \bigcup_n F_n$ terhitung, jadi pilih $j \in I \setminus F$. Lingkungan $W = \{x : x_j < 1/2\}$ memuat nol. Tidak satu pun V_n termuat dalam W , karena koordinat j bebas. Ini bertentangan dengan sifat basis lokal; maka K tidak terhitung pertama dan tidak mungkin metrik.

Topologi kotak mengizinkan pembatasan semua koordinat sekaligus. Untuk I takhingga, subruang $\{0, 1\}^I$ tertutup dalam kubus kotak, tetapi diskret: singleton setiap titik adalah irisan dengan kotak $\prod_i U_i$ yang memilih lingkungan kecil dari koordinat nol atau satu. Subruang ini takhingga dan mempunyai selimut terbuka oleh semua singleton tanpa subselimut berhingga. Jadi kubus kotak tidak kompak. Karena itu “hasil kali” pada teorema kekompakan dan hukum universal harus berarti topologi hasil kali, bukan topologi kotak.

Pemeriksaan U.157 Audit terpadu kompaktifikasi diskret takterhitung. Misalkan D himpunan diskret takterhitung dan $\alpha D = D \cup \{\infty\}$ kompaktifikasi satu titiknya. Tentukan dan buktikan: aksioma separasi; kekompakan lokal dan kekompakan; keterhitungan pertama dan separabilitas; metrisabilitas; kriteria jaring $d_\lambda \rightarrow \infty$; serta bentuk dan topologi kompak-terbuka pada $C(\alpha D, \{0, 1\})$, dengan kodomain diskret.

Petunjuk. Lingkungan ∞ mempunyai komplemen berhingga. Setiap titik $d \in D$ terisolasi. Kontinuitas ke $\{0, 1\}$ memaksa fungsi berbeda dari nilainya di ∞ hanya pada berhingga banyak titik; karena domain kompak, topologi kompak-terbuka sama dengan topologi seragam diskret.

Jawaban. Ruang αD kompak Hausdorff dan kompak lokal, tetapi tidak terhitung pertama di ∞ , tidak separabel, dan tidak metrik. Jaring menuju ∞ tepat bila akhirnya menghindari setiap himpunan berhingga. Fungsi kontinu biner adalah gangguan berhingga dari fungsi konstan, dan ruang fungsi kompak-terbukanya diskret.

Solusi. Setiap $d \in D$ terbuka sebagai singleton. Dua titik di D dipisahkan oleh singleton; titik d dan ∞ dipisahkan oleh $\{d\}$ serta $\alpha D \setminus \{d\}$. Jadi ruang Hausdorff, bahkan kompak Hausdorff. Kekompakan mengikuti karena setiap selimut buka memuat satu anggota yang mencakup ∞ dan semua kecuali berhingga banyak titik D ; sisa berhingga memerlukan berhingga banyak anggota. Ruang kompak selalu kompak lokal.

Jika ada basis lokal terhitung (U_n) di ∞ , setiap komplemen $D \setminus U_n$ berhingga. Gabungan semua komplemen itu terhitung, maka pilih $d \in D$ di luarnya. Lingkungan $\alpha D \setminus \{d\}$ tidak memuat satu pun U_n , kontradiksi. Jadi ruang tidak terhitung pertama dan tidak metrik. Setiap himpunan rapat harus memuat

semua titik terisolasi D ; karena D takterhitung, ruang tidak separabel.

Dari bentuk lingkungan ∞ , jaring (d_λ) menuju ∞ tepat bila untuk setiap himpunan berhingga $F \subseteq D$, akhirnya $d_\lambda \notin F$. Sekarang ambil $f : \alpha D \rightarrow \{0, 1\}$. Kekontinuan di ∞ ekuivalen dengan adanya lingkungan kofinit tempat f bernilai konstan $f(\infty)$. Jadi f hanya berbeda dari konstanta itu pada berhingga banyak titik D ; syarat ini juga cukup karena semua titik D terisolasi.

Domain αD kompak dan kodomain diberi metrik diskret. Karena itu topologi kompak-terbuka pada ruang fungsi sama dengan topologi seragam. Dua fungsi berbeda mempunyai jarak supremum satu, sehingga bola berjari-jari kurang dari satu mengisolasi setiap fungsi. Maka $C_k(\alpha D, \{0, 1\})$ diskret. Sebaliknya, topologi titik demi titik tidak diskret: lingkungan yang menguji hanya berhingga banyak koordinat masih memungkinkan perubahan pada satu titik lain di D . Audit ini menggunakan seluruh rantai separasi, keterhitungan, jaring, kekompakan lokal, metrisasi, dan ruang fungsi.

Indeks

- δ -lingkungan suatu titik dalam ruang metrik, 60
- barisan dalam ruang topologi, 121
- barisan di ruang metrik, 78
- barisan konvergen dalam ruang topologi, 121
- basis
 - unsur, 109
 - untuk topologi, 109
- batas atas terkecil, 45
- batas bawah, 44
- batas bawah terbesar, 44
- batas dalam ruang topologi, 122
- bidang proyektif real, 155
- bola terbuka dalam ruang metrik, 35, 60
- botol Klein, 150
- busur digital, 211

- citra suatu unsur, 14

- ekuivalen secara metrik, 133
- ekuivalen secara topologis, 134

- fungsi, 13
 - bijeksi, 14
 - daerah hasil, 14
 - domain, 14
 - identitas, 15
 - injeksi, 14
 - invers, 17
 - kodomain, 14
 - pembatasan, 14
 - surjeksi, 14
 - terbuka, 132
- fungsi identitas, 54
- fungsi kontinu, 53
- fungsi proyeksi, 203

- garis Sorgenfrey, 127

- hasil kali Kartesius, 8
- hasil kali lintasan, 192

- himpunan, 5
 - gabungan, 5
 - irisan, 5
 - komplemen, 5
- himpunan berhingga, 21
- himpunan buka-tutup dalam ruang topologi, 119
- himpunan kuasa, 11
- himpunan pemutus, 180
- himpunan terbuka dalam ruang metrik, 67
- himpunan terbuka dalam ruang topologi, 105
- himpunan terbuka dasar, 109
- himpunan terbuka relatif, 142
- himpunan tertutup dalam ruang topologi, 118
- himpunan turunan, 120
- homeomorfisme, 135

- infimum, 44
- interior suatu himpunan, 72
- interval, 4
- invarian topologis, 136
- isometri, 134

- kardinalitas himpunan, 21
- kekontinuan dalam ruang topologi, 131
- kekontinuan di suatu titik dalam ruang metrik, 52
- keluarga himpunan berindeks, 7
- kompak lokal, 172
- komponen, 179
- komponen lintasan, 192
- komposisi fungsi, 16
- kurva Jordan digital, 211
- kurva sinus topolog, 195

- Lemma Penempelan, 191
- limit barisan bilangan real, 76
- limit barisan dalam ruang topologi, 121
- limit barisan di ruang metrik, 78
- lingkungan dalam ruang metrik, 60
- lingkungan dalam ruang topologi, 110

-
- lingkungan minimal, 193
 - lintasan, 189
 - lintasan digital, 211
 - metrik, 29
 - diskret, 34
 - Euklides, 31
 - Hamming, 40
 - Hausdorff, 167
 - Levenshtein, 42
 - maksimum, 31
 - taksi, 28
 - metrik hasil kali, 101
 - pemetaan kuosien, 147
 - pemetaan terbuka, 132
 - pemisahan, 178
 - Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, 32
 - pertidaksamaan segitiga, 30
 - prapeta suatu unsur, 14
 - relasi, 136
 - relasi ekuivalensi, 136
 - retrak, 157
 - retraksi, 157
 - ruang T_1 , 125
 - ruang T_2 , 125
 - ruang T_3 , 125
 - ruang T_4 , 125
 - ruang faktor, 101
 - ruang Fréchet, 125
 - ruang Golomb, 107
 - ruang Hausdorff, 124
 - ruang Hilbert, 102
 - ruang identifikasi, 149
 - ruang koordinat, 101
 - ruang kuosien, 147, 149
 - ruang metrik, 30
 - lengkap, 170
 - ruang metrik hasil kali, 100
 - ruang normal, 125
 - ruang reguler, 125
 - ruang terhubung, 175, 183
 - ruang topologi, 105
 - ruang topologi termetriskan, 110
 - ruang-ruang homeomorfik, 135
 - selimut, 160
 - buka, 160
 - selisih himpunan, 5
 - sifat Archimedes, 46
 - sifat herediter, 145
 - sifat topologis, 136
 - subbasis, 204
 - subhimpunan kompak, 160
 - subhimpunan terbatas dari $\mathbb{R}^n$, 163
 - subhimpunan tertutup dari ruang metrik, 86
 - subruang dari ruang metrik, 98
 - subruang dari ruang topologi, 142
 - supremum, 45
 - terhubung lintasan, 189
 - secara lokal, 194
 - terhubung secara lokal, 184
 - titik akumulasi di ruang metrik, 86
 - titik batas dalam ruang topologi, 122
 - titik batas di ruang metrik, 86
 - titik interior, 111
 - titik interior dalam subhimpunan ruang metrik, 68
 - titik limit dalam ruang topologi, 120
 - titik limit di ruang metrik, 86
 - titik pemutus, 180
 - titik terasing, 128
 - titik terasing di ruang metrik, 86
 - topologi, 105
 - diskret, 106
 - indiskret, 106
 - Khalimsky, 212
 - kofinit, 107
 - komplemen berhingga, 107
 - limit bawah, 127
 - metrik, 106, 109
 - Titik Asal Ganda, 128
 - titik tertentu, 115
 - titik yang dikecualikan, 115
 - topologi hasil kali, 202, 204
 - topologi kotak, 202
 - topologi kuosien, 147
 - topologi relatif, 142
 - topologi subruang, 142
 - topologi terinduksi, 142
 - topologi yang dibangkitkan oleh basis, 109
 - tutupan dalam ruang topologi, 122
 - tutupan suatu himpunan di ruang metrik, 90