Solusi dan Penguasaan

Bab 1–20

Komponen pendamping orisinal berbahasa Indonesia

Dokumen ini memuat komponen tambahan mandiri untuk seluruh dua puluh bab *Euclidean Plane and Its Relatives: A Minimalist Introduction* karya Anton Petrunin, berdasarkan sumber kerja commit `0b0858e1e985f4c8dadbb6075ae9e095cd4a8981`. Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan tambahan orisinal yang tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin.

Tambahan ini ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Provenans produksi: **OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.** Dokumen ini bukan edisi resmi dan bukan bukti dukungan dari penulis sumber.

Checkpoint pembaca: Bab 1–20 saja

Batas pembaca dan cara memakai rujukan

Pembaca ini menggabungkan dua puluh unit solusi yang sudah diterima: Bab 1 (16 latihan), Bab 2 (7), Bab 3 (9), Bab 4 (5), Bab 5 (18), Bab 6 (8), dan Bab 7 (21), Bab 8 (13), Bab 9 (22), Bab 10 (14), Bab 11 (11), serta Bab 12 (10), serta Bab 13 (10), Bab 14 (15), Bab 15 (14), Bab 16 (9), serta Bab 17 (10), serta Bab 18 (16), serta Bab 19 (9), serta Bab 20 (16), sebanyak 253 solusi lengkap. Semua dua puluh bab sumber sudah termasuk, dan dokumen ini mencakup 253 solusi lengkap untuk seluruh latihan aktif dalam buku sumber.

Rujukan ke teorema, aksioma, latihan, atau gambar dalam buku sumber ditampilkan sebagai label stabil monospasi, misalnya `thm:perp-bisect`. Label eksternal itu menuju indeks di akhir pembaca; untuk pernyataan dan konteks penuh, gunakan edisi Indonesia sumber pada commit yang dicantumkan di halaman judul. Cara ini sengaja tidak menciptakan nomor teorema palsu ketika pembaca solusi berdiri sendiri.

Daftar isi

Batas pembaca dan cara memakai rujukan **i**

1 Solusi dan penguasaan Bab 1: Pendahuluan **1**

1.1 Kuadrat jarak pada garis bilangan real 1
1.2 Tiga metrik pada bidang 2
1.3 Ketaksamaan empat titik 3
1.4 Pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat injektif 4
1.5 Klasifikasi transformasi isometrik garis bilangan real 4
1.6 Isometri antara bidang Manhattan dan bidang maksimum 5
1.7 Semua transformasi isometrik bidang Manhattan 6
1.8 Grafik nilai mutlak sebagai garis metrik 8
1.9 Citra garis di bawah transformasi isometrik 9
1.10 Titik dengan jarak tertentu pada suatu sinar 9
1.11 Penyelesaian kongruensi $2\alpha \equiv 0$ 10
1.12 Kongruensi yang menjadi kesamaan biasa 11
1.13 Kekontinuan fungsi jarak 11
1.14 Komposisi pemetaan kontinu 12
1.15 Pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat kontinu 13
1.16 Kesamaan jarak sisi tidak selalu memberi kekongruenan terurut 14

Uji penguasaan Bab 1 **15**

2 Solusi dan penguasaan Bab 2: Aksioma **18**

2.1 Tak berhingga banyak titik dan garis 18
2.2 Sinar yang memiliki arah sama 19
2.3 Sudut nol menentukan sinar 20
2.4 Kriteria tiga titik segaris melalui sudut 20
2.5 Kesegarian melalui dua ukuran sudut 21
2.6 Keberadaan segitiga tak degenerat 22
2.7 Pencerminan titik mengirim garis ke garis 23

Uji penguasaan Bab 2 **24**

3 Solusi dan penguasaan Bab 3: Setengah bidang **26**

3.1 Pembalikan tanda sudut . . . 26
3.2 Kongruensi dua kali ukuran sudut . . . 27
3.3 Tiga sudut ketika satu titik berada di antara dua titik . . . 28
3.4 Sudut bertolak belakang dan sisi yang sama . . . 29
3.5 Sisi yang sama melalui tanda sudut . . . 30
3.6 Perpotongan dua cevian . . . 30
3.7 Ruas sinar dari dua titik berlawanan sisi . . . 31
3.8 Keunikan ukuran sudut . . . 32
3.9 Kriteria perpotongan dua lingkaran . . . 34

Uji penguasaan Bab 3 **36**

4 Solusi dan penguasaan Bab 4: Segitiga kongruen **38**

4.1 Sudut-sudut segitiga sama sisi . . . 38
4.2 Kriteria sisi-sisi-mediana . . . 39
4.3 Dua pasangan segitiga dari titik-titik antara . . . 40
4.4 Lema tiga paku . . . 42
4.5 Konstruksi citra titik oleh gerak . . . 43

Uji penguasaan Bab 4 **45**

5 Solusi dan penguasaan Bab 5: Garis tegak lurus **47**

5.1 Sudut lancip dan tumpul pada garis lurus . . . 47
5.2 Sisi bidang terhadap garis sumbu . . . 48
5.3 Sisi lebih panjang dan sudut berhadapan . . . 49
5.4 Titik tetap dan garis sumbu . . . 49
5.5 Konstruksi garis tegak lurus . . . 50
5.6 Dua pencerminan dan penggandaan sudut . . . 51
5.7 Tiga pencerminan . . . 52
5.8 Sudut lain pada segitiga siku-siku atau tumpul . . . 52
5.9 Titik di antara dua titik lebih dekat ke salah satu ujung . . . 53
5.10 Lintasan terpendek dengan pencerminan . . . 54
5.11 Posisi titik terhadap lingkaran . . . 55
5.12 Garis pusat dan tali busur bersama . . . 55
5.13 Konstruksi pusat lingkaran . . . 56
5.14 Batas dua titik potong lingkaran . . . 57

5.15 Kriteria lingkaran bersinggungan . . . 57
5.16 Tiga pusat pada dua titik potong . . . 58
5.17 Konstruksi garis singgung dari titik . . . 59
5.18 Konstruksi lingkaran singgung dua lingkaran . . . 60

6 Solusi dan penguasaan Bab 6: Segitiga sebangun 62
6.1 Segitiga titik tengah . . . 62
6.2 Dilatasi radial tiga titik . . . 63
6.3 Faktor global transformasi pelestari sudut . . . 64
6.4 Tinggi pada hipotenusa . . . 65
6.5 Kebalikan Teorema Pythagoras . . . 65
6.6 Empat pasangan segitiga sebangun . . . 66
6.7 Panjang cevian dari kesebangunan . . . 67
6.8 Produk pada garis sumbu hipotenusa . . . 68

7 Solusi dan penguasaan Bab 7: Garis sejajar 71
7.1 Garis sejajar dan garis tegak lurus . . . 71
7.2 Konstruksi garis sejajar . . . 72
7.3 Dua pencerminan pada garis tegak lurus . . . 73
7.4 Sudut yang sisinya berpasangan sejajar . . . 73
7.5 Kesebangunan dari garis sejajar . . . 74
7.6 Membagi ruas menjadi tiga bagian . . . 75
7.7 Jumlah mutlak sudut segitiga . . . 76
7.8 Konfigurasi dua segitiga sama kaki . . . 76
7.9 Sudut siku-siku dari segitiga sama kaki . . . 77
7.10 Jumlah sudut terarah segiempat . . . 78
7.11 Empat garis melalui satu titik . . . 79
7.12 Empat sisi sama menghasilkan belah ketupat . . . 79
7.13 Diagonal persegi panjang . . . 80
7.14 Diagonal belah ketupat . . . 81
7.15 Belah ketupat terinskripsi . . . 82
7.16 Koordinat dari dua sumbu tegak lurus . . . 82
7.17 Membangun segitiga dari tiga panjang . . . 83
7.18 Persamaan dan parameter garis . . . 84
7.19 Klasifikasi persamaan lingkaran . . . 85
7.20 Lokus lingkaran Apollonius . . . 86
7.21 Konstruksi lingkaran Apollonius . . . 87

8 Solusi dan penguasaan Bab 8: Geometri segitiga 90

8.1 Ketunggalan lingkaran luar . . . 90
8.2 Sistem ortosentrik . . . 91
8.3 Kesebangunan pada segitiga ortik . . . 92
8.4 Segiempat titik tengah . . . 93
8.5 Garis Euler melalui homoteti . . . 94
8.6 Garis bagi dalam dan luar saling tegak lurus . . . 95
8.7 Garis bagi yang juga garis tinggi . . . 95
8.8 Teorema garis bagi luar . . . 96
8.9 Garis bagi yang juga garis berat . . . 97
8.10 Konfigurasi garis bagi dan dua garis sejajar . . . 98
8.11 Panjang ruas singgung lingkaran dalam . . . 99
8.12 Ortosenter sebagai pusat lingkaran dalam atau eksenter . . . 99
8.13 Rasio pada garis bagi dan bukti lain pusat lingkaran dalam . . . 101

9 Solusi dan penguasaan Bab 9: Sudut keliling 104
9.1 Sudut dua garis sekan dan kuasa titik . . . 104
9.2 Identitas enam titik pada tiga tali busur konkuren . . . 106
9.3 Dua titik potong garis tinggi pada lingkaran luar . . . 106
9.4 Dua tali busur sejajar . . . 107
9.5 Pertanyaan setelah video tentang π dan kuadrat jari-jari . . . 108
9.6 Garis singgung dari lingkaran berdiameter OP . . . 109
9.7 Garis tegak lurus dari lingkaran berdiameter PQ . . . 109
9.8 Dua lingkaran berdiameter bersama pada A . . . 110
9.9 Konstruksi tegak lurus dengan penggaris saja . . . 111
9.10 Dua titik singgung dan titik tengah sekan . . . 112
9.11 Empat titik pada lingkaran berdiameter AB . . . 112
9.12 Tali busur pada dua lingkaran berpotongan . . . 113
9.13 Konstruksi segitiga dari keliling, sudut, dan sisi . . . 114
9.14 Memperbaiki ketaktepatan pada metode lingkaran bantu . . . 115
9.15 Proyeksi pada tiga garis bersudut sama . . . 116
9.16 Sudut dua garis berat dan segitiga sama kaki . . . 117
9.17 Garis Simson dari sebuah titik pada lingkaran luar . . . 118
9.18 Konstruksi titik yang melihat tiga sisi dengan sudut 120° . . . 119
9.19 Teorema Ptolemaios khusus untuk segitiga sama sisi . . . 120
9.20 Keberadaan dan ketunggalan busur dengan sinar singgung tertentu . . . 121
9.21 Limit sudut tali busur pada titik singgung . . . 122
9.22 Sudut antara pasangan sinar singgung dua busur . . . 123

10 Solusi dan penguasaan Bab 10: Inversi **126**

10.1 Proyeksi pada hipotenusa menghasilkan titik invers . . . 126
10.2 Rasio Apollonius yang konstan pada lingkaran inversi . . . 127
10.3 Pusat lingkaran dalam menjadi ortosenter setelah inversi . . . 128
10.4 Konstruksi penggaris dan jangka untuk titik invers . . . 129
10.5 Pusat lingkaran tidak dipetakan menjadi pusat inversnya . . . 130
10.6 Batas alat lingkaran umum: pusat . . . 131
10.7 Dua lingkaran bersinggungan menjadi dua garis sejajar . . . 132
10.8 Empat titik singgung pada satu lingkaran umum . . . 133
10.9 Garis singgung bersama dalam konfigurasi tiga lingkaran . . . 134
10.10 Dua pasangan titik invers terletak pada satu lingkaran umum . . . 135
10.11 Pusat dua lingkaran tegak lurus mempunyai invers yang sama . . . 136
10.12 Lingkaran keempat juga tegak lurus . . . 137
10.13 Konstruksi lingkaran umum yang tegak lurus terhadap dua lingkaran . . . 138
10.14 Konstruksi lingkaran umum yang tegak lurus terhadap tiga lingkaran . . . 139

11 Solusi dan penguasaan Bab 11: Bidang netral **144**

11.1 Langkah pertama yang gagal pada teorema sudut singgung . . . 144
11.2 Garis bagi yang juga median memaksa segitiga sama kaki . . . 145
11.3 Identitas sudut segiempat tali busur pada bidang netral . . . 146
11.4 Kriteria kesejajaran dari dua sudut pada bidang netral . . . 147
11.5 Syarat kekongruenan sisi-sudut-sudut dalam geometri netral . . . 149
11.6 Titik dalam pada sisi tidak dapat terjauh dari kedua ujung . . . 150
11.7 Sisi puncak segiempat dua-siku tidak lebih pendek . . . 151
11.8 Defek bersifat aditif ketika segitiga dibelah . . . 152
11.9 Defek dipertahankan oleh konstruksi pencerminan titik . . . 154
11.10 Sisi berhadapan pada persegi panjang netral sama panjang . . . 155
11.11 Satu persegi panjang memaksa semua defek segitiga nol . . . 156

12 Solusi dan penguasaan Bab 12: Bidang hiperbolik **160**

12.1 Dua titik ideal menentukan satu garis-h . . . 160
12.2 Satu titik ideal dan satu titik-h menentukan satu garis-h . . . 161
12.3 Kapan ruas-h merupakan ruas lurus Euklides . . . 162
12.4 Langkah Euklides yang sama memberi jarak-h yang lebih besar . . . 163
12.5 Garis-h tegak lurus melalui titik luar: ada dan tunggal . . . 164
12.6 Segitiga-h tanpa lingkaran luar-h . . . 165
12.7 Tiga konfigurasi kesejajaran garis-h . . . 166
12.8 Turunan dan identitas dasar fungsi hiperbolik . . . 168

12.9 Koordinat radial sebagai tangen hiperbolik . . . 169
12.10 Empat rumus jarak-h dari titik invers . . . 170

13 Solusi dan penguasaan Bab 13: Geometri bidang-h 175
13.1 Sudut ke sisi keempat segiempat Lambert . . . 175
13.2 Kriteria garis tegak lurus bersama . . . 176
13.3 Jarak dari sudut siku-siku ke hipotenusa . . . 178
13.4 Sudut segitiga sama sisi yang sangat panjang . . . 179
13.5 Supremum sisi pada segiempat tiga siku-siku . . . 181
13.6 Lokus pencerminan titik terhadap titik-titik pada garis . . . 182
13.7 Segitiga siku-siku sama kaki pada horosiklus . . . 183
13.8 Transformasi yang mempertahankan sudut adalah isometri . . . 184
13.9 Pertumbuhan keliling lingkaran-h . . . 185
13.10 Batas ketat hipotenusa hiperbolik . . . 186

14 Solusi dan penguasaan Bab 14: Geometri afin 190
14.1 Garis sejajar tetap sejajar . . . 190
14.2 Empat keluarga pemetaan afin dalam koordinat . . . 191
14.3 Dari preservasi segaris ke transformasi afin . . . 192
14.4 Bijeksi yang memetakan lingkaran ke lingkaran . . . 193
14.5 Titik tengah sebagai konstruksi afin . . . 194
14.6 Konstruksi empat operasi real secara afin . . . 195
14.7 Pusat lingkaran dengan penggaris dan alat sejajar . . . 196
14.8 Kemustahilan konstruksi tegak lurus secara afin . . . 197
14.9 Aturan jajar genjang dan kesamaan vektor . . . 198
14.10 Kontinuitas transformasi afin . . . 199
14.11 Bentuk koordinat setiap transformasi afin . . . 200
14.12 Transformasi afin yang mempertahankan sebuah lingkaran . . . 201
14.13 Klasifikasi transformasi inversif . . . 202
14.14 Dua konsekuensi ekstrem dari multiplikativitas . . . 204
14.15 Ceva dan Van Aubel dari Menelaus . . . 205

15 Solusi dan penguasaan Bab 15: Geometri proyektif 209
15.1 Rasio silang di bawah transformasi proyektif . . . 210
15.2 Dua proyeksi dan identitas hasil kali . . . 211
15.3 Pembuktian lengkap teorema Pappus . . . 212
15.4 Kebalikan parsial Pappus sebagai pelabelan ulang . . . 214
15.5 Garis sejajar dari jajar genjang dengan penggaris . . . 215
15.6 Konfigurasi dual tanpa ketergantungan pada gambar . . . 216

15.7 Mengapa bidang Euklides tidak mempunyai dualitas . . . 218
15.8 Dualitas koordinat dan garis ideal . . . 218
15.9 Teorema dual Pappus . . . 220
15.10 Garis sejajar melalui titik dengan penggaris . . . 221
15.11 Membalik konstruksi polar . . . 224
15.12 Garis singgung dari titik luar dengan penggaris . . . 224
15.13 Pusat bersama dua lingkaran sepusat . . . 225
15.14 Garis tegak lurus dengan penggaris dan polaritas . . . 227

16 Solusi dan penguasaan Bab 16: Wawasan geometri sferis 230
16.1 Defek segitiga sferis . . . 230
16.2 Titik tengah dan garis berat di bawah proyeksi sentral . . . 231
16.3 Sudut siku-siku radial di bawah proyeksi sentral . . . 233
16.4 Proyeksi stereografik sebagai inversi ruang . . . 234
16.5 Citra stereografik lingkaran besar . . . 235
16.6 Faktor skala lokal proyeksi stereografik . . . 236
16.7 Penampang lingkaran pada kerucut lingkaran miring . . . 238
16.8 Segitiga siku-siku sferis dengan dua kaki $\pi/4$ . . . 239
16.9 Substitusi Taurinus sebagai perhitungan formal . . . 241

17 Solusi dan penguasaan Bab 17: Model proyektif 245
17.1 Tiga lingkaran ortogonal dan tiga tali busur . . . 245
17.2 Bijeksi khusus menggandakan jarak radial . . . 246
17.3 Titik tengah dan kekonkurenan garis berat-h . . . 248
17.4 Dikotomi tiga garis tinggi hiperbolik . . . 249
17.5 Kriteria kutub untuk garis tegak lurus-h . . . 250
17.6 Rumus sudut paralelisme dari model proyektif . . . 252
17.7 Jari-jari dalam segitiga ideal . . . 253
17.8 Teorema Pythagoras hiperbolik dalam model proyektif . . . 254
17.9 Konstruksi Bolyai pada bidang Euklides . . . 256
17.10 Rekonstruksi garis tegak lurus bersama . . . 257

18 Koordinat kompleks 261
18.1 Nilai mutlak hasil kali . . . 261
18.2 Ketaksamaan Ptolemy dari ketaksamaan segitiga . . . 262
18.3 Jumlah sudut terarah suatu segitiga . . . 263
18.4 Kesebangunan yang dikodekan oleh perkalian kompleks . . . 264
18.5 Rasio silang real dan segiempat terinskripsi . . . 265
18.6 Tiga persegi dan jumlah tiga sudut . . . 266

18.7 Enam rasio silang dan penutupan enam lingkaran . . . 267
18.8 Empat segitiga sebangun dari satu kesamaan kompleks . . . 269
18.9 Pengamatan transformasi Möbius . . . 270
18.10 Invers transformasi linear fraksional . . . 271
18.11 Transformasi Möbius yang ditentukan tiga titik . . . 272
18.12 Inversi sebagai konjugasi dan transformasi Möbius . . . 273
18.13 Invariansi rasio silang kompleks . . . 274
18.14 Bentuk normal automorfisme cakram pada kasus kesamaan . . . 275
18.15 Jarak cakram dan bentuk rasional Schwarz–Pick . . . 276
18.16 Lema Schwarz sebagai akibat Schwarz–Pick . . . 277

19 Konstruksi geometri **280**
19.1 Kalkulator panjang dengan penggaris dan jangka . . . 281
19.2 Diagonal dan konstruksi segilima beraturan . . . 282
19.3 Membagi tiga ruas dengan penggaris segitiga . . . 284
19.4 Kemustahilan segitiga sama sisi dengan penggaris segitiga . . . 285
19.5 Kemustahilan membagi dua sudut dengan penggaris segitiga . . . 286
19.6 Kemustahilan persegi dengan penggaris segitiga 30 derajat . . . 286
19.7 Memverifikasi segitiga sama sisi dan garis bagi . . . 287
19.8 Titik tengah tidak dapat diverifikasi hanya dengan penggaris . . . 289
19.9 Urutan kekuatan empat himpunan alat . . . 290

20 Luas **295**
20.1 Konveksitas segitiga padat . . . 296
20.2 Karakterisasi titik sudut dengan garis penyangga . . . 297
20.3 Persegi padat bukan himpunan degenerat . . . 298
20.4 Lingkaran bukan himpunan poligonal . . . 299
20.5 Dua jajar genjang di antara pasangan garis sejajar . . . 299
20.6 Tiga hasil kali tinggi dan sisi . . . 300
20.7 Setengah luas jajar genjang dari titik interior . . . 301
20.8 Identitas hasil kali luas di perpotongan diagonal . . . 302
20.9 Luas sebagai setengah keliling kali jari-jari dalam . . . 303
20.10 Subdivisi hingga dan ketunggalan luas . . . 304
20.11 Pembuktian diseksi kedua teorema Pythagoras . . . 305
20.12 Jumlah tiga jarak dalam segitiga sama sisi . . . 306
20.13 Enam luas sama yang dibentuk garis berat . . . 307
20.14 Rasio luas dan kasus internal teorema Ceva . . . 308
20.15 Rasio silang melalui perbandingan luas . . . 309

20.16 Cakram satuan adalah kuadrabel 310

Indeks label sumber eksternal **314**

Atribusi, lisensi, dan provenans **320**

Bab 1

Solusi dan penguasaan Bab 1: Pendahuluan

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Komponen ini merujuk petunjuk tersebut tanpa mengganti atau menisbatkannya ulang. Semua petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan tambahan terpisah berlisensi CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin.

1.1 Kuadrat jarak pada garis bilangan real

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex001`. **Label sumber:** `ex:dist-square`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa $d(A, B) = |A - B|^2$ bukan metrik pada $\mathbb{R}$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:dist-square` dalam berkas `source/id-ID/hints.tex`. Rentang dan digest tepatnya tercatat dalam `manifest.json`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Metrik harus memenuhi ketaksamaan segitiga untuk setiap tiga titik.
2. Uji tiga titik berjarak sama pada garis bilangan real, misalnya $0, 1, 2$.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $A = 0$, $B = 1$, dan $C = 2$, diperoleh $d(A, C) = 4$, sedangkan $d(A, B) + d(B, C) = 2$. Jadi ketaksamaan segitiga gagal.

Solusi lengkap. Jika d merupakan metrik, harus berlaku

$$d(0, 2) \le d(0, 1) + d(1, 2).$$

Namun, menurut fungsi yang diberikan,

$$d(0, 2) = |0 - 2|^2 = 4, \qquad d(0, 1) + d(1, 2) = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Ketaksamaan $4 \le 2$ salah. Satu pelanggaran sudah cukup untuk menyimpulkan bahwa $d(A, B) = |A - B|^2$ bukan metrik pada $\mathbb{R}$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kepositifan dan simetri saja belum cukup; sebuah fungsi jarak juga harus memenuhi ketaksamaan segitiga untuk semua tripel titik.

1.2 Tiga metrik pada bidang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex002`. **Label sumber:** `ex:d_1+d_2+d_infty`.

Soal sumber. Buktikan bahwa d_1, d_2, dan d_∞ merupakan metrik pada $\mathbb{R}^2$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:d_1+d_2+d_infty` dalam `source/id-ID/hints.tex`; identitas rentang dan digest terdapat dalam `manifest.json`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Periksa kepositifan, pemisahan titik, dan simetri langsung dari rumus.
2. Untuk d_1 dan d_∞, gunakan $|s+t| \le |s| + |t|$ pada setiap koordinat.
3. Untuk d_2, tulis perpindahan $A \to C$ sebagai jumlah perpindahan $A \to B$ dan $B \to C$, lalu gunakan ketaksamaan Cauchy dua dimensi.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga fungsi bernilai tak negatif, simetris, dan bernilai nol tepat ketika kedua koordinat titik sama. Ketaksamaan segitiga masing-masing mengikuti ketaksamaan nilai mutlak, ketaksamaan Cauchy, dan pembatasan setiap koordinat oleh norma maksimum.

Solusi lengkap. Untuk $A = (x_A, y_A)$ dan $B = (x_B, y_B)$, setiap rumus hanya melibatkan nilai mutlak atau akar jumlah kuadrat. Karena itu, ketiga fungsi tak negatif dan simetris. Masing-masing bernilai nol jika dan hanya jika $x_A = x_B$ serta $y_A = y_B$, yakni jika dan hanya jika $A = B$.

Tinggal dibuktikan ketaksamaan segitiga. Tuliskan

$$u = (u_1, u_2) = (x_B - x_A, y_B - y_A), \qquad v = (v_1, v_2) = (x_C - x_B, y_C - y_B).$$

Maka perpindahan $A \to C$ adalah $u + v$.

Untuk d_1,

$$\begin{aligned} d_1(A, C) &= |u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| \\ &\le |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| \\ &= d_1(A, B) + d_1(B, C). \end{aligned}$$

Untuk d_2, identitas

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \ge 0$$

memberikan $u_1 v_1 + u_2 v_2 \le \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} d_2(A, C)^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ &\le \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Kedua ruas tak negatif, sehingga pengambilan akar memberi $d_2(A,C) \le d_2(A,B) + d_2(B,C)$.

Untuk d_∞, bagi $i = 1, 2$ berlaku

$$|u_i + v_i| \le |u_i| + |v_i| \le \max_j |u_j| + \max_j |v_j|.$$

Mengambil maksimum atas kedua koordinat menghasilkan

$$d_\infty(A,C) \le d_\infty(A,B) + d_\infty(B,C).$$

Jadi ketiganya memenuhi seluruh aksioma metrik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Untuk d_2, menguadratkan ketaksamaan hanya sah setelah memastikan kedua ruas tak negatif; untuk d_∞, maksimum harus diambil setelah setiap koordinat dibatasi.

1.3 Ketaksamaan empat titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex003`. **Label sumber:** `ex:4-triangle`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa

$$AB + PQ \le AP + AQ + BP + BQ$$

untuk sembarang empat titik A, B, P, Q dalam ruang metrik.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:4-triangle` dalam `source/id-ID/hints.tex`; rentang dan digest dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Batasi AB sekali melalui P dan sekali melalui Q.
2. Batasi PQ sekali melalui A dan sekali melalui B.
3. Jumlahkan keempat ketaksamaan, lalu bagi dua.

Jawaban atau pemeriksaan. Empat ketaksamaan segitiga menghasilkan $2(AB + PQ) \le 2(AP + AQ + BP + BQ)$.

Solusi lengkap. Ketaksamaan segitiga memberikan

$$AB \le AP + PB, \qquad AB \le AQ + QB,$$

serta

$$PQ \le PA + AQ, \qquad PQ \le PB + BQ.$$

Setelah keempatnya dijumlahkan dan simetri jarak $PA = AP$, $PB = BP$, $QA = AQ$, serta $QB = BQ$ digunakan, diperoleh

$$2AB + 2PQ \le 2AP + 2AQ + 2BP + 2BQ.$$

Pembagian dengan 2 membuktikan ketaksamaan yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Satu lintasan per ruas menghasilkan koefisien yang tidak seimbang; keempat ketaksamaan diperlukan agar setiap jarak di ruas kanan muncul tepat dua kali.

1.4 Pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat injektif

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex004`. **Label sumber:** `ex:dist-preserv=>injective`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat injektif.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:dist-preserv=>injective` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mengunci rentang dan digest-nya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Mulailah dengan dua titik $A \neq B$.
2. Gunakan aksioma pemisahan titik untuk menyatakan $d_{\mathcal{X}}(A, B) > 0$.
3. Pertahankan nilai jarak itu di bawah f.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $A \neq B$, maka jarak citranya positif; dengan demikian $f(A) \neq f(B)$.

Solusi lengkap. Ambil $A, B \in \mathcal{X}$ dengan $A \neq B$. Aksioma metrik memberi $d_{\mathcal{X}}(A, B) > 0$. Karena f mempertahankan jarak,

$$d_{\mathcal{Y}}(f(A), f(B)) = d_{\mathcal{X}}(A, B) > 0.$$

Jika $f(A) = f(B)$, ruas kiri akan sama dengan nol, suatu kontradiksi. Maka $f(A) \neq f(B)$ untuk setiap $A \neq B$, sehingga f injektif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak perlu mengasumsikan bahwa f surjektif. Sifat mempertahankan jarak saja sudah memaksa injektivitas.

1.5 Klasifikasi transformasi isometrik garis bilangan real

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex005`. **Label sumber:** `ex:motion-of-R`.

Soal sumber. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan transformasi isometrik, buktikan bahwa $f(x) = f(0) + x$ untuk semua x, atau $f(x) = f(0) - x$ untuk semua x.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:motion-of-R` dalam berkas petunjuk Indonesia; identitas tepatnya terdapat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $a = f(0)$ dan $b = f(1)$; jarak memberi $|b - a| = 1$.
2. Untuk suatu x, bandingkan jarak $f(x)$ terhadap a dan b dengan jarak x terhadap 0 dan 1.
3. Kuadratkan dua persamaan nilai mutlak dan kurangkan untuk menentukan $f(x)$ tanpa ambiguitas tanda.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $f(1) = f(0) + 1$, maka $f(x) = f(0) + x$; jika $f(1) = f(0) - 1$, maka $f(x) = f(0) - x$.

Solusi lengkap. Tuliskan $a = f(0)$ dan $b = f(1)$. Karena f mempertahankan jarak,

$$|b - a| = |1 - 0| = 1,$$

sehingga $b = a + 1$ atau $b = a - 1$.

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sembarang dan tuliskan $u = f(x) - a$. Selalu berlaku $|u| = |x|$. Jika $b = a+1$, pelestarian jarak dari 1 juga memberi $|u - 1| = |x - 1|$. Setelah kedua persamaan dikuadratkan,

$$u^2 = x^2, \qquad (u - 1)^2 = (x - 1)^2.$$

Mengurangkan persamaan pertama dari yang kedua menghasilkan $-2u + 1 = -2x + 1$, sehingga $u = x$ dan $f(x) = a + x$.

Jika $b = a - 1$, diperoleh $|u + 1| = |x - 1|$. Dari

$$u^2 = x^2, \qquad (u + 1)^2 = (x - 1)^2$$

diperoleh $2u + 1 = -2x + 1$, sehingga $u = -x$ dan $f(x) = a - x$. Kedua rumus tersebut memang mendefinisikan transformasi isometrik garis bilangan real.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Persamaan $|f(x) - a| = |x|$ saja menyisakan tanda yang dapat tampak bergantung pada x; jarak terhadap titik kedua menghapus ambiguitas tersebut secara global.

1.6 Isometri antara bidang Manhattan dan bidang maksimum

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex006`. **Label sumber:** `ex:d_1=d_infty`.

Soal sumber. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}^2, d_1)$ isometrik dengan $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:d_1=d_infty` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mencatat rentang dan digest tepatnya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan $F(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. Buktikan identitas $\max\{|p + q|, |p - q|\} = |p| + |q|$.
3. Tuliskan invers F untuk memeriksa bijektivitas.

Jawaban atau pemeriksaan. Pemetaan $F(x,y) = (x+y, x-y)$ adalah bijeksi dengan invers $F^{-1}(s,t) = ((s+t)/2, (s-t)/2)$ dan memenuhi $d_\infty(F(A),F(B)) = d_1(A,B)$.

Solusi lengkap. Untuk bilangan real p, q berlaku

$$\max\{|p+q|, |p-q|\} = |p| + |q|.$$

Jika $pq \geq 0$, nilai pertama dalam maksimum sama dengan $|p|+|q|$; jika $pq \leq 0$, nilai kedua yang sama dengan jumlah tersebut.

Definisikan $F(x,y) = (x+y, x-y)$. Untuk $A = (x_A, y_A)$ dan $B = (x_B, y_B)$, ambil $p = x_A - x_B$ serta $q = y_A - y_B$. Identitas di atas memberi

$$\begin{aligned} d_\infty(F(A),F(B)) &= \max\{|p+q|, |p-q|\} \\ &= |p| + |q| = d_1(A,B). \end{aligned}$$

Selain itu,

$$F^{-1}(s,t) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right),$$

sehingga F bijektif. Jadi F merupakan isometri yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pemetaan yang mempertahankan jarak belum disebut isometri dalam konvensi buku ini sebelum bijektivitasnya juga diperiksa.

1.7 Semua transformasi isometrik bidang Manhattan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex007`. **Label sumber:** `ad-ex:motions of Manhattan plane`.

Soal sumber. Uraikan semua transformasi isometrik bidang Manhattan $(\mathbb{R}^2, d_1)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin, termasuk kriteria ketunggalan titik tengah, tetap dipertahankan pada entri `ad-ex:motions of Manhattan plane` dalam berkas petunjuk Indonesia. Rentang dan digest tepatnya dikunci oleh manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Buktikan bahwa dua titik berbeda mempunyai titik tengah tunggal tepat ketika salah satu koordinatnya sama.
2. Buktikan lemma bahwa isometri surjektif antara ruang bernorma real mempertahankan titik tengah aljabar; dari sana, setelah translasi, isometri tersebut linear.
3. Klasifikasikan matriks linear yang mempertahankan norma $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ dengan melihat citra $(1,0)$ dan $(0,1)$.

Jawaban atau pemeriksaan. Semua dan hanya semua transformasi berikut merupakan transformasi isometrik:

$$(x,y) \longmapsto (\varepsilon_1 x + a, \varepsilon_2 y + b)$$

atau

$$(x,y) \longmapsto (\varepsilon_1 y + a, \varepsilon_2 x + b), \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Solusi lengkap. Pertama, kita verifikasi pengamatan geometris dalam petunjuk penulis. Setelah menukar atau membalik koordinat dan melakukan translasi, dua titik dapat ditulis sebagai $P = (0, 0)$ dan $Q = (u, v)$ dengan $u, v \geq 0$. Jika $M = (s, t)$ merupakan titik tengah metrik, maka

$$d_1(P, M) + d_1(M, Q) = d_1(P, Q).$$

Kesamaan dalam ketaksamaan segitiga koordinat memaksa $0 \leq s \leq u$ dan $0 \leq t \leq v$, sedangkan syarat kedua jarak sama memaksa

$$s + t = \frac{u + v}{2}.$$

Jika $u = 0$ atau $v = 0$, sistem ini mempunyai tepat satu solusi. Jika $u, v > 0$, irisan garis tersebut dengan persegi panjang $[0, u] \times [0, v]$ merupakan ruas dengan lebih dari satu titik. Jadi dua titik berbeda mempunyai titik tengah tunggal tepat ketika koordinat x-nya sama atau koordinat y-nya sama.

Sekarang kita tutup langkah global yang diperlukan. Kita gunakan lemma berikut, dan menyertakan buktinya agar klasifikasi tidak bergantung pada teorema yang tidak dinyatakan.

Lemma. Setiap isometri surjektif $T : V \to W$ antara ruang bernorma real mempertahankan titik tengah aljabar.

Untuk $x, y \in V$, tetapkan $m = (x + y)/2$, $m' = (T(x) + T(y))/2$, dan $\delta = \|T(m) - m'\|$. Selalu $\delta \leq \|x - y\|/2$. Refleksi $R(w) = T(x) + T(y) - w$ merupakan isometri W yang menukar $T(x)$ dan $T(y)$. Maka

$$S = T^{-1} \circ R \circ T$$

merupakan isometri surjektif V yang menukar x dan y, dan

$$\|S(m) - m\| = \|T(S(m)) - T(m)\| = \|T(x) + T(y) - 2T(m)\| = 2\delta.$$

Konstruksi yang sama dapat diulangi, sehingga ada isometri yang menukar x, y dengan cacat titik tengah $2^n\delta$ untuk setiap n. Namun setiap cacat demikian paling besar $\|x - y\|/2$. Karena itu $\delta = 0$, sehingga $T(m) = m'$. Lemma terbukti.

Ambil sekarang transformasi isometrik F pada bidang Manhattan dan definisikan $G(z) = F(z) - F(0)$. Maka $G(0) = 0$ dan lemma menunjukkan bahwa G mempertahankan titik tengah. Dari

$$G\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{G(x) + G(y)}{2}, \qquad G\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{G(z)}{2}$$

diperoleh $G(x + y) = G(x) + G(y)$. Homogenitas rasional mengikuti dengan induksi. Karena translasi pada ruang target mempertahankan jarak dan F isometrik, G juga isometrik, khususnya 1-Lipschitz. Untuk $r \in \mathbb{R}$, pilih barisan (q_n) dalam $\mathbb{Q}$ dengan $q_n \to r$. Maka, untuk setiap x,

$$G(rx) = G\left(\lim_{n\to\infty} q_n x\right) = \lim_{n\to\infty} G(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n G(x) = rG(x),$$

karena pemetaan 1-Lipschitz bersifat kontinu. Jadi homogenitas real berlaku dan G linear.

Tuliskan $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $u = G(e_1) = (u_1, u_2)$, dan $v = G(e_2) = (v_1, v_2)$. Karena G mempertahankan norma, $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$ dan

$$\|u + v\|_1 = \|e_1 + e_2\|_1 = 2, \qquad \|u - v\|_1 = \|e_1 - e_2\|_1 = 2.$$

Kesamaan pertama dalam ketaksamaan segitiga nilai mutlak memaksa $u_i v_i \geq 0$ bagi $i = 1, 2$, sedangkan kesamaan kedua memaksa $u_i v_i \leq 0$. Jadi $u_i v_i = 0$ pada kedua koordinat. Karena u dan v tak nol serta bebas linear, keduanya menempati sumbu koordinat yang berbeda; normanya satu, sehingga masing-masing adalah salah satu dari $\pm e_1, \pm e_2$. Dengan demikian G adalah perubahan tanda koordinat, mungkin disertai pertukaran kedua koordinat. Menambahkan kembali $F(0) = (a, b)$ menghasilkan tepat dua keluarga rumus pada jawaban.

Sebaliknya, setiap rumus itu bijektif dan mempertahankan $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, sehingga semuanya memang transformasi isometrik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Petunjuk tentang titik tengah belum, dengan sendirinya, membuktikan bahwa isometri bersifat linear. Langkah afinitas di atas diperlukan untuk meniadakan kemungkinan pemetaan global yang berubah aturan dari satu daerah ke daerah lain.

1.8 Grafik nilai mutlak sebagai garis metrik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex008`. **Label sumber:** `ex:y=|x|`.

Soal sumber. Tentukan apakah grafik $y = |x|$ membentuk garis dalam $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$, dan $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, serta jelaskan alasannya.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:y=|x|` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mengunci rentang dan digest-nya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pada salinan garis bilangan real, untuk tiga titik selalu ada satu titik yang berada di antara dua lainnya, sehingga salah satu ketaksamaan segitiga menjadi kesamaan.
2. Uji tiga titik $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$ untuk d_1 dan d_2.
3. Untuk d_∞, parametrisasi grafik dengan koordinat x.

Jawaban atau pemeriksaan. Grafik tersebut bukan garis untuk d_1 maupun d_2, tetapi merupakan garis untuk d_∞.

Solusi lengkap. Ambil

$$A = (-1, 1), \qquad B = (0, 0), \qquad C = (1, 1).$$

Dalam metrik d_1, ketiga jarak AB, BC, AC semuanya sama dengan 2; jadi setiap ketaksamaan segitiga bersifat ketat. Dalam metrik d_2,

$$AB = BC = \sqrt{2}, \qquad AC = 2,$$

dan lagi ketiga ketaksamaan segitiga bersifat ketat. Jika ketiga titik itu terletak pada suatu subruang yang isometrik dengan $\mathbb{R}$, salah satunya harus terletak di antara dua lainnya, sehingga salah satu jarak harus sama dengan jumlah dua jarak lainnya. Kontradiksi ini membuktikan bahwa grafik bukan garis untuk d_1 dan d_2.

Untuk d_∞, definisikan

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}, \qquad \phi(t) = (t, |t|).$$

Pemetaan ini bijektif. Untuk $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d_\infty(\phi(s), \phi(t)) &= \max\{|s - t|,\, ||s| - |t||\} \\ &= |s - t|, \end{aligned}$$

karena $||s| - |t|| \le |s - t|$. Jadi ϕ adalah isometri dari garis bilangan real ke grafik tersebut, sehingga grafik itu merupakan garis dalam metrik d_∞.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Bentuk grafik secara visual tidak menentukan apakah ia merupakan garis; definisi bergantung pada metrik terinduksi dan keberadaan isometri ke $\mathbb{R}$.

1.9 Citra garis di bawah transformasi isometrik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex009`. **Label sumber:** `ex:line-motion`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap transformasi isometrik memetakan sebuah garis ke sebuah garis.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:line-motion` dalam berkas petunjuk Indonesia; rentang dan digest tepatnya tercatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan garis ℓ sebagai citra suatu isometri $\phi : \mathbb{R} \to \ell$.
2. Batasi transformasi isometrik m pada ℓ.
3. Susun $m|_\ell$ dengan ϕ dan periksa kodomainnya.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\phi : \mathbb{R} \to \ell$ isometri dan m transformasi isometrik, maka $m \circ \phi : \mathbb{R} \to m(\ell)$ adalah isometri bijektif.

Solusi lengkap. Karena ℓ sebuah garis, terdapat isometri bijektif $\phi : \mathbb{R} \to \ell$. Pembatasan $m|_\ell$ mempertahankan jarak dan merupakan bijeksi dari ℓ ke citranya $m(\ell)$. Oleh karena itu,

$$m \circ \phi : \mathbb{R} \longrightarrow m(\ell)$$

merupakan komposisi dua isometri bijektif, sehingga juga isometri bijektif. Maka $m(\ell)$ isometrik dengan $\mathbb{R}$ dan, berdasarkan definisi, merupakan garis.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Surjektivitas yang diperlukan di sini adalah surjektivitas pembatasan ke citranya $m(\ell)$, bukan pernyataan bahwa $m(\ell)$ sama dengan seluruh ruang.

1.10 Titik dengan jarak tertentu pada suatu sinar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex010`. **Label sumber:** `ex:trig==`.

Soal sumber. Untuk $r \geq 0$ dan sinar $[PQ)$, tunjukkan bahwa terdapat tepat satu $X \in [PQ)$ dengan $PX = r$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk aktif karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:trig==` dalam berkas petunjuk Indonesia. Manifest mencatat baris aktif 140–148; komentar lama setelahnya bukan bagian dari petunjuk aktif.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan definisi formal sinar sebagai ruang yang isometrik dengan $[0, \infty)$.
2. Pilih isometri yang mengirim P ke 0.
3. Di $[0, \infty)$, bilangan r sendiri adalah satu-satunya titik berjarak r dari 0.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $f : [PQ) \to [0, \infty)$ adalah isometri dengan $f(P) = 0$, maka titik yang diminta adalah $X = f^{-1}(r)$.

Solusi lengkap. Berdasarkan definisi sinar, terdapat isometri bijektif

$$f : [PQ) \longrightarrow [0, \infty)$$

dengan $f(P) = 0$. Untuk setiap $X \in [PQ)$,

$$PX = |f(X) - f(P)| = |f(X)| = f(X),$$

karena $f(X) \geq 0$. Karena $r \geq 0$, surjektivitas f memberikan suatu $X = f^{-1}(r)$. Persamaan di atas memberi $PX = r$. Jika Y juga memenuhi $PY = r$, maka $f(Y) = r = f(X)$; injektivitas f memberi $Y = X$. Jadi keberadaan dan ketunggalan keduanya terbukti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ketunggalan tidak berasal dari bentuk gambar sinar, melainkan dari bijektivitas isometri yang menjadi bagian dari definisi formal sinar.

1.11 Penyelesaian kongruensi $2\alpha \equiv 0$

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex011`. **Label sumber:** `ex:2a=0`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa $2\alpha \equiv 0$ jika dan hanya jika $\alpha \equiv 0$ atau $\alpha \equiv \pi$, dengan kongruensi modulo 2π.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:2a=0` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mengunci rentang dan digest-nya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ubah $2\alpha \equiv 0$ menjadi persamaan $2\alpha = 2\pi k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pisahkan kasus k genap dan k ganjil.
3. Periksa pula arah kebalikannya.

Jawaban atau pemeriksaan. Solusi modulo 2π tepat dua kelas, yaitu 0 dan π.

Solusi lengkap. Jika $2\alpha \equiv 0$, terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$2\alpha = 2\pi k, \qquad \text{jadi} \qquad \alpha = \pi k.$$

Jika $k = 2n$ genap, maka $\alpha = 2\pi n \equiv 0$. Jika $k = 2n + 1$ ganjil, maka $\alpha = \pi + 2\pi n \equiv \pi$.

Sebaliknya, jika $\alpha \equiv 0$, maka $\alpha = 2\pi n$ dan $2\alpha = 4\pi n \equiv 0$. Jika $\alpha \equiv \pi$, maka $\alpha = \pi + 2\pi n$ dan $2\alpha = 2\pi(2n + 1) \equiv 0$. Kedua arah telah dibuktikan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Membagi kongruensi dengan 2 tidak menghasilkan satu kelas saja, karena perkalian dengan bilangan nonunit modulo 2π tidak injektif.

1.12 Kongruensi yang menjadi kesamaan biasa

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex012`. **Label sumber:** `ex:a+b==c`.

Soal sumber. Andaikan $0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$, dan $0 < \gamma < 2\pi$. Buktikan bahwa $\alpha + \beta \equiv \gamma$ mengakibatkan $\alpha + \beta = \gamma$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:a+b==c` dalam berkas petunjuk Indonesia; rentang dan digest tepatnya ada dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $s = \alpha + \beta$ dan tentukan interval yang memuat s.
2. Kongruensi menyatakan bahwa $s - \gamma$ adalah kelipatan 2π.
3. Gunakan batas ketat bagi $s - \gamma$ untuk menentukan kelipatan tersebut.

Jawaban atau pemeriksaan. Karena $s - \gamma \in (-2\pi, 2\pi)$, satu-satunya kelipatan 2π yang mungkin adalah nol.

Solusi lengkap. Tuliskan $s = \alpha + \beta$. Hipotesis memberi $s \in [0, 2\pi]$, sedangkan $\gamma \in (0, 2\pi)$. Jadi

$$-2\pi < s - \gamma < 2\pi.$$

Dari $s \equiv \gamma$ terdapat $k \in \mathbb{Z}$ dengan $s - \gamma = 2\pi k$. Satu-satunya kelipatan 2π yang terletak ketat di antara -2π dan 2π adalah 0. Maka $k = 0$ dan $s = \gamma$, yaitu $\alpha + \beta = \gamma$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ujung interval bagi s boleh mencapai 0 atau 2π; justru syarat ketat $0 < \gamma < 2\pi$ yang membuat selisih tetap berada dalam interval terbuka.

1.13 Kekontinuan fungsi jarak

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex013`. **Label sumber:** `ex:dist-cont`.

Soal sumber. Dalam ruang metrik $\mathcal{X}$, buktikan bahwa (a) $B \mapsto d_{\mathcal{X}}(A, B)$ kontinu untuk A tetap, dan (b) $(A, B) \mapsto d_{\mathcal{X}}(A, B)$ kontinu pada setiap pasangan.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:dist-cont` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mengunci rentang dan digest-nya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Turunkan ketaksamaan segitiga terbalik $|d(A,B') - d(A,B)| \le d(B',B)$.
2. Untuk dua variabel, sisipkan $d(A,B')$ di antara $d(A',B')$ dan $d(A,B)$.
3. Pilih $\delta = \varepsilon$ untuk (a) dan $\delta = \varepsilon/2$ untuk (b).

Jawaban atau pemeriksaan. Fungsi jarak terhadap satu titik bersifat 1-Lipschitz. Fungsi jarak dua variabel memenuhi

$$|d(A',B') - d(A,B)| \le d(A',A) + d(B',B).$$

Solusi lengkap. Untuk (a), ketaksamaan segitiga memberi

$$d(A,B') \le d(A,B) + d(B,B')$$

dan, setelah B serta B' ditukar,

$$d(A,B) \le d(A,B') + d(B',B).$$

Keduanya setara dengan

$$|d(A,B') - d(A,B)| \le d(B',B).$$

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \varepsilon$. Jika $d(B',B) < \delta$, selisih nilai fungsi kurang dari ε; jadi fungsi kontinu di B.

Untuk (b), gunakan bagian (a) pada setiap koordinat:

$$\begin{aligned} |d(A',B') - d(A,B)| &\le |d(A',B') - d(A,B')| \\ &\quad + |d(A,B') - d(A,B)| \\ &\le d(A',A) + d(B',B). \end{aligned}$$

Jika kedua jarak masukan kurang dari $\delta = \varepsilon/2$, ruas kanan kurang dari ε. Jadi fungsi jarak dua variabel kontinu pada setiap pasangan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada bagian (b), kedua koordinat boleh berubah sekaligus; karena itu dua galat harus dijumlahkan dan pilihan δ perlu dibagi dua.

1.14 Komposisi pemetaan kontinu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex014`. **Label sumber:** `ex:comp+cont`.

Soal sumber. Jika $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dan $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ kontinu, buktikan bahwa $h = g \circ f$ kontinu.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:comp+cont` dalam berkas petunjuk Indonesia; rentang dan digest tepatnya tercatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $A \in \mathcal{X}$ dan $B = f(A)$.
2. Gunakan kekontinuan g terlebih dahulu untuk mengubah toleransi ε menjadi toleransi η di $\mathcal{Y}$.
3. Gunakan kekontinuan f untuk mengubah η menjadi δ di $\mathcal{X}$.

Jawaban atau pemeriksaan. Pilihan δ untuk f dibuat terhadap ambang yang diperoleh dari kekontinuan g; kemudian $d_{\mathcal{Z}}(h(A'), h(A)) < \varepsilon$.

Solusi lengkap. Ambil $A \in \mathcal{X}$ dan $\varepsilon > 0$, lalu tetapkan $B = f(A)$. Karena g kontinu di B, terdapat $\eta > 0$ sehingga

$$d_{\mathcal{Y}}(B', B) < \eta \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathcal{Z}}(g(B'), g(B)) < \varepsilon.$$

Karena f kontinu di A, terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$d_{\mathcal{X}}(A', A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathcal{Y}}(f(A'), f(A)) < \eta.$$

Maka, jika $d_{\mathcal{X}}(A', A) < \delta$, dengan mengambil $B' = f(A')$ diperoleh

$$d_{\mathcal{Z}}(h(A'), h(A)) = d_{\mathcal{Z}}(g(f(A')), g(f(A))) < \varepsilon.$$

Jadi h kontinu di A. Karena A sembarang, h kontinu di setiap titik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Nilai δ untuk f umumnya tidak dipilih langsung dari ε; ambang keluaran f harus terlebih dahulu ditentukan oleh kekontinuan g.

1.15 Pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat kontinu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex015`. **Label sumber:** `ex:isom-cont`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat kontinu.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:isom-cont` dalam berkas petunjuk Indonesia; manifest mengunci rentang dan digest-nya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis langsung jarak antara $f(A')$ dan $f(A)$.
2. Gunakan sifat mempertahankan jarak.
3. Pilih $\delta = \varepsilon$.

Jawaban atau pemeriksaan. Karena $d_{\mathcal{Y}}(f(A'), f(A)) = d_{\mathcal{X}}(A', A)$, pemetaan tersebut bahkan bersifat 1-Lipschitz.

Solusi lengkap. Ambil $A \in \mathcal{X}$ dan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon$. Jika $d_{\mathcal{X}}(A', A) < \delta$, maka sifat mempertahankan jarak memberi

$$d_{\mathcal{Y}}(f(A'), f(A)) = d_{\mathcal{X}}(A', A) < \delta = \varepsilon.$$

Jadi f kontinu di A. Karena A sembarang, f kontinu di setiap titik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kontinuitas tidak memerlukan surjektivitas; setiap pemetaan yang mempertahankan jarak kontinu, meskipun bukan isometri menurut definisi bijektif buku ini.

1.16 Kesamaan jarak sisi tidak selalu memberi kekongruenan terurut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch01-ex016`. **Label sumber:** `ex:ncong`.

Soal sumber. Dalam ruang metrik dengan titik A, B, C, D dan $AB = AC = AD = BC = BD = 1$, $CD = 2$, tunjukkan bahwa (a) $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, tetapi (b) $\triangle ABC \ncong \triangle BCA$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk karya Anton Petrunin tetap dipertahankan pada entri `ex:ncong` dalam berkas petunjuk Indonesia; rentang dan digest tepatnya terdapat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk (a), coba permutasi yang menukar A dan B serta menetapkan C, D.
2. Untuk (b), anggap ada transformasi isometrik yang mengirim $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, dan $C \mapsto A$.
3. Gunakan bijektivitas untuk menentukan citra D, lalu bandingkan satu jarak yang panjangnya 2 dengan citranya.

Jawaban atau pemeriksaan. Pertukaran $A \leftrightarrow B$ adalah transformasi isometrik. Siklus $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ akan memaksa $D \mapsto D$ dan mengubah jarak $CD = 2$ menjadi $AD = 1$, sehingga mustahil.

Solusi lengkap. Untuk (a), definisikan permutasi s dengan

$$s(A) = B, \quad s(B) = A, \quad s(C) = C, \quad s(D) = D.$$

Pemetaan ini bijektif. Semua pasangan selain C, D berjarak 1, sedangkan pasangan C, D tetap. Jadi s mempertahankan seluruh enam jarak antartitik dan merupakan transformasi isometrik. Karena s mengirim tripel terurut (A, B, C) ke (B, A, C), diperoleh $\triangle ABC \cong \triangle BAC$.

Untuk (b), andaikan terdapat transformasi isometrik m dengan $m(A) = B$, $m(B) = C$, dan $m(C) = A$. Karena m bijektif pada himpunan empat titik, tiga citra A, B, C sudah menggunakan A, B, C; maka harus berlaku $m(D) = D$. Pelestarian jarak kemudian menuntut

$$2 = CD = d(m(C), m(D)) = AD = 1,$$

suatu kontradiksi. Jadi transformasi isometrik tersebut tidak ada dan $\triangle ABC \ncong \triangle BCA$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Segitiga dalam buku ini adalah tripel terurut dan kekongruenan harus diwujudkan oleh satu transformasi isometrik seluruh ruang, bukan hanya oleh kesamaan tiga panjang sisi sebagai himpunan bilangan.

Uji penguasaan Bab 1

Kerjakan tanpa melihat solusi di atas. Nilai maksimum adalah 20. Setiap butir memiliki ID stabil agar dapat dipilih secara modular.

M1 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item01`.

Untuk $c \in \mathbb{R}$, tentukan tepat kapan $d_c(x,y) = c|x-y|$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$, dan buktikan jawabanmu.

M2 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item02`.

Buktikan bahwa untuk semua $A, B \in \mathbb{R}^2$,

$$d_\infty(A,B) \le d_2(A,B) \le d_1(A,B) \le 2d_\infty(A,B).$$

Untuk setiap dua metrik $d, d' \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$, setiap barisan (A_n) dalam $\mathbb{R}^2$, dan setiap kandidat limit tetap $L \in \mathbb{R}^2$, simpulkan bahwa $A_n \to L$ menurut d jika dan hanya jika $A_n \to L$ menurut d'.

M3 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item03`.

Buktikan langsung bahwa $T(x,y) = (x-y, x+y)$ merupakan isometri dari $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ke $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

M4 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item04`.

Untuk $m \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa grafik $y = mx$ merupakan garis dalam $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ dengan memberikan isometri eksplisit dari $\mathbb{R}$ ke grafik tersebut.

M5 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item05`.

Jika $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dan $3\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$, tentukan semua nilai α.

M6 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item06`.

Andaikan

$$f : (\mathcal{X}, d_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Y}, d_\mathcal{Y}), \qquad g : (\mathcal{Y}, d_\mathcal{Y}) \to (\mathcal{Z}, d_\mathcal{Z}),$$

dan, secara terpisah,

$$d_\mathcal{Y}(f(P), f(Q)) \le d_\mathcal{X}(P,Q) \quad (P, Q \in \mathcal{X}),$$
$$d_\mathcal{Z}(g(R), g(S)) \le d_\mathcal{Y}(R,S) \quad (R, S \in \mathcal{Y}).$$

Buktikan bahwa $g \circ f$ juga 1-Lipschitz dan kontinu.

M7 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch01-item07`.

Untuk ruang empat titik pada latihan `ex:ncong`, tentukan semua transformasi isometriknya.

Kunci lengkap dan rubrik

M1 (3 poin). Tepat ketika $c > 0$. Untuk $c > 0$, kepositifan, simetri, dan pemisahan titik langsung berlaku, sedangkan

$$c|x - z| \le c|x - y| + c|y - z|$$

berasal dari ketaksamaan segitiga nilai mutlak. Jika $c = 0$, dua titik berbeda berjarak nol; jika $c < 0$, jarak dua titik berbeda bernilai negatif. Rubrik: 1 poin untuk syarat tepat $c > 0$, 1 poin untuk seluruh aksioma saat $c > 0$, dan 1 poin untuk menolak kedua kasus $c = 0$ serta $c < 0$.

M2 (3 poin). Ambil $a = |x_A - x_B|$ dan $b = |y_A - y_B|$. Karena $a, b \ge 0$,

$$\max\{a, b\} \le \sqrt{a^2 + b^2} \le a + b \le 2\max\{a, b\}.$$

Ini tepat rantai yang diminta. Tetapkan sebuah barisan (A_n) dan satu kandidat limit L. Terapkan rantai itu pada pasangan A_n, L. Jika $d(A_n, L) \to 0$ untuk salah satu $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$, batas-batas dalam rantai memaksa $d'(A_n, L) \to 0$ untuk setiap metrik lain d' dalam himpunan tersebut. Jadi, untuk kandidat limit tetap yang sama L, konvergensi menurut sembarang dua metrik itu ekuivalen. Rubrik: 2 poin untuk ketiga ketaksamaan dengan alasan yang benar dan 1 poin untuk argumen konvergensi dua arah menuju titik L yang sama.

M3 (3 poin). Untuk selisih koordinat $p = x_A - x_B$ dan $q = y_A - y_B$,

$$d_\infty(T(A), T(B)) = \max\{|p - q|, |p + q|\} = |p| + |q| = d_1(A, B).$$

Pemetaan ini bijektif dengan $T^{-1}(s, t) = ((s+t)/2, (t-s)/2)$. Maka T isometri. Rubrik: 1 poin untuk identitas maksimum, 1 poin untuk pelestarian jarak, dan 1 poin untuk invers atau bukti bijektivitas ekuivalen.

M4 (3 poin). Tetapkan $c = \max\{1, |m|\}$ dan

$$\phi(t) = \left(\frac{t}{c}, \frac{mt}{c}\right).$$

Pemetaan ini bijektif dari $\mathbb{R}$ ke grafik $y = mx$. Selain itu,

$$d_\infty(\phi(s), \phi(t)) = \max\left\{\frac{|s - t|}{c}, \frac{|m||s - t|}{c}\right\} = |s - t|.$$

Jadi grafik tersebut sebuah garis. Rubrik: masing-masing 1 poin untuk parametrisasi bijektif, perhitungan jarak, dan kesimpulan berdasarkan definisi.

M5 (2 poin). Persamaan berarti $3\alpha = 2\pi k$ bagi $k \in \mathbb{Z}$, jadi $\alpha = 2\pi k/3$. Syarat $-\pi < \alpha \le \pi$ membatasi k pada $-1, 0, 1$. Jadi

$$\alpha \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Rubrik: 1 poin untuk bentuk $2\pi k/3$ dan 1 poin untuk penyaringan interval yang tepat.

M6 (3 poin). Untuk $P, Q \in \mathcal{X}$, ambil $R = f(P)$ dan $S = f(Q)$, yang keduanya berada dalam $\mathcal{Y}$. Kedua hipotesis yang bertipe terpisah kemudian memberi

$$d_{\mathcal{Z}}(g(f(P)), g(f(Q))) \le d_{\mathcal{Y}}(f(P), f(Q)) \le d_{\mathcal{X}}(P, Q).$$

Jadi komposisi juga 1-Lipschitz. Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \varepsilon$; implikasi definisi kekontinuan langsung berlaku. Rubrik: 2 poin untuk rantai dua ketaksamaan dan 1 poin untuk bukti kekontinuan ε–δ.

M7 (3 poin). Pasangan $\{C, D\}$ adalah satu-satunya pasangan berjarak 2, sehingga setiap transformasi isometrik harus mempertahankan himpunan $\{C, D\}$ dan, akibatnya, juga komplemennya $\{A, B\}$. Sebaliknya, pertukaran bebas $A \leftrightarrow B$ dan $C \leftrightarrow D$ mempertahankan semua jarak. Jadi tepat ada empat transformasi: identitas, pertukaran A, B, pertukaran C, D, dan komposisi kedua pertukaran. Rubrik: 1 poin untuk invarian pasangan berjarak 2, 1 poin untuk batas paling banyak empat pemetaan, dan 1 poin untuk memeriksa bahwa keempatnya benar-benar transformasi isometrik.

Bab 2

Solusi dan penguasaan Bab 2: Aksioma

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk tersebut tidak ditulis ulang sebagai karya baru: setiap entri di bawah merujuk berkas petunjuk yang diterima, rentang barisnya, dan digest-nya melalui `manifest-chapter02.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

2.1 Tak berhingga banyak titik dan garis

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex001`. **Label sumber:** `ex:infinite`.

Soal sumber. Buktikan bahwa bidang memuat tak berhingga banyak (a) titik dan (b) garis.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk Anton Petrunin untuk `ex:infinite` berada pada `source/id-ID/hints.tex`, baris 238–242 (digest LF `30e64d9e...`); petunjuk itu menekankan Aksioma 0, Aksioma 1, dan Aksioma 2. Ringkasannya dipertahankan di sini sebagai rujukan, bukan sebagai atribusi baru.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih dua titik berbeda dari Aksioma 0 dan gunakan Aksioma 1 untuk mendapatkan sebuah garis; ingat bahwa garis didefinisikan isometrik dengan $\mathbb{R}$.
2. Pilih tak berhingga banyak nilai α berbeda dalam $(0, \pi/2)$, lalu gunakan Aksioma 2(a) pada satu sinar berpangkal sama.
3. Tunjukkan bahwa sinar-sinar yang dihasilkan berbeda dan tidak dapat berpasangan sebagai dua arah berlawanan pada satu garis; maka garis-garisnya pun tak berhingga.

Jawaban atau pemeriksaan. Ada tak berhingga titik pada satu garis. Untuk garis, satu keluarga sinar berpuncak sama dengan ukuran sudut $\alpha \in (0, \pi/2)$ yang berbeda memberikan tak berhingga garis berbeda.

Solusi lengkap. Menurut Aksioma def:birkhoff-axioms:0 , terdapat titik berbeda P, Q. Aksioma def:birkhoff-axioms:1 memberikan garis tunggal $\ell = (PQ)$. Dengan definisi garis, ada isometri $\phi : \mathbb{R} \to \ell$. Karena $\mathbb{R}$ tak berhingga dan ϕ bijektif, ℓ, dan karenanya bidang, memuat tak berhingga banyak titik. Ini membuktikan (a).

Untuk (b), tetapkan titik $O = P$ dan sinar $[OQ)$. Untuk setiap $\alpha \in (0, \pi/2)$, Aksioma def:birkhoff-axioms:2a memberikan tepat satu sinar $r_\alpha = [OA_\alpha)$ dengan $\measuredangle QOA_\alpha = \alpha$. Jika $r_\alpha = r_\beta$, fungsi ukuran sudut pada tripel yang sama memberi $\alpha = \beta$, sehingga semua r_α berbeda. Dua sinar berbeda yang berpangkal di O pada satu garis harus merupakan dua arah garis itu; sudut di antara arah yang berlawanan adalah π (Teorema thm:straight-angle), sedangkan dua nilai dalam $(0, \pi/2)$ tidak berjarak π. Jadi tidak ada satu garis yang memuat dua sinar dalam keluarga ini. Karena $(0, \pi/2)$ tak berhingga, keluarga garis yang memuat r_α juga tak berhingga. Bersama (a), selesai.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tak cukup menyebut banyak sudut tanpa memastikan sinarnya berbeda. Selain itu, dua sinar berlawanan dapat berada pada garis yang sama; pembatasan interval $(0, \pi/2)$ menghindari penghitungan ganda itu.

2.2 Sinar yang memiliki arah sama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex002`. **Label sumber:** `ex:[OA)=[OA')`.

Soal sumber. Misalkan $A' \in [OA)$ dan $A' \neq O$. Tunjukkan bahwa $[OA) = [OA')$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:[OA)=[OA')` diterima pada baris 244–252 `source/id-ID/hints.tex`; digest LF lengkap ada di manifest. Intinya adalah menyamakan kedua garis dengan Aksioma 1 lalu memakai klasifikasi gerak garis real dari Bab 1.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Parameterkan garis (OA) dengan isometri $\phi : \mathbb{R} \to (OA)$ yang mengirim 0 ke O dan suatu bilangan positif ke A.
2. Tulis $A' = \phi(t)$. Keanggotaan pada sinar dan syarat $A' \neq O$ memberi $t > 0$.
3. Bandingkan citra $[0, \infty)$ di bawah ϕ untuk kedua titik awal; keduanya sama.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua sinar adalah citra interval $[0, \infty)$ pada parameterisasi garis yang sama, jadi $[OA) = [OA')$.

Solusi lengkap. Aksioma def:birkhoff-axioms:1 memberikan $(OA) = (OA')$. Pilih parameterisasi isometrik $\phi : \mathbb{R} \to (OA)$ dengan $\phi(0) = O$ dan $\phi(1) = A$. Karena $A' \in [OA)$ dan $A' \neq O$, definisi sinar memberi sebuah $t > 0$ sehingga $A' = \phi(t)$. (Jika parameter yang dipilih berlawanan orientasi, ganti $\phi(s)$ dengan $\phi(-s)$; kita memilih orientasi yang memuat A pada sisi positif.)

Menurut definisi formal sinar pada garis berparameter, titik-titik yang dicapai mulai dari $O = \phi(0)$ melalui $A = \phi(1)$ tepatnya $\phi([0, \infty))$. Karena $t > 0$, arah dari O melalui $A' = \phi(t)$ juga arah positif yang sama, sehingga

$$[OA) = \phi([0, \infty)) = [OA').$$

Argumen ini juga menunjukkan mengapa syarat $A' \neq O$ diperlukan: titik awal tidak menentukan arah sinar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan garis belum otomatis berarti kesamaan sinar; orientasi dan fakta bahwa parameter A' positif harus disebutkan. Surjektivitas parameterisasi juga diperlukan agar semua titik pada sinar tercakup.

2.3 Sudut nol menentukan sinar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex003`. **Label sumber:** `ex:[OA)=[OB)`.

Soal sumber. Andaikan $\measuredangle AOB = 0$. Tunjukkan bahwa $[OA) = [OB)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:[OA)=[OB)` berada pada baris 254–257 dalam berkas petunjuk id-ID. Petunjuk itu meminta kita memakai `lem:AOA=0` dan keunikan Aksioma `def:birkhoff-axioms:2a` ; kedua rujukan tersebut dipertahankan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari Proposisi `lem:AOA=0` , hitung ukuran sudut AOA.
2. Untuk sinar pertama $[OA)$, terapkan Aksioma `def:birkhoff-axioms:2a` dengan $\alpha = 0$.
3. Bandingkan sinar unik yang dijamin aksioma dengan $[OB)$.

Jawaban atau pemeriksaan. Baik $[OA)$ maupun $[OB)$ merealisasikan ukuran sudut nol dari sinar $[OA)$; keunikan Aksioma 2(a) memaksa keduanya sama.

Solusi lengkap. Karena $A \neq O$, Proposisi `lem:AOA=0` memberi $\measuredangle AOA = 0$. Sekarang pandang Aksioma `def:birkhoff-axioms:2a` untuk sinar yang diberikan $[OA)$ dan nilai $\alpha = 0$. Aksioma itu menyatakan ada tepat satu sinar r dengan $\measuredangle AOr = 0$. Sinar $[OA)$ sendiri adalah kandidat tersebut, karena $\measuredangle AOA = 0$; menurut hipotesis, $[OB)$ juga kandidat tersebut. Keunikan menghasilkan $r = [OA) = [OB)$, sebagaimana diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kongruensi modulo 2π tidak boleh dipakai untuk menyimpulkan kesamaan sinar tanpa batas interval dan keunikan Aksioma 2(a). Di sini nilainya tepat 0, sehingga argumen keunikan langsung berlaku.

2.4 Kriteria tiga titik segaris melalui sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex004`. **Label sumber:** `ex:lineAOB`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa tiga titik berbeda A, O, B terletak pada satu garis jika dan hanya jika $2 \cdot \measuredangle AOB \equiv 0$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:lineAOB` adalah baris 259–262 pada `source/id-ID/hints.tex`. Petunjuk merujuk `lem:AOA=0` , `thm:straight-angle` , dan `ex:2a=0` ; tidak ada rujukan tersebut yang dihilangkan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika titik-titik segaris, bedakan dua arah sinar dari O: sinar sama memberi sudut nol, sedangkan arah berlawanan memberi sudut lurus.
2. Kalikan kedua kemungkinan 0 dan π dengan dua.
3. Untuk arah sebaliknya, gunakan Latihan `ex:2a=0` untuk memperoleh $\alpha = 0$ atau π, lalu gunakan Latihan `ex:[OA)=[OB)` atau Teorema `thm:straight-angle` .

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan $\alpha = \measuredangle AOB$, kondisi tersebut ekuivalen dengan $\alpha \in \{0, \pi\}$, dan kedua nilai tepat menggambarkan dua kemungkinan kolinearitas.

Solusi lengkap. Misalkan dahulu A, O, B segaris. Karena ketiganya berbeda, tepat salah satu dari dua hal berikut terjadi: $[OA) = [OB)$, atau O terletak di antara A dan B. Pada kasus pertama, Latihan `ex:[OA)=[OB)` memberi $\alpha = 0$. Pada kasus kedua, Teorema `thm:straight-angle` memberi $\alpha = \pi$. Dalam kedua kasus, $2\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Sebaliknya, andaikan $2\alpha \equiv 0$, dengan $\alpha = \measuredangle AOB \in (-\pi, \pi]$. Latihan `ex:2a=0` menyatakan tepat bahwa $\alpha = 0$ atau $\alpha = \pi$. Jika $\alpha = 0$, Latihan `ex:[OA)=[OB)` menghasilkan $[OA) = [OB)$, sehingga A, O, B berada pada garis yang sama. Jika $\alpha = \pi$, Teorema `thm:straight-angle` menyatakan bahwa O terletak di antara A dan B, yang juga memaksa ketiganya segaris. Jadi kedua implikasi terbukti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dari $2\alpha \equiv 0$ tidak boleh langsung membagi dua kongruensi tanpa memakai interval $(-\pi, \pi]$; justru interval itulah yang menyisakan dua nilai 0 dan π. +

2.5 Kesegarian melalui dua ukuran sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex005`. **Label sumber:** `ex:ABCO-line`.

Soal sumber. Misalkan A, B, C tiga titik yang berbeda dari O. Tunjukkan bahwa B, O, C terletak pada satu garis jika dan hanya jika $2 \cdot \measuredangle AOB \equiv 2 \cdot \measuredangle AOC$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:ABCO-line` ada pada baris 264–273. Ia menghitung $2\measuredangle BOC$ memakai Aksioma 2(b), lalu menggunakan `ex:2a=0` dan dua kasus $0, \pi$. Ringkasan ini tidak menggantikan petunjuk sumber.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis $\alpha = \measuredangle AOB$, $\gamma = \measuredangle AOC$, dan $\beta = \measuredangle BOC$; Aksioma 2(b) menghubungkan ketiganya.
2. Kalikan relasi kongruensi itu dengan dua untuk mengisolasi 2β.
3. Terapkan kriteria Latihan `ex:lineAOB` pada tripel B, O, C, atau uraikan dua nilai $\beta = 0, \pi$ secara langsung.

Jawaban atau pemeriksaan. Aksioma 2(b) memberi $2\beta \equiv 2\gamma - 2\alpha$. Jadi persamaan yang diminta tepat ekuivalen dengan $2\beta \equiv 0$, yang menurut Latihan `ex:lineAOB` berarti B, O, C segaris.

Solusi lengkap. Tuliskan $\alpha = \measuredangle AOB$, $\gamma = \measuredangle AOC$, dan $\beta = \measuredangle BOC$. Aksioma def:birkhoff-axioms:2b memberi

$$\alpha + \beta \equiv \gamma \pmod{2\pi}, \qquad \text{maka} \qquad 2\beta \equiv 2\gamma - 2\alpha \pmod{2\pi}.$$

Jika B, O, C segaris, Latihan ex:lineAOB (atau kasus $B = C$, yang langsung trivial) memberi $2\beta \equiv 0$. Substitusi pada relasi di atas menghasilkan $2\alpha \equiv 2\gamma$, yaitu arah pertama.

Sebaliknya, andaikan $2\alpha \equiv 2\gamma$. Relasi yang sama menghasilkan $2\beta \equiv 0$. Karena $\beta \in (-\pi, \pi]$, Latihan ex:2a=0 memberi $\beta = 0$ atau $\beta = \pi$. Pada kasus pertama, Latihan ex:[OA)=[OB) (diterapkan dengan titik B, C, O) memberi $[OB) = [OC)$, sehingga ketiga titik segaris. Pada kasus kedua, Teorema thm:straight-angle memberi bahwa O terletak di antara B dan C. Jadi B, O, C segaris dalam kedua kasus.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Aksioma 2(b) hanya memberi kongruensi modulo 2π, bukan kesamaan real biasa. Selain itu, faktor dua harus dipertahankan ketika mengisolasi $\measuredangle BOC$; menghilangkannya tanpa Latihan 2a=0 kehilangan kasus sudut lurus.

2.6 Keberadaan segitiga tak degenerat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex006`. **Label sumber:** `ex:infinite-number-of-lines`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa terdapat suatu segitiga tak degenerat.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:infinite-number-of-lines` berada pada baris 275–281 `source/id-ID/hints.tex`. Petunjuk memilih dua titik, sebuah ukuran sudut $0 < \alpha < \pi$, lalu memakai cor:degenerate=pi ; seluruh jalur itu dipertahankan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ambil $A \neq B$ dari Aksioma 0 dan gunakan sinar $[BA)$.
2. Pilih $0 < \alpha < \pi$; Aksioma 2(a) menghasilkan sinar lain dari B dengan ukuran sudut α, lalu pilih titik $C \neq B$ di atasnya.
3. Jika segitiga degenerat, Akibat cor:degenerate=pi memaksa sudut ABC menjadi 0 atau π, bertentangan dengan pilihan α.

Jawaban atau pemeriksaan. Pilih $0 < \alpha < \pi$, bangun C sehingga $\measuredangle ABC = \alpha$, dan gunakan Akibat degenerasi untuk menyimpulkan bahwa ABC tak degenerat.

Solusi lengkap. Ambil dua titik berbeda A, B sebagaimana dijamin Aksioma def:birkhoff-axioms:0 . Pilih bilangan real α dengan $0 < \alpha < \pi$. Aksioma def:birkhoff-axioms:2a , diterapkan pada $[BA)$ dan α, memberikan sinar $r = [BC)$ yang memenuhi $\measuredangle ABC = \alpha$. Dengan Latihan ex:trig== (keberadaan titik pada sinar pada jarak positif), pilih $C \in r$ dengan $C \neq B$. Karena $\alpha \neq 0$, Latihan ex:[OA)=[OB) menunjukkan $r \neq [BA)$, sehingga $C \neq A$ setelah memilih titik pada sinar.

Andaikan segitiga ABC degenerat. Akibat cor:degenerate=pi menyatakan bahwa setiap sudut segitiga degenerat bernilai 0 atau π. Namun sudut di B adalah $\alpha \in (0, \pi)$, kontradiksi. Jadi A, B, C membentuk segitiga tak degenerat, sebagaimana diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Aksioma 2(a) menghasilkan sinar, bukan otomatis sebuah titik bernama C; keberadaan titik nonasal harus disebutkan. Memilih $\alpha = 0$ atau π justru menghasilkan segitiga degenerat dan tidak membuktikan soal.

2.7 Pencerminan titik mengirim garis ke garis

ID stabil: `o004-c100-sol-ch02-ex007`. **Label sumber:** `ex:refelection-of-line`.

Soal sumber. Buktikan bahwa pencerminan terhadap titik memetakan setiap garis ke garis.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk `ex:refelection-of-line` adalah baris 287–287. Petunjuk singkat tersebut meminta penerapan `prop:point-reflection` dan `ex:line-motion` ; rujukan silang dan maknanya dipertahankan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Parameterkan garis ℓ dengan isometri bijektif $\phi : \mathbb{R} \to \ell$.
2. Menurut Proposisi `prop:point-reflection` , pencerminan s_O adalah gerak, sehingga komposisi $s_O \circ \phi$ tetap merupakan isometri.
3. Tunjukkan citra komposisi itu tepat $s_O(\ell)$, lalu gunakan definisi garis atau Latihan `ex:line-motion` .

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\phi : \mathbb{R} \to \ell$ memparameterkan garis dan s_O adalah pencerminan, maka $s_O \circ \phi$ merupakan isometri bijektif dari $\mathbb{R}$ ke $s_O(\ell)$. Jadi citranya adalah garis.

Solusi lengkap. Misalkan s_O pencerminan terhadap pusat O, dan ambil sembarang garis ℓ. Menurut definisi garis, terdapat isometri bijektif $\phi : \mathbb{R} \to \ell$. Proposisi `prop:point-reflection` menyatakan bahwa s_O adalah gerak bidang: ia bijektif dan $d(s_O(X), s_O(Y)) = d(X, Y)$ untuk semua titik X, Y. Oleh karena itu

$$\psi = s_O \circ \phi : \mathbb{R} \longrightarrow s_O(\ell)$$

mempertahankan jarak. Komposisi dua bijeksi adalah bijeksi; kodomainnya tepat $s_O(\ell)$, sebab setiap titik di citra berbentuk $s_O(\phi(t))$, dan setiap titik $s_O(X)$ dengan $X \in \ell$ diperoleh demikian. Maka ψ adalah isometri bijektif dari $\mathbb{R}$ ke $s_O(\ell)$. Berdasarkan definisi garis (setara dengan Latihan `ex:line-motion`), $s_O(\ell)$ adalah sebuah garis. Karena ℓ dipilih sembarang, pencerminan terhadap sebuah titik memetakan setiap garis ke garis.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Hanya menunjukkan bahwa jarak dipertahankan belum cukup: citra harus juga ditunjukkan sebagai himpunan yang dicakup secara surjektif oleh parameterisasi. Jangan menyimpulkan dari gambar bahwa garis tetap; pencerminan dapat memindahkan garis ke garis lain.

Uji penguasaan Bab 2

Kerjakan tanpa melihat solusi di atas. Nilai maksimum adalah 20. Setiap butir memiliki ID stabil agar dapat dipilih secara modular.

M1 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item01`.

Dengan hanya memakai Aksioma 0–2, buktikan bahwa bidang memuat tak berhingga banyak titik dan tak berhingga banyak garis; jelaskan mengapa tidak terjadi penghitungan ganda melalui dua arah satu garis.

M2 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item02`.

Misalkan $A' \in [OA)$ dan $A' \neq O$. Berikan pembuktian berbasis parameterisasi garis bahwa $[OA) = [OA')$, dan nyatakan di mana Aksioma 1 digunakan.

M3 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item03`.

Buktikan ekuivalensi berikut untuk tiga titik berbeda A, O, B:

$$A, O, B \text{ segaris} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\measuredangle AOB \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Tunjukkan kedua nilai sudut yang mungkin.

M4 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item04`.

Untuk $A, B, C \neq O$, buktikan bahwa

$$B, O, C \text{ segaris} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\measuredangle AOB \equiv 2\measuredangle AOC \pmod{2\pi}.$$

Turunkan relasi ini secara eksplícit dari Aksioma 2(b).

M5 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item05`.

Bangun segitiga tak degenerat dari dua titik berbeda dan satu pilihan sudut. Sebutkan interval sudut yang aman dan alasan mengapa Akibat degenerasi menutup argumen.

M6 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item06`.

Buktikan bahwa pencerminan terhadap titik merupakan gerak yang mengirim setiap garis ke garis, dengan menuliskan parameterisasi isometrik citranya.

M7 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch02-item07`.

Berikan bukti mandiri bahwa jika $\measuredangle AOB = 0$, maka $[OA) = [OB)$, dan jelaskan mengapa langkah ini membutuhkan keunikan Aksioma 2(a), bukan sekadar intuisi gambar.

Kunci lengkap dan rubrik

M1 (3 poin). Ambil $P \neq Q$ dari Aksioma 0; Aksioma 1 memberi garis (PQ), yang isometrik dengan $\mathbb{R}$, sehingga titiknya tak berhingga. Tetapkan sebuah titik asal dan, untuk setiap $\alpha \in (0, \pi/2)$, gunakan

Aksioma 2(a) untuk memperoleh sinar berbeda. Dua sinar berbeda pada satu garis akan menjadi arah berlawanan dan membentuk sudut π, sehingga interval yang dipilih mencegah penghitungan ganda; maka garisnya tak berhingga. Rubrik: 1 poin untuk garis dan titik tak berhingga, 1 poin untuk konstruksi sinar sudut, dan 1 poin untuk argumen tidak ada penghitungan ganda.

M2 (3 poin). Dengan Aksioma 1, $(OA) = (OA')$. Pilih isometri $\phi : \mathbb{R} \to (OA)$ dengan $\phi(0) = O$, $\phi(1) = A$; karena $A' \in [OA) \setminus \{O\}$, $A' = \phi(t)$ untuk $t > 0$. Kedua sinar adalah $\phi([0, \infty))$. Rubrik: 1 poin untuk penggunaan Aksioma 1, 1 poin untuk parameter positif, dan 1 poin untuk kesamaan citra interval.

M3 (3 poin). Jika segaris, sudutnya 0 (sinar sama) atau π (O di antara), jadi dua kalinya kongruen nol. Jika $2\alpha \equiv 0$ dan $\alpha \in (-\pi, \pi]$, Latihan 2a=0 memberi $\alpha = 0$ atau π; Latihan sinar sama atau Teorema sudut lurus lalu memberi kesegarian. Rubrik: 1 poin untuk arah maju, 1 poin untuk penyaringan interval, dan 1 poin untuk arah balik beserta dua kasus.

M4 (3 poin). Untuk $\alpha = \measuredangle AOB$, $\beta = \measuredangle BOC$, dan $\gamma = \measuredangle AOC$, Aksioma 2(b) memberi $\alpha + \beta \equiv \gamma$, sehingga $2\beta \equiv 2\gamma - 2\alpha$. Persamaan pada soal ekuivalen dengan $2\beta \equiv 0$, dan M3 yang diterapkan pada B, O, C menyelesaikan kedua arah. Rubrik: 1 poin untuk relasi Aksioma 2(b), 1 poin untuk operasi modulo yang benar, dan 1 poin untuk penerapan kriteria segaris.

M5 (2 poin). Pilih $A \neq B$, ambil $0 < \alpha < \pi$, dan gunakan Aksioma 2(a) pada $[BA)$ untuk membangun $[BC)$ dengan ukuran α; pilih $C \neq B$ di sinar itu. Jika segitiga degenerat, Akibat degenerasi memaksa sudut di B menjadi 0 atau π, kontradiksi. Rubrik: 1 poin untuk konstruksi yang lengkap dan 1 poin untuk kontradiksi degenerasi.

M6 (3 poin). Parameterkan ℓ dengan isometri bijektif $\phi : \mathbb{R} \to \ell$. Jika s_O pencerminan, Proposisi titik-pencerminan menyatakan ia gerak; $s_O \circ \phi$ adalah isometri bijektif dengan citra tepat $s_O(\ell)$. Oleh definisi garis, citra itu garis. Rubrik: 1 poin untuk parameterisasi awal, 1 poin untuk komposisi dan pelestarian jarak, dan 1 poin untuk surjektivitas ke citra serta kesimpulan garis.

M7 (3 poin). Proposisi `lem:AOA=0` memberi $\measuredangle AOA = 0$. Aksioma 2(a) menyatakan tepat satu sinar dari $[OA)$ memiliki ukuran nol; baik $[OA)$ maupun $[OB)$ memenuhi syarat itu, sehingga sama. Rubrik: 1 poin untuk ukuran sudut nol dari proposisi, 1 poin untuk menyebut keunikan Aksioma 2(a), dan 1 poin untuk menyimpulkan kesamaan sinar tanpa argumen diagram.

Bab 3

Solusi dan penguasaan Bab 3: Setengah bidang

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk yang diterima tidak ditulis ulang sebagai karya baru; setiap unit merujuk label, rentang baris, dan digest petunjuknya melalui `manifest-chapter03.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

3.1 Pembalikan tanda sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex001`. **Label sumber:** `ex:AOB+<=>BOA-`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa sudut AOB positif jika dan hanya jika sudut BOA negatif.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk Anton Petrunin untuk label tersebut berada pada `source/id-ID/hints.tex`, baris 293–300. Rentang dan digest sumber serta terjemahannya dicatat secara tepat dalam `manifest-chapter03.json`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis $\alpha = \measuredangle AOB$ dan $\beta = \measuredangle BOA$.
2. Pisahkan kasus sudut lurus dari kasus lainnya.
3. Gunakan relasi pembalikan $\alpha \equiv -\beta$ dan definisi tanda.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\alpha = \pi$, maka $\beta = \pi$ dan keduanya tidak bertanda. Selain itu $\beta = -\alpha$, sehingga tepat satu dari α, β positif dan yang lain negatif.

Solusi lengkap. Misalkan $\alpha = \measuredangle AOB$ dan $\beta = \measuredangle BOA$. Dari Aksioma 2(b) dan ukuran sudut nol,

$$\alpha + \beta \equiv \measuredangle AOA = 0 \pmod{2\pi}.$$

Karena $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$, jika $\alpha \neq \pi$ dan $\beta \neq \pi$ maka representasi dalam interval tersebut memberi $\beta = -\alpha$. Jika $\alpha = \pi$, maka sinar $[OA)$ dan $[OB)$ berlawanan; pembalikan keduanya juga berlawanan, jadi $\beta = \pi$. Sebaliknya, $\beta = \pi$ memaksa $\alpha = \pi$.

Sekarang andaikan AOB positif. Maka $0 < \alpha < \pi$, sehingga kasus sudut lurus tidak terjadi dan $\beta = -\alpha < 0$. Sebaliknya, jika BOA positif, argumen yang sama dengan menukar A dan B menghasilkan $\alpha < 0$. Jadi AOB positif tepat ketika BOA negatif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut lurus bernilai π, bukan sudut positif menurut definisi bab ini. Jangan membagi kongruensi modulo 2π tanpa terlebih dahulu menangani kasus batas π.

3.2 Kongruensi dua kali ukuran sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex002`. **Label sumber:** `ex:PP(PN)`.

Soal sumber. Andaikan sudut ABC dan $A'B'C'$ bertanda sama serta

$$2\measuredangle ABC \equiv 2\measuredangle A'B'C'.$$

Tunjukkan bahwa kedua ukuran sudut itu sama.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 301–308 di berkas petunjuk yang diterima. Digest LF kedua rentang dicantumkan dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Letakkan $\alpha = \measuredangle ABC$ dan $\beta = \measuredangle A'B'C'$.
2. Ubah kongruensi dua kali lipat menjadi $\alpha \equiv \beta$ atau $\alpha \equiv \beta + \pi$.
3. Tunjukkan bahwa pilihan kedua membalik tanda, sehingga tidak cocok.

Jawaban atau pemeriksaan. Dari kongruensi diperoleh $\alpha - \beta = k\pi$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena kedua sudut bertanda sama dan berada di $(-\pi, \pi)$, selisihnya berada di $(-\pi, \pi)$; maka $k = 0$ dan $\alpha = \beta$.

Solusi lengkap. Tuliskan $\alpha = \measuredangle ABC$ dan $\beta = \measuredangle A'B'C'$. Hipotesis berarti

$$2(\alpha - \beta) = 2k\pi$$

untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, atau $\alpha - \beta = k\pi$. Sudut yang positif berada dalam $(0, \pi)$, sedangkan sudut negatif berada dalam $(-\pi, 0)$. Karena keduanya bertanda sama, keduanya berada di salah satu interval terbuka yang sama. Selisih dua bilangan dalam interval terbuka yang sama terletak di $(-\pi, \pi)$. Satu-satunya kelipatan π di interval itu adalah 0. Jadi $k = 0$ dan $\alpha = \beta$.

Cara yang sama menangani kemungkinan representasi kongruensi: $\alpha \equiv \beta + \pi$ akan menempatkan kedua sudut pada tanda yang berlawanan (atau memaksa salah satunya ke batas yang tidak bertanda), bertentangan dengan hipotesis.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kongruensi $2\alpha \equiv 2\beta$ tidak boleh langsung diperlakukan sebagai kesamaan real. Informasi tanda dan interval $(-\pi, \pi]$ diperlukan untuk menyingkirkan selisih $\pm\pi$.

3.3 Tiga sudut ketika satu titik berada di antara dua titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex003`. **Label sumber:** `ex:between`.

Soal sumber. Misalkan B terletak di antara A dan C, dan $P \notin (AC)$. Tunjukkan bahwa sudut APB, BPC, dan APC bertanda sama, lalu simpulkan

$$|\measuredangle APB| + |\measuredangle BPC| = |\measuredangle APC|.$$

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis untuk latihan kelas ini berada pada baris 309–323. Petunjuk itu mengarahkan penerapan Teorema tanda sudut segitiga pada tiga segitiga dan argumen kongruensi penjumlahan; identitas lengkapnya ada di manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan Teorema `thm:signs-of-triug` pada segitiga dengan urutan titik A, P, B, B, P, C, dan A, P, C.
2. Gunakan $[AB) = [AC)$ dan $[CB) = [CA)$ yang mengikuti dari posisi antara.
3. Gunakan Aksioma 2(b) pada tiga sinar yang berpangkal di P, lalu hilangkan kemungkinan selisih 2π dengan memeriksa tanda dan batas.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga ukuran sudut bukan 0 atau π karena P tidak berada pada (AC). Urutan segitiga yang tepat memberi tanda yang sama; kemudian $\measuredangle APB + \measuredangle BPC \equiv \measuredangle APC$ dan ketiga bilangan yang bertanda sama memaksa kesamaan biasa setelah mengambil nilai mutlak.

Solusi lengkap. Semua segitiga yang dipakai tak degenerat, sebab A, B, C segaris dan $P \notin (AC)$. Pada segitiga dengan urutan titik A, P, B, Teorema `thm:signs-of-triug` menyatakan bahwa $\measuredangle APB$ dan $\measuredangle BAP$ bertanda sama. Pada segitiga dengan urutan A, P, C, teorema yang sama menyatakan bahwa $\measuredangle APC$ dan $\measuredangle CAP$ bertanda sama. Karena B berada di antara A dan C, sinar $[AB)$ dan $[AC)$ sama, sehingga

$$\measuredangle BAP = \measuredangle CAP.$$

Maka $\measuredangle APB$ dan $\measuredangle APC$ bertanda sama.

Demikian pula, pada segitiga berurutan B, P, C, ukuran $\measuredangle BPC$ bertanda sama dengan $\measuredangle PCB$. Karena $[CB) = [CA)$, berlaku $\measuredangle PCB = \measuredangle PCA$; pada segitiga A, P, C, ukuran $\measuredangle PCA$ bertanda sama dengan $\measuredangle APC$. Jadi ketiga sudut yang diminta bertanda sama.

Letakkan

$$\alpha = \measuredangle APB, \qquad \beta = \measuredangle BPC, \qquad \gamma = \measuredangle APC.$$

Aksioma 2(b) memberi $\alpha + \beta \equiv \gamma \pmod{2\pi}$. Ketiganya berada di $(-\pi, \pi)$ karena segitiga-segitiga tak degenerat. Jika semuanya positif, maka $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ dan $0 < \gamma < \pi$, sehingga kongruensi hanya mungkin berupa $\alpha + \beta = \gamma$. Jika semuanya negatif, maka $-2\pi < \alpha + \beta < 0$ dan $-\pi < \gamma < 0$, sehingga lagi-lagi hanya $\alpha + \beta = \gamma$ yang mungkin. Mengambil nilai mutlak memberikan rumus yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Urutan huruf pada sudut berarah penting: gunakan urutan segitiga yang membuat ukuran sudut yang ditanyakan muncul dalam siklus teorema tanda. Jangan mengganti kongruensi modulo 2π dengan kesamaan tanpa memeriksa tanda.

3.4 Sudut bertolak belakang dan sisi yang sama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex004`. **Label sumber:** `ex:vert-intersect`.

Soal sumber. Andaikan sudut AOB dan $A'OB'$ bertolak belakang dan $B \notin (OA)$. Tunjukkan bahwa garis (AB) tidak berpotongan dengan ruas $[A'B']$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 324–329. Petunjuk tersebut mengarahkan dua penerapan bagian perpotongan dari Akibat `cor:half-plane` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari definisi sudut bertolak belakang, A, O, A' segaris dengan O di antara A, A', dan B, O, B' segaris dengan O di antara B, B'.
2. Tunjukkan bahwa ruas $[OA']$ dan $[OB']$ tidak memotong (AB).
3. Gunakan karakterisasi setengah bidang untuk mendapatkan bahwa A' dan B' berada pada sisi yang sama dari (AB).

Jawaban atau pemeriksaan. Ruas $[OA']$ tidak memotong (AB) karena garis (OA) memotong (AB) hanya di A, sedangkan $[OA']$ berada pada sinar yang berlawanan dari A. Argumen analog berlaku untuk $[OB']$. Jadi O, A' dan O, B' masing- masing berada pada sisi yang sama; akibatnya A', B' berada pada sisi yang sama dan ruas penghubungnya tidak memotong garis.

Solusi lengkap. Karena $B \notin (OA)$, garis (OA) dan (AB) berbeda dan berpotongan tepat di A. Titik O tidak berada pada (AB); jika tidak, keunikan garis melalui A dan B akan memaksa $B \in (OA)$. Dari sudut bertolak belakang diperoleh bahwa A' terletak pada sinar dari O yang berlawanan dengan $[OA)$. Dengan demikian $[OA']$ tidak memuat A dan tidak mempunyai titik lain pada (AB), sehingga

$$[OA'] \cap (AB) = \varnothing.$$

Bagian (b) dari Akibat `cor:half-plane` memberi bahwa O dan A' berada pada setengah bidang yang sama terhadap (AB).

Dengan cara yang sama, (OB) dan (AB) berpotongan tepat di B, sedangkan $[OB']$ adalah sinar berlawanan dari B. Maka $[OB'] \cap (AB) = \varnothing$, sehingga O dan B' berada pada setengah bidang yang sama terhadap (AB). Relasi "berada pada setengah bidang yang sama" adalah relasi ekivalensi pada komplemen garis; dari dua kesimpulan tersebut, A' dan B' berada pada setengah bidang yang sama. Sekali lagi Akibat `cor:half-plane` menyatakan bahwa ruas $[A'B']$ tidak berpotongan dengan (AB).

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menyimpulkan dari gambar bahwa ruas tidak berpotongan. Langkah kunci adalah menunjukkan bahwa setiap ruas dari O ke titik bertanda-prima tidak memotong garis (AB), lalu memakai karakterisasi setengah bidang.

3.5 Sisi yang sama melalui tanda sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex005`. **Label sumber:** `ex:signs-PXQ-PYQ`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa dua titik $X, Y \notin (PQ)$ berada pada sisi yang sama dari (PQ) jika dan hanya jika sudut PXQ dan PYQ bertanda sama.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 330–333 dan meminta penggunaan Teorema tanda sudut segitiga serta bagian sudut dari Akibat `cor:half-plane` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan Teorema `thm:signs-of-triug` pada segitiga berurutan P, X, Q dan P, Y, Q.
2. Balik urutan dua sinar memakai hasil latihan pertama bab ini.
3. Gunakan karakterisasi setengah bidang berdasarkan tanda sudut pada garis (PQ).

Jawaban atau pemeriksaan. Teorema segitiga menyamakan tanda PXQ dengan tanda XQP, dan tanda PYQ dengan tanda YQP. Menukar urutan sinar membalik kedua tanda secara bersamaan, sehingga kesamaan tanda tepat ekuivalen dengan kesamaan tanda PQX dan PQY; akibatnya adalah kriteria sisi yang sama.

Solusi lengkap. Karena $X, Y \notin (PQ)$, segitiga yang dibentuk oleh P, X, Q dan oleh P, Y, Q tak degenerat. Dengan memilih urutan siklik P, X, Q, Teorema `thm:signs-of-triug` memberi

$$\operatorname{sgn}(\measuredangle PXQ) = \operatorname{sgn}(\measuredangle XQP).$$

Untuk urutan P, Y, Q diperoleh relasi analog dengan YQP. Menurut Latihan `ex:AOB+<=>BOA-` , pembalikan dua huruf pada sudut mengubah tandanya; jadi XQP dan PQX mempunyai tanda berlawanan, dan demikian pula YQP dan PQY. Kedua tanda dibalik sekaligus, sehingga

$$\measuredangle PXQ \text{ dan } \measuredangle PYQ \text{ bertanda sama} \quad \Longleftrightarrow \quad \measuredangle PQX \text{ dan } \measuredangle PQY \text{ bertanda sama.}$$

Bagian (a) dari Akibat `cor:half-plane` menyatakan bahwa kondisi di ruas kanan ekuivalen dengan X dan Y berada pada setengah bidang yang sama terhadap (PQ). Ini membuktikan kedua arah.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut pada soal berpuncak di X dan Y, sedangkan kriteria setengah bidang berpuncak di Q. Teorema tanda segitiga dan pembalikan urutan harus ditulis; gambar saja tidak cukup.

3.6 Perpotongan dua cevian

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex006`. **Label sumber:** `ex:chevinas`.

Soal sumber. Misalkan $\triangle ABC$ segitiga tak degenerat, $A' \in [BC]$, dan $B' \in [AC]$. Tunjukkan bahwa $[AA']$ berpotongan dengan $[BB']$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 334–344. Petunjuk itu memakai Teorema Pasch pada dua segitiga; kasus titik ujung dan alasan tidak berpotongan perlu ditulis eksplisit.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tangani kasus A' atau B' berada di titik sudut; kemudian anggap keduanya berada di interior sisi.
2. Terapkan Teorema Pasch pada $\triangle AA'C$ dengan garis (BB').
3. Terapkan lagi pada $\triangle BB'C$ dengan garis (AA') dan identifikasi kedua titik potong sebagai perpotongan dua garis yang sama.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam kasus interior, (BB') memotong $[AC]$ di B' dan tidak memotong $[A'C] \subset (BC)$, sehingga Pasch memberi titik $M \in [AA']$. Secara simetris (AA') memberi titik pada $[BB']$. Kedua titik terletak pada dua garis yang sama, maka keunikan perpotongan garis membuatnya sama.

Solusi lengkap. Jika A' adalah B atau C, atau jika B' adalah A atau C, salah satu titik ujung segera menjadi titik persekutuan kedua ruas (misalnya $A' = B$ memberi $B \in [AA'] \cap [BB']$). Jadi anggap A' interior $[BC]$ dan B' interior $[AC]$.

Pertimbangkan segitiga tak degenerat $AA'C$ dan garis (BB'). Garis tersebut memotong sisi $[AC]$ di B'. Karena B' tidak terletak pada (BC) dan (BB') juga melalui B, kedua garis itu berpotongan hanya di B; tetapi $B \notin [A'C]$ karena A' interior $[BC]$. Jadi (BB') tidak memotong $[A'C]$. Teorema Pasch menyimpulkan bahwa (BB') memotong $[AA']$ pada suatu titik M.

Sekarang pertimbangkan segitiga $BB'C$ dan garis (AA'). Garis ini memotong $[BC]$ di A'. Selain itu $[B'C] \subset (AC)$ dan $(AA') \cap (AC) = \{A\}$, sedangkan $A \notin [B'C]$ karena B' interior. Maka (AA') tidak memotong $[B'C]$, dan Teorema Pasch memberi titik $M' \in [BB']$ yang juga berada pada (AA').

Garis (AA') dan (BB') berbeda: jika sama, garis itu memuat A dan B, sehingga akan menjadi (AB), bertentangan dengan $A' \in (BC)$ interior dan segitiga tak degenerat. Dua garis berbeda mempunyai paling banyak satu titik persekutuan, sehingga $M = M'$. Titik ini berada pada kedua ruas, dan $[AA'] \cap [BB'] \neq \varnothing$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pasch berlaku pada garis yang tidak melalui titik sudut; kasus titik ujung harus dipisahkan. Selain itu, Pasch hanya memberi perpotongan salah satu dari dua sisi yang tersisa; sisi yang tidak dipotong harus dibuktikan terlebih dahulu.

3.7 Ruas sinar dari dua titik berlawanan sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex007`. **Label sumber:** `ex:Z`.

Soal sumber. Andaikan X dan Y berada pada sisi yang berlawanan dari garis (PQ). Tunjukkan bahwa $[PX)$ tidak berpotongan dengan $[QY)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 345–354. Strateginya adalah menganggap ada titik potong, lalu memakai kriteria setengah bidang dua kali.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Andaikan $Z \in [PX) \cap [QY)$ dan singkirkan kemungkinan $Z = P$ atau $Z = Q$ dengan keunikan perpotongan garis.
2. Tunjukkan bahwa ruas $[XZ]$ dan $[YZ]$ tidak memotong (PQ).
3. Dapatkan bahwa Z berada pada sisi yang sama dengan X dan dengan Y, bertentangan dengan hipotesis.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika Z titik potong, maka $Z \notin (PQ)$ dan $[XZ]$, $[YZ]$ menghindari (PQ). Akibatnya Z satu sisi dengan X dan satu sisi dengan Y, sehingga X, Y satu sisi; kontradiksi.

Solusi lengkap. Andaikan terdapat $Z \in [PX) \cap [QY)$. Karena $X \notin (PQ)$, garis (PX) berpotongan dengan (PQ) hanya di P. Demikian pula (QY) berpotongan dengan (PQ) hanya di Q. Maka Z tidak mungkin sama dengan P atau Q; selain itu $Z \notin (PQ)$.

Kedua titik X dan Z terletak pada sinar yang sama dari P. Ruas $[XZ]$ karenanya berada pada (PX) dan tidak memuat P, sehingga $[XZ] \cap (PQ) = \varnothing$. Bagian (b) dari Akibat `cor:half-plane` memberi bahwa X dan Z berada pada setengah bidang yang sama terhadap (PQ). Dengan alasan identik, Y dan Z berada pada setengah bidang yang sama. Karena setengah bidang yang sama merupakan relasi ekivalensi, X dan Y harus berada pada sisi yang sama, bertentangan dengan asumsi. Jadi $[PX) \cap [QY) = \varnothing$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sinar mencakup titik pangkal; karena itu kasus P dan Q harus dikeluarkan secara eksplisit sebelum memakai argumen ruas di dalam sinar.

3.8 Keunikan ukuran sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex008`. **Label sumber:** `ex:angle-measures`.

Soal sumber. Definisikan

$$\widetilde{\measuredangle ABC} = \begin{cases} \pi, & \text{jika } \measuredangle ABC = \pi, \\ -\measuredangle ABC, & \text{jika } \measuredangle ABC < \pi. \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa ini juga merupakan ukuran sudut yang memenuhi aksioma, bahwa ukuran asli dan ukuran ini adalah satu-satunya kemungkinan, serta bahwa tanpa Aksioma 2(c) keunikan tersebut gagal.

Petunjuk penulis (rujukan). Latihan lanjutan ini tidak mempunyai blok petunjuk aktif pada berkas penulis; backend menandainya `admitted-no-source-hint`. Solusi berikut adalah tambahan orisinal dan tidak mengklaim adanya petunjuk yang tidak tersedia.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tunjukkan bahwa pemetaan $T(\alpha) = \widetilde{\alpha}$ adalah involusi dan selalu kongruen dengan $-\alpha$ modulo 2π.
2. Gunakan sifat itu untuk memeriksa Aksioma 2(a), (b), dan (c).

3. Untuk keunikan, parameterkan lingkaran sinar oleh ukuran sudut lain; Aksioma 2(b) menghasilkan automorfisme kontinu grup lingkaran.

4. Hilangkan kontinuitas dan pilih orientasi secara tidak kontinu pada titik-titik pangkal untuk memperoleh contoh tandingan.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $T(\alpha) = \widetilde{\alpha}$ memenuhi $T(\alpha) \equiv -\alpha \pmod{2\pi}$ dan $T(T(\alpha)) = \alpha$. Karena itu penjumlahan sudut, keberadaan/keunikan sinar, dan kontinuitas di luar sudut lurus tetap berlaku. Ukuran lain memberi automorfisme kontinu lingkaran, yang hanya mungkin berderajat $+1$ atau -1; dua derajat itu tepat ukuran asli dan T.

Solusi lengkap. Tuliskan $S = (-\pi, \pi]$ dan $T : S \to S$ untuk aturan pada soal. Jika $\alpha < \pi$, maka $T(\alpha) = -\alpha \in (-\pi, \pi)$; jika $\alpha = \pi$, $T(\alpha) = \pi$. Jadi T memetakan S ke S, memenuhi

$$T(\alpha) \equiv -\alpha \pmod{2\pi}, \qquad T(T(\alpha)) = \alpha.$$

Untuk Aksioma 2(a), pemetaan T yang involutif berarti setiap nilai target memiliki tepat satu nilai asli; terapkan Aksioma 2(a) ukuran asli pada nilai tersebut. Untuk Aksioma 2(b), jika $\alpha + \beta \equiv \gamma$, maka

$$T(\alpha) + T(\beta) \equiv -\alpha - \beta \equiv -\gamma \equiv T(\gamma).$$

Di tempat yang ukuran asli bukan π, berlaku $T(\alpha) = -\alpha$ pada lingkungan tersebut. Maka Aksioma 2(c) juga berlaku untuk T; titik batas yang dikecualikan memang tepat sudut lurus. Jadi T adalah ukuran sudut.

Untuk melihat bahwa tidak ada yang lain, kita juga memakai bahwa Aksioma 3 dan 4 harus tetap benar setelah ukuran diganti. Dua sudut berarah dengan ukuran asli yang sama dapat dipindahkan satu sama lain oleh sebuah kesebangunan langsung (translasi, rotasi, dan skala); Aksioma 4 memaksa ukuran baru pada keduanya sama. Jadi ada satu fungsi $f : S \to S$, dengan $S = (-\pi, \pi]$, sedemikian sehingga

$$\mu(AOB) = f(\measuredangle AOB).$$

Kongruensi dengan orientasi terbalik ditangani oleh tanda $\pm$ dalam Aksioma 3, bukan dengan memilih fungsi yang berbeda di setiap titik pangkal. Aksioma 2(b) sekarang memberi persamaan grup

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \pmod{2\pi},$$

dan Aksioma 2(a) membuat f bijektif. Aksioma 2(c) membuatnya kontinu pada lingkaran (ujung $-\pi$ dan π diidentifikasi). Secara ekuivalen, ada pengangkatan kontinu $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$H(s + t) = H(s) + H(t), \qquad H(t + 2\pi) = H(t) + 2\pi k$$

untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Kontinuitas dan persamaan Cauchy memberi $H(t) = kt$. Kebijektifan pada lingkaran memaksa $k = 1$ atau $k = -1$. Untuk $k = 1$ diperoleh $\mu = \measuredangle$; untuk $k = -1$ diperoleh $\mu \equiv -\measuredangle$ dan representasi di S adalah T. Pilihan derajat tersebut tidak dapat berubah dari satu titik pangkal ke titik lain: Aksioma 2(c) membuatnya lokal konstan, sedangkan konfigurasi tak lurus dapat dihubungkan dengan lintasan kecil yang tetap tak lurus. Jadi pilihan global hanya dua.

Tanpa Aksioma 2(c), keunikan gagal. Pada tingkat Aksioma 2(a)–(b) saja, pilih fungsi sembarang yang tidak kontinu ε dari titik-titik bidang ke $\{+1, -1\}$, lalu definisikan

$$\mu(AOB) = \begin{cases} \measuredangle AOB, & \varepsilon(O) = +1, \\ T(\measuredangle AOB), & \varepsilon(O) = -1. \end{cases}$$

Di setiap titik pangkal, kedua pilihan memenuhi keberadaan/keunikan dan penjumlahan, tetapi μ tidak kontinu ketika ε berubah. Jika syarat Aksioma 3–4 juga dipertahankan secara global, contoh yang sama dapat diganti dengan automorfisme grup lingkaran nonkontinu $h \neq \pm\mathrm{id}$ (automorfisme semacam itu diperoleh secara aljabar dengan memilih basis Hamel); definisi $\mu = h \circ \measuredangle$ memenuhi 2(a), 2(b), 3, dan 4, namun gagal 2(c). Jadi kontinuitas memang merupakan gerbang keunikan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pemetaan T bukan sekadar "mengganti semua sudut dengan nilai mutlak"; nilai sudut lurus harus tetap π, dan operasi harus dipahami modulo 2π. Dalam argumen keunikan, kebijektifan saja tidak cukup: kontinuitas menyingkirkan automorfisme lingkaran berderajat lain dan pilihan orientasi yang berubah-ubah.

3.9 Kriteria perpotongan dua lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch03-ex009`. **Label sumber:** `ex:intersecting-circles-3`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa dua lingkaran berpotongan jika dan hanya jika

$$|r_1 - r_2| \le d \le r_1 + r_2,$$

di mana r_1, r_2 adalah jari-jari dan d jarak antara pusatnya.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 355–358. Bagian perlu dibuktikan memakai ketaksamaan segitiga dan Teorema `thm:abc` ; digest tepatnya tersedia di manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika X berada pada kedua lingkaran, terapkan ketaksamaan segitiga pada O_1XO_2 dalam tiga cara.
2. Untuk arah balik, tangani $d = 0$ secara terpisah.
3. Jika $d > 0$, bangun segitiga dengan sisi r_1, r_2, d dan tempatkan sisi panjang d pada ruas pusat yang diberikan.

Jawaban atau pemeriksaan. Perpotongan memberi segitiga sisi r_1, r_2, d, sehingga ketiga ketaksamaan segitiga menghasilkan syarat. Sebaliknya, syarat dan Teorema `thm:abc` menghasilkan titik X dengan $O_1X = r_1$ dan $O_2X = r_2$; untuk $d = 0$ kedua lingkaran berimpit karena jari-jarinya sama.

Solusi lengkap. Misalkan pusat lingkaran adalah O_1, O_2, jari-jarinya $r_1, r_2 > 0$, dan $d = O_1O_2$. Jika kedua lingkaran berpotongan di X, maka

$$O_1X = r_1, \qquad O_2X = r_2, \qquad O_1O_2 = d.$$

Ketaksamaan segitiga pada $\triangle O_1XO_2$ memberi

$$d \le r_1 + r_2, \qquad r_1 \le d + r_2, \qquad r_2 \le d + r_1.$$

Dua ketaksamaan terakhir ekuivalen dengan $|r_1 - r_2| \le d$, sehingga syarat perlu terbukti.

Untuk kebalikannya, andaikan syarat tersebut berlaku. Jika $d = 0$, maka $|r_1 - r_2| \le 0$ memaksa $r_1 = r_2$; kedua lingkaran berpusat sama dan berimpit, sehingga pasti berpotongan. Sekarang anggap

$d > 0$. Ketiga bilangan r_1, r_2, d memenuhi ketaksamaan segitiga. Setelah mengurutkan ketiganya, Teorema `thm:abc` menghasilkan segitiga (boleh degenerat pada kasus kesamaan) dengan panjang sisi tersebut. Dengan Aksioma 3, sisi yang panjangnya d dapat dipetakan secara kongruen ke ruas $[O_1O_2]$; sebut citra titik sudut ketiga X. Maka

$$O_1X = r_1 \quad \text{dan} \quad O_2X = r_2,$$

sehingga X terletak pada kedua lingkaran. Jadi kedua lingkaran berpotongan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Syarat menyertakan kesamaan: lingkaran boleh bersinggungan atau berimpit. Kasus pusat berimpit ($d = 0$) tidak dapat dimasukkan begitu saja ke teorema segitiga dengan sisi positif, sehingga harus ditangani lebih dahulu.

Uji penguasaan Bab 3

Kerjakan tanpa melihat solusi di atas. Nilai maksimum adalah 20. Setiap butir memiliki ID stabil agar dapat dipilih sebagai unit terpisah.

M1 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item01`.

Dengan menggunakan interval $(-\pi, \pi]$, buktikan bahwa pembalikan sudut mengubah tanda dan bahwa dua sudut bertanda sama dengan dua kali ukuran yang kongruen harus sama.

M2 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item02`.

Jika B berada di antara A, C dan $P \notin (AC)$, buktikan kesamaan tanda untuk APB, BPC, APC dan rumus jumlah nilai mutlaknya.

M3 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item03`.

Buktikan kriteria berikut: X, Y berada pada sisi yang sama dari (PQ) jika dan hanya jika $\measuredangle PXQ$ dan $\measuredangle PYQ$ bertanda sama.

M4 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item04`.

Untuk dua sudut bertolak belakang $AOB, A'OB'$ dengan $B \notin (OA)$, buktikan secara formal bahwa $[A'B'] \cap (AB) = \varnothing$.

M5 (3 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item05`.

Gunakan Teorema Pasch untuk membuktikan bahwa dua cevian $[AA']$ dan $[BB']$ dalam segitiga tak degenerat harus berpotongan, termasuk penanganan titik ujung.

M6 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item06`.

Andaikan X, Y berada pada sisi berlawanan dari (PQ). Buktikan bahwa $[PX) \cap [QY) = \varnothing$ dan jelaskan fungsi kriteria setengah bidang.

M7 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item07`.

Buktikan bahwa ukuran sudut asli dan $T(\alpha)$ adalah satu-satunya ukuran yang memenuhi ketiga aksioma, lalu berikan contoh ukuran yang gagal unik bila Aksioma 2(c) dihapus.

M8 (2 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch03-item08`.

Buktikan kriteria perpotongan dua lingkaran, termasuk kasus $d = 0$ dan kasus kesamaan pada salah satu batas ketaksamaan.

Kunci lengkap dan rubrik

M1 (2 poin). Untuk $\alpha = \measuredangle AOB$ dan $\beta = \measuredangle BOA$, Aksioma 2(b) memberi $\alpha + \beta \equiv 0$; kasus π tetap π dan kasus lain memberi $\beta = -\alpha$. Untuk dua sudut bertanda sama, $\alpha - \beta$ berada di $(-\pi, \pi)$, tetapi merupakan kelipatan π, jadi nol. Rubrik: 1 poin untuk kasus pembalikan dan 1 poin untuk penyaringan kongruensi.

M2 (3 poin). Gunakan Teorema tanda pada segitiga berurutan A, P, B, B, P, C, dan A, P, C; $[AB) = [AC)$ serta $[CB) = [CA)$ menyatukan tanda. Aksioma 2(b) memberi $\alpha + \beta \equiv \gamma$, dan tanda/batas mengubahnya menjadi kesamaan biasa; ambil nilai mutlak. Rubrik: 1 poin untuk tanda, 1 poin untuk relasi penjumlahan, 1 poin untuk argumen batas.

M3 (3 poin). Teorema tanda menghubungkan PXQ dengan XQP dan PYQ dengan YQP; pembalikan sudut mengubah kedua tanda, lalu Akibat setengah bidang pada PQX, PQY menyelesaikan ekuivalensi. Rubrik: 1 poin untuk dua segitiga, 1 poin untuk pembalikan, 1 poin untuk kriteria setengah bidang.

M4 (3 poin). Garis OA memotong AB hanya di A dan sinar berlawanan $[OA']$ tidak memuat titik itu; begitu pula $[OB']$. Akibat setengah bidang memberi bahwa O satu sisi dengan A' dan B', sehingga A', B' satu sisi dan ruasnya tidak memotong AB. Rubrik: 1 poin tiap penerapan dan 1 poin untuk penutup.

M5 (3 poin). Kasus titik ujung langsung memberi titik persekutuan. Pada kasus interior, Pasch pada $AA'C$ dan (BB') memberi titik di AA' setelah sisi $A'C$ dikeluarkan; Pasch simetris memberi titik di BB'. Keunikan perpotongan dua garis menyamakan keduanya. Rubrik: 1 poin untuk endpoint, 1 poin untuk Pasch pertama, 1 poin untuk Pasch kedua/identifikasi.

M6 (2 poin). Titik potong hipotetis bukan P, Q dan berada di luar PQ. Ruas dari titik itu ke X dan Y menghindari PQ, sehingga kriteria setengah bidang memberi sisi yang sama dengan keduanya; kontradiksi. Rubrik: 1 poin untuk mengecualikan endpoint, 1 poin untuk dua ruas, 1 poin untuk kontradiksi.

M7 (2 poin). Tunjukkan T involutif dan $T(\alpha) \equiv -\alpha$, lalu periksa ketiga aksioma. Ukuran lain memberi automorfisme kontinu lingkaran; pengangkatan kontinu memaksa derajat ± 1. Tanpa kontinuitas, pilih tanda secara diskontinu bergantung pada titik pangkal. Rubrik: 1 poin untuk T, 1 poin untuk argumen derajat, 1 poin untuk contoh tandingan.

M8 (2 poin). Arah perlu berasal dari tiga ketaksamaan segitiga. Arah cukup memakai Teorema `thm:abc` setelah menangani $d = 0$; kongruensikan sisi panjang d dengan O_1O_2. Rubrik: 1 poin untuk arah perlu, 1 poin untuk konstruksi, 1 poin untuk kasus batas/berimpit.

Bab 4

Solusi dan penguasaan Bab 4: Segitiga kongruen

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk yang diterima tidak ditulis ulang sebagai karya baru; setiap unit merujuk label, rentang baris, dan digest petunjuknya melalui `manifest-chapter04.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

4.1 Sudut-sudut segitiga sama sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch04-ex001`. **Label sumber:** `ex:equilateral`.

Soal sumber. Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga sama sisi. Tunjukkan bahwa

$$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB.$$

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk Anton Petrunin untuk label tersebut berada pada `source/id-ID/hints.tex`, baris 364–365. Petunjuk itu hanya menyarankan penerapan Teorema `thm:isos` dua kali; rentang dan digest LF-nya dicatat dalam `manifest-chapter04.json`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan Teorema sama kaki pada alas $[AB]$ dan kemudian pada alas $[BC]$.
2. Balik urutan dua sinar dengan relasi $\measuredangle UOV \equiv -\measuredangle VOU$.
3. Gunakan Teorema tanda sudut segitiga untuk mengubah semua kongruensi modulo 2π menjadi kesamaan bilangan real.

Jawaban atau pemeriksaan. Kesamaan sisi $CA = CB$ memberi $\measuredangle ABC \equiv -\measuredangle BAC$, sedangkan pembalikan urutan memberi $\measuredangle CAB \equiv -\measuredangle BAC$. Jadi sudut di B dan A kongruen. Kesamaan sisi $AB = AC$ memberi relasi yang sama antara sudut di C dan di B. Ketiga sudut mempunyai tanda yang sama, sehingga ketiga kongruensi itu adalah kesamaan biasa.

Solusi lengkap. Karena ketiga sisi sama panjang dan titik-titiknya berbeda, segitiga tidak mungkin degenerat: jika ketiganya segaris, satu titik berada di antara dua yang lain dan satu jarak merupakan jumlah dua jarak positif, bertentangan dengan ketiga jarak yang sama. Maka Teorema tanda sudut segitiga berlaku dan ketiga ukuran sudut siklik memiliki tanda yang sama serta berada di $(-\pi, \pi)$.

Tuliskan

$$\alpha = \measuredangle ABC, \qquad \beta = \measuredangle BCA, \qquad \gamma = \measuredangle CAB.$$

Karena $CA = CB$, segitiga sama kaki dengan alas $[AB]$ dan Teorema `thm:isos` menghasilkan

$$\alpha \equiv -\measuredangle BAC \pmod{2\pi}.$$

Relasi pembalikan sudut (Aksioma 2(b) dengan sudut nol) menghasilkan $\gamma \equiv -\measuredangle BAC$. Jadi $\alpha \equiv \gamma$.

Selanjutnya $AB = AC$, sehingga Teorema `thm:isos` pada segitiga yang ditulis dengan alas $[BC]$ memberi

$$\beta \equiv -\measuredangle CBA.$$

Sekali lagi pembalikan urutan memberi $\measuredangle CBA \equiv -\alpha$, dan karena itu $\beta \equiv \alpha$.

Akhirnya, dua bilangan dalam $(-\pi, \pi)$ yang kongruen modulo 2π memiliki selisih di $(-2\pi, 2\pi)$; satu-satunya kelipatan 2π yang mungkin adalah nol. (Tanda yang sama juga menyingkirkan kemungkinan batas sudut lurus.) Maka $\alpha = \beta = \gamma$, seperti yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Teorema sama kaki menghasilkan kongruensi dengan tanda, bukan langsung kesamaan orientasi. Jangan menghapus tanda minus sebelum membalik urutan sudut, dan jangan menganggap tiga sudut sama hanya dari gambar tanpa menangani kongruensi modulo 2π.

4.2 Kriteria sisi-sisi-mediana

ID stabil: `o004-c100-sol-ch04-ex002`. **Label sumber:** `ex:SMS`.

Soal sumber. Tinjau dua segitiga ABC dan $A'B'C'$. Misalkan M adalah titik tengah $[AB]$, dan M' adalah titik tengah $[A'B']$. Andaikan $C'A' = CA$, $C'B' = CB$, dan $C'M' = CM$. Buktikan bahwa

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC.$$

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 367–369. Petunjuk itu meminta pencerminan C dan C' terhadap M dan M' menjadi D dan D', lalu perbandingan segitiga BCD dan $B'C'D'$; digest rentang sumber dan terjemahan ada dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pisahkan kasus khusus $C = M$ (yang memaksa $C' = M'$).
2. Pada kasus lain, cerminkan C terhadap M dan C' terhadap M'; hitung tiga sisi yang bersesuaian dari BCD dan $B'C'D'$.
3. Gunakan SSS untuk memperoleh isometri g, buktikan $g(M) = M'$ melalui keunikan titik tengah pada sebuah garis, lalu gunakan keunikan pencerminan titik untuk mendapatkan $g(A) = A'$.

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan D dan D' sebagai cerminan tersebut, berlaku $CD = C'D'$, $BD = AC = A'C' = B'D'$, dan $BC = B'C'$. Jadi SSS memberi $\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$. Isometri yang dihasilkan memetakan titik tengah M dari CD ke M'; karena M juga titik tengah AB, titik A dipetakan ke titik yang merupakan cerminan B' terhadap M', yaitu A'. Kasus $C = M$ ditangani langsung dengan SSS.

Solusi lengkap. Misalkan R_M menyatakan pencerminan terhadap titik M, dan tetapkan

$$D = R_M(C), \qquad D' = R_{M'}(C').$$

Mula-mula tangani kasus $C = M$. Dari $CM = C'M'$ diperoleh $C' = M'$. Karena M dan M' masing-masing titik tengah sisi dasar,

$$CA = CB = \tfrac{1}{2}AB, \qquad C'A' = C'B' = \tfrac{1}{2}A'B'.$$

Hipotesis $CA = C'A'$ memberi $AB = A'B'$. Dua kesamaan sisi lain sudah diberikan, sehingga SSS (yang memang juga berlaku untuk segitiga degenerat) langsung menghasilkan kekongruenan yang diminta. Jadi selanjutnya anggap $C \neq M$; otomatis $C' \neq M'$.

Menurut definisi pencerminan, M merupakan titik tengah $[CD]$ dan M' merupakan titik tengah $[C'D']$. Pencerminan titik adalah isometri, sehingga

$$CD = 2CM = 2C'M' = C'D'.$$

Pencerminan yang sama mengirim A ke B (karena M titik tengah $[AB]$) dan mengirim C ke D; akibatnya

$$BD = AC.$$

Dengan cara yang sama, $B'D' = A'C'$. Bersama hipotesis, kita mempunyai

$$BC = B'C', \qquad CD = C'D', \qquad BD = B'D'.$$

Maka Syarat SSS memberi suatu isometri g dengan

$$g(B) = B', \qquad g(C) = C', \qquad g(D) = D'.$$

Karena M titik tengah $[CD]$, isometri g mengirimkannya ke titik pada garis $(C'D')$ yang berjarak sama dari C' dan D' serta berjarak $C'D'/2$ dari keduanya. Pada sebuah garis yang diidentifikasi secara isometrik dengan $\mathbb{R}$, titik seperti itu tunggal; jadi $g(M) = M'$. Sekarang M juga titik tengah $[AB]$, sehingga $g(M) = M'$ adalah titik tengah $[g(A)B']$. Di sisi lain M' adalah titik tengah $[A'B']$. Lema pencerminan titik menyatakan bahwa untuk pusat M' dan titik B' ada tepat satu titik yang dicerminkan menjadi B'; karena itu $g(A) = A'$.

Dengan demikian g memetakan A, B, C berturut-turut ke A', B', C', dan definisi kekongruenan segitiga memberikan $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Mencerminkan C tidak berarti otomatis bahwa $AB = CD$; keduanya adalah diagonal konfigurasi pusat, bukan sisi-sisi jajargenjang. Langkah penting adalah memakai SSS pada BCD lalu melacak titik tengah melalui isometri, termasuk kasus khusus ketika $C = M$.

4.3 Dua pasangan segitiga dari titik-titik antara

ID stabil: `o004-c100-sol-ch04-ex003`. **Label sumber:** `ex:isos-sides`.

Soal sumber. Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga sama kaki dengan alas $[AB]$. Andaikan titik A' terletak di antara B dan C, titik B' terletak di antara A dan C, dan $CA' = CB'$. Tunjukkan bahwa

(a) $\triangle AA'C \cong \triangle BB'C$;

(b) $\triangle ABB' \cong \triangle BAA'$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 371–373: bagian (a) memakai SAS, sedangkan bagian (b) memakai hasil (a) dan SSS. Digest LF kedua rentang dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan $CA = CB$ dan $CA' = CB'$ sebagai dua pasangan sisi.
2. Betweenness menyamakan sinar $[CA')$ dengan $[CB)$ dan $[CB')$ dengan $[CA)$; sudut apit sama hingga tanda.
3. Dari (a) ambil $AA' = BB'$, lalu gunakan penjumlahan ruas pada AC dan BC untuk mendapatkan $AB' = BA'$ sebelum menerapkan SSS.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada pusat C, sisi-sisi CA, CA' sama dengan CB, CB', dan sudut apit dibalik orientasinya; SAS memberi (a). Dari (a), $AA' = BB'$. Karena $AC = BC$, $A'C = B'C$, dan kedua titik berada di antara ujung-ujung yang sesuai, pengurangan panjang ruas memberi $AB' = BA'$. Bersama $AB = BA$, SSS memberi (b).

Solusi lengkap. Segitiga sama kaki dengan alas $[AB]$ berarti $CA = CB$. Karena A' berada di antara B dan C, sinar dari C melalui A' sama dengan sinar $[CB)$; demikian pula, karena B' berada di antara A dan C, sinar $[CB')$ sama dengan $[CA)$. Oleh hipotesis $CA' = CB'$, pasangan sisi yang bersesuaian untuk segitiga $AA'C$ dan $BB'C$ adalah

$$CA = CB, \qquad CA' = CB'.$$

Sudut apitnya memenuhi

$$\measuredangle ACA' = \measuredangle ACB, \qquad \measuredangle BCB' = \measuredangle BCA,$$

dan pembalikan urutan sinar memberi $\measuredangle ACB \equiv -\measuredangle BCA$. Jadi syarat SAS dalam Aksioma `def:birkhoff-axioms:3` berlaku (tanda boleh berlawanan), dan

$$\triangle AA'C \cong \triangle BB'C.$$

Dengan korespondensi yang ditulis, kita memperoleh khususnya

$$AA' = BB' \quad \text{dan} \quad A'C = B'C.$$

Untuk bagian (b), betweenness memberikan penjumlahan ruas

$$AC = AB' + B'C, \qquad BC = BA' + A'C.$$

Karena $AC = BC$ dan $A'C = B'C$, pengurangan kedua persamaan menghasilkan $AB' = BA'$. Sekarang bandingkan segitiga ABB' dan BAA' dengan korespondensi $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow A'$. Tiga pasangan sisinya adalah

$$AB = BA, \qquad BB' = AA', \qquad AB' = BA'.$$

Syarat SSS menyimpulkan

$$\triangle ABB' \cong \triangle BAA'.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik "di antara" menentukan arah sinar, bukan sekadar fakta bahwa titik berada pada garis. Pada bagian (b), kesamaan $AB' = BA'$ tidak diberikan; kesamaan itu harus diturunkan dari penjumlahan ruas dan tidak boleh diganti dengan pengamatan simetri dari gambar.

4.4 Lema tiga paku

ID stabil: `o004-c100-sol-ch04-ex004`. **Label sumber:** `ex:ABC-motion`.

Soal sumber. Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga tak degenerat, dan f adalah pemetaan yang mempertahankan jarak dari bidang ke dirinya sendiri dengan $f(A) = A$, $f(B) = B$, dan $f(C) = C$. Tunjukkan bahwa f adalah pemetaan identitas, yaitu $f(X) = X$ untuk setiap titik X pada bidang.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 375–388. Strateginya adalah mengambil $X' = f(X)$, memakai SSS pada dua pasang segitiga, lalu mengurangkan dua identitas sudut untuk memaksa sudut ABC menjadi 0 atau π. Digest rentang sumber dan terjemahan dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Singkirkan kasus $X \in \{A, B, C\}$ dan gunakan injektivitas pemetaan yang mempertahankan jarak.
2. Bandingkan $\triangle ABX$ dengan $\triangle ABX'$ dan $\triangle CBX$ dengan $\triangle CBX'$. Jika cabang tanda sama terjadi, keunikan sinar dan kesamaan jarak sudah memberi $X = X'$.
3. Pada cabang tanda berlawanan, tulis penjumlahan sudut berarah di B sebelum mengurangkan; hasilnya $\measuredangle ABC \equiv -\measuredangle ABC$.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $X' = f(X)$, jarak AX, BX, CX sama dengan AX', BX', CX'. SSS memberi dua kemungkinan tanda untuk sudut di B pada masing-masing pasangan. Cabang tanda sama memaksa $X = X'$, sedangkan cabang lain memberi $\measuredangle ABC \equiv -\measuredangle ABC$. Ini berarti sudut ABC adalah 0 atau π, bertentangan dengan ketakdegeneratan.

Solusi lengkap. Pemetaan yang mempertahankan jarak bersifat injektif: jika $f(U) = f(V)$, maka $UV = f(U)f(V) = 0$ sehingga $U = V$. Ambil titik sembarang X dan tetapkan $X' = f(X)$. Jika X salah satu dari A, B, C, kesimpulan langsung berlaku. Anggap selanjutnya X berbeda dari ketiga titik itu. Injektivitas menjamin X' juga berbeda dari ketiganya.

Karena f mempertahankan jarak dan memperbaiki A, B, C, berlaku

$$AX = AX', \qquad BX = BX', \qquad CX = CX'.$$

Syarat SSS pada segitiga ABX dan ABX' memberi, dengan $\alpha = \measuredangle ABX$ dan $\alpha' = \measuredangle ABX'$, relasi $\alpha \equiv \pm\alpha'$. Jika tandanya sama, kedua sudut menentukan sinar yang sama dari B (Aksioma 2(a)); karena jarak dari B juga sama, keunikan titik pada sinar tersebut memberi $X = X'$, bertentangan dengan asumsi. Maka

$$\alpha \equiv -\alpha'.$$

Dengan menerapkan argumen yang sama pada $\triangle CBX$ dan $\triangle CBX'$, jika $\beta = \measuredangle CBX$ dan $\beta' = \measuredangle CBX'$, diperoleh

$$\beta \equiv -\beta'.$$

Relasi penjumlahan sudut dan pembalikan urutan di titik B memberi

$$\alpha - \beta \equiv \measuredangle ABC, \qquad \alpha' - \beta' \equiv \measuredangle ABC.$$

Mengurangkan dua relasi bertanda berlawanan menghasilkan

$$\measuredangle ABC \equiv -(\alpha' - \beta') \equiv -\measuredangle ABC.$$

Jadi $2\measuredangle ABC \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Karena ukuran berada pada interval $(-\pi, \pi]$, ini hanya mungkin jika $\measuredangle ABC = 0$ atau π. Teorema sudut nol dan Teorema sudut lurus kemudian membuat A, B, C segaris, bertentangan dengan hipotesis bahwa $\triangle ABC$ tak degenerat. Kontradiksi menunjukkan $X' = X$.

Karena X dipilih sembarang, f adalah pemetaan identitas. Perhatikan pula konsekuensi yang akan dipakai pada latihan berikut: pada segitiga tak degenerat ABC, tidak ada dua titik berbeda yang mempunyai tiga jarak AX, BX, CX yang sama. Bukti kontradiksinya persis argumen di atas dan hanya menggunakan tiga kesamaan jarak tersebut.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. SSS menghasilkan pilihan orientasi + atau −; pilihan + tidak boleh diabaikan, tetapi harus disingkirkan dengan keunikan sinar. Selain itu, kongruensi sudut harus dijumlahkan melalui Aksioma 2(b) sebelum dikurangkan; menulis “langsung jelas” dapat kehilangan faktor modulo 2π.

4.5 Konstruksi citra titik oleh gerak

ID stabil: `o004-c100-sol-ch04-ex005`. **Label sumber:** `ex:motion`.

Soal sumber. Andaikan $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ adalah segitiga tak degenerat yang kongruen; khususnya terdapat transformasi isometrik f yang memetakan $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, dan $C \mapsto C'$. Diberikan titik X, konstruksikan $X' = f(X)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 390–392: konstruksikan tiga lingkaran berpusat di A', B', C' dengan jari-jari AX, BX, CX. Rentang dan digest LF dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gambar lingkaran $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ dengan pusat A', B', C' dan jari-jari berturut-turut AX, BX, CX.
2. Gunakan isometri f untuk menunjukkan bahwa $f(X)$ berada pada ketiga lingkaran, sehingga konstruksi memiliki titik bersama.
3. Buktikan keunikan titik bersama dengan konsekuensi lema tiga paku: tiga jarak ke simpul segitiga tak degenerat menentukan satu titik.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik yang dicari adalah satu-satunya titik pada

$$\Gamma_A = \{Y : A'Y = AX\}, \quad \Gamma_B = \{Y : B'Y = BX\}, \quad \Gamma_C = \{Y : C'Y = CX\}.$$

Keberadaan mengikuti dari $Y = f(X)$. Jika Y lain merupakan titik bersama, $f^{-1}(Y)$ memiliki jarak yang sama ke A, B, C seperti X; lema tiga paku memaksa $f^{-1}(Y) = X$, jadi $Y = f(X)$.

Solusi lengkap. Dengan penggaris dan jangka ideal, konstruksikan tiga lingkaran

$$\Gamma_A := \Gamma(A', AX), \qquad \Gamma_B := \Gamma(B', BX), \qquad \Gamma_C := \Gamma(C', CX).$$

Di sini notasi $\Gamma(P, r)$ berarti lingkaran berpusat P berjari-jari r. Ambil titik persekutuan ketiganya dan namai X'.

Pertama, titik persekutuan itu ada. Karena f isometri,

$$A'f(X) = AX, \qquad B'f(X) = BX, \qquad C'f(X) = CX,$$

sehingga $f(X)$ terletak pada $\Gamma_A \cap \Gamma_B \cap \Gamma_C$.

Kedua, titik itu tunggal. Andaikan Y juga berada pada ketiga lingkaran, dan tetapkan $Z = f^{-1}(Y)$; invers f^{-1} ada karena isometri adalah bijeksi. Pelestarian jarak memberi

$$AZ = A'Y = AX, \qquad BZ = B'Y = BX, \qquad CZ = C'Y = CX.$$

Konsekuensi lema tiga paku dari latihan sebelumnya menyatakan bahwa pada segitiga tak degenerat ABC, tiga jarak ini menentukan titik secara unik. Maka $Z = X$, dan akibatnya $Y = f(X)$. Jadi tiga lingkaran mempunyai tepat satu titik persekutuan, dan prosedur konstruksi benar-benar menghasilkan citra $X' = f(X)$.

Konstruksi ini juga menangani kasus khusus ketika X berimpit dengan salah satu simpul: salah satu jari-jari bernilai nol, sehingga lingkaran terkait menyusut menjadi titik simpul citra; argumen keberadaan dan keunikan tetap berlaku tanpa perubahan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dua lingkaran dapat berpotongan di dua titik, jadi memilih sembarang perpotongan pertama tidak cukup. Lingkaran ketiga dan ketakdegeneratan $A'B'C'$ yang menyeleksi satu titik; bukti harus menunjukkan keberadaan dari $f(X)$ sekaligus keunikan, bukan hanya memeriksa tiga panjang setelah gambar.

Uji penguasaan Bab 4

Kerjakan tanpa melihat solusi di atas. Nilai maksimum adalah 20. Setiap butir memiliki ID stabil agar dapat dipilih sebagai unit terpisah.

M1 (4 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch04-item01`.

Mulai dari fakta bahwa $\triangle ABC$ sama sisi. Dengan Teorema sama kaki, relasi pembalikan sudut, dan batas interval ukuran sudut, buktikan secara rinci bahwa ketiga sudut berarahnya sama.

M2 (4 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch04-item02`.

Berikan bukti kriteria SMS: cerminkan titik puncak terhadap titik tengah sisi, gunakan SSS pada dua segitiga hasil pencerminan, lalu jelaskan mengapa isometri tersebut harus mengirim A ke A'.

M3 (4 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch04-item03`.

Untuk konfigurasi A' dan B' yang berada di antara titik-titik yang diberikan, buktikan kedua kekongruenan pada `ex:isos-sides`; tuliskan secara eksplisit persamaan penjumlahan ruas yang menghasilkan $AB' = BA'$.

M4 (4 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch04-item04`.

Buktikan lema tiga paku untuk pemetaan yang mempertahankan jarak. Dalam argumen Anda, singkirkan cabang tanda sama dengan keunikan sinar dan jelaskan langkah pengurangan dua identitas sudut.

M5 (4 poin). **ID stabil:** `o004-c100-mastery-ch04-item05`.

Rancang dan benarkan konstruksi $X' = f(X)$ dari tiga lingkaran. Buktikan keberadaan dan keunikan titik persekutuan, termasuk bila X berimpit dengan salah satu simpul.

Kunci lengkap dan rubrik

M1 (4 poin). Gunakan $CA = CB$ dan $AB = AC$ untuk menerapkan Teorema `thm:isos` ; pembalikan urutan mengubah dua relasi bertanda menjadi $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$. Satu poin untuk setiap penerapan/isometri sudut, satu poin untuk penggunaan tanda segitiga, dan satu poin untuk menyaring kongruensi modulo 2π menjadi kesamaan.

M2 (4 poin). Definisikan D, D' sebagai cerminan terhadap M, M'; tunjukkan $CD = C'D'$, $BD = B'D'$, dan $BC = B'C'$; gunakan SSS untuk memperoleh g. Tunjukkan $g(M) = M'$ melalui keunikan titik tengah pada garis, lalu gunakan keunikan pencerminan untuk $g(A) = A'$. Masing-masing dari empat langkah bernilai satu poin.

M3 (4 poin). Satu poin untuk dua pasangan sisi dan sudut apit SAS, satu poin untuk $AA' = BB'$ dari (a), satu poin untuk menulis $AC = AB' + B'C$ dan $BC = BA' + A'C$, dan satu poin untuk menyimpulkan $AB' = BA'$ lalu menerapkan SSS pada (b).

M4 (4 poin). Satu poin untuk kesamaan tiga jarak dan dua aplikasi SSS, satu poin untuk menyingkirkan cabang tanda sama dengan keunikan sinar, satu poin untuk menulis $\alpha - \beta \equiv \alpha' - \beta' \equiv \measuredangle ABC$, dan satu poin untuk menyimpulkan sudut 0 atau π serta kontradiksi ketakdegeneratan.

M5 (4 poin). Satu poin untuk konstruksi tiga lingkaran dengan pusat dan jari-jari yang tepat, satu poin untuk keberadaan melalui $f(X)$, satu poin untuk menarik balik titik persekutuan dengan f^{-1}, dan satu poin untuk menerapkan keunikan tiga jarak (termasuk kasus jari-jari nol).

Bab 5

Solusi dan penguasaan Bab 5: Garis tegak lurus

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk yang diterima tidak ditulis ulang sebagai karya baru; setiap unit merujuk label, rentang baris, dan digest petunjuknya melalui `manifest-chapter05.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

5.1 Sudut lancip dan tumpul pada garis lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex001`. **Label sumber:** `ex:acute-obtuce`.

Soal sumber. Andaikan O terletak di antara A dan B dan $X \neq O$. Buktikan bahwa $\angle XOA$ lancip jika dan hanya jika $\angle XOB$ tumpul.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk Anton Petrunin berada pada `source/id-ID/hints.tex`, baris 401–408; digest tepatnya dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan bahwa sinar $[OA)$ dan $[OB)$ berlawanan.
2. Tulis jumlah dua ukuran sudut sebagai sudut lurus modulo 2π.
3. Gunakan tanda yang sama dan $|\alpha| + |\beta| = \pi$.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\alpha = \measuredangle XOA$ dan $\beta = \measuredangle XOB$, maka α dan β bertanda sama serta $|\alpha| + |\beta| = \pi$. Jadi $|\alpha| < \pi/2$ tepat ketika $|\beta| > \pi/2$.

Solusi lengkap. Karena O berada di antara A dan B, Aksioma sudut memberi

$$\alpha + \beta \equiv \measuredangle AOB \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Pilih wakil ukuran pada $(-\pi, \pi]$. Sifat tanda sudut pada dua bagian yang dipisahkan oleh sinar OX menunjukkan bahwa α dan β memiliki tanda yang sama; keduanya tidak dapat berada di sisi berlawanan karena sinar OA, OB berlawanan. Dengan demikian kongruensi di atas tidak melibatkan pembatalan tanda, dan mengambil nilai mutlak menghasilkan $|\alpha| + |\beta| = \pi$. (Kasus sudut lurus hanya memberi nilai batas $|\alpha| = \pi$ atau $|\beta| = \pi$, sehingga tidak mengubah implikasi.) Maka $\angle XOA$ lancip, yakni $|\alpha| < \pi/2$, jika dan hanya jika $|\beta| = \pi - |\alpha| > \pi/2$, yang persis berarti $\angle XOB$ tumpul. Pertukaran A dan B memberi arah kebalikan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan mengganti ukuran sudut berarah dengan nilai mutlak sebelum menetapkan tanda; sudut lurus adalah batas khusus dalam representasi modulo.

5.2 Sisi bidang terhadap garis sumbu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex002`. **Label sumber:** `ex:pbisec-side`.

Soal sumber. Jika ℓ adalah garis sumbu $[AB]$, buktikan $AX < BX$ jika dan hanya jika X dan A berada pada sisi yang sama dari ℓ.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 410–431. Ia memakai titik potong Y dan ketaksamaan segitiga; digest sumber/terjemahan ada di manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ingat bahwa A dan B berada pada sisi berlawanan dari ℓ.
2. Untuk arah pertama, biarkan $Y = [BX] \cap \ell$.
3. Gunakan $AY = BY$ dan ketaksamaan segitiga; balikkan A, B untuk konvers.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika A, X satu sisi, Y berada di antara B dan X dan $BX = BY + YX = AY + YX > AX$. Pertukaran A, B memberi arah sebaliknya.

Solusi lengkap. Garis sumbu membagi bidang menjadi dua setengah bidang, dan A, B berada di setengah bidang berlawanan karena ruas AB memotong ℓ di titik tengahnya. Andaikan A dan X satu sisi. Segmen $[AX]$ tidak memotong ℓ, sedangkan $[BX]$ memotongnya di suatu Y. Betweenness memberi $BX = BY + YX$, sementara teorema garis sumbu memberi $BY = AY$. Maka

$$BX = AY + YX \geq AX + YX > AX,$$

karena $X \notin \ell$ (jika $X \in \ell$, kedua jarak sama). Jadi $AX < BX$.

Sebaliknya, andaikan X berada pada sisi yang sama dengan B. Terapkan argumen yang sama dengan menukar nama A dan B; hasilnya $BX < AX$, yang meniadakan $AX < BX$. Jika X berada tepat pada ℓ, teorema garis sumbu memberi $AX = BX$, sehingga juga bukan kasus ketat. Karena hanya ada dua sisi dan garisnya sendiri, ekuivalensi terbukti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan jarak hanya berlaku untuk titik pada ℓ; jangan mengubahnya menjadi ketaksamaan tanpa terlebih dahulu menentukan sisi dan titik potong.

5.3 Sisi lebih panjang dan sudut berhadapan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex003`. **Label sumber:** `ex:side-angle`.

Soal sumber. Untuk segitiga tak degenerat ABC, buktikan

$$AC > BC \iff |\measuredangle ABC| > |\measuredangle CAB|.$$

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk singkat pada baris 433–434 mengarahkan ke latihan garis sumbu, betweenness, dan teorema segitiga sama kaki.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk $AC > BC$, pilih $D \in [AC]$ dengan $CD = CB$.
2. Gunakan segitiga sama kaki BCD dan sudut luar di D.
3. Pertukarkan A dan B untuk arah balik.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $AC > BC$, titik D dengan $CD = CB$ berada di antara A dan C; teorema segitiga sama kaki memberi sudut luar di D lebih besar daripada $\angle CAB$, sehingga $|\angle ABC| > |\angle CAB|$.

Solusi lengkap. Andaikan $AC > BC$. Pada ruas $[AC]$ terdapat tepat satu titik D dengan $CD = CB$; karena $AC > BC$, titik itu bukan A dan berada di antara A, C. Segitiga BCD sama kaki, sehingga sudut alasnya memenuhi

$$|\measuredangle CBD| = |\measuredangle BDC|.$$

Sinar DA dan DC berlawanan. Dengan teorema penjumlahan sudut dan tanda segitiga, sudut luar $\angle BDC$ memiliki besar

$$|\measuredangle BDC| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle ABD|.$$

Karena D terletak pada AC, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle CAB|$. Selain itu, sinar BD berada di dalam sudut ABC, sehingga

$$|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ABD| + |\measuredangle DBC| = 2|\measuredangle ABD| + |\measuredangle CAB| > |\measuredangle CAB|.$$

Untuk arah sebaliknya, jika $|\angle ABC| > |\angle CAB|$ namun $AC \le BC$, pertukaran nama A dan B pada argumen sebelumnya (dengan kesamaan sebagai kasus segitiga sama kaki) menghasilkan kontradiksi. Jadi $AC > BC$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut yang dibandingkan berhadapan dengan sisi yang benar: AC berhadapan dengan sudut di B, bukan di A. Sudut luar harus ditulis sebagai jumlah, bukan disamakan tanpa tanda.

5.4 Titik tetap dan garis sumbu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex004`. **Label sumber:** `ex:pbisec-motion`.

Soal sumber. Suatu transformasi isometrik memiliki titik tetap F dan memetakan X ke Y. Buktikan bahwa F terletak pada garis sumbu $[XY]$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 436 menyarankan menunjukkan $FX = FY$ lalu memakai teorema garis sumbu.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis $f(F) = F$ dan $f(X) = Y$.
2. Gunakan bahwa f mempertahankan jarak.
3. Terapkan karakterisasi garis sumbu.

Jawaban atau pemeriksaan. $FX = f(F)f(X) = FY$; teorema garis sumbu kemudian memberi $F \in \ell_{XY}$.

Solusi lengkap. Misalkan f adalah transformasi isometrik, $f(F) = F$, dan $f(X) = Y$. Kekekalan jarak menghasilkan

$$FX = d(F, X) = d(f(F), f(X)) = d(F, Y) = FY.$$

Jika $X \neq Y$, teorema garis sumbu menyatakan bahwa semua titik yang berjarak sama dari X dan Y tepat merupakan titik-titik pada garis sumbu ruas $[XY]$, sehingga F berada di sana. Jika $X = Y$, pernyataan tidak memiliki ruas nondegenerat untuk digaris-sumbukan; kasusnya hanyalah titik tetap tambahan dan tidak menuntut konstruksi garis. Dengan konvensi latihan bahwa “another point” berarti $X \neq Y$, bukti selesai.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik tetap bukan berarti semua titik tetap. Yang dipakai hanya satu kesamaan $FX = FY$ dari sifat isometri.

5.5 Konstruksi garis tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex005`. **Label sumber:** `ex:construction-perpendicular`.

Soal sumber. Uraikan konstruksi penggaris dan jangka untuk membuat garis melalui titik yang diberikan dan tegak lurus terhadap garis yang diberikan.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk gambar berada pada baris 444–445; langkah konstruksi berikut adalah uraian orisinal yang membuat data dan verifikasi eksplisit.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih titik A pada garis ℓ sehingga lingkaran berpusat P berjari-jari PA memotong ℓ lagi di B.
2. Konstruksikan garis sumbu $[AB]$ dengan dua busur sama jari-jari.
3. Garis sumbu itu melalui P dan merupakan garis yang dicari.

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan $PA = PB$, titik P berada pada garis sumbu $[AB]$; garis sumbu tegak lurus $AB = \ell$. Jika $P \in \ell$, pilih A, B di kedua sisi P.

Solusi lengkap. Jika $P \notin \ell$, pilih (dengan memperbesar jangka bila perlu) titik $A \in \ell$ sehingga lingkaran $\mathcal{C}(P, PA)$ tidak menyinggung ℓ. Lingkaran itu memotong ℓ di A dan satu titik lain B. Dengan pusat A dan B serta jari-jari yang sama lebih besar dari $AB/2$, buat dua busur yang berpotongan di P dan P_1; tarik garis PP_1. Karena $PA = PB$ dan $P_1A = P_1B$, kedua titik P, P_1 berada pada garis sumbu $[AB]$. Teorema garis sumbu menyatakan garis tersebut tegak lurus AB, jadi tegak lurus ℓ dan melalui P.

Jika $P \in \ell$, pilih $A, B \in \ell$ di sisi berlawanan dengan $PA = PB$ (misalnya konstruksikan titik-titik itu pada lingkaran berpusat P), lalu ulangi langkah busur. Garis sumbu $[AB]$ tetap melalui P dan tegak lurus ℓ. Ketunggalan garis tegak lurus menjamin hasil tidak bergantung pada pilihan A atau radius bantu.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Satu titik potong saja tidak cukup untuk menentukan garis sumbu; pilih A agar ada titik kedua B, lalu gunakan dua busur untuk menggambar sumbu.

5.6 Dua pencerminan dan penggandaan sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex006`. **Label sumber:** `ex:2-reflections`.

Soal sumber. Jika X, Y adalah bayangan pencerminan P terhadap (AB) dan (BC), buktikan $\measuredangle XBY \equiv 2\measuredangle ABC$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk penulis berada pada baris 447–466 dan mencatat dua kesamaan sudut yang harus dijumlahkan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan proposisi pencerminan pada titik pangkal B.
2. Sisipkan sinar BP di antara sinar yang relevan.
3. Jumlahkan dua kali masing-masing bagian dari $\angle ABC$.

Jawaban atau pemeriksaan. Pencerminan memberi $\measuredangle XBA \equiv \measuredangle ABP$ dan $\measuredangle PBC \equiv \measuredangle CBY$; penjumlahan menghasilkan $\measuredangle XBY \equiv 2(\measuredangle ABP + \measuredangle PBC)$.

Solusi lengkap. Dari proposisi pencerminan terhadap (AB), sudut antara BX dan BA adalah lawan dari sudut antara BP dan BA. Dengan pembalikan urutan sinar,

$$\measuredangle XBA \equiv \measuredangle ABP.$$

Demikian pula, pencerminan terhadap (BC) memberi $\measuredangle PBC \equiv \measuredangle CBY$. Pecah sudut berarah di B melalui sinar BP:

$$\begin{aligned} \measuredangle XBY &\equiv \measuredangle XBP + \measuredangle PBY \\ &\equiv 2\measuredangle ABP + 2\measuredangle PBC \\ &\equiv 2(\measuredangle ABP + \measuredangle PBC) \\ &\equiv 2\measuredangle ABC \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Identitas ini tetap berlaku ketika salah satu sinar berimpit dengan garis refleksi karena semua relasi ditulis sebagai kongruensi sudut berarah.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menganggap pencerminan mempertahankan orientasi; ia membalik tanda. Faktor 2 muncul karena kedua pecahan sudut dicerminkan, bukan karena panjang ruas digandakan.

5.7 Tiga pencerminan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex007`. **Label sumber:** `ex:3-reflections`.

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap transformasi isometrik bidang merupakan komposisi paling banyak tiga pencerminan terhadap garis.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk berada pada baris 469–489. Ia memetakan tiga titik segitiga tak degenerat secara berurutan dan memakai lema tiga paku.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih segitiga ABC dan citranya $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$.
2. Gunakan garis sumbu $[A\hat{A}]$, lalu $[B'\hat{B}]$.
3. Jika perlu, gunakan garis $(\hat{A}\hat{B})$ untuk titik ketiga.

Jawaban atau pemeriksaan. Refleksi pertama mengirim A ke $\hat{A}$, kedua mempertahankan $\hat{A}$ dan mengirim B' ke $\hat{B}$, sedangkan ketiga mempertahankan dua titik itu dan mengirim C'' ke $\hat{C}$. Lema tiga paku menyamakan komposisi dengan isometri semula.

Solusi lengkap. Pilih segitiga tak degenerat ABC dan tulis citra di bawah isometri f sebagai $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Jika $A \neq \hat{A}$, refleksikan terhadap garis sumbu $[A\hat{A}]$; sebut citra titik lain B', C'. Jika $A = \hat{A}$, lewati langkah ini. Karena refleksi pertama adalah isometri, jarak $\hat{A}B' = \hat{A}\hat{B}$. Jika $B' \neq \hat{B}$, refleksikan terhadap garis sumbu $[B'\hat{B}]$. Garis ini melalui $\hat{A}$ (dua jarak ke B' dan $\hat{B}$ sama), sehingga refleksi kedua mempertahankan $\hat{A}$; sebut citra C''. Sekarang $\hat{A}C'' = \hat{A}\hat{C}$ dan $\hat{B}C'' = \hat{B}\hat{C}$. Jika $C'' \neq \hat{C}$, garis $(\hat{A}\hat{B})$ adalah garis sumbu $[C''\hat{C}]$ dan refleksi ketiga mempertahankan $\hat{A}, \hat{B}$ serta mengirim C'' ke $\hat{C}$. Komposisi g mengirim ketiga titik A, B, C tepat ke citra oleh f. Lema tiga paku menyatakan dua isometri yang berimpit pada tiga titik tak degenerat adalah sama; maka $g = f$. Jumlah refleksi yang benar-benar diperlukan paling banyak tiga.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis sumbu langkah kedua harus mempertahankan titik pertama; ini dibuktikan dari kesamaan jarak, bukan diasumsikan. Urutan komposisi dibaca dari kanan ke kiri sebagai pemetaan berurutan.

5.8 Sudut lain pada segitiga siku-siku atau tumpul

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex008`. **Label sumber:** `ex:right-acute`.

Soal sumber. Buktikan: (a) jika sudut C siku-siku, sudut A, B lancip; (b) jika sudut C tumpul, sudut A, B lancip.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk berada pada baris 491–497 dan menggunakan lema jarak tegak lurus serta konstruksi kaki tegak lurus untuk bagian (b).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk (a), gunakan jumlah sudut segitiga atau bandingkan sisi melalui kaki tegak lurus.
2. Untuk (b), jatuhkan tegak lurus dari C ke $[AB]$ di D.
3. Terapkan (a) pada ACD dan BCD.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada (a), dua sudut yang tersisa berjumlah $\pi/2$, sehingga masing-masing kurang dari $\pi/2$. Pada (b), kaki D berada di antara A, B; kedua segitiga kecil siku-siku, sehingga sudut di A dan B lancip.

Solusi lengkap. Untuk (a), segitiga tak degenerat memiliki tiga sudut bertanda sama dan jumlah besar mutlaknya π. Jika $|\angle ACB| = \pi/2$, maka $|\angle BAC| + |\angle ABC| = \pi/2$. Keduanya positif, jadi masing-masing berada di $(0, \pi/2)$ dan lancip.

Untuk (b), ambil kaki tegak lurus D dari C ke garis (AB). Karena sudut C tumpul dan segitiga tak degenerat, proyeksi D berada pada ruas $[AB]$; jika berada di luar, salah satu sudut di A atau B akan sudah tumpul, bertentangan dengan sudut tumpul yang dipilih sebagai sudut dalam di C. Segitiga ACD dan BCD masing-masing memiliki sudut siku-siku di D. Dengan bagian (a), sudut di A pada segitiga pertama dan sudut di B pada segitiga kedua lancip. Karena AD dan AB adalah sinar yang sama (demikian untuk BD dan BA), sudut-sudut itu tepat $\angle CAB$ dan $\angle CBA$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Bagian (b) memerlukan kaki pada ruas AB, bukan hanya pada perpanjangan; gunakan ketakdegeneratan dan posisi sudut tumpul untuk menjelaskan hal itu.

5.9 Titik di antara dua titik lebih dekat ke salah satu ujung

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex009`. **Label sumber:** `ex:obtuce`.

Soal sumber. Jika X berada di antara V dan W, buktikan untuk setiap P bahwa $PX < PV$ atau $PX < PW$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk berada pada baris 499–508 dan membangun garis melalui X yang tegak lurus PX.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika P, X, V membentuk sudut siku-siku, gunakan lema jarak terpendek.
2. Jika tidak, tarik garis m melalui X tegak lurus PX.
3. V, W berada di sisi berlawanan; gunakan titik potong W'.

Jawaban atau pemeriksaan. Garis $m \perp PX$ memisahkan V, W. Jika P, W berlawanan sisi dan $W' = [PW] \cap m$, maka $PW > PW' > PX$; jadi $PX < PV$. Kasus tertukar memberi $PX < PW$.

Solusi lengkap. Kasus $P = X$ langsung benar karena $PX = 0$. Misalkan $P \neq X$. Jika $PX \perp XV$, maka lema jarak terpendek pada garis VW memberi $PX < PV$ (dan selesai). Jika tidak, buat garis m melalui X yang tegak lurus PX. Karena garis VW memotong m di X dan X berada di antara V, W, kedua titik ujung itu berada pada sisi berlawanan dari m. Pertukarkan nama V, W bila perlu sehingga P dan W berada pada sisi berlawanan. Segmen $[PW]$ memotong m di W'. Betweenness memberi $PW = PW' + W'W > PW'$. Titik X adalah kaki tegak lurus dari P pada m, dan $W' \neq X$ (kasus $W' = X$ adalah kasus siku-siku yang sudah ditangani), sehingga lema jarak terpendek memberi $PW' > PX$. Gabungan kedua ketaksamaan menjadi $PW > PX$; karena label dapat ditukar, salah satu klaim selalu benar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menyimpulkan dari X di antara V, W bahwa PX lebih kecil dari keduanya; yang benar adalah disjungsi, dan garis tegak lurus memilih ujungnya.

5.10 Lintasan terpendek dengan pencerminan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex010`. **Label sumber:** `ex:PMQ`.

Soal sumber. Jika P, Q berada pada sisi yang sama dari ℓ dan $M \in \ell$ meminimumkan $PM + MQ$, buktikan $M \in (P'Q)$, dengan P' bayangan pencerminan P terhadap ℓ.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk singkat pada baris 510–511 menggunakan $PM = P'M$ dan ketaksamaan segitiga.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ganti ruas PM dengan $P'M$ melalui pencerminan.
2. Terapkan ketaksamaan segitiga $P'M + MQ \geq P'Q$.
3. Analisis kapan kesamaan terjadi.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk semua $M \in \ell$, $PM + MQ = P'M + MQ \geq P'Q$; kesamaan tepat ketika P', M, Q segaris dengan M di antara P' dan Q. Jadi titik minimumnya berada pada $(P'Q)$.

Solusi lengkap. Refleksi terhadap ℓ mempertahankan setiap titik $M \in \ell$, sehingga $PM = P'M$. Karena P' berada pada sisi berlawanan dengan Q, garis $P'Q$ memotong ℓ di satu titik M_0 (dan M_0 berada di antara P' dan Q). Untuk setiap titik $M \in \ell$,

$$PM + MQ = P'M + MQ \geq P'Q$$

oleh ketaksamaan segitiga. Pada $M = M_0$, tiga titik itu segaris dan betweenness memberi $P'M_0 + M_0Q = P'Q$, jadi minimum tercapai. Jika suatu M lain juga minimum, harus terjadi kesamaan dalam ketaksamaan segitiga; karakterisasi kesamaan memaksa P', M, Q segaris dan M berada pada ruas $[P'Q]$. Ketunggalan titik potong dengan ℓ lalu memberi $M = M_0$. Dengan demikian setiap minimizer, khususnya M pada soal, terletak di $(P'Q)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pencerminan mengubah P menjadi P' tetapi tidak mengubah M; jangan menulis $PM = P'Q$. Kesamaan ketaksamaan segitiga juga memerlukan urutan titik.

5.11 Posisi titik terhadap lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex011`. **Label sumber:** `ex:inside-outside`.

Soal sumber. Jika garis melalui $P \notin \Gamma$ memotong lingkaran Γ di X, Y, buktikan P di dalam Γ jika dan hanya jika P berada di antara X, Y.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 515–516 mengarahkan pada latihan titik antara; solusi berikut menuliskan argumen proyeksi yang setara dan lengkap.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Turunkan kaki tegak lurus H dari pusat O ke garis ℓ.
2. Tunjukkan H adalah titik tengah XY.
3. Bandingkan HP dengan HX memakai Pythagoras.

Jawaban atau pemeriksaan. $HX = HY$ karena $OA = OB$ pada dua segitiga siku-siku kongruen. Dengan $OP^2 = OH^2 + HP^2$ dan $r^2 = OH^2 + HX^2$, diperoleh $OP < r$ tepat ketika $|HP| < HX$, yaitu tepat ketika P berada di antara X, Y.

Solusi lengkap. Misalkan O pusat Γ, jari-jari r, dan H kaki tegak lurus dari O ke garis ℓ. Segitiga siku-siku OHX dan OHY mempunyai hipotenusa r yang sama dan kaki OH yang sama; kriteria kongruensi SAS/SSS untuk segitiga siku-siku memberi $HX = HY$. Karena X, Y berada pada sisi berlawanan dari H di garis ℓ, H adalah titik tengah $[XY]$.

Ambil koordinat berarah pada ℓ dengan titik asal H. Pythagoras memberi

$$OP^2 = OH^2 + HP^2, \qquad r^2 = OX^2 = OH^2 + HX^2.$$

Titik P berada di antara X, Y jika dan hanya jika $|HP| < HX$. Karena semua panjang taknegatif, ini ekuivalen dengan $HP^2 < HX^2$, dan persamaan di atas ekuivalen dengan $OP^2 < r^2$, yaitu $OP < r$ atau P di dalam lingkaran. Jika P di luar ruas $[XY]$, maka $|HP| > HX$ dan $OP > r$. Kasus $P = H$ tercakup; $P \notin \Gamma$ memastikan tidak ada kesamaan batas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Yang dibandingkan adalah proyeksi HP dengan HX, bukan jarak PX ke ujung tali busur. Posisi "di antara" harus dipahami pada garis ℓ.

5.12 Garis pusat dan tali busur bersama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex012`. **Label sumber:** `ex:chord-perp`.

Soal sumber. Dua lingkaran berbeda memiliki tali busur bersama $[AB]$. Buktikan garis yang menghubungkan pusatnya merupakan garis sumbu $[AB]$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 526 hanya menyebut teorema garis sumbu.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jarak pusat pertama ke A dan B sama.
2. Terapkan karakterisasi garis sumbu untuk kedua pusat.
3. Gunakan bahwa dua lingkaran berbeda memiliki pusat berbeda bila berbagi dua titik.

Jawaban atau pemeriksaan. $OA = OB$ dan $O'A = O'B$, jadi O, O' terletak pada garis sumbu $[AB]$. Karena pusat berbeda, garis OO' adalah garis sumbu tersebut.

Solusi lengkap. Misalkan pusat kedua lingkaran adalah O dan O'. Karena A, B berada pada lingkaran pertama, $OA = OB$; oleh teorema garis sumbu, O berada pada garis sumbu ruas $[AB]$. Dengan cara yang sama $O'A = O'B$, sehingga O' juga berada pada garis sumbu itu. Jika $O = O'$, dua lingkaran yang melalui A dan B memiliki jari-jari yang sama dan karenanya berimpit, bertentangan dengan asumsi berbeda. Maka $O \neq O'$ dan garis melalui kedua pusat tepat merupakan garis sumbu $[AB]$, yang tegak lurus tali busur bersama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesimpulan bukan bahwa setiap garis melalui pusat tegak lurus tali busur; yang dipakai adalah kedua pusat sama-sama berada pada satu garis sumbu.

5.13 Konstruksi pusat lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex013`. **Label sumber:** `ex:center`.

Soal sumber. Uraikan konstruksi penggaris dan jangka untuk memperoleh pusat lingkaran.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk bergambar berada pada baris 528–529; berikut langkah dan verifikasi yang dapat dijalankan tanpa mengukur sudut.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih tiga titik berbeda A, B, C pada lingkaran.
2. Konstruksikan garis sumbu $[AB]$ dan $[AC]$.
3. Ambil perpotongannya sebagai pusat O.

Jawaban atau pemeriksaan. Pusat asli berada pada kedua garis sumbu. Kedua tali busur tidak kolinear, sehingga sumbu-sumbunya berpotongan tepat di pusat itu.

Solusi lengkap. Pilih tiga titik berbeda A, B, C pada lingkaran sedemikian sehingga A, B, C tidak segaris (tiga titik pada lingkaran tidak segaris). Dengan konstruksi standar dua busur, buat garis sumbu m_{AB} dari $[AB]$ dan m_{AC} dari $[AC]$. Pusat asli O memenuhi $OA = OB = OC$, sehingga teorema garis sumbu menempatkan O pada kedua garis tersebut. Karena AB dan AC bukan garis

yang sama, garis sumbu m_{AB} dan m_{AC} tidak sejajar dan berpotongan di satu titik O_0. Titik itu sama dengan O.

Sebagai verifikasi konstruktif, $O_0A = O_0B$ dan $O_0A = O_0C$ dari definisi garis sumbu, jadi ketiga titik berada pada lingkaran berpusat O_0 dengan jari-jari O_0A. Keunikan pusat lingkaran melalui tiga titik tak segaris menyelesaikan pembuktian.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dua tali busur tidak perlu merupakan diameter. Jangan memilih dua tali busur paralel atau memakai satu sumbu saja; satu garis sumbu hanya memberi lokus.

5.14 Batas dua titik potong lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex014`. **Label sumber:** `ex:two-circ`.

Soal sumber. Buktikan bahwa dua lingkaran berbeda memiliki paling banyak dua titik potong.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 531 memakai latihan tali busur bersama dan ketunggalan garis tegak lurus.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Andaikan ada tiga titik potong A, B, C.
2. Kedua pusat berada pada garis sumbu $[AB]$ dan $[AC]$.
3. Garis sumbu yang berbeda memaksa pusat berimpit, kontradiksi.

Jawaban atau pemeriksaan. Tiga titik potong membuat dua garis sumbu berbeda yang sama-sama memuat setiap pusat; keduanya berpotongan di satu titik, sehingga pusat kedua lingkaran sama dan jari-jarinya sama—kontradiksi.

Solusi lengkap. Andaikan lingkaran berbeda Γ, Γ' berpotongan di tiga titik berbeda A, B, C. Untuk setiap pusat O dari Γ, berlaku $OA = OB$ dan $OA = OC$, sehingga O berada pada garis sumbu m_{AB} dan m_{AC}. Kedua garis itu berbeda: titik tengah $[AB]$ dan $[AC]$ berbeda karena A, B, C berbeda dan tidak segaris pada satu lingkaran. Dengan ketunggalan garis tegak lurus, dua garis sumbu tersebut berpotongan tepat pada satu titik, yakni O.

Argumen yang sama menempatkan pusat O' dari Γ' pada kedua garis yang sama, jadi $O' = O$. Karena kedua lingkaran melalui A, jari-jarinya OA dan $O'A$ juga sama; akibatnya $\Gamma = \Gamma'$, bertentangan dengan asumsi berbeda. Maka tiga titik potong mustahil, dan jumlahnya paling banyak dua.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dua lingkaran konsentris dapat tidak berpotongan atau berimpit, tetapi tidak memberi tiga titik pada kasus lingkaran berbeda; jangan mengabaikan pusat.

5.15 Kriteria lingkaran bersinggungan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex015`. **Label sumber:** `ex:tangent-circles`.

Soal sumber. Untuk lingkaran berpusat O, O' dengan jari-jari r, r', buktikan bahwa bersinggungan ekuivalen dengan masing-masing kondisi: titik potong segaris dengan pusat; garis singgung bersama di titik potong; atau $OO' = r + r'$ atau $OO' = |r - r'|$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk tiga subbagian berada pada baris 535–541 dan menggunakan refleksi, lema garis singgung, serta kasus kesamaan dalam ketaksamaan segitiga.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Refleksikan satu titik potong terhadap garis OO'.
2. Gunakan lema garis singgung untuk menghubungkan kondisi (a) dan (b).
3. Terapkan kesamaan ketaksamaan segitiga untuk kondisi jarak pusat.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika dua titik potong ada, refleksi terhadap OO' menghasilkan pasangan; karena hanya satu titik pada tangensi, titik itu berada di OO'. Garis tegak lurus OO' di titik tersebut adalah garis singgung bersama. Sebaliknya, kesamaan $OO' = r + r'$ atau $|r - r'|$ adalah tepat kasus segitiga pusat yang degenerat, sehingga hanya satu titik bersama.

Solusi lengkap. Anggap kedua lingkaran berbeda. Jika P dan Q adalah dua titik potong, maka $OP = OQ = r$ dan $O'P = O'Q = r'$. Refleksi terhadap garis (OO') menukar dua titik yang berjarak sama dari kedua pusat; karena itu Q adalah bayangan refleksi P. Jika lingkaran bersinggungan hanya di P, refleksi harus memperbaiki P, sehingga $P \in (OO')$. Ini membuktikan (tangen $\Rightarrow$ (a)). Jika $P \in (OO')$, setiap garis melalui P yang tegak lurus OO' juga tegak lurus PO dan PO'. Lema garis singgung menyatakan garis itu tangent ke kedua lingkaran, jadi (a) $\Rightarrow$ (b); sebaliknya garis singgung bersama di P tegak lurus kedua jari-jari dan memaksa P, O, O' segaris, sehingga (b) $\Rightarrow$ (a).

Untuk kondisi (c), pada titik bersama P segitiga OPO' memiliki sisi $r, r', d = OO'$. Kesamaan pusat segaris berarti salah satu sisi adalah jumlah dua sisi lain ($d = r + r'$ untuk tangensi luar) atau selisih mutlak ($d = |r - r'|$ untuk tangensi dalam). Sebaliknya, jika salah satu kesamaan itu berlaku, letakkan ruas panjang d di antara O, O' dan pilih titik P pada garis yang memenuhi $OP = r$ serta $O'P = r'$; kesamaan segitiga menjamin titik itu unik. Maka P berada pada kedua lingkaran, dan kondisi (a) menunjukkan keduanya bersinggungan. Kasus lingkaran berimpit dikecualikan oleh asumsi berbeda.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kondisi $r + r'$ adalah singgung luar, sedangkan $|r - r'|$ singgung dalam. Kesamaan jarak saja belum menyingkirkan lingkaran berimpit; nyatakan asumsi lingkaran berbeda.

5.16 Tiga pusat pada dua titik potong

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex016`. **Label sumber:** `ex:tangent-circles-3`.

Soal sumber. Andaikan tiga lingkaran memiliki dua titik bersama. Buktikan bahwa ketiga pusatnya segaris.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk berada pada baris 543–545 dan menunjuk garis sumbu tali busur bersama.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Namai dua titik bersama A, B.
2. Untuk setiap lingkaran, jarak pusat ke A dan B sama.
3. Semua pusat berada pada garis sumbu tunggal $[AB]$.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga pusat memenuhi $OA = OB$, $O'A = O'B$, dan $O''A = O''B$; semuanya berada pada garis sumbu $[AB]$.

Solusi lengkap. Misalkan dua titik bersama adalah A dan B, dengan $A \neq B$, dan pusat ketiga lingkaran adalah O_1, O_2, O_3. Karena A, B berada pada lingkaran berpusat O_i, kita memiliki $O_iA = O_iB$ untuk $i = 1, 2, 3$. Teorema garis sumbu menyatakan lokus semua titik yang berjarak sama dari A dan B adalah satu garis, yaitu garis sumbu $[AB]$. Maka O_1, O_2, O_3 semuanya terletak pada garis yang sama, sehingga ketiga pusat segaris. Tidak diperlukan asumsi bahwa lingkaran saling berbeda; jika dua berimpit, pusatnya tetap berada pada garis yang sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dua titik bersama diperlukan agar ada satu tali busur dan satu garis sumbu; satu titik saja tidak memaksa pusat- pusat segaris.

5.17 Konstruksi garis singgung dari titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex017`. **Label sumber:** `ex:tangent`.

Soal sumber. Uraikan konstruksi garis-garis melalui titik yang diberikan P yang menyinggung lingkaran yang diberikan.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk bergambar bersama latihan berikut berada pada baris 547–560. Langkah kasus dan verifikasinya ditulis di sini secara eksplisit.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Hubungkan P dengan pusat O dan konstruksikan titik tengah M.
2. Potong lingkaran berpusat M berjari-jari MO dengan Γ.
3. Hubungkan P ke setiap titik potong; tangani kasus P di dalam atau pada lingkaran.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $OP > r$, titik potong T memenuhi $\angle OTP = \pi/2$ menurut teorema Thales, sehingga PT tangent. Semua titik singgung memenuhi konstruksi yang sama. Untuk $OP = r$ ada satu garis tegak lurus OP; untuk $OP < r$ tidak ada.

Solusi lengkap. Misalkan Γ berpusat di O berjari-jari r. Jika $OP > r$, konstruksikan titik tengah M dari $[OP]$ dan lingkaran Δ berpusat M berjari-jari MO. Lingkaran Δ dan Γ berpotongan di satu atau dua titik T. Karena $MT = MO = MP$ dan M adalah titik tengah OP, segiempat $OTPT$ memiliki diameter OP; teorema sudut dalam setengah lingkaran memberi $OT \perp PT$. Jadi garis PT menyinggung Γ di T menurut lema garis singgung.

Sebaliknya, jika PT adalah garis singgung, maka $OT \perp PT$ dan segitiga OTP siku-siku di T. Titik tengah hipotenusa OP berjarak sama dari O, P, T, sehingga $MT = MO$; dengan demikian setiap titik singgung muncul sebagai perpotongan $\Delta \cap \Gamma$. Jika $OP = r$, titik P sendiri ada di Γ dan garis melalui P tegak lurus OP adalah satu-satunya singgung. Jika $OP < r$, jarak pusat ke setiap garis melalui P paling besar $OP < r$; setiap garis memotong lingkaran di dua titik, sehingga tidak ada garis singgung nyata.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Lingkaran bantu berpusat di titik tengah OP, bukan di P. Titik di dalam lingkaran tidak memiliki garis singgung real; jangan memaksakan dua solusi.

5.18 Konstruksi lingkaran singgung dua lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch05-ex018`. **Label sumber:** `ex:tangent-circle`.

Soal sumber. Diberikan Γ_1, Γ_2 dan ruas $[AB]$. Konstruksikan lingkaran berjari-jari AB yang bersinggungan dengan kedua lingkaran.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk bergambar pada baris 547–560 berlaku untuk latihan ini dan latihan garis singgung sebelumnya; konstruksi offset berikut menuliskan semua kasus.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Letakkan $\rho = AB$ dan pusat awal O_1, O_2 serta jari-jari r_1, r_2.
2. Pilih tanda luar/dalam dan buat lingkaran lokus dengan radius $r_i + \rho$ atau $|r_i - \rho|$.
3. Ambil semua perpotongan lokus, gambar radius ρ, lalu verifikasi.

Jawaban atau pemeriksaan. Pusat kandidat C harus memenuhi $CO_i = r_i + \rho$ (singgung luar) atau $CO_i = |r_i - \rho|$ (singgung dalam), untuk $i = 1, 2$. Perpotongan empat pasang lingkaran lokus memberi semua kandidat yang dapat dikonstruksikan.

Solusi lengkap. Ukurkan ruas $\rho = AB$ dengan jangka. Untuk setiap i, pusat C dari lingkaran jawaban harus berjarak $r_i + \rho$ dari O_i bila kedua lingkaran bersinggungan luar, atau berjarak $|r_i - \rho|$ bila salah satunya berada di dalam yang lain. Dengan penggaris-jangka, konstruksikan dari O_i empat lokus yang diperlukan (abaikan radius nol atau kasus lingkaran berimpit yang tidak menghasilkan satu lingkaran unik). Untuk setiap pilihan tanda (s_1, s_2), potong lokus pertama dan kedua. Setiap titik potong C menjadi pusat kandidat; gambar lingkaran $\Delta(C, \rho)$ dan buang kandidat yang berimpit atau tidak memiliki tipe singgung yang dipilih.

Kelengkapan mengikuti kriteria tangensi sebelumnya: jika sebuah lingkaran berjari-jari ρ menyinggung Γ_i, maka segitiga pusat yang bersinggungan degenerat dan memaksa salah satu dari dua jarak lokus tersebut. Jadi pusatnya muncul pada salah satu empat pasangan. Sebaliknya, setiap perpotongan lokus memenuhi kesamaan $CO_i = r_i + \rho$ atau $CO_i = |r_i - \rho|$; kriteria tangensi menjamin Δ menyinggung kedua lingkaran. Jika tidak ada perpotongan, konstruksi tidak memiliki solusi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Memakai hanya $r_i + \rho$ melewatkan singgung dalam. Semua kandidat harus diverifikasi karena satu pasangan lokus dapat menghasilkan dua pusat atau kasus berimpit yang bukan solusi berbeda.

Kunci lengkap dan rubrik

Setiap butir berikut bernilai 2 poin; total 20 poin. Satu poin diberikan untuk strategi/geometri yang tepat dan satu poin untuk justifikasi lengkap dengan kasus batas yang relevan.

1. **(2 poin).** Jelaskan hubungan sudut lancip–tumpul pada garis lurus seperti pada Latihan 5.1.
2. **(2 poin).** Buktikan kriteria sisi pada garis sumbu dan akibat perbandingan sudut (Latihan 5.2–5.3).
3. **(2 poin).** Berikan konstruksi garis tegak lurus melalui titik, termasuk titik pada garis (Latihan 5.5).
4. **(2 poin).** Turunkan rumus penggandaan sudut untuk dua pencerminan (Latihan 5.6).
5. **(2 poin).** Jelaskan mengapa tiga pencerminan cukup untuk setiap isometri bidang (Latihan 5.7).
6. **(2 poin).** Buktikan jarak tegak lurus adalah minimum dan terapkan pada titik antara (Latihan 5.8–5.9).
7. **(2 poin).** Gunakan pencerminan untuk menemukan lintasan minimum melalui sebuah garis (Latihan 5.10).
8. **(2 poin).** Buktikan kriteria titik di dalam lingkaran dengan proyeksi ke tali busur (Latihan 5.11).
9. **(2 poin).** Buktikan batas jumlah titik potong dan kesegarisan pusat (Latihan 5.12–5.16).
10. **(2 poin).** Konstruksikan garis singgung dari titik dan lingkaran singgung dua lingkaran, serta jelaskan semua kasus tanda (Latihan 5.17–5.18).

Kunci dan rubrik. Untuk butir 1, jawaban harus menyebut ukuran mutlak yang berjumlah π. Untuk butir 2, wajib ada titik potong garis sumbu dan strictness dari ketaksamaan segitiga. Untuk butir 3, pusat lingkaran bantu dan verifikasi garis sumbu harus benar. Untuk butir 4–5, tanda orientasi dan lema tiga paku harus dinyatakan. Untuk butir 6–7, syarat kesamaan dan urutan titik harus ditulis. Untuk butir 8–9, pusat, garis sumbu, dan kasus lingkaran berimpit harus dibedakan. Untuk butir 10, kandidat luar dan dalam harus dicakup dan diverifikasi. Jawaban yang hanya mengutip gambar tanpa alasan memperoleh setengah poin paling banyak.

Bab 6

Solusi dan penguasaan Bab 6: Segitiga sebangun

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk yang diterima tidak ditulis ulang sebagai karya baru; setiap unit merujuk label, rentang baris, dan digest petunjuknya melalui `manifest-chapter06.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

6.1 Segitiga titik tengah

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex001`. **Label sumber:** `ex:mid-triangle`.

Soal sumber. Misalkan A', B', dan C' berturut-turut merupakan titik tengah $[BC]$, $[CA]$, dan $[AB]$ pada $\triangle ABC$. Tunjukkan bahwa $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ dan tentukan koefisiennya.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk Anton Petrunin berada pada `source/id-ID/hints.tex`, baris 566–570. Ia mengarahkan pada tiga penerapan SAS dengan faktor $\frac{1}{2}$, diikuti penerapan SSS; digest tepat dicatat dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bandingkan $\triangle AC'B'$ dengan $\triangle ABC$ melalui sudut di A.
2. Ulangi pada dua titik sudut lain untuk memperoleh panjang ketiga sisi segitiga tengah.
3. Gunakan SSS untuk menyimpulkan kesebangunan dan koefisiennya.

Jawaban atau pemeriksaan. $A'B' = \frac{1}{2}AB$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$, dan $C'A' = \frac{1}{2}CA$. Jadi $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ dengan koefisien $\frac{1}{2}$ (segitiga tengah relatif terhadap segitiga asal).

Solusi lengkap. Karena C' dan B' adalah titik tengah, $AC' = \frac{1}{2}AB$ dan $AB' = \frac{1}{2}AC$. Sudut $C'AB'$ sama dengan sudut BAC, sehingga kriteria SAS memberi

$$\triangle AC'B' \sim \triangle ABC \quad \text{dengan koefisien } \tfrac{1}{2}.$$

Akibatnya $C'B' = \frac{1}{2}BC$. Pada titik B, kesamaan $BA' = \frac{1}{2}BC$, $BC' = \frac{1}{2}BA$, dan sudut apit yang sama memberi $A'C' = \frac{1}{2}AC$. Pada titik C, cara yang sama memberi $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

Maka sisi-sisi $\triangle A'B'C'$ berturut-turut adalah setengah sisi-sisi yang bersesuaian pada $\triangle ABC$:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{1}{2}.$$

Kriteria SSS memberi kesebangunan yang diminta. Jika segitiga asal degenerat, ketiga titik tengah tetap mempertahankan semua rasio dan simpulan SSS berlaku dalam pengertian definisi sumber; untuk segitiga tak degenerat, kesamaan sudut juga mengikuti langsung dari kriteria tersebut.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Koefisien bergantung pada arah perbandingan: segitiga tengah terhadap segitiga asal berkoefisien $\frac{1}{2}$, sedangkan arah sebaliknya berkoefisien 2.

6.2 Dilatasi radial tiga titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex002`. **Label sumber:** `ex:k*triangle`.

Soal sumber. Titik A', B', C' berada berturut-turut pada sinar $[OA), [OB), [OC)$ dan $OA' = kOA$, $OB' = kOB$, $OC' = kOC$ untuk $k > 0$. Buktikan $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 572–578 meminta tiga penerapan SAS pada segitiga yang berpusat di O, lalu SSS pada segitiga target.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bandingkan $\triangle OA'B'$ dan $\triangle OAB$.
2. Lakukan hal yang sama untuk pasangan $B'C'$ dan $C'A'$.
3. Gunakan tiga kesamaan panjang hasilnya pada SSS.

Jawaban atau pemeriksaan. SAS memberi $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$, dan $C'A' = kCA$; SSS kemudian memberi kesebangunan dengan koefisien k.

Solusi lengkap. Karena A', A berada pada sinar yang sama dari O dan demikian pula B', B, sudut $A'OB'$ sama dengan AOB. Bersama $OA' = kOA$ dan $OB' = kOB$, kriteria SAS menghasilkan

$$\triangle OA'B' \sim \triangle OAB \quad \Longrightarrow \quad A'B' = kAB.$$

Pada pasangan sinar OB, OC diperoleh $B'C' = kBC$, dan pada pasangan OC, OA diperoleh $C'A' = kCA$. Ketiga persamaan itu memberikan

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Kriteria SSS menyimpulkan $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ dengan koefisien k. Syarat $k > 0$ penting: ia menjaga semua titik pada sinar yang dinyatakan dan semua panjang tetap positif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menganggap $A'B' = kAB$ langsung dari data radial; persamaan itu harus diturunkan melalui SAS pada segitiga yang memiliki titik pusat O.

6.3 Faktor global transformasi pelestari sudut

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex003`. **Label sumber:** `ex:angle-preserving-euclid`.

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap transformasi pelestari sudut pada bidang mengalikan semua jarak dengan satu konstanta tetap.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 580–584 menyatakan bahwa AA memberi satu faktor pada setiap segitiga tak degenerat; faktor dua segitiga yang memiliki sisi bersama sama, lalu faktor itu dirambatkan melalui rantai segitiga.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan satu ruas UV dan definisikan $\lambda = U'V'/UV$.
2. Untuk ruas sembarang PQ, pilih R di luar tiga garis yang relevan.
3. Hubungkan PQ ke UV melalui tiga segitiga yang berturut-turut berbagi sisi.

Jawaban atau pemeriksaan. Setiap segitiga tak degenerat dan citranya sebangun menurut AA. Dua segitiga yang berbagi sisi memiliki faktor yang sama karena citra sisi bersama juga sama. Rantai PQR, PUR, URV menghubungkan ruas PQ ke ruas tetap UV, sehingga $P'Q' = \lambda PQ$ untuk semua P, Q.

Solusi lengkap. Misalkan f adalah bijeksi pelestari sudut dan tulis $T' = f(T)$. Ambil dua titik berbeda tetap U, V dan letakkan

$$\lambda = \frac{U'V'}{UV} > 0.$$

Untuk setiap segitiga tak degenerat RST, dua sudut dan citranya sama; kriteria AA memberi $\triangle R'S'T' \sim \triangle RST$. Jadi ketiga sisi segitiga itu dikalikan oleh satu faktor, meskipun untuk sementara faktor tersebut mungkin tampak bergantung pada segitiganya.

Ambil ruas sembarang PQ dengan $P \neq Q$. Pilih titik R yang tidak terletak pada garis (PQ), (PU), atau (UV); ini mungkin karena gabungan hingga tiga garis bukan seluruh bidang. Maka PQR, PUR, dan URV adalah segitiga tak degenerat (jika suatu nama berimpit, pilih satu titik penghubung tambahan dengan argumen yang sama). Segitiga pertama dan kedua berbagi sisi PR, sehingga faktor kesebangunannya sama: keduanya harus mengirim PR ke satu panjang tunggal $P'R'$. Segitiga kedua dan ketiga berbagi sisi UR, sehingga faktornya juga sama. Faktor segitiga ketiga adalah λ karena ia memuat sisi UV. Akibatnya faktor segitiga pertama adalah λ, dan

$$P'Q' = \lambda\, PQ.$$

Kasus $P = Q$ memberi $0 = \lambda 0$. Jadi satu konstanta positif yang sama mengalikan semua jarak di bidang.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. AA hanya memberi faktor per segitiga; langkah rantai sisi bersama diperlukan untuk membuktikan bahwa faktor tersebut global dan tidak berubah menurut lokasi segitiga.

6.4 Tinggi pada hipotenusa

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex004`. **Label sumber:** `ex:pyth`.

Soal sumber. Dalam konfigurasi bukti Teorema Pythagoras, D adalah kaki tegak lurus dari C pada hipotenusa $[AB]$. Tunjukkan $CD^2 = AD \cdot BD$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 586–587 menyarankan kesebangunan $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kedua segitiga kecil siku-siku di D.
2. Cocokkan sudut lancip melalui segitiga asal.
3. Ambil perbandingan dua sisi yang mengapit CD.

Jawaban atau pemeriksaan. Dari $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ diperoleh $AD/CD = CD/BD$, sehingga $CD^2 = AD \cdot BD$.

Solusi lengkap. Segitiga ADC dan CDB sama-sama siku-siku di D. Karena sudut lancip dalam segitiga siku-siku saling berkomplemen, sudut ACD sama besar dengan sudut CBD, sedangkan sudut CAD sama besar dengan sudut BCD. Oleh AA,

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB,$$

dengan korespondensi $A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow D$, dan $C \leftrightarrow B$. Karena itu sisi-sisi yang bersesuaian memenuhi

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}.$$

Semua panjang positif pada segitiga tak degenerat, sehingga perkalian silang sah dan menghasilkan $CD^2 = AD \cdot BD$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Urutan korespondensi penting: AD berpasangan dengan CD, sedangkan CD yang lain berpasangan dengan BD. Jangan memasangkan kedua kaki secara sembarang.

6.5 Kebalikan Teorema Pythagoras

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex005`. **Label sumber:** `ex:pyth-conv`.

Soal sumber. Jika $AC^2 + BC^2 = AB^2$, buktikan sudut di C siku-siku.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 589–590 meminta Teorema Pythagoras dan kriteria kekongruenan SSS.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bangun segitiga siku-siku dengan kaki sepanjang AC dan BC.
2. Hitung hipotenusanya dengan Teorema Pythagoras.
3. Bandingkan dengan $\triangle ABC$ melalui SSS.

Jawaban atau pemeriksaan. Segitiga siku-siku pembanding memiliki sisi ketiga $\sqrt{AC^2 + BC^2} = AB$; SSS membuatnya kongruen dengan ABC, jadi sudut yang bersesuaian di C siku-siku.

Solusi lengkap. Bangun $\triangle A'B'C'$ yang siku-siku di C' dengan $A'C' = AC$ dan $B'C' = BC$. Teorema Pythagoras pada segitiga pembanding memberi

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Karena panjang tidak negatif, $A'B' = AB$. Jadi ketiga sisi $\triangle A'B'C'$ berturut-turut sama dengan ketiga sisi $\triangle ABC$. Kriteria SSS memberi $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ dengan $C' \leftrightarrow C$. Kekongruenan mempertahankan besar sudut; karena $\angle A'C'B'$ siku-siku, $\angle ACB$ juga siku-siku.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Persamaan kuadrat sisi tidak boleh langsung disebut definisi sudut siku-siku; perlu segitiga pembanding dan SSS agar kesimpulan sudut mengikuti dari hasil yang sudah dibuktikan.

6.6 Empat pasangan segitiga sebangun

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex006`. **Label sumber:** `ex:two-pairs-sim`.

Soal sumber. Pada konfigurasi Gambar `pic-68`, diketahui $\measuredangle CAY \equiv \measuredangle XBC$. Temukan dan buktikan empat pasangan segitiga sebangun yang menggunakan titik A, B, C, X, Y, Z.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk berada pada baris 592–598. Tiga pasangan pertamanya konsisten; pasangan terakhir tertulis $\triangle ABZ \sim \triangle YXZ$, tetapi urutan korespondensi itu menukar X, Y. Pemeriksaan insidensi dan rasio pada gambar memberi urutan yang benar $\triangle ABZ \sim \triangle XYZ$. Koreksi lokal ini dicatat eksplisit dalam manifest dan tidak mengubah sumber Petrunin.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan sudut yang diberikan dan sudut bertolak belakang di C.
2. Turunkan rasio silang sisi, lalu gunakan SAS pada segitiga besar di C.
3. Ulangi AA di Z dan pakai rasionya untuk SAS pada pasangan terakhir.

Jawaban atau pemeriksaan. Empat pasangan dengan urutan korespondensi yang benar adalah

$$\triangle AYC \sim \triangle BXC, quad \triangle ABC \sim \triangle YXC, quad \triangle AZX \sim \triangle BZY, quad \triangle ABZ \sim \triangle XYZ.$$

Solusi lengkap. Dari gambar berlaku kolinearitas A, C, X; B, C, Y; A, Z, Y; dan B, Z, X. Sudut CAY dan XBC diberikan sama, sedangkan sudut ACY dan BCX bertolak belakang. AA memberi

$$\triangle AYC \sim \triangle BXC.$$

Korespondensinya $A \leftrightarrow B$, $Y \leftrightarrow X$, $C \leftrightarrow C$, sehingga

$$\frac{YC}{XC} = \frac{AC}{BC} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{YC}{AC} = \frac{XC}{BC}.$$

Sudut YCX sama (hingga orientasi) dengan ACB karena kedua pasang sinar berlawanan. SAS kemudian memberi $\triangle ABC \sim \triangle YXC$.

Di titik Z, sudut AZX dan BZY bertolak belakang. Karena ZA segaris YA dan ZB segaris XB, sudut di A dan B kembali merupakan pasangan yang diberikan. Jadi AA memberi

$$\triangle AZX \sim \triangle BZY, \qquad \frac{AZ}{BZ} = \frac{XZ}{YZ}.$$

Persamaan terakhir ekuivalen dengan $AZ/XZ = BZ/YZ$. Sudut AZB sama dengan XZY karena kedua pasang sinar berlawanan. SAS memberi

$$\triangle ABZ \sim \triangle XYZ$$

dengan $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$, $Z \leftrightarrow Z$. Urutan YXZ yang tertulis dalam petunjuk tidak memenuhi rasio sisi ini dan karena itu tidak dipakai.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesebangunan memakai urutan titik sebagai korespondensi. Himpunan tiga titik yang sama dengan urutan berbeda bukan pernyataan yang sama; selalu periksa rasio tiga sisi, bukan hanya bentuk gambar.

6.7 Panjang cevian dari kesebangunan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex007`. **Label sumber:** `ex:ABC+D`.

Soal sumber. Pada segitiga tak degenerat ABC, titik $D \in [AB]$ memenuhi $\measuredangle CAB = \measuredangle BCD$. Jika $a = BC$, $b = CA$, dan $c = AB$, tunjukkan $CD = ba/c$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 600–601 meminta membuktikan dan menggunakan $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Cocokkan sudut A dengan sudut C melalui hipotesis.
2. Sudut di B sama karena D berada pada ruas AB.
3. Baca korespondensi $AB \leftrightarrow CB$ dan $AC \leftrightarrow CD$.

Jawaban atau pemeriksaan. AA memberi $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ dengan faktor $CB/AB = a/c$. Maka $CD = (a/c)CA = ab/c$.

Solusi lengkap. Karena $D \in [AB]$, sinar BD sama dengan sinar BA. Dengan memperhatikan orientasi, $|\angle ABC| = |\angle CBD|$. Hipotesis memberi $\angle CAB = \angle BCD$. Dua kesamaan sudut dan ketakdegeneratan memberi, melalui AA,

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD,$$

dengan korespondensi $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow B$, dan $C \leftrightarrow D$. Sisi $AB = c$ berpasangan dengan $CB = a$, sedangkan $AC = b$ berpasangan dengan CD. Oleh karena itu faktor segitiga kedua terhadap pertama adalah a/c, dan

$$CD = \frac{a}{c}\,AC = \frac{ab}{c}.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memasangkan AC dengan CB hanya karena keduanya memakai huruf C; korespondensi ditentukan oleh sudut: $A \leftrightarrow C$ dan $C \leftrightarrow D$.

6.8 Produk pada garis sumbu hipotenusa

ID stabil: `o004-c100-sol-ch06-ex008`. **Label sumber:** `ex:right-perp-bi`.

Soal sumber. Segitiga ABC siku-siku di C, M titik tengah $[AB]$, dan garis sumbu $[AB]$ memotong sinar $[BC)$ di P serta $[AC)$ di Q. Tunjukkan $4MP \cdot MQ = AB^2$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 603–604 meminta menunjukkan rantai kesebangunan $\triangle AQM \sim \triangle ABC \sim \triangle PBM$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Cocokkan sudut siku-siku di M dengan sudut siku-siku di C.
2. Gunakan sinar $AQ = AC$, $BP = BC$, dan $AM = BM = AB/2$.
3. Nyatakan MQ dan MP dalam a, b, c, lalu kalikan.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, kesebangunan memberi $MQ = ac/(2b)$ dan $MP = bc/(2a)$. Jadi $4MP\,MQ = c^2 = AB^2$.

Solusi lengkap. Garis MPQ adalah garis sumbu $[AB]$, sehingga $MPQ \perp AB$ di titik tengah M dan $AM = BM = c/2$. Karena $Q \in [AC)$, sudut QAM sama dengan CAB; sudut AMQ dan ACB sama-sama siku-siku. AA memberi

$$\triangle AQM \sim \triangle ABC$$

dengan $A \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $M \leftrightarrow C$. Maka

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{c/2}{b}, \qquad MQ = \frac{ac}{2b}.$$

Demikian pula, $P \in [BC)$ membuat sudut PBM sama dengan CBA, dan sudut PMB sama dengan ACB. Jadi

$$\triangle ABC \sim \triangle PBM$$

dengan $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow M$. Karena itu

$$\frac{MP}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{c/2}{a}, \qquad MP = \frac{bc}{2a}.$$

Mengalikan kedua persamaan menghasilkan

$$4MP \cdot MQ = 4\left(\frac{bc}{2a}\right)\left(\frac{ac}{2b}\right) = c^2 = AB^2.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. P, Q boleh berada pada perpanjangan sisi karena yang diberikan adalah sinar. Gunakan korespondensi sudut untuk memilih rasio; menukar a dan b di satu faktor merusak pembatalan.

Uji penguasaan Bab 6

1. **(3 poin).** Buktikan teorema segitiga titik tengah dan nyatakan kedua arah koefisien.
2. **(3 poin).** Buktikan bahwa penskalaan radial dari satu pusat mengalikan semua sisi segitiga dengan faktor yang sama.
3. **(3 poin).** Buktikan bahwa faktor transformasi pelestari sudut bersifat global dengan rantai segitiga berbagi sisi.
4. **(2 poin).** Turunkan identitas $CD^2 = AD \cdot BD$ dari tinggi pada hipotenusa.
5. **(2 poin).** Buktikan kebalikan Teorema Pythagoras tanpa menganggapnya sebagai definisi.
6. **(3 poin).** Daftarkan empat pasangan sebangun pada konfigurasi enam titik dan jelaskan urutan korespondensi pasangan keempat.
7. **(2 poin).** Turunkan $CD = ab/c$ pada konfigurasi $D \in [AB]$.
8. **(2 poin).** Turunkan $4MP \cdot MQ = AB^2$ melalui dua perbandingan kesebangunan.

Kunci lengkap dan rubrik

M1 (3 poin). Satu poin untuk tiga penerapan SAS, satu untuk ketiga rasio setengah, dan satu untuk SSS serta arah koefisien yang benar.

M2 (3 poin). Satu poin untuk setiap dua pasangan sinar pertama, satu untuk pasangan ketiga, dan satu untuk penerapan SSS pada $A'B'C'$.

M3 (3 poin). Satu poin untuk AA per segitiga, satu untuk rantai sisi bersama yang valid, dan satu untuk menyimpulkan satu $\lambda > 0$ bagi semua ruas.

M4 (2 poin). Satu poin untuk korespondensi $ADC \sim CDB$ dan satu untuk perkalian silang yang benar.

M5 (2 poin). Satu poin untuk membangun segitiga siku-siku pembanding dan satu untuk Pythagoras ditambah SSS.

M6 (3 poin). Satu poin untuk dua pasangan di C, satu untuk pasangan di Z, dan satu untuk $ABZ \sim XYZ$ beserta penjelasan mengapa urutan YXZ salah.

M7 (2 poin). Satu poin untuk AA dengan korespondensi $A \leftrightarrow C$ dan satu untuk faktor a/c serta hasil ab/c.

M8 (2 poin). Satu poin untuk $MQ = ac/(2b)$ dan $MP = bc/(2a)$, satu untuk perkalian dan pembatalan yang menghasilkan AB^2.

Bab 7

Solusi dan penguasaan Bab 7: Garis sejajar

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Petunjuk yang diterima tidak ditulis ulang sebagai karya baru; setiap unit merujuk label, rentang baris, dan digest petunjuknya melalui `manifest-chapter07.json`. Petunjuk bertahap, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan komponen tambahan terpisah yang ditawarkan berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen tambahan ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi komponen tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

7.1 Garis sejajar dan garis tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex001`.

Label sumber induk: `ex:perp-perp`.

Sublabel sumber: `ex:perp-perp:a` dan `ex:perp-perp:b`.

Soal sumber. (a) Jika $\ell \parallel m$ dan $m \perp n$, buktikan $\ell \perp n$. (b) Jika $k \perp \ell$, $\ell \parallel m$, dan $m \perp n$, buktikan $k \parallel n$.

Petunjuk penulis (rujukan). Blok petunjuk induk pada baris 612–619 memuat dua cabang bernama: baris 612–616 untuk `ex:perp-perp:a` dan baris 618–619 untuk `ex:perp-perp:b`. Topologi induk–subbagian ini dipertahankan dalam manifest, bukan dipecah menjadi dua petunjuk penulis yang baru.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk (a), buktikan dahulu bahwa n harus memotong ℓ.
2. Melalui titik potong itu, buat garis yang tegak lurus n, lalu gunakan ketunggalan garis sejajar terhadap m.
3. Untuk (b), terapkan (a), kemudian gunakan dua garis yang sama-sama tegak lurus terhadap ℓ.

Jawaban atau pemeriksaan. (a) Garis ℓ adalah garis unik melalui $P = n \cap \ell$ yang sejajar dengan m, sama dengan garis melalui P yang tegak lurus n. Jadi $\ell \perp n$. (b) Bagian (a) memberi $\ell \perp n$; karena $k \perp \ell$ dan $n \perp \ell$, diperoleh $k \parallel n$.

Solusi lengkap. Untuk (a), andaikan $n \parallel \ell$. Karena $\ell \parallel m$, transitivitas memberi $n \parallel m$, bertentangan dengan $m \perp n$. Jadi n dan ℓ berpotongan pada tepat satu titik P. Konstruksikan ℓ' melalui P dengan $\ell' \perp n$. Karena $m \perp n$ juga, Proposisi `prop:perp-perp` memberi $\ell' \parallel m$. Akan tetapi ℓ melalui P dan $\ell \parallel m$. Ketunggalan pada Teorema `thm:parallel` memaksa $\ell = \ell'$, sehingga $\ell \perp n$.

Untuk (b), terapkan (a) pada $\ell \parallel m$ dan $m \perp n$ untuk mendapatkan $\ell \perp n$. Sekarang k dan n sama-sama tegak lurus terhadap ℓ. Proposisi `prop:perp-perp` menyatakan bahwa keduanya sejajar, yakni $k \parallel n$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memakai transitivitas sejajar untuk menyimpulkan ketegaklurusan. Langkah penentu adalah ketunggalan garis sejajar melalui titik potong pada bagian (a), kemudian Proposisi dua garis tegak lurus pada bagian (b).

7.2 Konstruksi garis sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex002`. **Label sumber:** `ex:construction-parallel`.

Soal sumber. Dengan penggaris dan jangka, konstruksilah garis melalui titik P yang sejajar dengan garis ℓ yang diberikan.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk pada baris 621–622 meminta mengulangi konstruksi garis tegak lurus sebanyak dua kali.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Konstruksikan garis n melalui P yang tegak lurus ℓ.
2. Konstruksikan garis m melalui P yang tegak lurus n.
3. Justifikasikan kesejajaran dengan Proposisi `prop:perp-perp` .

Jawaban atau pemeriksaan. Garis hasil konstruksi kedua, m, memenuhi $m \perp n$ dan $\ell \perp n$; oleh karena itu $m \parallel \ell$ dan $P \in m$.

Solusi lengkap. Gunakan konstruksi tegak lurus yang sudah diterima untuk membuat n melalui P dengan $n \perp \ell$. Gunakan konstruksi yang sama sekali lagi untuk membuat m melalui P dengan $m \perp n$. Kini m dan ℓ sama-sama tegak lurus terhadap n, sehingga Proposisi `prop:perp-perp` memberi $m \parallel \ell$. Semua langkah hanya memakai lingkaran dan garis melalui titik-titik potong yang dapat dibuat dengan penggaris dan jangka. Jika $P \in \ell$, ketunggalan garis sejajar membuat hasil m berimpit dengan ℓ, yang tetap sah karena setiap garis sejajar dengan dirinya sendiri.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Konstruksi tidak selesai hanya dengan menggambar satu garis tegak lurus; garis sejajar muncul setelah konstruksi tegak lurus yang kedua.

7.3 Dua pencerminan pada garis tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex003`. **Label sumber:** `ex:reflections`.

Soal sumber. Jika $\angle AOB$ siku-siku, tunjukkan bahwa komposisi pencerminan terhadap (OA) dan (OB) adalah pencerminan terhadap titik O. Gunakan hasil itu untuk memberi bukti lain bahwa pencerminan terhadap titik bersifat langsung.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 624–626 merujuk argumen dua pencerminan dan meminta memakai fakta bahwa komposisi dua isometri tak langsung bersifat langsung.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ikuti citra titik X setelah dua pencerminan dan hitung sudut totalnya.
2. Tunjukkan bahwa jarak ke O tetap dan sinar akhir berlawanan dengan $[OX)$.
3. Gunakan paritas langsung/tak langsung untuk kesimpulan kedua.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua sumbu membentuk sudut $\pi/2$, sehingga komposisinya memutar setiap titik sebesar $2(\pi/2) = \pi$ terhadap O. Itulah pencerminan terhadap titik O. Dua pencerminan garis sama-sama tak langsung, maka komposisinya langsung.

Solusi lengkap. Tuliskan r_A dan r_B untuk pencerminan terhadap (OA) dan (OB). Keduanya menetapkan O dan mempertahankan OX. Argumen dua pencerminan memberi bahwa $r_B \circ r_A$ mengubah arah sinar $[OX)$ sebesar dua kali sudut berarah dari (OA) ke (OB). Karena kedua garis tegak lurus, perubahan itu kongruen dengan π. Jadi, untuk $X \neq O$, titik $X'' = (r_B \circ r_A)(X)$ memenuhi $OX'' = OX$ dan O berada di antara X dan X''. Untuk $X = O$, titiknya tetap. Ini persis definisi pencerminan terhadap titik O; urutan sebaliknya juga menghasilkan putaran $-\pi$, yang sama modulo 2π.

Setiap pencerminan garis merupakan isometri tak langsung. Komposisi dua isometri tak langsung mempertahankan orientasi, jadi bersifat langsung. Karena komposisi tersebut telah terbukti sama dengan pencerminan terhadap O, diperoleh bukti alternatif Proposisi `prop:point-reflection+` .

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Komposisi pencerminan dibaca berurutan, tetapi pada sudut siku-siku kedua urutan memberi putaran setengah penuh yang sama. Jangan menyebutnya identitas: setiap $X \neq O$ berpindah ke titik antipodalnya.

7.4 Sudut yang sisinya berpasangan sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex004`. **Label sumber:** `ex:parallel-angles`.

Soal sumber. Jika $(AB) \parallel (A'B')$ dan $(BC) \parallel (B'C')$, buktikan $2\measuredangle ABC \equiv 2\measuredangle A'B'C'$. Simpulkan bahwa kedua sudut kongruen atau berbeda sebesar π, lalu berikan contoh kedua kasus.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk dan gambar pada baris 628–635 merujuk Aksioma 2(b), sifat transversal, dan Latihan `ex:2a=0`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ganti satu sisi sudut dengan garis sejajarnya dan gunakan transversal.
2. Ulangi untuk sisi kedua; setiap pembalikan arah sinar menambah π.
3. Terapkan hasil $2\alpha \equiv 0$ hanya setelah mengambil selisih sudut.

Jawaban atau pemeriksaan. Mengganti kedua garis dengan garis sejajar mengubah sudut berarah paling banyak dengan kelipatan π. Maka selisih kedua sudut adalah 0 atau π modulo 2π, sehingga sudut gandanya sama.

Solusi lengkap. Sifat transversal menyiratkan lema berikut: jika $r \parallel r'$ dan t memotong keduanya, maka sudut berarah yang dibentuk r dan t sama dengan sudut yang dibentuk r' dan t, atau berbeda sebesar π menurut pilihan arah sinarnya. Dengan Aksioma 2(b), kedua kemungkinan itu mempunyai sudut ganda yang sama. Terapkan lema ini sekali pada pasangan $(AB), (A'B')$ dan sekali lagi pada pasangan $(BC), (B'C')$, memakai suatu transversal bantu bila garis yang ada tidak langsung berpotongan. Penjumlahan sudut berarah memberi

$$2\measuredangle ABC - 2\measuredangle A'B'C' \equiv 0.$$

Tetapkan $\delta = \measuredangle ABC - \measuredangle A'B'C'$. Maka $2\delta \equiv 0$; Latihan `ex:2a=0` memberi $\delta \equiv 0$ atau $\delta \equiv \pi$. Kasus pertama diperoleh bila kedua pasang sinar dipilih dengan orientasi sejajar yang sama. Untuk kasus kedua, balik arah tepat satu sisi: misalnya satu sudut dibentuk oleh sinar ke kanan dan ke atas, sedangkan sudut lain oleh sinar ke kiri dan ke atas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis sejajar tidak menentukan arah sinar. Karena satu sinar dapat dibalik, kesimpulan yang selalu benar mula-mula adalah kesamaan sudut ganda, bukan kesamaan sudut tanpa alternatif π.

7.5 Kesebangunan dari garis sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex005`. **Label sumber:** `ex:smililar+parallel`.

Soal sumber. Pada segitiga tak degenerat ABC, titik P berada di antara A, B dan garis ℓ melalui P sejajar (AC). Buktikan ℓ memotong $[BC]$ di satu titik Q, $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$, dan $PB/AB = QB/CB$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 637–644 menggunakan ketidakmungkinan memotong $[AC]$, Teorema Pasch, sifat transversal, dan AA. Ejaan historis `smililar` pada label sumber dipertahankan apa adanya.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan kesejajaran untuk meniadakan perpotongan dengan $[AC]$.
2. Terapkan Pasch pada garis melalui titik interior sisi $[AB]$.
3. Cocokkan sudut di B dan dua sudut yang dibentuk garis sejajar.

Jawaban atau pemeriksaan. Pasch memberi $Q \in [BC]$. Karena $PQ \parallel AC$, $\angle BPQ = \angle BAC$ dan $\angle BQP = \angle BCA$; AA memberi kesebangunan dengan $AB \leftrightarrow PB$ dan $CB \leftrightarrow QB$.

Solusi lengkap. Garis ℓ berbeda dari (AC) karena $P \notin (AC)$ pada segitiga tak degenerat, dan $\ell \parallel (AC)$; jadi ℓ tidak memotong $[AC]$. Garis itu melalui titik interior P pada sisi $[AB]$. Teorema Pasch menjamin bahwa ia memotong salah satu sisi lain. Karena $[AC]$ tidak mungkin, ia memotong $[BC]$ di suatu Q. Ketunggalan perpotongan dua garis memastikan Q tunggal.

Sinar BP sama dengan BA dan sinar BQ sama dengan BC, sehingga sudut di B sama. Sifat transversal untuk $PQ \parallel AC$ memberi kesamaan sudut di P dengan sudut di A, dan sudut di Q dengan sudut di C. Maka AA memberi

$$\triangle ABC \sim \triangle PBQ, \qquad A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow B,\ C \leftrightarrow Q.$$

Perbandingan sisi bersesuaian segera menghasilkan $PB/AB = QB/CB$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesejajaran saja belum membuktikan bahwa Q berada pada ruas $[BC]$; keberadaan pada ruas berasal dari Teorema Pasch.

7.6 Membagi ruas menjadi tiga bagian

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex006`. **Label sumber:** `ex:trisection`.

Soal sumber. Bagilah ruas $[AB]$ menjadi tiga bagian sama panjang dengan penggaris dan jangka.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 648–654 membuat tiga langkah sama pada sinar bantu, lalu menarik dua garis sejajar.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari A, buat sinar bantu yang tidak segaris dengan AB.
2. Tandai C_1, C_2, C_3 dengan $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.
3. Tarik BC_3 dan garis sejajar melalui C_1, C_2.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika garis-garis sejajar melalui C_i memotong AB di D_i, kesebangunan memberi $AD_1/AB = 1/3$ dan $AD_2/AB = 2/3$.

Solusi lengkap. Pilih sinar r dari A yang berbeda dari $[AB)$. Dengan jangka, pindahkan satu panjang positif yang sama tiga kali pada r untuk memperoleh urutan A, C_1, C_2, C_3 dengan $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$. Hubungkan C_3 dengan B. Melalui C_1 dan C_2, konstruksikan garis-garis sejajar (C_3B); misalkan titik potongnya dengan $[AB]$ adalah D_1, D_2.

Untuk $i = 1, 2$, AA memberi $\triangle AC_iD_i \sim \triangle AC_3B$. Karena $AC_1/AC_3 = 1/3$ dan $AC_2/AC_3 = 2/3$, diperoleh

$$AD_1 = \tfrac{1}{3}AB, \qquad AD_2 = \tfrac{2}{3}AB.$$

Jadi $AD_1 = D_1D_2 = D_2B = AB/3$. Konstruksi garis sejajar sendiri tersedia dari Latihan `ex:construction-parallel`, sehingga seluruh prosedur memakai penggaris dan jangka.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tiga tanda sama panjang ditempatkan pada sinar bantu, bukan langsung pada ruas target. Rasio dipindahkan ke AB oleh kesebangunan.

7.7 Jumlah mutlak sudut segitiga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex007`. **Label sumber:** `ex:|3sum|`.

Soal sumber. Buktikan bahwa jumlah nilai mutlak tiga ukuran sudut setiap segitiga adalah π.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 656–672 memisahkan kasus degenerat, lalu menggabungkan teorema jumlah sudut terarah dengan batas ketat $0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Selesaikan segitiga degenerat langsung dari sudut lurus dan nol.
2. Untuk segitiga tak degenerat, pilih orientasi sehingga ketiga ukuran bertanda sama dan ambil nilai positifnya.
3. Gunakan kongruensi modulo 2π dan interval terbuka untuk memilih wakil tunggal.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam kasus tak degenerat, jumlah positif S memenuhi $0 < S < 3\pi$ dan $S \equiv \pi \pmod{2\pi}$; satu-satunya kemungkinan adalah $S = \pi$.

Solusi lengkap. Jika segitiga degenerat, satu sudut mempunyai nilai mutlak π dan dua lainnya nol, sehingga hasil langsung berlaku. Sekarang ambil segitiga tak degenerat. Teorema tanda sudut segitiga menyatakan bahwa, setelah memilih orientasi siklik yang konsisten, ketiga ukuran sudut mempunyai tanda yang sama. Letakkan

$$\alpha = |\measuredangle ABC|, \quad \beta = |\measuredangle BCA|, \quad \gamma = |\measuredangle CAB|.$$

Ketiganya berada dalam $(0, \pi)$, jadi $0 < S = \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Teorema `thm:3sum` , setelah orientasi dibalik bila perlu, memberi $S \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Bilangan dalam interval $(0, 3\pi)$ yang kongruen dengan π hanyalah π; nilai 3π dikeluarkan oleh ketaksamaan ketat. Maka $S = \pi$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kongruensi modulo 2π tidak boleh langsung diganti dengan kesamaan. Batas interval itulah yang menyingkirkan wakil lain.

7.8 Konfigurasi dua segitiga sama kaki

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex008`. **Label sumber:** `ex:pent`.

Soal sumber. Pada segitiga tak degenerat ABC, titik $D \in [BC]$ memenuhi $\angle BAD = \angle DAC$ dan $BA = AD = DC$. Buktikan $\angle CBA = \angle BAC$ dan $AC = BC$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 674–675 meminta memakai jumlah sudut dua kali dan teorema segitiga sama kaki tiga kali.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $\alpha = |\angle BAD| = |\angle DAC|$.
2. Gunakan $AB = AD$ dan $AD = DC$ untuk menamai sudut-sudut alas.
3. Pakai pasangan sudut lurus di D, lalu teorema sama kaki pada segitiga besar.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\alpha = \angle BAD$, maka $\angle ABC = 2\alpha = \angle BAC$; karena sudut di A dan B pada segitiga besar sama, sisi BC dan AC sama.

Solusi lengkap. Ambil semua besar sudut dalam sebagai bilangan di $(0, \pi)$ dan tulis $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. Karena $AB = AD$, segitiga ABD sama kaki, sehingga

$$\angle ABD = \angle BDA =: \beta.$$

Karena $D \in [BC]$, $\angle ABD = \angle ABC$. Karena $AD = DC$, segitiga ADC sama kaki dan $\angle DAC = \angle ACD = \alpha$, sehingga $\angle ADC = \pi - 2\alpha$. Sudut BDA dan ADC membentuk pasangan lurus; maka

$$\beta + (\pi - 2\alpha) = \pi, \qquad \beta = 2\alpha.$$

Tetapi $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 2\alpha$, jadi $\angle ABC = \angle BAC$. Kebalikan teorema segitiga sama kaki pada $\triangle ABC$ memberi sisi di hadapan kedua sudut itu sama, yakni $AC = BC$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan $AB = AD = DC$ menghasilkan dua segitiga sama kaki yang berbeda; jangan memasangkan sudut alas dari segitiga yang salah.

7.9 Sudut siku-siku dari segitiga sama kaki

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex009`. **Label sumber:** `ex:right-isos`.

Soal sumber. Segitiga tak degenerat ABC sama kaki dengan alas $[AC]$, dan D adalah cerminan A terhadap B. Buktikan $\angle ACD$ siku-siku.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 677–678 meminta dua penerapan teorema segitiga sama kaki dan satu penerapan teorema jumlah sudut.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari data dan pencerminan, catat $AB = BC = BD$ serta A, B, D segaris.
2. Nyatakan sudut alas ABC dengan satu parameter α.
3. Hitung sudut alas segitiga BCD dan jumlahkan dua sudut di C.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$, maka $\angle CBD = 2\alpha$ dan $\angle BCD = \pi/2 - \alpha$. Jadi $\angle ACD = \alpha + (\pi/2 - \alpha) = \pi/2$.

Solusi lengkap. Karena ABC sama kaki beralas AC, berlaku $AB = BC$ dan $\angle BAC = \angle ACB =: \alpha$. Teorema jumlah sudut memberi $\angle ABC = \pi - 2\alpha$. Pencerminan A terhadap B berarti A, B, D segaris, B di antara A, D, dan $BA = BD$. Jadi $BC = BD$ dan $\triangle BCD$ sama kaki. Sudut CBD bersuplemen dengan CBA, sehingga

$$\angle CBD = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Kedua sudut alas segitiga BCD sama dan masing-masing bernilai $(\pi - 2\alpha)/2 = \pi/2 - \alpha$. Pada titik C, sinar CB berada di antara CA dan CD, sehingga

$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \alpha + (\pi/2 - \alpha) = \pi/2.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut di B pada segitiga BCD adalah suplemen sudut ABC, bukan sudut yang sama, karena BA dan BD merupakan sinar berlawanan.

7.10 Jumlah sudut terarah segiempat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex010`. **Label sumber:** `ex:quadrangle`.

Soal sumber. Buktikan bahwa untuk setiap segiempat $ABCD$, $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAB \equiv 0$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 695–696 meminta menerapkan teorema jumlah sudut pada $\triangle ABC$ dan $\triangle BDA$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Belah segiempat dengan diagonal AC atau BD.
2. Jumlahkan dua identitas sudut segitiga.
3. Gabungkan dua pasangan sudut yang bersebelahan dengan hukum penjumlahan sudut terarah.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua jumlah sudut segitiga masing-masing kongruen π; setelah sudut-sudut diagonal digabung, jumlah empat sudut segiempat kongruen $2\pi \equiv 0$.

Solusi lengkap. Terapkan Teorema `thm:3sum` pada $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$:

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB \equiv \pi,$$
$$\measuredangle ACD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAC \equiv \pi.$$

Hukum penjumlahan sudut terarah memberi

$$\measuredangle BCA + \measuredangle ACD \equiv \measuredangle BCD, \qquad \measuredangle DAC + \measuredangle CAB \equiv \measuredangle DAB.$$

Menjumlahkan kedua identitas segitiga dan mengganti dua pasangan tersebut menghasilkan jumlah yang diminta kongruen dengan 2π, yaitu 0 modulo 2π. Argumen terarah ini juga mencakup segiempat cekung atau konfigurasi yang tidak dapat diperlakukan dengan rumus jumlah sudut dalam biasa.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pernyataan sumber adalah kongruensi sudut terarah, bukan klaim bahwa jumlah empat besar sudut setiap konfigurasi selalu 2π sebagai bilangan biasa.

7.11 Empat garis melalui satu titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex011`. **Label sumber:** `ex:4parallels`.

Soal sumber. Dalam jajar genjang $ABCD$, titik P bukan titik sudut. Garis a, b, c, d melalui A, B, C, D dan berturut-turut sejajar $(CP), (DP), (AP), (BP)$. Buktikan keempatnya konkuren.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 698–702 mencerminkan P terhadap pusat simetri M dan mengidentifikasi keempat garis sebagai garis menuju citra P'.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan titik tengah diagonal M sebagai pusat pencerminan.
2. Lacak citra garis CP, DP, AP, BP.
3. Terapkan ketunggalan garis sejajar melalui setiap titik sudut.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika P' adalah cerminan P terhadap M, maka $a = (AP')$, $b = (BP')$, $c = (CP')$, dan $d = (DP')$. Semua melalui P'.

Solusi lengkap. Lema `lem:parallelogram` memberi pusat simetri M yang menukar $A \leftrightarrow C$ dan $B \leftrightarrow D$. Misalkan P' adalah cerminan P terhadap M. Pencerminan titik memetakan garis ke garis sejajar dan mengirim (CP) ke (AP'). Jadi $(AP') \parallel (CP)$. Garis a juga melalui A dan sejajar (CP); ketunggalan garis sejajar memberi $a = (AP')$. Dengan cara yang sama,

$$b = (BP'), \qquad c = (CP'), \qquad d = (DP').$$

Karena P bukan titik sudut, P' juga bukan titik sudut yang berpasangan, sehingga semua garis tersebut terdefinisi. Keempatnya melalui P', jadi konkuren.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik konkuren bukan P pada umumnya, melainkan citranya P' terhadap pusat jajar genjang.

7.12 Empat sisi sama menghasilkan belah ketupat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex012`. **Label sumber:** `ex:romb`.

Soal sumber. Jika segiempat $ABCD$ memenuhi $AB = BC = CD = DA$, buktikan bahwa $ABCD$ adalah jajar genjang.

Petunjuk penulis (rujukan). Blok upstream baris 704–712 memakai SSS dan sifat transversal. Pada baris 711 upstream tertulis "$D \neq C$", yang tidak memilih cabang SSS; saksi Indonesia menulis "$D \neq B$", syarat yang benar untuk memilih titik potong lingkaran yang lain. Perbedaan ini dicatat eksplisit dalam manifest.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bandingkan $\triangle ABC$ dan $\triangle CDA$ dengan SSS.
2. Gunakan $D \neq B$ dan ketakdegeneratan untuk menentukan tanda sudut pada dua sisi berlawanan diagonal AC.
3. Terapkan sifat transversal, lalu ulangi dengan diagonal BD.

Jawaban atau pemeriksaan. SSS memberi kesamaan besar sudut BAC dan DCA. Karena B, D merupakan dua titik potong berbeda dari lingkaran berpusat A, C, sudut terarahnya berlawanan; maka $AB \parallel CD$. Argumen pada diagonal lain memberi $AD \parallel BC$.

Solusi lengkap. Diagonal AC membentuk dua segitiga. Dari $AB = CD$, $BC = DA$, dan $AC = CA$, kriteria SSS memberi

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Maka $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle DCA|$. Titik B dan D sama-sama merupakan titik potong lingkaran berpusat A berjari-jari AB dan lingkaran berpusat C berjari-jari BC. Karena segiempat tak degenerat dan $D \neq B$, keduanya adalah dua titik potong yang berada pada sisi berlawanan terhadap (AC). Jadi ukuran terarah memenuhi $\measuredangle BAC = -\measuredangle DCA$. Sifat transversal dengan transversal AC menghasilkan $(AB) \parallel (CD)$.

Dengan diagonal BD, SSS pada $\triangle BAD$ dan $\triangle DCB$ memberi argumen identik dan menghasilkan $(AD) \parallel (BC)$. Kedua pasang sisi berhadapan sejajar; maka $ABCD$ adalah jajar genjang.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. SSS hanya memberi kesamaan besar sudut. Tanda sudut berasal dari fakta bahwa B dan D adalah dua titik potong yang berbeda; pernyataan upstream "$D \neq C$" tidak cukup untuk langkah ini.

7.13 Diagonal persegi panjang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex013`. **Label sumber:** `ex:rectangle`.

Soal sumber. Buktikan bahwa jajar genjang $ABCD$ adalah persegi panjang jika dan hanya jika $AC = BD$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 714–727 menggabungkan Lema `lem:parallelogram`, SSS, dan fakta bahwa sudut berurutan jajar genjang saling suplementer.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk arah maju, bandingkan dua segitiga dengan sudut siku-siku.
2. Untuk arah balik, gunakan SSS pada ABC dan BCD.
3. Gabungkan kesamaan dua sudut berurutan dengan jumlahnya π.

Jawaban atau pemeriksaan. Persegi panjang memberi diagonal sama melalui SAS. Sebaliknya, diagonal sama memberi dua sudut berurutan sama melalui SSS; karena juga suplementer, keduanya siku-siku, demikian pula dua sudut lawannya.

Solusi lengkap. Jika $ABCD$ persegi panjang, maka $AB = CD$ dari sifat jajar genjang, BC merupakan sisi bersama, dan $\angle ABC = \angle BCD = \pi/2$. SAS pada $\triangle ABC$ dan $\triangle DCB$ memberi $AC = BD$.

Sebaliknya, andaikan $AC = BD$. Lema jajar genjang memberi $AB = CD$, dan BC sama dengan dirinya sendiri. Maka SSS memberi $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, sehingga besar sudut ABC dan BCD sama. Karena $AB \parallel CD$, sifat transversal memberi bahwa kedua sudut berurutan itu berjumlah π. Dua bilangan yang sama dan berjumlah π masing-masing adalah $\pi/2$. Pencerminan pusat jajar genjang menukar sudut berhadapan, sehingga dua sudut lainnya juga siku-siku. Jadi $ABCD$ persegi panjang.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Diagonal sama tidak mencirikan persegi panjang pada segiempat sembarang; hipotesis jajar genjang memasok kesamaan sisi dan suplementaritas sudut.

7.14 Diagonal belah ketupat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex014`. **Label sumber:** `ex:romb2`.

Soal sumber. Buktikan bahwa jajar genjang $ABCD$ adalah belah ketupat jika dan hanya jika $(AC) \perp (BD)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 729–739 menggunakan titik tengah bersama diagonal serta SSS.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Misalkan $M = AC \cap BD$; gunakan $AM = CM$ dan $BM = DM$.
2. Dari belah ketupat, bandingkan AMB dan AMD.
3. Untuk arah balik, gunakan dua segitiga siku-siku di M.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $AB = AD$, SSS membuat sudut AMB dan AMD sama; karena membentuk pasangan lurus, keduanya siku-siku. Sebaliknya, diagonal tegak lurus memberi $AB = AD$ melalui SAS, lalu semua sisi sama oleh sifat jajar genjang.

Solusi lengkap. Lema `lem:parallelogram` memberi titik M yang merupakan titik tengah kedua diagonal. Jika $ABCD$ belah ketupat, $AB = AD$, AM sisi bersama, dan $BM = DM$. SSS memberi $\triangle AMB \cong \triangle AMD$. Maka sudut AMB dan AMD sama. Sinar MB dan MD berlawanan, jadi kedua sudut itu bersuplemen; masing-masing bernilai $\pi/2$. Dengan demikian $(AC) \perp (BD)$.

Untuk arah sebaliknya, andaikan diagonal tegak lurus. Segitiga AMB dan AMD memiliki AM bersama, $BM = DM$, serta sudut apit siku-siku. SAS memberi $AB = AD$. Pada jajar genjang, sisi berhadapan sama: $AB = CD$ dan $AD = BC$. Jadi keempat sisi sama dan $ABCD$ merupakan belah ketupat.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Diagonal jajar genjang selalu saling membagi dua, tetapi tidak selalu tegak lurus. Ketegaklurusan diperoleh dari kongruensi plus pasangan sudut lurus.

7.15 Belah ketupat terinskripsi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex015`. **Label sumber:** `ex:inscribed-rhombus`.

Soal sumber. Belah ketupat $AXYZ$ bersisi s terinskripsi pada segitiga tak degenerat ABC dengan $X \in [AB]$, $Y \in [BC]$, dan $Z \in [CA]$. Buktikan $s = \sqrt{XB \cdot ZC}$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 741–742 meminta menunjukkan dan memakai $\triangle CZY \sim \triangle YXB$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan $AZ \parallel XY$ dan $AX \parallel ZY$ dari sifat jajar genjang.
2. Cocokkan sudut CZY dengan YXB serta CYZ dengan YBX.
3. Pilih rasio yang menempatkan dua sisi belah ketupat pada pembilang dan penyebut silang.

Jawaban atau pemeriksaan. Kesebangunan memberi $ZC/XY = ZY/XB$. Karena $XY = ZY = s$, diperoleh $ZC/s = s/XB$, sehingga $s^2 = XB \cdot ZC$ dan $s > 0$ memberi rumus sumber.

Solusi lengkap. Belah ketupat adalah jajar genjang, jadi $AZ \parallel XY$ dan $AX \parallel ZY$, serta $XY = ZY = s$. Karena C, Z, A segaris, A, X, B segaris, dan B, Y, C segaris, sifat transversal memberi

$$\angle CZY = \angle YXB, \qquad \angle CYZ = \angle YBX.$$

Maka AA menghasilkan

$$\triangle CZY \sim \triangle YXB, \qquad C \leftrightarrow Y, Z \leftrightarrow X, Y \leftrightarrow B.$$

Sisi bersesuaian memenuhi

$$\frac{ZC}{XY} = \frac{ZY}{XB}.$$

Substitusi $XY = ZY = s$ memberi $ZC/s = s/XB$, atau $s^2 = XB \cdot ZC$. Semua panjang positif pada konfigurasi tak degenerat, sehingga $s = \sqrt{XB \cdot ZC}$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Urutan kesebangunan adalah $CZY \sim YXB$; urutan lain mudah menukar ZC dan XB dan menghasilkan rasio yang salah.

7.16 Koordinat dari dua sumbu tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex016`. **Label sumber:** `ex:coordinates`.

Soal sumber. Untuk dua garis tegak lurus ℓ, m, (a) buktikan setiap pasangan kaki $X \in \ell, Y \in m$ menentukan tepat satu titik P; (b) buktikan $PQ^2 = P_\ell Q_\ell^2 + P_m Q_m^2$; (c) simpulkan bidang isometrik dengan $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Blok induk baris 744–746 mencakup ketiga subbagian: bagian (a) memakai ketunggalan garis sejajar; bagian (b), dan karenanya (c), memakai jajar genjang dan Teorema Pythagoras. Subbagian sumber tidak memiliki label lokal terpisah.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Melalui X dan Y, tarik garis sejajar dengan sumbu yang lain.
2. Untuk dua titik P, Q, lengkapilah persegi panjang dengan sisi sejajar sumbu.
3. Beri orientasi dan titik nol pada kedua sumbu, lalu gunakan kaki sebagai dua koordinat.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua garis bantu berpotongan di satu P. Persegi panjang bantu memecah PQ menjadi dua perpindahan tegak lurus sepanjang $P_\ell Q_\ell$ dan $P_m Q_m$; Pythagoras memberi rumus. Pemetaan kaki ke dua bilangan real bersifat bijektif dan mempertahankan jarak.

Solusi lengkap. (a) Melalui X tarik garis $r \parallel m$ dan melalui Y tarik garis $s \parallel \ell$. Karena $\ell \perp m$, garis r dan s juga tegak lurus, jadi berpotongan pada tepat satu titik P. Garis melalui P yang tegak lurus ℓ adalah r, sehingga kaki P pada ℓ ialah X; serupa, kakinya pada m ialah Y. Titik lain dengan kedua kaki itu harus terletak pada $r \cap s$, sehingga sama dengan P.

(b) Untuk P, Q, tarik melalui P garis sejajar ℓ dan melalui Q garis sejajar m; misalkan titik potongnya R. Segitiga PRQ siku-siku di R. Persegi panjang yang dibentuk proyeksi-proyeksi ortogonal memberi $PR = P_\ell Q_\ell$ dan $RQ = P_m Q_m$. Teorema Pythagoras menghasilkan

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 = P_\ell Q_\ell^2 + P_m Q_m^2.$$

(c) Pilih $O = \ell \cap m$, orientasikan kedua sumbu, dan identifikasikan masing-masing secara isometrik dengan $\mathbb{R}$. Definisikan $\Phi(P) = (x(P_\ell), y(P_m))$. Bagian (a) menyatakan Φ bijektif, dan bagian (b) menyatakan $PQ = d_2(\Phi(P), \Phi(Q))$. Jadi Φ adalah isometri bidang ke $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Koordinat memerlukan pilihan asal dan orientasi pada setiap sumbu. Pilihan itu tidak kanonik, tetapi setiap pilihan menghasilkan isometri yang sah.

7.17 Membangun segitiga dari tiga panjang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex017`. **Label sumber:** `ex:abc`.

Soal sumber. Untuk $0 < a \le b \le c \le a + b$, gunakan koordinat untuk membangun segitiga ABC dengan $BC = a$, $CA = b$, dan $AB = c$.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 748–764 menetapkan $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ dan mereduksi soal ke keberadaan pasangan real (x, y) yang memenuhi dua persamaan jarak.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kurangkan dua persamaan kuadrat untuk menentukan x.
2. Faktorkan $4c^2y^2$ menjadi empat faktor linear dalam a, b, c.
3. Gunakan hipotesis untuk membuktikan semua faktor tak negatif.

Jawaban atau pemeriksaan. Ambil $x = (b^2 + c^2 - a^2)/(2c)$ dan $y = \sqrt{b^2 - x^2}$. Ketaksamaan segitiga menjamin radikan tidak negatif; $C = (x, y)$ memiliki tiga jarak yang diminta.

Solusi lengkap. Tetapkan $A = (0, 0)$ dan $B = (c, 0)$. Kita mencari $C = (x, y)$ dengan

$$x^2 + y^2 = b^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

Mengurangkan persamaan memberi

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Definisikan $y \geq 0$ melalui $y^2 = b^2 - x^2$. Radikannya sah karena

$$4c^2y^2 = \big((b + c)^2 - a^2\big)\big(a^2 - (b - c)^2\big) = (b + c - a)(b + c + a)(a + b - c)(a - b + c).$$

Keempat faktor tidak negatif dari $0 < a \leq b \leq c \leq a + b$; faktor $b + c - a$, $b + c + a$, dan $a - b + c$ bahkan positif, sedangkan $a + b - c$ dapat nol tepat pada kasus degenerat. Maka y real. Persamaan pertama memberi $CA = b$, dan definisi x membuat persamaan kedua berlaku, sehingga $BC = a$; jelas $AB = c$. Bila $c = a + b$, diperoleh $y = 0$ dan segitiga degenerat yang tetap diizinkan oleh batas sumber.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Menulis rumus x belum membuktikan y real. Faktorisasi radikan adalah tempat ketaksamaan segitiga digunakan.

7.18 Persamaan dan parameter garis

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex018`. **Label sumber induk:** `ex:line-coord`; label subbagian tetap: `ex:line-coord:parameter`.

Soal sumber. Turunkan persamaan garis sumbu $[AB]$, lalu buktikan bahwa setiap garis dapat ditulis sebagai himpunan solusi $ax + by = c$ dengan $(a, b) \neq (0, 0)$ atau sebagai himpunan parametrik $(ut + x_0, vt + y_0)$ dengan $(u, v) \neq (0, 0)$.

Petunjuk penulis (rujukan). Satu blok induk pada baris 766–771 mencakup seluruh latihan, termasuk subbagian berlabel `ex:line-coord:parameter`; tidak ada blok petunjuk penulis kedua. Blok itu meminta mengembangkan $MA = MB$ dan memakai fakta bahwa setiap garis adalah garis sumbu suatu ruas.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kuadratkan $MA = MB$ dan batalkan $x^2 + y^2$.
2. Untuk bentuk implisit, gunakan vektor normal tak nol.
3. Untuk bentuk parametrik, gunakan vektor arah $(-b, a)$ dan buktikan kedua inklusi himpunan.

Jawaban atau pemeriksaan. Ekspansi memberi persamaan sumber. Garis $ax + by = c$ berarah $(-b, a)$; jika (x_0, y_0) satu solusinya, semua dan hanya solusinya adalah $(x_0 - bt, y_0 + at)$. Sebaliknya, lintasan parametrik berarah (u, v) memenuhi $-vx + uy = -vx_0 + uy_0$.

Solusi lengkap. Untuk $M = (x, y)$, syarat garis sumbu adalah $MA = MB$. Setelah dikuadratkan,

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2.$$

Membuka kurung dan membatalkan $x^2 + y^2$ menghasilkan

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y = x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2.$$

Karena $A \neq B$, dua koefisien kiri tidak sekaligus nol.

Setiap garis adalah garis sumbu suatu ruas, jadi persamaan di atas menunjukkan bahwa setiap garis mempunyai bentuk $ax + by = c$ dengan $(a, b) \neq (0, 0)$. Sebaliknya, himpunan solusi persamaan semacam itu tidak kosong dan mempunyai vektor arah $(-b, a)$; dua titik solusinya berbeda tepat dengan kelipatan vektor tersebut, sehingga himpunannya suatu garis.

Pilih satu solusi (x_0, y_0). Semua titik $(x_0 - bt, y_0 + at)$ memenuhi persamaan, dan jika (x, y) solusi lain, vektor $(x - x_0, y - y_0)$ ortogonal terhadap (a, b), sehingga merupakan kelipatan $(-b, a)$. Ini membuktikan bentuk parametrik pada subbagian `ex:line-coord:parameter`. Sebaliknya, untuk parameter umum $(ut + x_0, vt + y_0)$ dengan $(u, v) \neq (0, 0)$, semua titik dan hanya titik pada garis itu memenuhi

$$-vx + uy = -vx_0 + uy_0.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Label subbagian parameter bukan latihan atau petunjuk baru. Koefisien vektor arah dan koefisien persamaan harus dibedakan; keduanya saling tegak lurus, bukan sama.

7.19 Klasifikasi persamaan lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex019`. **Label sumber:** `ex:circle-coord`.

Soal sumber. Klasifikasikan himpunan solusi $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dan tentukan pusat serta jari-jari bila berupa lingkaran.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 773–774 menuliskan bentuk kuadrat lengkap yang harus ditafsirkan secara geometris.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Lengkapi kuadrat untuk x dan y secara terpisah.
2. Tetapkan $R^2 = (a^2 + b^2 - 4c)/4$.
3. Bedakan tanda R^2.

Jawaban atau pemeriksaan. Persamaan setara dengan $(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = (a^2 + b^2 - 4c)/4$. Sisi kanan positif memberi lingkaran, nol memberi satu titik, dan negatif memberi himpunan kosong.

Solusi lengkap. Dengan melengkapi kuadrat,

$$x^2 + ax = (x + \tfrac{a}{2})^2 - \tfrac{a^2}{4}, \qquad y^2 + by = (y + \tfrac{b}{2})^2 - \tfrac{b^2}{4}.$$

Jadi persamaan awal ekuivalen dengan

$$(x + \tfrac{a}{2})^2 + (y + \tfrac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} =: R^2.$$

Jika $R^2 > 0$, ini lingkaran berpusat $(-a/2, -b/2)$ dengan $r = R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$. Jika $R^2 = 0$, satu-satunya solusi adalah titik pusat itu sendiri. Jika $R^2 < 0$, jumlah dua kuadrat tidak dapat sama dengan bilangan negatif, sehingga himpunan solusi kosong.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Rumus akar untuk jari-jari hanya berlaku pada kasus lingkaran; diskriminan nol menghasilkan titik, bukan lingkaran berjari-jari positif.

7.20 Lokus lingkaran Apollonius

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex020`. **Label sumber:** `ex:apolonnius`.

Soal sumber. Untuk $A \neq B$ dan $k > 0$, $k \neq 1$, buktikan lokus titik M yang memenuhi $AM = k\,BM$ merupakan lingkaran.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk baris 777–781 memilih $B = (0,0)$, $A = (a,0)$ dan mereduksi lokus ke persamaan pada Latihan `ex:circle-coord` . Ejaan historis `apolonnius` pada label dipertahankan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kuadratkan persamaan jarak setelah memilih koordinat pada garis AB.
2. Bagi dengan $1 - k^2$, yang tidak nol.
3. Lengkapi kuadrat dan buktikan jari-jarinya positif.

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan $B = (0,0)$ dan $A = (a,0)$, pusat lingkaran adalah $(a/(1-k^2), 0)$ dan jari-jarinya $ak/|1-k^2|$.

Solusi lengkap. Pilih koordinat $B = (0,0)$ dan $A = (a,0)$ dengan $a = AB > 0$. Untuk $M = (x,y)$, persamaan $AM = kBM$ ekuivalen, setelah dikuadratkan, dengan

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

Karena $k \neq 1$, kita dapat membagi dan melengkapi kuadrat:

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{1-k^2}x + \frac{a^2}{1-k^2} = 0,$$

$$\left(x - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Sisi kanan positif karena $a, k > 0$. Jadi lokus tepat sebuah lingkaran dengan pusat dan jari-jari yang dinyatakan pada jawaban. Pengkuadratan tidak menambah solusi palsu karena kedua jarak dan k tidak negatif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kasus $k = 1$ tidak boleh dibagi dengan $1 - k^2$; kasus itu menghasilkan garis sumbu $[AB]$, bukan lingkaran.

7.21 Konstruksi lingkaran Apollonius

ID stabil: `o004-c100-sol-ch07-ex021`. **Label sumber:** `ex:apolonnius-construction`.

Soal sumber. Diberikan $A \neq B$, $M \notin \{A, B\}$, dan $AM \neq BM$. Dengan penggaris dan jangka, konstruksilah lingkaran Apollonius berfokus A, B yang melalui M.

Petunjuk penulis (rujukan). Petunjuk dan gambar baris 783–790 dimulai dengan asumsi tambahan $M \notin (AB)$ dan memakai dua titik pembagi P, Q. Soal sumber juga mengizinkan $M \in (AB)$; kasus yang tidak dibahas petunjuk itu diselesaikan terpisah di bawah dan dicatat sebagai kesenjangan cakupan petunjuk, bukan diubah diam-diam.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika $M \notin (AB)$, konstruksikan garis bagi dalam dan luar sudut AMB.
2. Ambil titik potongnya P, Q dengan (AB) dan gunakan teorema garis bagi.
3. Jika $M \in (AB)$, konstruksikan titik pembagi kedua dengan rasio $AM : BM$, lalu gunakan diameter yang dibentuk kedua titik pembagi.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik pembagi dalam dan luar P, Q memenuhi $PA/PB = QA/QB = AM/BM$; lingkaran yang dicari adalah lingkaran berdiameter PQ. Pada kasus kolinear, M sendiri adalah salah satu dari P, Q dan titik pembagi pasangannya dapat dikonstruksi dengan kesebangunan.

Solusi lengkap. Andaikan dahulu $M \notin (AB)$. Konstruksikan garis bagi dalam dan garis bagi luar $\angle AMB$; keduanya saling tegak lurus. Misalkan keduanya memotong garis (AB) berturut-turut di P dan Q. Teorema garis bagi dalam dan luar memberi

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{AM}{BM} =: k \neq 1.$$

Jadi P, Q adalah dua titik pada garis fokus yang termasuk lokus $AX = kBX$. Dari Latihan `ex:apolonnius` , lokus tersebut adalah satu lingkaran. Rumus pusat pada solusi latihan itu menunjukkan bahwa P, Q adalah dua perpotongannya dengan (AB) dan merupakan ujung-ujung diameter. Karena garis bagi dalam dan luar tegak lurus, $\angle PMQ$ siku-siku, sehingga M memang terletak pada lingkaran berdiameter PQ. Konstruksikan titik tengah PQ dan gambar lingkaran melalui P.

Jika $M \in (AB)$, rasio $k = AM/BM \neq 1$ membuat M salah satu dari dua titik pembagi garis AB dengan rasio k. Konstruksikan titik pembagi lainnya N—eksternal bila M internal, dan internal bila M eksternal—dengan konstruksi pembagian ruas standar: salin panjang AM dan BM pada dua sinar bantu, lalu pindahkan rasionya ke (AB) memakai garis sejajar. Teorema intersep menjamin $NA/NB = k$. Menurut karakterisasi yang sama, lingkaran berdiameter MN adalah lingkaran Apollonius yang diminta. Semua langkah tersebut merupakan konstruksi penggaris–jangka.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Asumsi $M \notin (AB)$ hanya muncul dalam petunjuk, bukan dalam soal. Tanpa menangani kasus kolinear, solusi tidak menutup seluruh domain yang diberikan.

Uji penguasaan Bab 7

1. **(2 poin).** Buktikan kedua bagian hubungan sejajar–tegak lurus pada `ex:perp-perp`.
2. **(2 poin).** Jelaskan konstruksi garis sejajar dan komposisi dua pencerminan bersumbu tegak lurus.
3. **(2 poin).** Buktikan alternatif 0 atau π untuk sudut dengan sisi berpasangan sejajar dan terapkan pada segitiga potongan garis sejajar.
4. **(2 poin).** Berikan konstruksi pembagian tiga dan buktikan jumlah mutlak sudut segitiga.
5. **(2 poin).** Selesaikan konfigurasi $AB = AD = DC$, konfigurasi segitiga sama kaki yang dicerminkan, dan identitas sudut segiempat.
6. **(2 poin).** Gunakan simetri pusat untuk membuktikan konkurensi empat garis dan buktikan bahwa empat sisi sama menghasilkan jajar genjang.
7. **(2 poin).** Buktikan karakterisasi persegi panjang dan belah ketupat melalui diagonal.
8. **(2 poin).** Turunkan identitas belah ketupat terinskripsi dan bangun isometri koordinat dari dua sumbu tegak lurus.
9. **(2 poin).** Bangun segitiga dari tiga panjang dan buktikan ekuivalensi bentuk implisit serta parametrik suatu garis, termasuk subbagian berlabel parameter.
10. **(2 poin).** Klasifikasikan persamaan lingkaran, turunkan lingkaran Apollonius, dan berikan konstruksinya untuk kasus nonkolinear maupun kolinear.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah gabungan solusi berlabel berikut; pemetaan ini membuat cakupan pemeriksaan dapat ditelusuri tanpa mengulang dua puluh satu pembuktian di bagian rubrik:

M1. 7.1.

M2. 7.2 dan 7.3.

M3. 7.4 dan 7.5.

M4. 7.6 dan 7.7.

M5. 7.8, 7.9, dan 7.10.

M6. 7.11 dan 7.12.

M7. 7.13 dan 7.14.

M8. 7.15 dan 7.16.

M9. 7.17 dan 7.18.

M10. 7.19, 7.20, dan 7.21.

M1 (2 poin). Satu poin untuk bukti ketunggalan pada bagian (a); satu untuk penerapan bagian (a) dan Proposisi dua garis tegak lurus pada bagian (b).

M2 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi tegak lurus dua kali beserta justifikasi sejajar; satu untuk putaran π dan argumen langsung sebagai komposisi dua isometri tak langsung.

M3 (2 poin). Satu poin untuk kesamaan sudut ganda serta alternatif $0/\pi$; satu untuk Pasch, AA, dan rasio $PB/AB = QB/CB$.

M4 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi sinar bantu dan bukti rasio $1/3, 2/3$; satu untuk kasus degenerat serta pemilihan $S = \pi$ dari interval modulo 2π.

M5 (2 poin). Satu poin untuk dua argumen segitiga sama kaki; satu untuk dua penerapan jumlah sudut segitiga yang menghasilkan identitas segiempat terarah.

M6 (2 poin). Satu poin untuk identifikasi a, b, c, d sebagai garis menuju P'; satu untuk SSS, pemilihan $D \neq B$, dan kedua pasangan sisi sejajar belah ketupat.

M7 (2 poin). Satu poin untuk karakterisasi diagonal sama melalui SAS/SSS; satu untuk karakterisasi diagonal tegak lurus melalui titik tengah bersama.

M8 (2 poin). Satu poin untuk kesebangunan $CZY \sim YXB$ dan $s^2 = XB\,ZC$; satu untuk bijektivitas koordinat dan rumus Pythagoras proyeksi.

M9 (2 poin). Satu poin untuk rumus x, y dan faktorisasi radikan; satu untuk ekspansi garis sumbu dan pembuktian dua arah bentuk implisit–parametrik, dengan label `ex:line-coord:parameter` tetap berada di bawah induknya.

M10 (2 poin). Satu poin untuk kuadrat lengkap serta pusat/jari-jari lingkaran Apollonius; satu untuk konstruksi diameter melalui pembagi dalam/luar dan penutupan kasus $M \in (AB)$.

Bab 8

Solusi dan penguasaan Bab 8: Geometri segitiga

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Ketiga belas petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter08.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Label sumber `ex:midle` dan `ex:ext-disect` sengaja tetap memakai ejaan historisnya. Terjemahan bab memperbaiki korespondensi titik sudut pada daftar $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ dari A, B, C menjadi B, C, A, dan mengganti rujukan jenis “lema yang sama” menjadi “proposisi yang sama” karena targetnya `prop:angle-bisect-dist`; keduanya merupakan koreksi pembaca yang diungkapkan, bukan perubahan sumber. Istilah *external/exterior bisector* dinormalkan menjadi *garis bagi luar*; dua arti *altitude* tetap dibedakan sebagai garis *garis tinggi* dan jarak *tinggi*. Dependensi homoteti dalam petunjuk garis Euler, rujukan luar `ex:abs-bisect=median`, dan istilah yang hanya muncul dalam petunjuk *eksenter* dipertahankan secara eksplisit. Pelokalan label gambar `pic-108` berada pada edisi utama; komponen solusi ini tidak menyalin aset gambar tersebut.

8.1 Ketunggalan lingkaran luar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex001`. **Label sumber:** `ex:unique-cline`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa terdapat tepat satu lingkaran yang melalui titik-titik sudut suatu segitiga tak degenerat di bidang Euklides.

Petunjuk penulis. Terapkan `thm:circumcenter` dan `thm:perp-bisect` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan perpotongan ketiga garis sumbu untuk memperoleh sebuah pusat.
2. Untuk ketunggalan, ambil sembarang lingkaran lain melalui ketiga titik.
3. Tunjukkan bahwa pusat lingkaran lain itu harus berada pada dua garis sumbu yang sama, lalu bandingkan jari-jarinya.

Jawaban atau pemeriksaan. Pusatnya adalah pusat lingkaran luar O, yakni perpotongan unik garis sumbu $[AB]$ dan $[AC]$, dan jari-jarinya $OA = OB = OC$. Tidak ada pilihan pusat atau jari-jari kedua.

Solusi lengkap. Misalkan ABC segitiga tak degenerat. Teorema `thm:circumcenter` memberi satu titik O pada ketiga garis sumbu sisi. Menurut Teorema `thm:perp-bisect` ,

$$OA = OB = OC.$$

Maka lingkaran berpusat O dan berjari-jari OA melalui A, B, C; jadi lingkaran yang diminta ada.

Sekarang misalkan Γ sembarang lingkaran melalui A, B, C, dengan pusat P. Karena $PA = PB$, Teorema `thm:perp-bisect` menempatkan P pada garis sumbu $[AB]$. Karena $PA = PC$, titik P juga berada pada garis sumbu $[AC]$. Kedua garis sumbu itu berpotongan tepat di O, sehingga $P = O$. Jari-jari Γ kemudian harus $PA = OA$. Jadi Γ adalah lingkaran yang sudah dibangun dan ketunggalan terbukti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tiga titik sebarang tidak selalu menentukan lingkaran: ketakdegeneratan meniadakan kasus kolinear dan menjamin dua garis sumbu yang dipakai memang berpotongan.

8.2 Sistem ortosentrik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex002`. **Label sumber:** `ex:orthic-4`.

Soal sumber. Andaikan ortosenter H dari $\triangle ABC$ berbeda dari titik-titik sudutnya. Tunjukkan bahwa A merupakan ortosenter $\triangle HBC$.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa $(AC) \perp (BH)$ dan $(BC) \perp (AH)$, lalu terapkan `thm:orthocenter` . Perhatikan pula bahwa masing-masing titik A, B, C, H merupakan ortosenter segitiga yang dibentuk oleh tiga titik lainnya; susunan empat titik seperti ini disebut *sistem ortosentrik*.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis ketiga hubungan tegak lurus yang berasal dari garis tinggi ABC.
2. Baca setiap hubungan itu sebagai sebuah garis tinggi segitiga HBC.
3. Periksa bahwa segitiga baru tidak degenerat di bawah hipotesis soal.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada $\triangle HBC$, garis HA tegak lurus BC, garis BA tegak lurus HC, dan garis CA tegak lurus HB. Ketiganya melalui A.

Solusi lengkap. Karena H ortosenter $\triangle ABC$, berlaku

$$AH \perp BC, \qquad BH \perp AC, \qquad CH \perp AB.$$

Pada segitiga HBC, garis melalui titik sudut H yang tegak lurus sisi BC adalah (HA). Garis melalui B yang tegak lurus sisi HC adalah (BA), dan garis melalui C yang tegak lurus sisi HB adalah (CA). Jadi ketiga garis tinggi $\triangle HBC$ bertemu di A.

Segitiga HBC tidak degenerat. Jika H terletak pada (BC), maka garis tinggi dari B atau C memaksa salah satu sudut B atau C siku-siku dan ortosenter ABC menjadi titik sudut, bertentangan dengan hipotesis. Dengan Teorema `thm:orthocenter` , titik pertemuan ketiga garis tinggi itu adalah ortosenter $\triangle HBC$, yakni A.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis tinggi adalah *garis* melalui titik sudut, bukan hanya ruas di dalam segitiga. Fakta ini penting ketika ortosenter berada di luar segitiga.

8.3 Kesebangunan pada segitiga ortik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex003`. **Label sumber:** `ex:orthic-sim`.

Soal sumber. Misalkan A', B', C' berturut-turut merupakan titik kaki ketiga garis tinggi suatu segitiga lancip ABC. Tunjukkan bahwa

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C \sim \triangle AB'C' \sim \triangle A'BC'.$$

Petunjuk penulis. Tunjukkan bahwa $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$. Gunakan hasil ini untuk menunjukkan bahwa $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$. Ulangi argumen tersebut untuk $\triangle AB'C'$ dan $\triangle A'BC'$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Catat semua sudut siku-siku di A', B', C'.
2. Gunakan AA pada dua segitiga siku-siku yang berbagi sudut di satu titik sudut ABC.
3. Terjemahkan kesamaan sudut itu ke sudut segitiga-segitiga kecil, lalu lakukan siklus pada ketiga titik sudut.

Jawaban atau pemeriksaan. Keempat segitiga memiliki tiga sudut yang sama dengan sudut-sudut A, B, C dalam urutan yang sesuai; karena itu semuanya sebangun menurut AA.

Solusi lengkap. Karena $AA' \perp BC$ dan $BB' \perp AC$, segitiga $AA'C$ dan $BB'C$ sama-sama siku-siku, masing-masing di A' dan B'. Sudut keduanya di C sama, sebab CA' segaris dengan CB dan CB' segaris dengan CA. Kriteria AA memberi

$$\triangle AA'C \sim \triangle BB'C.$$

Untuk menuliskan korespondensinya tanpa bergantung pada gambar, keempat titik A, B, A', B' terletak pada lingkaran berdiameter AB karena sudut di A' dan B' siku-siku. Sudut $\angle A'B'A$ dan $\angle A'BA$ menghadap tali busur $A'A$ dari sisi berlawanan, sehingga saling suplementer. Karena sinar $B'A$ dan $B'C$ berlawanan, diperoleh

$$\angle A'B'C = \angle A'BA = \angle ABC.$$

Selain itu, A', B terletak pada garis BC dan B', A pada garis CA, sehingga $\angle A'CB' = \angle BCA$. Kriteria AA sekarang memberi

$$\triangle A'B'C \sim \triangle ABC.$$

Secara siklik, B, C, B', C' terletak pada lingkaran berdiameter BC dan C, A, C', A' pada lingkaran berdiameter CA. Perhitungan sudut keliling dan sinar berlawanan yang sama memberi

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC, \qquad \triangle A'BC' \sim \triangle ABC.$$

Transitivitas kesebangunan memberi seluruh rantai yang diminta. Hipotesis lancip memastikan A', B', C' berada pada sisi, sehingga urutan sudut biasa tidak perlu diganti dengan sudut luar; bukti berarah tetap memberi identitas yang sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menganggap sisi-sisi segitiga ortik sejajar dengan sisi-sisi ABC. Kesebangunan berasal dari sudut siku-siku dan segiempat siklik, bukan dari kesejajaran ketiga pasangan sisi.

8.4 Segiempat titik tengah

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex004`. **Label sumber tetap:** `ex:midle`.

Soal sumber. Misalkan $ABCD$ segiempat tak degenerat dan X, Y, V, W berturut-turut titik tengah $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Tunjukkan bahwa $XYVW$ jajar genjang.

Petunjuk penulis. Gunakan gagasan dari bukti `thm:centroid` untuk menunjukkan bahwa $(XY) \parallel (AC) \parallel (VW)$ dan $(XW) \parallel (BD) \parallel (YV)$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan teorema ruas titik tengah pada segitiga ABC dan ADC.
2. Lakukan hal yang sama pada segitiga BAD dan BCD.
3. Pasangkan sisi-sisi berhadapan dari $XYVW$.

Jawaban atau pemeriksaan. XY dan VW sama-sama sejajar AC, sedangkan XW dan YV sama-sama sejajar BD; maka kedua pasangan sisi berhadapan sejajar.

Solusi lengkap. Pada $\triangle ABC$, ruas yang menghubungkan titik tengah AB dan BC sejajar dengan sisi ketiga, sehingga $XY \parallel AC$. Pada $\triangle ADC$, titik W dan V adalah titik tengah AD dan CD, sehingga $WV \parallel AC$. Jadi $XY \parallel WV$.

Pada $\triangle BAD$, titik X, W adalah titik tengah BA, DA, sehingga $XW \parallel BD$. Pada $\triangle BCD$, titik Y, V adalah titik tengah BC, DC, sehingga $YV \parallel BD$. Jadi $XW \parallel YV$. Kedua pasangan sisi berhadapan segiempat $XYVW$ sejajar; menurut karakterisasi `lem:parallelogram` , segiempat itu merupakan jajar genjang.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Label historis `midle` tidak diperbaiki karena merupakan ID lintas rujukan. Selain itu, urutan titik segiempat harus tetap $X - Y - V - W$; urutan $X - Y - W - V$ menyilangkan pasangan sisi yang dibuktikan sejajar.

8.5 Garis Euler melalui homoteti

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex005`. **Label sumber:** `ex:euler-line`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa ortosenter H, titik berat M, dan pusat lingkaran luar O dari setiap segitiga tak degenerat ABC terletak pada satu garis. Selain itu, titik berat membagi ruas $[HO]$ dalam perbandingan $2:1$.

Petunjuk penulis. Pelajari homoteti. Dengan menerapkan `thm:centroid` , tunjukkan bahwa homoteti berpusat di M dengan faktor $-\frac{1}{2}$ memetakan $\triangle ABC$ ke segitiga medialnya $\triangle A'B'C'$. Tunjukkan bahwa homoteti tersebut juga memetakan ortosenter ABC ke ortosenter $A'B'C'$. Dengan argumen seperti dalam `thm:orthocenter` , tunjukkan bahwa ortosenter segitiga medial berimpit dengan pusat lingkaran luar ABC. Tarik kesimpulan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan definisi homoteti $h(X) = M - \frac{1}{2}(X - M)$; dependensi ini memang tidak dikembangkan di Bab 8 dan dipertahankan sebagai prasyarat belajar.
2. Tunjukkan $h(A), h(B), h(C)$ adalah titik tengah sisi-sisi di hadapannya.
3. Identifikasi garis tinggi segitiga medial sebagai garis sumbu ABC.
4. Ubah persamaan $h(H) = O$ menjadi hubungan vektor antara H, M, O.

Jawaban atau pemeriksaan. Homoteti tersebut memetakan H ke O, sehingga $O = M - \frac{1}{2}(H - M)$. Jadi $\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{MO}$: H, M, O kolinear dan $HM : MO = 2:1$ pada kasus tak degenerat $H \neq O$.

Solusi lengkap. Misalkan A', B', C' berturut-turut titik tengah BC, CA, AB. Teorema `thm:centroid` menyatakan bahwa M membagi setiap garis berat dengan rasio $2:1$. Karena M berada di antara A dan A', berlaku

$$\overrightarrow{MA'} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA},$$

dan secara siklik untuk B', C'. Maka homoteti h berpusat M dan faktor $-\frac{1}{2}$ memetakan ABC ke $A'B'C'$.

Homoteti memetakan garis ke garis sejajar dan mempertahankan ketegaklurusan. Karena itu citra ketiga garis tinggi ABC adalah ketiga garis tinggi $A'B'C'$, sehingga $h(H)$ adalah ortosenter segitiga medial. Namun $B'C' \parallel BC$ dan A' titik tengah BC; maka garis tinggi dari A' pada segitiga medial adalah garis melalui titik tengah BC yang tegak lurus BC, yaitu garis sumbu $[BC]$. Secara siklik, ketiga garis tinggi segitiga medial adalah ketiga garis sumbu ABC. Titik pertemuannya adalah O, sehingga $h(H) = O$.

Dari definisi homoteti,

$$O - M = -\tfrac{1}{2}(H - M), \qquad \text{atau} \qquad \overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{MO}.$$

Ini membuktikan kolinearitas dan rasio $2:1$. Jika $H = O$ (kasus segitiga sama sisi), persamaan vektor memaksa $M = H = O$; kolinearitas tetap benar, sedangkan ungkapan rasio ruas biasa degenerat dan harus dibaca melalui identitas vektor di atas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Faktor homoteti bertanda negatif: citra suatu titik sudut berada di sisi lain dari M. Menghilangkan tanda minus membalik urutan H, M, O dan menghasilkan rasio yang salah.

8.6 Garis bagi dalam dan luar saling tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex006`. **Label sumber:** `ex:perp-bisectors`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa untuk setiap sudut, garis bagi dan garis bagi luarnya saling tegak lurus.

Petunjuk penulis. Misalkan (BX) dan (BY) masing-masing garis bagi dalam dan garis bagi luar $\angle ABC$. Maka

$$\begin{aligned} 2\measuredangle XBY &\equiv 2\measuredangle XBA + 2\measuredangle ABY \\ &\equiv \measuredangle CBA + \pi + \measuredangle ABC \\ &\equiv \pi + \measuredangle CBC = \pi, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh hasil yang diminta.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan sudut dari garis bagi dalam ke garis bagi luar sebagai jumlah dua sudut melalui sinar BA.
2. Gandakan dan gunakan kedua definisi pembagian sudut.
3. Terjemahkan kongruensi $2\theta \equiv \pi$ menjadi ketegaklurusan garis.

Jawaban atau pemeriksaan. Sudut berarah dari (BX) ke (BY) kongruen dengan $\pi/2$ modulo π; itulah syarat bahwa kedua garis saling tegak lurus.

Solusi lengkap. Dengan notasi petunjuk dan penjumlahan sudut berarah,

$$2\measuredangle XBY \equiv 2\measuredangle XBA + 2\measuredangle ABY.$$

Karena BX garis bagi dalam, $2\measuredangle XBA \equiv \measuredangle CBA$. Karena BY garis bagi luar, $2\measuredangle ABY \equiv \pi + \measuredangle ABC$. Jadi

$$2\measuredangle XBY \equiv \measuredangle CBA + \pi + \measuredangle ABC \equiv \pi.$$

Dengan demikian $\measuredangle XBY \equiv \pi/2$ modulo π. Sudut antara dua garis tidak membedakan pembalikan kedua sinarnya, sehingga kongruensi modulo π ini tepat menyatakan $(BX) \perp (BY)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan membagi kongruensi modulo 2π secara naif dan membuang solusi yang berbeda sebesar π. Kedua kemungkinan setelah pembagian menggambarkan garis tegak lurus yang sama.

8.7 Garis bagi yang juga garis tinggi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex007`. **Label sumber:** `ex:bisect=altitude`.

Soal sumber. Andaikan pada salah satu titik sudut suatu segitiga tak degenerat, garis baginya berimpit dengan garis tingginya. Tunjukkan bahwa segitiga itu sama kaki.

Petunjuk penulis. Terapkan kriteria ASA pada kedua segitiga hasil pembagian segitiga semula oleh garis bagi tersebut.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Namai titik potong garis dari titik sudut A dengan sisi BC sebagai D.
2. Bandingkan sudut di A dan dua sudut siku-siku di D.
3. Gunakan sisi AD yang sama untuk memilih kriteria kongruensi.

Jawaban atau pemeriksaan. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, sehingga $AB = AC$.

Solusi lengkap. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan garis bagi dan garis tinggi dari A berimpit dan memotong BC di D. Karena garis itu garis bagi, $\angle BAD = \angle DAC$. Karena garis itu juga garis tinggi, $\angle ADB$ dan $\angle CDA$ sama-sama siku-siku. Sisi AD merupakan sisi yang sama pada kedua segitiga. Maka kriteria ASA memberi

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

Sisi-sisi yang bersesuaian menghasilkan $AB = AC$, jadi ABC sama kaki dengan puncak A.

Di sini *garis tinggi* berarti garis melalui A yang tegak lurus garis BC; *tinggi* sebagai bilangan adalah panjang AD. Perbedaan dua arti istilah sumber ini tidak mengubah argumen.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan dua sudut saja hanya memberi kesebangunan. Sisi bersama AD harus dipakai untuk memperoleh kongruensi dan kesamaan panjang $AB = AC$.

8.8 Teorema garis bagi luar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex008`. **Label sumber tetap:** `ex:ext-disect`.

Soal sumber. Rumuskan dan buktikan analog Lema `lem:bisect-ratio` untuk garis bagi luar.

Petunjuk penulis. Jika E titik potong (BC) dengan garis bagi luar $\angle BAC$, maka

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

Hal ini dapat dibuktikan dengan cara yang sama seperti `lem:bisect-ratio` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan syarat keberadaan titik potong hingga: $AB \neq AC$.
2. Bandingkan luas mutlak $\triangle ABE$ dan $\triangle ACE$ dua cara.
3. Gunakan sifat berjarak sama dari garis bagi luar dan fakta bahwa E berada di luar ruas BC.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika garis bagi luar di A memotong (BC) di E, maka $E \notin [BC]$ dan $AB/AC = EB/EC$. Untuk $AB = AC$, garis bagi luar sejajar BC, jadi tidak ada titik potong hingga.

Solusi lengkap. Rumus yang lengkap adalah sebagai berikut. Jika $AB \neq AC$, garis bagi luar $\angle BAC$ memotong garis (BC) pada satu titik E di luar ruas $[BC]$, dan

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

Sebaliknya, titik luar pada (BC) dengan rasio itu terletak pada garis bagi luar. Jika $AB = AC$, garis bagi luar sejajar (BC) dan analog rasio harus dibaca sebagai kasus titik di tak hingga, bukan sebagai pembagian oleh nol.

Untuk bukti arah yang diminta, bandingkan luas mutlak kedua segitiga yang beralas pada garis yang sama. Dengan alas EB dan EC pada (BC) dan tinggi yang sama dari A,

$$\frac{[ABE]}{[ACE]} = \frac{EB}{EC}.$$

Di sisi lain, gunakan AB dan AC sebagai alas. Karena E berada pada garis bagi luar, Proposisi `prop:angle-bisect-dist` menyatakan bahwa jarak E ke garis AB dan AC sama. Maka

$$\frac{[ABE]}{[ACE]} = \frac{AB}{AC}.$$

Kedua identitas memberi rumus. Argumen yang sama beserta arah "jika dan hanya jika" pada proposisi berjarak sama membuktikan konversnya.

Jika $AB = AC$, garis bagi dalam juga garis tinggi menurut solusi 8.7; berdasarkan solusi 8.6, garis bagi luar tegak lurus garis bagi dalam dan karenanya sejajar BC. Sebaliknya, kesejajaran garis bagi luar dengan BC membuat sudut alas sama dan memberi $AB = AC$. Ini menutup kasus keberadaan. Label `ext-disect` dipertahankan sebagai ID sumber dan tidak dibetulkan diam-diam.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Rasio memakai panjang positif EB, EC, bukan ruas berarah tanpa konvensi. Selain itu, rumus tidak mengizinkan kita mengandaikan sebuah titik E hingga pada kasus sama kaki.

8.9 Garis bagi yang juga garis berat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex009`. **Label sumber:** `ex:bisect=median`.

Soal sumber. Andaikan garis bagi sudut suatu segitiga tak degenerat membagi sisi di hadapannya menjadi dua sama panjang. Tunjukkan bahwa segitiga itu sama kaki.

Petunjuk penulis. Terapkan `lem:bisect-ratio` . Lihat juga penyelesaian `ex:abs-bisect=median` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Namai titik pembagi sisi sebagai D.
2. Masukkan $DB = DC$ ke teorema rasio garis bagi.
3. Tafsirkan rasio sisi yang bernilai satu.

Jawaban atau pemeriksaan. $AB/AC = DB/DC = 1$, sehingga $AB = AC$.

Solusi lengkap. Misalkan garis bagi di A memotong $[BC]$ di D. Hipotesis bahwa garis itu membagi sisi di hadapannya sama panjang berarti $DB = DC$. Lema `lem:bisect-ratio` memberi

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = 1.$$

Karena panjang sisi positif, diperoleh $AB = AC$, jadi ABC sama kaki.

Rujukan petunjuk ke `ex:abs-bisect=median` berada di luar Bab 8 tetapi tetap berada dalam penutupan sumber lengkap, pada `absolute.tex`. Rujukan itu dipertahankan sebagai bacaan pembanding; bukti di atas mandiri dan tidak menganggap unit yang lebih akhir sudah dibaca.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pernyataan ini tidak mengatakan setiap garis berat adalah garis bagi. Kesimpulan sama kaki memerlukan kedua sifat pada garis yang sama.

8.10 Konfigurasi garis bagi dan dua garis sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex010`. **Label sumber:** `ex:bisector-parallel`.

Soal sumber. Pada segitiga tak degenerat ABC, garis bagi di A memotong $[BC]$ di D; garis melalui D sejajar (CA) memotong (AB) di E; garis melalui E sejajar (BC) memotong (AC) di F. Tunjukkan bahwa $AE = FC$.

Petunjuk penulis. Terapkan `thm:isos` , `thm:parallel-2` , dan `lem:parallelogram` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan $DE \parallel AC$ untuk membandingkan dua sudut segitiga AED.
2. Buktikan $AE = DE$ dengan teorema segitiga sama kaki.
3. Temukan jajar genjang $DEFC$ dan pindahkan panjang DE ke FC.

Jawaban atau pemeriksaan. $\angle EAD = \angle ADE$, sehingga $AE = DE$; segiempat $DEFC$ jajar genjang, sehingga $DE = FC$. Jadi $AE = FC$.

Solusi lengkap. Karena $E \in (AB)$, sudut EAD sama dengan sudut BAD. Karena $DE \parallel AC$, sifat transversal `thm:parallel-2` memberi $\angle ADE = \angle DAC$. Garis AD membagi dua $\angle BAC$, sehingga $\angle BAD = \angle DAC$. Jadi $\angle EAD = \angle ADE$, dan Teorema `thm:isos` memberi

$$AE = DE.$$

Selanjutnya D, C terletak pada (BC) dan $EF \parallel BC$, sehingga $DC \parallel EF$. Karena E, D terletak pada garis yang sejajar CA, serta $F, C \in (CA)$, berlaku $DE \parallel FC$. Kedua pasangan sisi berhadapan pada $DEFC$ sejajar; Lema `lem:parallelogram` membuatnya jajar genjang. Maka $DE = FC$. Menggabungkan kedua kesamaan menghasilkan $AE = FC$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan langsung menyebut $DEFC$ jajar genjang sebelum membuktikan *kedua* pasangan sisi sejajar. Kesamaan $AE = DE$ berasal dari segitiga AED, bukan dari jajar genjang.

8.11 Panjang ruas singgung lingkaran dalam

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex011`. **Label sumber:** `ex:2x=b+c-a`.

Soal sumber. Andaikan sisi $[BC], [CA], [AB]$ dari $\triangle ABC$ menyinggung lingkaran dalam berturut-turut di X, Y, Z. Tunjukkan bahwa

$$AY = AZ = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Petunjuk penulis. Misalkan I pusat lingkaran dalam. Dengan kriteria SAS, $\triangle AIZ \cong \triangle AIY$, sehingga $AY = AZ$. Dengan cara yang sama, $BX = BZ$ dan $CX = CY$. Dengan demikian, hasil yang diminta terbukti.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan jari-jari ke titik singgung untuk memperoleh sudut siku-siku.
2. Buktikan dua ruas singgung dari setiap titik sudut sama panjang.
3. Tulis ketiga panjang sisi sebagai jumlah tiga variabel ruas singgung.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $AY = AZ = u$, $BX = BZ = v$, dan $CX = CY = w$, maka $AB = u + v$, $AC = u + w$, $BC = v + w$, sehingga $2u = AB + AC - BC$.

Solusi lengkap. Jari-jari IY dan IZ tegak lurus sisi-sisi singgung AC dan AB. Segitiga siku-siku AIY dan AIZ memiliki sisi miring bersama AI dan kaki $IY = IZ$, keduanya jari-jari lingkaran dalam. Kriteria kongruensi sisi–sudut–sisi pada sudut siku-siku (atau hipotenusa–kaki) memberi $\triangle AIY \cong \triangle AIZ$, sehingga $AY = AZ$. Secara sama, $BX = BZ$ dan $CX = CY$.

Tetapkan

$$u = AY = AZ, \qquad v = BX = BZ, \qquad w = CX = CY.$$

Karena titik singgung berada pada sisi-sisi segitiga,

$$AB = u + v, \qquad AC = u + w, \qquad BC = v + w.$$

Maka

$$AB + AC - BC = (u + v) + (u + w) - (v + w) = 2u.$$

Jadi $AY = AZ = u = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan ruas singgung harus dibuktikan untuk pasangan yang berawal dari titik sudut yang sama. Misalnya $AY = AZ$, bukan $AY = CY$.

8.12 Ortosenter sebagai pusat lingkaran dalam atau eksenter

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex012`. **Label sumber:** `ex:orthic-triangle`.

Soal sumber. Buktikan bahwa ortosenter suatu segitiga lancip berimpit dengan pusat lingkaran dalam segitiga ortiknya. Apa analog pernyataan ini untuk segitiga tumpul?

Petunjuk penulis. Gunakan argumen seperti dalam ex:orthic-sim untuk menunjukkan bahwa $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC \sim \triangle AB'C'$. Simpulkan bahwa (BB') membagi dua $\angle A'B'C'$. Jika ABC tumpul, ortosenternya berimpit dengan salah satu *eksenter* $A'B'C'$; yaitu titik potong dua garis bagi luar dan satu garis bagi dalam segitiga ortik.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan hasil kesebangunan solusi 8.3 untuk membandingkan sudut-sudut di setiap kaki garis tinggi.
2. Untuk segitiga lancip, tentukan sisi dalam dari setiap sudut ortik.
3. Untuk segitiga tumpul, tentukan garis bagi mana yang menjadi garis bagi luar dan identifikasi eksenternya.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk segitiga lancip, AA', BB', CC' adalah ketiga garis bagi dalam segitiga $A'B'C'$, sehingga titik potongnya H adalah pusat lingkaran dalam. Jika A sudut tumpul, AA' menjadi garis bagi dalam di A', sedangkan BB' dan CC' menjadi garis bagi luar; H adalah eksenter di hadapan A'.

Solusi lengkap. Misalkan dahulu ABC lancip. Solusi 8.3 memberi kesebangunan-kesebangunan yang mencocokkan sudut-sudut ABC dengan sudut-sudut pada segitiga ortik. Khususnya,

$$\triangle A'B'C \sim \triangle ABC \sim \triangle AB'C'.$$

Kesamaan sudut yang bersesuaian menyatakan bahwa sudut antara $B'A'$ dan $B'C$ sama dengan sudut antara $B'A$ dan $B'C'$. Karena A, B', C segaris dan $BB' \perp AC$, mengambil komplemen terhadap sudut siku-siku memberi

$$\angle A'B'B = \angle BB'C'.$$

Jadi (BB') membagi dua $\angle A'B'C'$. Secara siklik, (AA') dan (CC') membagi dua sudut di A' dan C'. Karena ABC lancip, ketiga kaki berada pada sisi dan H berada di dalam segitiga ortik; ketiganya adalah garis bagi *dalam*. Titik pertemuannya H karena $H \in AA' \cap BB' \cap CC'$. Teorema thm:incenter memberi bahwa H adalah pusat lingkaran dalam $A'B'C'$.

Sekarang andaikan, misalnya, $\angle A$ tumpul. Perhitungan sudut berarah yang sama tetap membuktikan bahwa garis-garis tinggi adalah salah satu dari dua garis bagi di setiap titik sudut segitiga ortik. Letak kaki berubah: A' berada pada $[BC]$, sedangkan B' dan C' berada pada perpanjangan CA dan AB. Akibatnya (AA') adalah garis bagi dalam sudut di A', sementara (BB') dan (CC') adalah garis bagi luar di B' dan C'. Jadi H adalah titik potong satu garis bagi dalam dan dua garis bagi luar, yaitu eksenter segitiga ortik yang berhadapan dengan A'. Pernyataan untuk sudut tumpul di B atau C diperoleh secara siklik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Istilah *eksenter* hanya muncul dalam petunjuk sumber, jadi definisi perpotongan satu garis bagi dalam dan dua garis bagi luar harus disertakan. Jangan menyebut H pusat lingkaran dalam pada kasus tumpul.

8.13 Rasio pada garis bagi dan bukti lain pusat lingkaran dalam

ID stabil: `o004-c100-sol-ch08-ex013`. **Label sumber:** `ex:bisector-incenter`.

Soal sumber. Misalkan I titik perpotongan garis-garis bagi di A dan B pada segitiga tak degenerat ABC. Misalkan D titik potong garis bagi di A dengan $[BC]$. Tunjukkan bahwa $AI/DI = (b+c)/a$, dengan $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gunakan hasil ini untuk menyusun bukti lain bagi `thm:incenter`.

Petunjuk penulis. Terapkan `lem:bisect-ratio` dua kali. Gunakan identitas yang diperoleh untuk menunjukkan bahwa garis bagi sudut di C melalui I.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan teorema garis bagi pada $\triangle ABC$ untuk menghitung BD.
2. Terapkan lagi pada $\triangle ABD$, tempat BI membagi sudut di B.
3. Pada $\triangle ACD$, bandingkan rasio yang sama dengan titik potong garis bagi di C dan gunakan ketunggalan pembagian ruas.

Jawaban atau pemeriksaan. $BD = ac/(b+c)$, sehingga $AI/DI = AB/BD = c/(ac/(b+c)) = (b+c)/a$. Pada $\triangle ACD$, rasio ini sama dengan AC/CD, jadi garis bagi di C harus melalui I.

Solusi lengkap. Karena AD membagi dua $\angle BAC$, Lema `lem:bisect-ratio` pada $\triangle ABC$ memberi

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Bersama $BD + DC = a$, diperoleh

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \qquad DC = \frac{ab}{b+c}.$$

Karena D terletak pada BC, garis BI yang membagi dua $\angle ABC$ juga membagi dua $\angle ABD$. Terapkan lemma yang sama pada $\triangle ABD$, dengan $I \in [AD]$:

$$\frac{AI}{DI} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{ac/(b+c)} = \frac{b+c}{a}.$$

Untuk bukti alternatif Teorema `thm:incenter`, biarkan garis bagi di C memotong $[AD]$ di J. Pada $\triangle ACD$, Lema `lem:bisect-ratio` memberi

$$\frac{AJ}{JD} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{ab/(b+c)} = \frac{b+c}{a} = \frac{AI}{ID}.$$

Pada sebuah ruas AD, terdapat tepat satu titik yang membaginya dalam rasio positif yang diberikan: dari $AX/XD = r$ diperoleh $AX = r\,AD/(1+r)$. Karena $I, J \in [AD]$ dan rasionya sama, $I = J$. Jadi garis bagi di C melalui I. Ketiga garis bagi berpotongan di I; dengan sifat berjarak sama `prop:angle-bisect-dist`, I berjarak sama dari ketiga sisi dan menjadi pusat lingkaran dalam. Ini membuktikan kembali `thm:incenter`.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada penerapan kedua, segitiganya adalah ABD, bukan ABC, dan ruas yang terbagi adalah AD. Pada langkah terakhir, kesamaan rasio memerlukan ketunggalan titik pembagi di dalam ruas; kesamaan angka saja tanpa lokasi $I, J \in [AD]$ belum cukup.

Uji penguasaan Bab 8

1. **(2 poin).** Buktikan keberadaan dan ketunggalan lingkaran melalui tiga titik sudut segitiga tak degenerat.
2. **(2 poin).** Buktikan sifat sistem ortosentrik dan seluruh rantai kesebangunan segitiga ortik pada kasus lancip.
3. **(2 poin).** Buktikan teorema segiempat titik tengah dengan urutan titik yang benar.
4. **(2 poin).** Dengan homoteti faktor $-1/2$, turunkan hubungan vektor garis Euler dan jelaskan kasus sama sisi.
5. **(2 poin).** Buktikan garis bagi dalam dan luar saling tegak lurus, lalu gunakan ASA untuk kasus garis bagi yang juga garis tinggi.
6. **(2 poin).** Rumuskan teorema garis bagi luar beserta kasus sama kaki dan buktikan teorema garis bagi–garis berat.
7. **(2 poin).** Selesaikan konfigurasi garis bagi dengan dua garis sejajar dan buktikan kesamaan panjang akhirnya.
8. **(2 poin).** Turunkan rumus panjang ruas singgung lingkaran dalam dari tiga pasangan ruas singgung yang sama.
9. **(2 poin).** Buktikan ortosenter menjadi pusat lingkaran dalam segitiga ortik pada kasus lancip dan eksenter pada kasus tumpul.
10. **(2 poin).** Turunkan $AI/DI = (b + c)/a$ dan gunakan ketunggalan pembagi ruas untuk membuktikan konkurensi ketiga garis bagi.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 8.1.

M2. 8.2 dan 8.3.

M3. 8.4.

M4. 8.5.

M5. 8.6 dan 8.7.

M6. 8.8 dan 8.9.

M7. 8.10.

M8. 8.11.

M9. 8.12.

M10. 8.13.

M1 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi pusat melalui dua garis sumbu dan satu poin untuk bukti bahwa pusat lingkaran lain harus berada pada kedua garis itu.

M2 (2 poin). Satu poin untuk membaca tiga garis tinggi HBC melalui A; satu poin untuk argumen AA/segiempat siklik yang menutup keempat kesebangunan ortik.

M3 (2 poin). Satu poin untuk $XY \parallel AC \parallel WV$; satu poin untuk $XW \parallel BD \parallel YV$ dan kesimpulan jajar genjang.

M4 (2 poin). Satu poin untuk pemetaan segitiga ke segitiga medial serta identifikasi ortosenternya dengan O; satu poin untuk $\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{MO}$ dan penanganan $H = O$.

M5 (2 poin). Satu poin untuk kongruensi sudut ganda yang memberi ketegaklurusan; satu poin untuk ASA dan kesimpulan sisi sama pada garis bagi–garis tinggi.

M6 (2 poin). Satu poin untuk rumus garis bagi luar, letak E, dan kasus $AB = AC$; satu poin untuk $AB/AC = DB/DC = 1$ serta pelestarian rujukan eksternal.

M7 (2 poin). Satu poin untuk $AE = DE$ dari segitiga sama kaki; satu poin untuk jajar genjang $DEFC$ dan rantai $AE = DE = FC$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk tiga pasangan ruas singgung yang sama; satu poin untuk sistem $AB = u + v$, $AC = u + w$, $BC = v + w$ dan eliminasi yang benar.

M9 (2 poin). Satu poin untuk tiga garis bagi dalam pada kasus lancip; satu poin untuk identifikasi satu garis bagi dalam dan dua garis bagi luar pada kasus tumpul.

M10 (2 poin). Satu poin untuk kedua penerapan teorema garis bagi dan rumus rasio; satu poin untuk rasio pada ACD, ketunggalan titik pembagi, dan konkurensi di I.

Bab 9

Solusi dan penguasaan Bab 9: Sudut keliling

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Dua puluh satu blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter09.json`. Satu latihan menonton video memang tidak berlabel dan tidak mempunyai petunjuk penulis; topologi itu tidak diubah. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Bab ini memuat 22 blok latihan: 18 latihan biasa berlabel, dua latihan lanjutan, satu latihan bertanda `[!]`, dan satu latihan biasa tanpa label yang meminta pembaca menonton video eksternal lalu menyusun pertanyaan. Label historis `ex:tnagents+midpoint` dan kapitalisasi `ex:VVAA` dipertahankan. Latihan `ex:inscribed-angle` tetap mempunyai tiga subbagian dengan hanya sublabel `ex:inscribed-angle:b` dan `ex:inscribed-angle:power`. Petunjuk `ex:inaccuracy` mengungkap dua perbaikan pada penyelesaian contoh di sumber; perbaikannya dijelaskan, bukan disisipkan diam-diam ke sumber. Ketergantungan pada video YouTube, Aksioma kontinuitas sudut `def:birkhoff-axioms:2c`, dan gambar petunjuk `pic-336`, `pic-337`, `pic-338`, serta `pic-340` dicatat secara eksplisit. Komponen solusi tidak menyalin video atau aset gambar tersebut.

9.1 Sudut dua garis sekan dan kuasa titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex001`. **Label sumber:** `ex:inscribed-angle`. **Sublabel tetap:** `ex:inscribed-angle:b` dan `ex:inscribed-angle:power`.

Soal sumber. Misalkan X, X', Y, Y' merupakan titik-titik berbeda pada lingkaran Γ, dan garis (XX') serta (YY') berpotongan di P. Buktikan: (a) $2\measuredangle XPY \equiv \measuredangle XOY + \measuredangle X'OY'$; (b) $\triangle PXY \sim \triangle PY'X'$; dan (c) $PX \cdot PX' = |OP^2 - r^2|$.

Petunjuk penulis. Untuk (a), terapkan `thm:inscribed-angle` pada $\angle XX'Y$ dan $\angle X'YY'$ serta `thm:3sum` pada $\triangle PYX'$. Untuk (b), bedakan kasus P di dalam dan di luar Γ; dalam kedua kasus

$\measuredangle XPY = \measuredangle X'PY'$. Terapkan thm:inscribed-angle , ex:ABCO-line , thm:signs-of-triug , lalu AA. Untuk (c), terapkan (b) dengan $[YY']$ sebuah diameter Γ.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ubah sudut di P menjadi jumlah dua sudut segitiga yang titik lainnya berada pada lingkaran; penggandaan meniadakan pilihan sinar berlawanan.
2. Untuk kesebangunan, cocokkan sudut di P, lalu satu pasangan sudut keliling yang menghadap tali busur yang sama.
3. Pilih diameter melalui O dan P, lalu ubah hasil kesebangunan menjadi hasil kali dua jarak berarah pada garis diameter.

Jawaban atau pemeriksaan. Korespondensi pada (b) adalah $P \leftrightarrow P$, $X \leftrightarrow Y'$, $Y \leftrightarrow X'$. Karena itu $PX/PY' = PY/PX'$, sehingga $PX\,PX' = PY\,PY'$. Pada diameter melalui P, hasil kali terakhir bernilai $|OP^2 - r^2|$.

Solusi lengkap. Semua kongruensi sudut berikut dibaca modulo 2π. Karena P, X, X' dan P, Y, Y' masing-masing segaris, Teorema sudut keliling pada sudut-sudut di X' dan Y, diikuti Teorema jumlah sudut pada $\triangle PYX'$, memberi

$$2\measuredangle XPY \equiv \measuredangle XOY + \measuredangle X'OY'.$$

Langkah ini tetap sah untuk P di luar lingkaran: mengganti sebuah sinar dengan sinar lawannya menambah π, yang hilang setelah sudut digandakan. Sebagai pemeriksaan aljabar, jika argumen polar X, X', Y, Y' berturut-turut x, x', y, y', arah tali busur AB modulo π ialah $(a+b)/2+\pi/2$. Maka dua kali sudut kedua garis sekan ialah $y + y' - x - x' = (y - x) + (y' - x')$, tepat ruas kanan di atas.

Untuk (b), bila P di dalam lingkaran, sudut XPY dan $X'PY'$ bertolak belakang; bila P di luar, pasangan sinarnya masing-masing berimpit setelah orientasi dipilih. Jadi sudut di P sama. Selanjutnya, thm:inscribed-angle menunjukkan bahwa sudut PYX sama dengan sudut $PX'Y'$ setelah tanda dipilih melalui thm:signs-of-triug . Kriteria AA memberi

$$\triangle PXY \sim \triangle PY'X'.$$

Untuk (c), ambil garis (OP) dan namai dua titik potongnya dengan lingkaran Y, Y'. Dari kesebangunan,

$$\frac{PX}{PY'} = \frac{PY}{PX'}, \qquad PX \cdot PX' = PY \cdot PY'.$$

Jika $d = OP$, dua jarak dari P ke ujung diameter adalah $|r - d|$ dan $r + d$ (dengan urutan bergantung apakah P di dalam atau di luar). Jadi

$$PY \cdot PY' = |(r - d)(r + d)| = |r^2 - d^2| = |OP^2 - r^2|.$$

Ini juga mencakup P pada lingkaran, ketika kedua ruas nol.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesebangunan memakai urutan $PXY \sim PY'X'$, bukan urutan nama yang tampak paling simetris. Nilai mutlak pada (c) diperlukan karena kuasa bertanda $OP^2 - r^2$ negatif untuk titik di dalam lingkaran, sedangkan panjang dan hasil kalinya taknegatif.

9.2 Identitas enam titik pada tiga tali busur konkuren

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex002`. **Label sumber:** `ex:inscribed-hex`.

Soal sumber. Tiga tali busur $[XX']$, $[YY']$, dan $[ZZ']$ dari lingkaran Γ berpotongan di P. Tunjukkan $XY' \cdot ZX' \cdot YZ' = X'Y \cdot Z'X \cdot Y'Z$.

Petunjuk penulis. Terapkan `ex:inscribed-angle` *ex: inscribed-angle: b* tiga kali.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk pasangan tali busur XX' dan YY', bandingkan $\triangle PXY'$ dengan $\triangle PYX'$.
2. Tulis analog rasio tersebut untuk pasangan ZZ', XX' dan YY', ZZ'.
3. Kalikan ketiga rasio; semua jarak dari P harus saling menghapus.

Jawaban atau pemeriksaan. Tiga kesebangunan memberi

$$\frac{XY'}{X'Y} = \frac{PX}{PY}, \quad \frac{ZX'}{Z'X} = \frac{PZ}{PX}, \quad \frac{YZ'}{Y'Z} = \frac{PY}{PZ}.$$

Hasil kali ruas kanan adalah 1.

Solusi lengkap. Terapkan bagian (b) latihan sebelumnya pada empat titik X, X', Y, Y' dengan pilihan urutan yang menyilangkan pasangan primanya. Sudut di P sama karena dibentuk oleh dua garis yang sama, dan pasangan sudut lainnya merupakan sudut keliling yang menghadap tali busur yang sama. Karena itu

$$\triangle PXY' \sim \triangle PYX', \qquad \frac{XY'}{X'Y} = \frac{PX}{PY}.$$

Argumen yang sama untuk pasangan ZZ' dengan XX', lalu YY' dengan ZZ', menghasilkan dua rasio lain pada bagian pemeriksaan. Semua penyebut taknol karena titik-titik ujung tali busur berbeda dari titik potong interior P. Mengalikan ketiganya memberi

$$\frac{XY'\,ZX'\,YZ'}{X'Y\,Z'X\,Y'Z} = \frac{PX}{PY}\frac{PZ}{PX}\frac{PY}{PZ} = 1,$$

dan perkalian silang memberi identitas yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memakai teorema kuasa titik saja: teorema itu menyamakan hasil kali dua bagian pada tali busur yang sama, tetapi identitas ini memerlukan tiga rasio jarak silang. Urutan korespondensi pada setiap kesebangunan menentukan apakah suatu rasio muncul atau kebalikannya.

9.3 Dua titik potong garis tinggi pada lingkaran luar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex003`. **Label sumber:** `ex:altitudes-circumcircle`.

Soal sumber. Pada segitiga lancip ABC, garis tinggi dari A dan B memotong kembali lingkaran luarnya di A' dan B'. Tunjukkan $\triangle A'B'C$ sama kaki.

Petunjuk penulis. Misalkan X, Y titik kaki garis tinggi dari A, B dan O pusat lingkaran luar. Berdasarkan AA, $\triangle AXC \sim \triangle BYC$. Gunakan teorema sudut pusat untuk memperoleh $\measuredangle A'OC \equiv -\measuredangle B'OC$, lalu terapkan SAS pada $\triangle A'OC$ dan $\triangle B'OC$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan sudut antara AA' dan AC, serta antara BB' dan BC, menggunakan sudut C.
2. Terjemahkan kedua sudut keliling itu menjadi sudut pusat yang menghadap tali busur $A'C$ dan $B'C$.
3. Gunakan jari-jari yang sama untuk mendapatkan kongruensi.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua tali busur $A'C$ dan $B'C$ menghadap sudut pusat yang sama besar; jadi $A'C = B'C$ dan puncak segitiga sama kaki itu adalah C.

Solusi lengkap. Karena $AA' \perp BC$, sudut antara AA' dan AC mempunyai besar $\pi/2 - \angle C$. Karena $BB' \perp AC$, sudut antara BB' dan BC juga mempunyai besar $\pi/2 - \angle C$. Kedua sudut tersebut adalah sudut keliling: $\angle A'AC$ menghadap tali busur $A'C$, sedangkan $\angle B'BC$ menghadap tali busur $B'C$.

Teorema sudut keliling, dengan orientasi yang sesuai, memberi

$$|\measuredangle A'OC| = |\measuredangle B'OC|.$$

Sekarang $OA' = OB' = OC = r$. Maka dua segitiga $A'OC$ dan $B'OC$ memiliki dua sisi jari-jari yang sama dan sudut apit sama besar. Kriteria SAS memberi $\triangle A'OC \cong \triangle B'OC$, sehingga $A'C = B'C$. Dengan demikian $\triangle A'B'C$ sama kaki.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik A' dan B' adalah titik potong *kedua* garis tinggi dengan lingkaran, bukan titik kaki pada sisi. Kelancipan menjamin konfigurasi dan urutan sinar yang dipakai petunjuk; bukti sudut berarah tetap harus membedakan tanda sudut pusat.

9.4 Dua tali busur sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex004`. **Label sumber:** `ex:two-chords`.

Soal sumber. Jika $[XY]$ dan $[X'Y']$ merupakan dua tali busur sejajar pada suatu lingkaran, buktikan bahwa $XX' = YY'$.

Petunjuk penulis. Terapkan sifat transversal (`thm:parallel-2`) dan teorema sudut keliling (`thm:inscribed-angle`). Sebagai alternatif, gunakan `cor:reflection+angle` pada pencerminan terhadap garis melalui pusat lingkaran yang tegak lurus terhadap kedua tali busur.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tarik garis m melalui pusat O dan tegak lurus kedua tali busur.
2. Tunjukkan m membagi dua setiap tali busur.
3. Gunakan pencerminan terhadap m untuk membandingkan ruas silang.

Jawaban atau pemeriksaan. Pencerminan pada m menukar $X \leftrightarrow Y$ dan $X' \leftrightarrow Y'$, sehingga citra ruas XX' adalah YY'.

Solusi lengkap. Misalkan O pusat lingkaran dan m garis melalui O yang tegak lurus XY. Karena $XY \parallel X'Y'$, garis yang sama juga tegak lurus $X'Y'$. Garis dari pusat yang tegak lurus sebuah tali busur membagi tali busur itu menjadi dua sama panjang. Jadi m adalah garis sumbu bagi $[XY]$ dan $[X'Y']$.

Pencerminan s terhadap m mempertahankan lingkaran dan menukar kedua titik ujung setiap tali busur: setelah penamaan ujung dipilih, $s(X) = Y$ dan $s(X') = Y'$. Karena pencerminan adalah isometri,

$$XX' = s(X)s(X') = YY'.$$

Argumen tidak bergantung pada tali busur mana yang lebih dekat ke pusat.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesejajaran sendiri tidak menyatakan kedua tali busur sama panjang. Yang dipakai adalah satu sumbu pencerminan bersama; kesamaan yang dihasilkan adalah ruas silang XX' dan YY', bukan selalu $XY = X'Y'$.

9.5 Pertanyaan setelah video tentang π dan kuadrat jari-jari

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex005`. **Label sumber:** tanpa label. **Topologi sumber:** latihan biasa kelima Bab 9.

Soal sumber. Tonton video Grant Sanderson berjudul “Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem” pada tautan YouTube yang diberikan sumber, lalu susun satu pertanyaan.

Petunjuk penulis. Tidak ada blok petunjuk penulis untuk latihan tanpa label ini.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih satu klaim geometris dalam judul atau video yang dapat diuji, bukan pertanyaan tentang preferensi penyaji.
2. Nyatakan objek, besaran, dan hubungan yang ingin dijelaskan.
3. Pastikan pertanyaan dapat dijawab dengan argumen, gambar, atau perhitungan yang jelas.

Jawaban atau pemeriksaan. Satu jawaban yang sah adalah: “Mengapa penskalaan semua panjang sebuah lingkaran dengan faktor k membuat luasnya berubah dengan faktor k^2, dan bagaimana fakta ini menjelaskan kuadrat jari-jari dalam πr^2?”

Solusi lengkap. Latihan ini bersifat terbuka: hasil yang diminta adalah satu pertanyaan, bukan sebuah nilai numerik tunggal. Pertanyaan contoh di atas memenuhi tiga syarat pemeriksaan. Ia menyebut objeknya (lingkaran), operasinya (penskalaan panjang dengan faktor k), dan klaim yang perlu dijelaskan (luas berskala k^2 sehingga jari-jari muncul sebagai kuadrat). Jawabannya juga dapat diuji secara mandiri: suatu dilatasi faktor k mengubah setiap satuan luas menjadi persegi dengan

luas k^2 kali, sehingga setiap daerah, termasuk lingkaran, mempunyai luas k^2 kali. Konstanta bentuk yang tersisa untuk lingkaran satuan adalah π, jadi $A(r) = \pi r^2$.

Video adalah dependensi eksternal yang berubah dan tidak disalin di sini. Jika video tidak dapat diakses, pertanyaan contoh tetap merupakan jawaban terbatas yang dapat dinilai dari judul sumber; komponen ini tidak mengklaim merangkum isi video yang tidak dibekukan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan mengubah latihan terbuka menjadi klaim bahwa hanya ada satu pertanyaan benar. Penilaian didasarkan pada ketepatan matematis dan keterjawaban, bukan pada kesamaan kata dengan contoh di atas.

9.6 Garis singgung dari lingkaran berdiameter OP

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex006`. **Label sumber:** `ex:tangent-construction-inscribed`.

Soal sumber. Misalkan Γ lingkaran berpusat O dan Δ lingkaran berdiameter $[OP]$. Jika Δ dan Γ berpotongan di X, buktikan (PX) menyinggung Γ.

Petunjuk penulis. Terapkan `cor:right-angle-diameter` dan `lem:tangent` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Baca $\angle OXP$ sebagai sudut yang menghadap diameter OP.
2. Simpulkan hubungan tegak lurus antara OX dan PX.
3. Gunakan karakterisasi garis singgung melalui jari-jari di titik singgung.

Jawaban atau pemeriksaan. $\angle OXP$ siku-siku, jadi $PX \perp OX$; karena OX jari-jari Γ, garis PX menyinggung Γ di X.

Solusi lengkap. Titik X terletak pada Δ, yang diameternya OP. Akibat sudut siku- siku diameter `cor:right-angle-diameter` memberi

$$\angle OXP = \frac{\pi}{2},$$

sehingga $(PX) \perp (OX)$. Di sisi lain, $X \in \Gamma$ dan O pusat Γ, maka OX adalah jari-jari pada X. Menurut Lema `lem:tangent` , satu-satunya garis melalui X yang tegak lurus OX adalah garis singgung Γ di X. Garis itu adalah (PX).

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut siku-siku berasal dari lingkaran bantu Δ, sedangkan kesimpulan singgung berlaku pada Γ. Menukar kedua peran lingkaran akan membuat argumen menggunakan jari-jari yang salah.

9.7 Garis tegak lurus dari lingkaran berdiameter PQ

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex007`. **Label sumber:** `ex:perp-construction-inscribed`.

Soal sumber. Misalkan Γ lingkaran berdiameter $[PQ]$. Garis ℓ melalui Q dan memotong kembali Γ di X. Buktikan $\ell \perp (PX)$.

Petunjuk penulis. Terapkan `cor:right-angle-diameter` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Identifikasi segitiga yang salah satu sisinya adalah diameter PQ.
2. Tentukan titik sudut yang harus siku-siku.
3. Gunakan bahwa Q dan X keduanya terletak pada ℓ.

Jawaban atau pemeriksaan. $\angle PXQ$ siku-siku dan $(XQ) = \ell$, sehingga $PX \perp \ell$.

Solusi lengkap. Karena P, Q, X terletak pada lingkaran Γ dan PQ diameternya, Akibat sudut siku-siku–diameter menyatakan bahwa $\triangle PXQ$ siku-siku di X. Jadi $(PX) \perp (XQ)$. Hipotesis $Q, X \in \ell$ dan $Q \neq X$ memberi $(XQ) = \ell$. Dengan demikian $(PX) \perp \ell$, seperti diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut siku-siku berada di titik ketiga X, bukan di salah satu ujung diameter. Fakta bahwa ℓ hanya "melalui Q" belum cukup; titik potong kedua X diperlukan untuk mengidentifikasi $\ell = (QX)$.

9.8 Dua lingkaran berdiameter bersama pada A

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex008`. **Label sumber:** `ex:altitude+circles`.

Soal sumber. Dua lingkaran berpotongan di A dan B dan masing-masing berdiameter $[AX]$ dan $[AY]$. Buktikan X, Y, B segaris.

Petunjuk penulis. Tunjukkan dan gunakan fakta bahwa $\angle ABX$ dan $\angle ABY$ siku-siku. Kita dapat mengandaikan A, B, X, Y berbeda; jika tidak, tidak ada yang perlu dibuktikan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Terapkan akibat diameter pada masing-masing lingkaran di titik B.
2. Identifikasi dua garis melalui B yang sama-sama tegak lurus AB.
3. Gunakan ketunggalan garis tegak lurus melalui satu titik.

Jawaban atau pemeriksaan. $BX \perp AB$ dan $BY \perp AB$; kedua garis melalui B itu berimpit.

Solusi lengkap. Pada lingkaran pertama, AX adalah diameter dan B titik lain pada lingkaran. Maka `cor:right-angle-diameter` memberi $\angle ABX = \pi/2$, sehingga $(BX) \perp (AB)$. Pada lingkaran kedua, AY diameter dan akibat yang sama memberi $(BY) \perp (AB)$. Melalui B terdapat tepat satu garis yang tegak lurus (AB), jadi $(BX) = (BY)$ dan X, B, Y segaris.

Jika salah satu titik berimpit dalam kasus degenerat yang diizinkan oleh notasi, kesimpulan segera benar; asumsi titik berbeda pada petunjuk hanya memastikan kedua nama garis terdefinisi selama argumen utama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan dua sudut siku-siku tidak dengan sendirinya memberi kesegarisaan. Langkah penentu adalah bahwa kedua garis melewati titik B yang sama dan tegak lurus terhadap garis AB yang sama.

9.9 Konstruksi tegak lurus dengan penggaris saja

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex009`. **Label sumber:** `ex:perpendicular-ruler`.

Soal sumber. Diberikan garis ℓ, lingkaran Γ yang pusatnya terletak pada ℓ, dan titik P yang tidak terletak pada ℓ maupun Γ. Konstruksilah garis dari P yang tegak lurus ℓ hanya dengan penggaris.

Petunjuk penulis. Tebak konstruksinya dari gambar `pic-336`. Untuk membuktikannya, terapkan `thm:orthocenter` dan `cor:right-angle-diameter` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tandai $A, B = \Gamma \cap \ell$; ruas AB adalah diameter.
2. Garis PB dan PA memotong kembali Γ di A_1 dan B_1.
3. Bentuk $H = (AA_1) \cap (BB_1)$, lalu tarik PH.

Jawaban atau pemeriksaan. $AA_1 \perp PB$ dan $BB_1 \perp PA$, sehingga H ortosenter $\triangle PAB$. Maka garis tinggi ketiga PH tegak lurus $AB = \ell$.

Solusi lengkap. Dengan penggaris, tarik ℓ dan tandai dua titik potongnya dengan Γ sebagai A, B. Karena pusat Γ berada pada ℓ, ruas AB adalah diameter. Tarik PB; selain B, garis itu memotong lingkaran di A_1. Tarik pula PA dan namai titik potong keduanya selain A sebagai B_1. Semua langkah ini hanya menggunakan garis melalui dua titik dan perpotongan garis-lingkaran yang sudah diberikan.

Karena A, A_1, B terletak pada lingkaran berdiameter AB, `cor:right-angle-diameter` memberi $AA_1 \perp BA_1$. Tetapi B, A_1, P segaris, jadi $AA_1 \perp PB$. Demikian pula $BB_1 \perp PA$. Jika $H = (AA_1) \cap (BB_1)$, dua garis itu adalah dua garis tinggi $\triangle PAB$; menurut `thm:orthocenter` , H ortosenternya. Garis tinggi ketiga adalah (PH) dan tegak lurus $(AB) = \ell$.

Jika PA atau PB menyinggung Γ di ujung diameter, garis tersebut sudah tegak lurus ℓ dan merupakan jawaban; cabang generik di atas tidak perlu memaksakan “titik potong kedua” yang berimpit.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pusat lingkaran tidak perlu dikonstruksi. Data yang dipakai hanyalah bahwa garis melalui pusat memotong lingkaran pada dua ujung diameter. Cabang tangen harus disebutkan agar konstruksi tidak membagi dua titik yang sama.

9.10 Dua titik singgung dan titik tengah sekan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex010`. **Label sumber tetap:** `ex:tnagents+midpoint`.

Soal sumber. Garis ℓ, m, n melalui P. Garis ℓ, m menyinggung Γ di L, M, sedangkan n memotong Γ di X, Y. Jika N titik tengah $[XY]$, tunjukkan P, L, M, N terletak pada satu lingkaran.

Petunjuk penulis. Misalkan O pusat Γ. Gunakan `cor:right-angle-diameter` untuk menunjukkan bahwa titik-titik tersebut terletak pada lingkaran yang berdiameter $[PO]$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan jari-jari ke titik singgung untuk memperoleh dua sudut siku- siku di L dan M.
2. Gunakan fakta bahwa garis dari pusat ke titik tengah tali busur tegak lurus tali busur itu.
3. Terapkan kebalikan akibat diameter pada ketiga titik.

Jawaban atau pemeriksaan. $OL \perp PL$, $OM \perp PM$, dan $ON \perp PN$. Jadi L, M, N semuanya berada pada lingkaran berdiameter PO.

Solusi lengkap. Karena PL dan PM menyinggung Γ, Lema `lem:tangent` memberi $OL \perp PL$ dan $OM \perp PM$. Tali busur XY mempunyai titik tengah N; garis dari pusat lingkaran ke titik tengah tali busur tegak lurus tali busur, sehingga $ON \perp XY$. Karena P, N, X, Y terletak pada garis n, berlaku $ON \perp PN$.

Dengan demikian

$$\angle PLO = \angle PMO = \angle PNO = \frac{\pi}{2}.$$

Kebalikan `cor:right-angle-diameter` menempatkan masing-masing L, M, N pada lingkaran berdiameter PO. Titik P sendiri adalah ujung diameter tersebut, sehingga P, L, M, N konsiklik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Label sumber `tnagents` sengaja tidak diperbaiki karena merupakan ID lintas rujukan. Titik N bukan pada Γ pada umumnya; lingkaran yang memuat empat titik adalah lingkaran baru berdiameter PO.

9.11 Empat titik pada lingkaran berdiameter AB

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex011`. **Label sumber tetap:** `ex:VVAA`.

Soal sumber. Pada segitiga tak degenerat ABC, A' dan B' berturut-turut titik kaki garis tinggi dari A dan B. Tunjukkan A, B, A', B' konsiklik dan tentukan pusat lingkarannya.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa $\measuredangle AA'B = \pm\frac{\pi}{2}$ dan $\measuredangle AB'B = \pm\frac{\pi}{2}$. Kemudian terapkan `cor:inscribed-quadrangle` pada $\square AA'BB'$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis ketegaklurusan yang mendefinisikan kedua titik kaki.
2. Baca kedua sudut siku-siku sebagai sudut yang menghadap ruas AB.
3. Identifikasi lingkaran yang diameternya AB dan pusatnya titik tengah.

Jawaban atau pemeriksaan. Keempat titik berada pada lingkaran berdiameter $[AB]$; pusatnya adalah titik tengah AB.

Solusi lengkap. Karena A' kaki garis tinggi dari A, berlaku $AA' \perp BC$. Titik A' terletak pada BC, jadi $AA' \perp A'B$ dan $\angle AA'B$ siku-siku. Demikian pula $BB' \perp AC$ dan $B' \in AC$, sehingga $\angle AB'B$ siku-siku.

Menurut kebalikan `cor:right-angle-diameter` , setiap titik T dengan $\angle ATB = \pi/2$ berada pada lingkaran berdiameter AB. Maka A' dan B' berada pada lingkaran tersebut, bersama kedua ujung diameternya A, B. Pusat lingkaran berdiameter AB adalah titik tengah ruas AB dan jari- jarinya $AB/2$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pusat yang diminta bukan ortosenter atau pusat lingkaran luar ABC pada umumnya. Kapitalisasi label `VVAA` adalah identitas sumber dan tetap dipertahankan.

9.12 Tali busur pada dua lingkaran berpotongan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex012`. **Label sumber:** `ex:secant-circles`.

Soal sumber. Lingkaran Γ, Γ' berpotongan di A, B. Tali busur $[XY]$ pada Γ dan $[X'Y']$ pada Γ' disusun sehingga A berada di antara X, X' dan B di antara Y, Y'. Tunjukkan $(XY) \parallel (X'Y')$.

Petunjuk penulis. Terapkan `cor:inscribed-quadrangle` dua kali pada $\square ABYX$ dan $\square ABY'X'$, lalu gunakan sifat transversal (`thm:parallel-2`).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan kesamaan sudut yang berasal dari segiempat siklik $ABYX$.
2. Nyatakan analog yang sama untuk $ABY'X'$.
3. Gunakan bahwa sinar melalui A dan melalui B berlawanan sesuai urutan “di antara”, lalu terapkan kriteria transversal.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua garis membentuk sudut berarah yang sama dengan transversal XX'; karena itu keduanya sejajar.

Solusi lengkap. Karena A, B, X, Y berada pada Γ, Akibat `cor:inscribed-quadrangle` memberi kesamaan sudut keliling yang menghadap tali busur AB:

$$2\measuredangle AXB \equiv 2\measuredangle AYB.$$

Pada Γ' berlaku analog

$$2\measuredangle AX'B \equiv 2\measuredangle AY'B.$$

Urutan $X - A - X'$ dan $Y - B - Y'$ menyatakan bahwa sinar AX, AX' berlawanan, demikian pula BY, BY'. Setelah dua identitas di atas ditulis sebagai sudut antara tali busur dan transversal XX', penambahan π dari pembalikan sinar saling menghapus. Diperoleh

$$\measuredangle(XY),(XX') \equiv \measuredangle(X'Y'),(XX') \pmod{\pi}.$$

Sifat transversal `thm:parallel-2` kemudian memberi $(XY) \parallel (X'Y')$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kedua tali busur tidak berada pada lingkaran yang sama. Kesimpulan muncul karena kedua lingkaran berbagi A, B dan urutan betweenness membalik sinar dengan tepat; mengabaikan urutan dapat menghasilkan garis antiparalel dalam gambar tak berarah.

9.13 Konstruksi segitiga dari keliling, sudut, dan sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex013`. **Label sumber:** `ex:perim+angle+side`. **Jenis sumber:** latihan lanjutan.

Soal sumber. Lakukan konstruksi penggaris dan jangka untuk membuat $\triangle ABC$ bila diketahui keliling p, $\beta = \measuredangle ABC$, dan $b = AC$.

Petunjuk penulis. Konstruksikan $\triangle AXC$ sedemikian sehingga $AC = b$, $AX = p - b$, dan $\measuredangle AXC = \frac{1}{2}\beta$. Titik B pada perpotongan AX dengan garis sumbu $[CX]$ menyelesaikan masalah tersebut.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bangun $AX = p - b$, lalu ray dari X yang membentuk sudut $\beta/2$; potong dengan lingkaran berpusat A berjari-jari b untuk memperoleh C.
2. Bangun garis sumbu CX dan namai perpotongannya dengan AX sebagai B.
3. Buktikan $BC = BX$, lalu periksa keliling dan sudut luar di B.

Jawaban atau pemeriksaan. Karena $BC = BX$ dan A, B, X berurutan, $AB + BC + CA = AB + BX + b = AX + b = p$. Sudut luar segitiga sama kaki BCX di B adalah $2(\beta/2) = \beta$.

Solusi lengkap. Bangun ruas AX sepanjang $p - b$. Di X, bangun sinar yang membuat sudut $\beta/2$ dengan XA. Lingkaran berpusat A berjari-jari b memotong sinar itu di calon titik C; ini membentuk $\triangle AXC$ dengan data petunjuk. Bangun garis sumbu CX dan ambil perpotongannya dengan garis AX sebagai B, memilih cabang yang menempatkan B di antara A, X. Keberadaan cabang tersebut merupakan syarat keterlaksanaan data yang diberikan; data yang tidak memenuhi pertidaksamaan segitiga memang tidak menentukan segitiga yang diminta.

Karena B pada garis sumbu CX, $BC = BX$. Maka

$$AB + BC + CA = AB + BX + b = AX + b = (p - b) + b = p.$$

Segitiga BCX sama kaki dengan $BC = BX$, sehingga sudut alasnya di C dan X sama. Karena A, B, X segaris dan $\angle AXC = \beta/2$, sudut di X pada $\triangle BCX$ bernilai $\beta/2$. Sudut ABC adalah sudut luar di B, sehingga menurut teorema sudut luar

$$\angle ABC = \angle BCX + \angle CXB = \beta.$$

Terakhir, $AC = b$ menurut konstruksi. Semua operasi adalah konstruksi garis, lingkaran, pembagian sudut dua, dan garis sumbu yang sah dengan penggaris dan jangka.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ruas AX adalah jumlah $AB + BC$, bukan salah satu sisi segitiga akhir. Perpotongan garis sumbu yang berada pada cabang salah AX dapat merusak betweenness dan membuat pemeriksaan keliling memakai selisih alih-alih jumlah.

9.14 Memperbaiki ketaktepatan pada metode lingkaran bantu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex014`. **Label sumber:** `ex:inaccuracy`.

Soal sumber. Temukan suatu ketaktepatan dalam penyelesaian contoh metode lingkaran bantu sebelumnya dan cobalah memperbaikinya.

Petunjuk penulis. Harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa $(A'B') \nparallel (XP)$; jika tidak, titik $Y = (A'B') \cap (XP)$ pada baris pertama tidak terdefinisi. Selain itu, alih-alih langsung menulis $2\measuredangle AXY \equiv 2\measuredangle AA'Y$, tulislah dahulu

$$2\measuredangle AXP \equiv 2\measuredangle PA'B'.$$

Segitiga XAP siku-siku di A, sehingga bersama identitas itu diperoleh $2\measuredangle XPA' + 2\measuredangle PA'B' \equiv \pi$, yang juga membuktikan ketaksejajaran. Penyelesaian memakai secara implisit $2\measuredangle AXP \equiv 2\measuredangle AXY$, $2\measuredangle ABP \equiv 2\measuredangle ABB'$, dan $2\measuredangle AA'B' \equiv 2\measuredangle AA'Y$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari dua sudut siku-siku, buktikan X, A, P, B konsiklik; dari data tali busur, A, B, A', B' juga konsiklik.
2. Gabungkan kedua segiempat untuk memperoleh $2\angle AXP \equiv 2\angle PA'B'$ sebelum memperkenalkan Y.
3. Gunakan jumlah sudut segitiga siku-siku untuk menolak kesejajaran, baru definisikan Y dan selesaikan argumen siklik.

Jawaban atau pemeriksaan. Ada dua kekurangan terkait: penyelesaian mengandaikan perpotongan Y sebelum membuktikan garisnya tidak sejajar, dan satu identitas sudut memakai Y terlalu dini. Identitas antara sudut di X, P, A' memperbaiki keduanya.

Solusi lengkap. Karena A, A', P segaris dan B, B', P segaris, hipotesis sudut siku-siku memberi $\angle XAP = \angle XBP = \pi/2$. Jadi X, A, P, B konsiklik. Selain itu A, A', B, B' berada pada lingkaran sumber. Dua kali menerapkan akibat segiempat terinskripsi memberi

$$2\measuredangle AXP \equiv 2\measuredangle ABP \equiv 2\measuredangle ABB' \equiv 2\measuredangle AA'B' \equiv 2\measuredangle PA'B'.$$

Karena $\triangle XAP$ siku-siku di A,

$$\measuredangle AXP + \measuredangle XPA \equiv \pm\frac{\pi}{2}.$$

Sinar PA dan PA' berlawanan, sehingga penggandaan meniadakan tambahan π dan menghasilkan

$$2\measuredangle XPA' + 2\measuredangle PA'B' \equiv \pi \neq 0.$$

Jika $(XP) \parallel (A'B')$, sifat transversal dengan PA' justru akan memberi jumlah itu kongruen 0. Jadi kedua garis tidak sejajar dan titik $Y = (XP) \cap (A'B')$ benar-benar ada.

Kini X, P, Y segaris dan A', B', Y segaris. Identitas yang sudah dibuktikan menjadi $2\measuredangle AXY \equiv 2\measuredangle AA'Y$. Akibat segiempat terinskripsi menempatkan X, A, Y, A' pada satu lingkaran. Maka sudut XYA' menghadap tali busur XA' yang sama dengan sudut XAA', dan sudut terakhir siku-siku menurut hipotesis. Jadi $(XP) = (XY)$ tegak lurus $(A'B') = (YA')$, sehingga kesimpulan contoh benar setelah celah logikanya ditutup.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Menamai "titik potong" tidak membuktikan bahwa titik itu ada. Koreksi ini juga bukan perubahan diam-diam pada penyelesaian sumber: lokasi dan identitas sudut yang diperbaiki tetap dicatat sebagai isi petunjuk penulis.

9.15 Proyeksi pada tiga garis bersudut sama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex015`. **Label sumber:** `ex:equilateral-2`.

Soal sumber. Tiga garis ℓ, m, n berpotongan di O dan membentuk enam sudut sama besar. Untuk $X \neq O$, L, M, N adalah kaki tegak lurus dari X pada ketiga garis. Buktikan $\triangle LMN$ sama sisi.

Petunjuk penulis. Berdasarkan `cor:right-angle-diameter` , L, M, N terletak pada lingkaran Γ yang berdiameter $[OX]$. Selanjutnya terapkan `thm:inscribed-angle` pada Γ dan dua sudut keliling yang memiliki titik sudut bersama di O.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tunjukkan $\angle OLX, \angle OMX, \angle ONX$ semuanya siku-siku.
2. Gunakan bahwa sudut antara setiap dua dari tiga garis adalah $\pi/3$ sebagai sudut garis tak berarah.
3. Sudut keliling yang sama besar menghadap tali busur LM, MN, NL yang sama panjang.

Jawaban atau pemeriksaan. L, M, N berada pada satu lingkaran dan ketiga tali busur LM, MN, NL menghadap sudut keliling dengan besar $\pi/3$; jadi ketiganya sama panjang.

Solusi lengkap. Definisi titik kaki memberi $XL \perp OL$, $XM \perp OM$, dan $XN \perp ON$. Maka $\angle OLX$, $\angle OMX$, dan $\angle ONX$ siku- siku. Kebalikan `cor:right-angle-diameter` menempatkan L, M, N pada lingkaran berdiameter OX.

Enam sudut di O sama besar dan jumlahnya 2π, sehingga masing-masing bernilai $\pi/3$. Sebagai garis tak berarah, setiap pasangan di antara ℓ, m, n membentuk sudut kecil $\pi/3$. Karena OL, OM, ON terletak pada garis-garis itu, sudut keliling yang bertitik sudut O dan menghadap tali

busur LM, MN, NL sama besar, dengan pembalikan sinar hanya mengubah tanda atau menambah π. Teorema `thm:inscribed-angle` memberi sudut pusat yang sama besar untuk ketiga tali busur. Maka

$$LM = MN = NL,$$

dan $\triangle LMN$ sama sisi. Kasus kaki berada pada sinar lawan tetap tercakup oleh sudut berarah.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pusat lingkaran bantu bukan O, melainkan titik tengah OX. Sudut di O adalah sudut keliling lingkaran bantu, sehingga teorema sudut keliling, bukan rumus sudut pusat di O, yang dipakai.

9.16 Sudut dua garis berat dan segitiga sama kaki

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex016`. **Label sumber:** `ex:median-angle`.

Soal sumber. $[AA']$ dan $[BB']$ adalah garis berat segitiga tak degenerat ABC. Jika $\measuredangle A'AC = \measuredangle CBB'$, buktikan $AC = BC$.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa A, A', B, B' terletak pada satu lingkaran. Tunjukkan $(AB) \parallel (B'A')$. Dengan menerapkan `ex:two-chords` , tunjukkan $AB' = BA'$ dan oleh karena itu $AC = BC$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ganti AC dengan garis AB' dan BC dengan garis BA' pada hipotesis sudut.
2. Gunakan kriteria segiempat siklik, lalu teorema ruas titik tengah pada $\triangle CBA$.
3. Terapkan hasil dua tali busur sejajar dan gandakan dua setengah sisi.

Jawaban atau pemeriksaan. $AB' = BA'$. Karena B' titik tengah AC dan A' titik tengah BC, $AC = 2AB' = 2BA' = BC$.

Solusi lengkap. Karena $B' \in AC$ dan $A' \in BC$, hipotesis dapat ditulis

$$\measuredangle A'AB' = \measuredangle A'BB'.$$

Kedua sudut menghadap pasangan titik A', B'; kebalikan Akibat `cor:inscribed-quadrangle` menunjukkan A, A', B, B' konsiklik.

Titik A' dan B' adalah titik tengah BC dan AC. Teorema ruas titik tengah pada $\triangle CBA$ memberi $(A'B') \parallel (AB)$. Pada lingkaran yang baru diperoleh, terapkan Latihan `ex:two-chords` pada dua tali busur sejajar $[AB]$ dan $[B'A']$, dengan korespondensi $X = A, Y = B, X' = B', Y' = A'$. Hasilnya

$$AB' = BA'.$$

Tetapi $AB' = AC/2$ dan $BA' = BC/2$. Mengalikan dengan 2 memberi $AC = BC$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesegarisaan A, C, B' dan B, C, A' harus digunakan dengan urutan sinar yang benar. Pada penerapan latihan tali busur, memilih $X' = A'$ alih-alih B' akan menghasilkan kesamaan silang yang tidak menutup bukti.

9.17 Garis Simson dari sebuah titik pada lingkaran luar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex017`. **Label sumber:** `ex:simson`.

Soal sumber. Titik P terletak pada lingkaran luar $\triangle ABC$. Buktikan bahwa ketiga kaki tegak lurus dari P pada (AB), (BC), dan (CA) terletak pada satu garis, yang disebut garis Simson dari P.

Petunjuk penulis. Misalkan X, Y, Z berturut-turut merupakan kaki tegak lurus dari P pada $(BC), (CA), (AB)$. Tunjukkan bahwa $\square AZPY$, $\square BXPZ$, $\square CYPX$, dan $\square ABCP$ terinskripsi. Gunakan hasil itu untuk menunjukkan

$$2\measuredangle CXY \equiv 2\measuredangle CPY, \quad 2\measuredangle BXZ \equiv 2\measuredangle BPZ,$$
$$2\measuredangle YAZ \equiv 2\measuredangle YPZ, \quad 2\measuredangle CAB \equiv 2\measuredangle CPB.$$

Simpulkan $2\measuredangle CXY \equiv 2\measuredangle BXZ$, sehingga X, Y, Z segaris.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Setiap dua kaki yang bertetangga dengan satu titik sudut menghasilkan sepasang sudut siku-siku dan karena itu sebuah segiempat siklik.
2. Jumlahkan sudut-sudut berarah CPY, YPZ, dan ZPB di titik P.
3. Ganti sudut di P dengan sudut keliling yang bersesuaian, lalu gunakan bahwa sinar XB dan XC saling berlawanan.

Jawaban atau pemeriksaan. Keempat segiempat siklik memberi $2\measuredangle CPY - 2\measuredangle BPZ \equiv 0$, sehingga $2\measuredangle CXY \equiv 2\measuredangle BXZ$. Karena B, X, C segaris, ini tepat menyatakan bahwa garis XY dan XZ berimpit.

Solusi lengkap. Karena $Y \in (CA)$ dan $PY \perp CA$, sedangkan $Z \in (AB)$ dan $PZ \perp AB$, berlaku

$$\angle AYP = \angle AZP = \frac{\pi}{2}.$$

Jadi A, Z, P, Y konsiklik. Secara sama, sudut siku-siku di X, Z memberi B, X, P, Z konsiklik, dan sudut siku-siku di Y, X memberi C, Y, P, X konsiklik. Segiempat A, B, C, P konsiklik menurut hipotesis.

Teorema sudut keliling pada keempat lingkaran tersebut menghasilkan

$$2\measuredangle CXY \equiv 2\measuredangle CPY, \quad 2\measuredangle BXZ \equiv 2\measuredangle BPZ,$$
$$2\measuredangle YAZ \equiv 2\measuredangle YPZ, \quad 2\measuredangle CAB \equiv 2\measuredangle CPB.$$

Karena Y, A, C segaris dan Z, A, B segaris, $2\measuredangle YAZ \equiv 2\measuredangle CAB$. Maka $2\measuredangle YPZ \equiv 2\measuredangle CPB$.

Adisitivitas sudut berarah di P memberi

$$\measuredangle CPY + \measuredangle YPZ + \measuredangle ZPB \equiv \measuredangle CPB.$$

Karena $\measuredangle ZPB = -\measuredangle BPZ$, setelah dikalikan dua dan memakai identitas sebelumnya diperoleh

$$2\measuredangle CPY - 2\measuredangle BPZ \equiv 2\measuredangle CPB - 2\measuredangle YPZ \equiv 0.$$

Dengan demikian $2\measuredangle CXY \equiv 2\measuredangle BXZ$. Sinar XC dan XB saling berlawanan, jadi mengganti yang satu dengan yang lain hanya menambah π, yang hilang setelah sudut digandakan. Akibatnya $\measuredangle BXY \equiv \measuredangle BXZ \pmod{\pi}$. Garis XY dan XZ berimpit; oleh karena itu X, Y, Z segaris.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesimpulan berasal dari kesamaan sudut modulo π, bukan dari anggapan bahwa ketiga kaki berada pada sisi-sisi segitiga. Titik kaki boleh berada pada perpanjangan garis, dan bukti sudut berarah tetap berlaku.

9.18 Konstruksi titik yang melihat tiga sisi dengan sudut 120°

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex018`. **Label sumber:** `ex:3x120`.

Soal sumber. Untuk segitiga lancip ABC, konstruksilah dengan penggaris dan jangka suatu titik Z yang memenuhi $\measuredangle AZB = \measuredangle BZC = \measuredangle CZA = \pm\frac{2}{3}\pi$.

Petunjuk penulis. Tebak konstruksinya dari gambar. Untuk menunjukkan bahwa konstruksi tersebut menghasilkan titik yang diminta, terapkan `thm:inscribed-angle` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bangun segitiga sama sisi BCX di sisi berlawanan dari A terhadap (BC).
2. Gambar lingkaran luar BCX dan ambil perpotongan kedua Z dari (AX) dengan lingkaran itu.
3. Gunakan sudut keliling yang menghadap tali busur BX dan CX, lalu gunakan bahwa sinar ZA dan ZX berlawanan.

Jawaban atau pemeriksaan. Konstruksinya ialah X sebagai puncak segitiga sama sisi luar BCX, lalu $Z = (AX) \cap \odot(BCX)$ yang bukan X. Pada lingkaran itu sudut yang menghadap BX dan CX bernilai $\pi/3$ modulo π; pembalikan sinar ZX menjadi ZA mengubahnya menjadi $2\pi/3$ dengan orientasi bersama.

Solusi lengkap. Bangun segitiga sama sisi BCX pada setengah bidang terhadap (BC) yang tidak memuat A. Bangun lingkaran Γ melalui B, C, X dan tarik garis (AX). Karena ABC lancip dan X dipilih di sisi luar, garis ini memotong Γ lagi di sebuah titik Z yang terletak di antara A dan X; konstruksi garis–lingkaran biasa menghasilkan titik tersebut.

Pada Γ, sudut keliling $\angle XZB$ dan $\angle XCB$ menghadap tali busur XB, sedangkan $\angle CZX$ dan $\angle CBX$ menghadap tali busur CX. Karena BCX sama sisi, Teorema `thm:inscribed-angle` memberi

$$\measuredangle XZB \equiv \measuredangle XCB \equiv \pm\frac{\pi}{3}, \qquad \measuredangle CZX \equiv \measuredangle CBX \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}.$$

Pilihan X di sisi berlawanan dari A menentukan cabang dengan kedua sudut kecil di Z berada pada sisi berbeda dari (ZX). Jadi $\measuredangle BZC = \pm 2\pi/3$.

Karena A, Z, X segaris dan Z berada di antara A dan X, sinar ZA berlawanan dengan ZX. Mengganti ZX dengan ZA menambah π pada masing-masing sudut berarah. Oleh karena itu

$$\measuredangle AZB = \measuredangle BZC = \measuredangle CZA = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Semua langkah – segitiga sama sisi, lingkaran luar, garis, dan perpotongan garis–lingkaran – merupakan konstruksi penggaris dan jangka.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Puncak sama sisi harus dipilih di sisi BC yang berlawanan dari A. Pilihan lain mengubah urutan perpotongan dan tidak memberi cabang tiga sudut berorientasi yang diminta tanpa penyesuaian tambahan.

9.19 Teorema Ptolemaios khusus untuk segitiga sama sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex019`. **Label sumber:** `ex:a+b=c`.

Soal sumber. Titik P terletak pada lingkaran luar segitiga sama sisi ABC dan $PA \le PB \le PC$. Buktikan $PA + PB = PC$.

Petunjuk penulis. Tunjukkan bahwa P terletak pada busur yang berhadapan dengan ACB; simpulkan bahwa $\measuredangle APC = \measuredangle CPB = \pm\frac{\pi}{3}$. Pilih $A' \in [PC]$ sedemikian sehingga $PA' = PA$. Perhatikan bahwa $\triangle APA'$ sama sisi. Buktikan dan gunakan fakta bahwa $\triangle AA'C \cong \triangle APB$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan urutan jarak untuk memilih busur tempat P berada dan terapkan teorema sudut keliling.
2. Letakkan A' pada $[PC]$ dengan $PA' = PA$; sudut APA' adalah 60°.
3. Cocokkan AA' dengan AP, AC dengan AB, dan sudut apitnya; setelah kongruensi, pecah ruas PC di A'.

Jawaban atau pemeriksaan. $\triangle APA'$ sama sisi dan $\triangle AA'C \cong \triangle APB$, jadi $A'C = PB$. Karena $A' \in [PC]$ dan $PA' = PA$, $PC = PA' + A'C = PA + PB$.

Solusi lengkap. Jika $P = A$, kesimpulannya langsung: $PA + PB = 0 + AB = AC = PC$. Syarat urutan menolak $P = B$ dan $P = C$, jadi selanjutnya andaikan P berbeda dari ketiga titik sudut.

Ketiga busur kecil AB, BC, CA masing-masing mempunyai sudut pusat $2\pi/3$. Jika P berada di bagian dalam busur kecil AB, jarak sudut pusat dari P ke C sekurang-kurangnya $2\pi/3$, sedangkan jarak sudut pusatnya ke A dan B masing-masing paling besar $2\pi/3$; jadi PC adalah yang terbesar. Secara siklik, pada busur BC jarak terbesar adalah PA, dan pada busur CA jarak terbesar adalah PB. Karena $PA \le PB \le PC$, titik P harus berada pada busur kecil AB, yaitu busur yang berhadapan dengan busur ACB dalam penamaan sumber. Teorema sudut keliling dan fakta bahwa ABC sama sisi kemudian memberi

$$\measuredangle APC = \measuredangle CPB = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Pilih $A' \in [PC]$ dengan $PA' = PA$. Karena $\angle APA' = \angle APC = \pi/3$ dalam orientasi yang sesuai, kriteria SAS menunjukkan bahwa $\triangle APA'$ sama sisi. Jadi

$$AA' = AP = PA'.$$

Selain itu $AC = AB$. Rotasi sebesar $\pi/3$ yang membawa sinar AP ke AA' juga membawa sinar AB ke AC (tanda rotasinya sama karena kedua segitiga sama sisi berada pada orientasi yang ditentukan oleh busur). Maka

$$\measuredangle A'AC = \measuredangle PAB.$$

Dengan SAS,

$$\triangle AA'C \cong \triangle APB,$$

sehingga $A'C = PB$. Karena A' terletak pada ruas PC,

$$PC = PA' + A'C = PA + PB,$$

seperti yang harus dibuktikan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Syarat urutan $PA \le PB \le PC$ bukan hiasan: syarat itu memilih busur dan orientasi yang membuat A' berada pada ruas PC. Tanpanya, identitas panjang harus ditulis dengan tanda atau permutasi yang berbeda.

9.20 Keberadaan dan ketunggalan busur dengan sinar singgung tertentu

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex020`. **Label sumber:** `ex:tangent-arc`.

Soal sumber. Buktikan bahwa terdapat tepat satu busur dengan titik ujung A, C yang menyinggung sinar $[AX)$ yang diberikan.

Petunjuk penulis. Jika $C \in (AX)$, busurnya adalah ruas $[AC]$ atau gabungan dua sinar pada (AX) yang bertitik pangkal A dan C. Andaikan $C \notin (AX)$. Misalkan ℓ garis melalui A yang tegak lurus (AX) dan m garis sumbu $[AC]$. Perhatikan $\ell \nparallel m$ dan namai titik potongnya O. Lingkaran berpusat di O melalui A juga melalui C dan bersinggungan dengan (AX). Salah satu dari kedua busur bertitik ujung A, C bersinggungan dengan $[AX)$. Ketunggalan mengikuti dari `prop:arc(angle=tan)` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pisahkan kasus degenerat $C \in (AX)$ dari kasus lingkaran sejati.
2. Dalam kasus sejati, pusat harus sekaligus berada pada garis normal di A dan pada garis sumbu AC.
3. Setelah lingkarannya tunggal, gunakan sisi sinar terhadap (AC) untuk memilih tepat satu dari dua busur.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $C \notin (AX)$, pusatnya adalah titik tunggal $O = \ell \cap m$. Lingkaran OA melalui C dan menyinggung (AX) di A; arah sinar memilih satu dari dua busur AC. Kasus segaris memilih tepat satu dari dua busur degenerat.

Solusi lengkap. Andaikan dahulu $C \in (AX)$. Ada dua busur lingkaran umum dengan titik ujung A, C: ruas $[AC]$ dan gabungan dua sinar luar pada garis yang sama. Jika $C \in [AX)$, definisi busur degenerat memilih $[AC]$; jika A berada di antara C dan X, definisi itu memilih gabungan dua sinar. Tepat satu di antaranya mempunyai sinar singgung $[AX)$.

Sekarang andaikan $C \notin (AX)$. Tarik ℓ melalui A tegak lurus (AX) dan garis sumbu m dari $[AC]$. Jika $\ell \parallel m$, maka garis yang tegak lurus keduanya, yaitu (AX) dan (AC), sejajar. Karena keduanya melalui A, keduanya berimpit, bertentangan dengan $C \notin (AX)$. Jadi $O = \ell \cap m$ ada dan tunggal.

Karena $O \in m$, $OA = OC$; lingkaran berpusat O melalui A juga melalui C. Karena $OA \perp AX$, garis (AX) menyinggung lingkaran itu di A. Dari dua busur lingkaran bertitik ujung A, C, tepat satu berada pada sisi (AC) yang sama dengan X di dekat A; itulah busur yang disinggung oleh sinar $[AX)$.

Untuk ketunggalan, pusat lingkaran lain yang memenuhi syarat harus berada pada ℓ karena jari-jari di titik singgung tegak lurus (AX), dan pada m karena berjarak sama dari A, C. Jadi pusatnya harus O. Setelah lingkaran tetap, `prop:arc(angle=tan)` atau syarat sisi dalam definisi memilih satu-satunya busur. Ini menutup keberadaan dan ketunggalan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis singgung saja tidak memilih salah satu dari dua busur; arah sinar dan syarat sisi harus digunakan. Kasus $C \in (AX)$ juga tidak boleh dipaksa memakai lingkaran berhingga.

9.21 Limit sudut tali busur pada titik singgung

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex021`. **Label sumber:** `ex:tangent-lim`.

Soal sumber. Sinar $[AX)$ menyinggung busur ABC, dan $Y \neq A$ bergerak pada busur itu. Buktikan $\measuredangle XAY \to 0$ ketika $AY \to 0$.

Petunjuk penulis. Gunakan `prop:arc(angle=tan)` dan `thm:3sum` untuk menunjukkan $\measuredangle XAY = \measuredangle ACY$. Menurut Aksioma `def:birkhoff-axioms:2c` , $\measuredangle ACY \to 0$ ketika $AY \to 0$; dengan demikian, hasil yang diminta terbukti.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Karena Y berada pada busur ABC, samakan sudut AYC dan ABC.
2. Kurangkan identitas sinar singgung dari jumlah sudut AYC.
3. Terapkan kontinuitas sudut ketika sinar CY mendekati sinar CA.

Jawaban atau pemeriksaan. Secara identik $\measuredangle XAY = \measuredangle ACY$. Saat $Y \to A$ sepanjang busur, sinar $CY \to CA$, sehingga ruas kanan menuju nol.

Solusi lengkap. Karena Y terletak pada busur ABC, Proposisi `prop:arcs` memberi

$$\measuredangle AYC = \measuredangle ABC.$$

Teorema jumlah sudut pada $\triangle AYC$ memberi

$$\measuredangle CAY + \measuredangle AYC + \measuredangle YCA \equiv \pi.$$

Sementara itu, karena $[AX)$ menyinggung busur tersebut, Proposisi `prop:arc(angle=tan)` memberi

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CAX \equiv \pi.$$

Kurangkan persamaan kedua dari yang pertama dan gunakan $\measuredangle YCA = -\measuredangle ACY$. Hasilnya

$$\measuredangle CAY - \measuredangle CAX = \measuredangle XAY = \measuredangle ACY.$$

Ketika $AY \to 0$ dengan Y tetap pada busur, titik Y mendekati A dan sinar CY mendekati sinar CA. Aksioma kontinuitas sudut `def:birkhoff-axioms:2c` memberi $\measuredangle ACY \to \measuredangle ACA = 0$. Identitas di atas kemudian memberi $\measuredangle XAY \to 0$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pernyataan limit tidak diperoleh hanya dari gambar bahwa tali busur "menjadi singgung". Langkah penentu ialah identitas sudut yang tepat dan Aksioma 2c; keduanya harus disebutkan.

9.22 Sudut antara pasangan sinar singgung dua busur

ID stabil: `o004-c100-sol-ch09-ex022`. **Label sumber:** `ex:two-arcs`. **Penanda sumber:** `[!]`.

Soal sumber. Dua busur lingkaran AB_1C dan AB_2C memiliki sinar singgung $[AX_1), [AX_2)$ di A dan $[CY_1), [CY_2)$ di C. Buktikan

$$\measuredangle X_1AX_2 \equiv -\measuredangle Y_1CY_2.$$

Petunjuk penulis. Terapkan `prop:arc(angle=tan)` dua kali. Sebagai alternatif, terapkan `cor:reflection+angle` pada pencerminan terhadap garis sumbu $[AC]$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $\alpha_i = \measuredangle AB_iC$.
2. Tuliskan persamaan sinar singgung di A dan persamaan dengan titik ujung terbalik di C untuk setiap i.
3. Kurangkan persamaan indeks 1 dan 2; suku π saling menghapus.

Jawaban atau pemeriksaan. $\measuredangle X_1AX_2 \equiv \alpha_1 - \alpha_2$, sedangkan $\measuredangle Y_1CY_2 \equiv \alpha_2 - \alpha_1$; kedua ruas saling berlawanan.

Solusi lengkap. Tuliskan $\alpha_i = \measuredangle AB_iC$. Proposisi `prop:arc(angle=tan)` pada titik ujung A memberi

$$\alpha_i + \measuredangle CAX_i \equiv \pi.$$

Kurangkan persamaan untuk $i = 1$ dari persamaan untuk $i = 2$. Karena

$$\measuredangle X_1AX_2 = \measuredangle CAX_2 - \measuredangle CAX_1,$$

diperoleh

$$\measuredangle X_1AX_2 \equiv \alpha_1 - \alpha_2.$$

Di titik ujung C, pandang busur yang sama dengan urutan CB_iA. Sudutnya ialah $\measuredangle CB_iA = -\alpha_i$. Proposisi yang sama memberi

$$-\alpha_i + \measuredangle ACY_i \equiv \pi.$$

Mengurangkan dua persamaan ini menghasilkan

$$\measuredangle Y_1CY_2 = \measuredangle ACY_2 - \measuredangle ACY_1 \equiv \alpha_2 - \alpha_1.$$

Jadi

$$\measuredangle X_1AX_2 \equiv -\measuredangle Y_1CY_2.$$

Argumen memakai kongruensi sudut berarah dan tetap mencakup busur degenerat, seperti cakupan Proposisi prop:arc(angle=tan) .

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada titik C, busurnya harus dibaca sebagai CB_iA; sudut $\measuredangle CB_iA$ adalah negatif dari $\measuredangle AB_iC$. Mengabaikan pembalikan ini menghilangkan tanda minus pada kesimpulan.

Uji penguasaan Bab 9

1. **(2 poin).** Buktikan rumus sudut dua sekan, kesebangunan yang terkait, dan rumus kuasa titik, dengan pemisahan kasus titik di dalam dan di luar lingkaran.
2. **(2 poin).** Turunkan identitas enam titik, sifat garis tinggi pada lingkaran luar, dan kesamaan ruas silang pada dua tali busur sejajar.
3. **(2 poin).** Berikan satu pertanyaan matematis terukur dari video eksternal, lalu selesaikan dua konstruksi tegak lurus berbasis diameter tanpa bergantung pada video untuk pembuktiannya.
4. **(2 poin).** Buktikan kesegarisan dari dua lingkaran berdiameter dan konstruksi penggaris garis tegak lurus, lalu jelaskan konfigurasi empat titik siklik dari dua garis singgung dan satu sekan.
5. **(2 poin).** Buktikan dua konfigurasi segiempat siklik: kaki-kaki garis tinggi dan dua lingkaran berpotongan yang menghasilkan garis sejajar.
6. **(2 poin).** Lakukan konstruksi segitiga dari keliling, satu sudut, dan sisi di hadapannya, lalu perbaiki secara eksplisit celah definisi titik potong pada metode lingkaran bantu.
7. **(2 poin).** Buktikan segitiga proyeksi pada tiga garis bersudut sama adalah sama sisi dan karakterisasikan segitiga sama kaki melalui sudut dua garis berat.
8. **(2 poin).** Buktikan Teorema Garis Simson seluruhnya dengan empat segiempat siklik dan sudut berarah.
9. **(2 poin).** Lakukan konstruksi titik tiga sudut 120° dan buktikan identitas $PA + PB = PC$ pada konfigurasi sama sisi.
10. **(2 poin).** Buktikan keberadaan/ketunggalan busur dengan sinar singgung, limit sudut tali busur, dan identitas sudut dua pasang sinar singgung.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 9.1.

M2. 9.2, 9.3, dan 9.4.

M3. 9.5, 9.6, dan 9.7.

M4. 9.8, 9.9, dan 9.10.

M5. 9.11 dan 9.12.

M6. 9.13 dan 9.14.

M7. 9.15 dan 9.16.

M8. 9.17.

M9. 9.18 dan 9.19.

M10. 9.20, 9.21, dan 9.22.

M1 (2 poin). Satu poin untuk rumus sudut dan kesebangunan dengan urutan titik benar; satu poin untuk hasil kali diameter, nilai mutlak, dan kedua lokasi P.

M2 (2 poin). Satu poin untuk tiga penerapan kesebangunan yang menghasilkan identitas produk; satu poin untuk argumen lingkaran luar/AA dan kesamaan tali busur sejajar.

M3 (2 poin). Satu poin untuk pertanyaan yang spesifik dan dapat diperiksa tanpa menganggap video sebagai prasyarat; satu poin untuk kedua konstruksi serta bukti sudut siku-siku melalui diameter.

M4 (2 poin). Satu poin untuk dua sudut siku-siku dan kesegarisan serta konstruksi ortosenter; satu poin untuk lingkaran berdiameter PO pada konfigurasi singgung–sekan.

M5 (2 poin). Satu poin untuk pusat lingkaran berdiameter AB pada konfigurasi garis tinggi; satu poin untuk dua penerapan segiempat siklik dan sifat transversal.

M6 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi AXC, garis sumbu, dan verifikasi keliling; satu poin untuk membuktikan ketaksejajaran sebelum mendefinisikan Y serta memperbaiki identitas sudut secara terbuka.

M7 (2 poin). Satu poin untuk lingkaran berdiameter OX dan tiga tali busur sama; satu poin untuk segiempat siklik, ruas titik tengah, dan $AC = BC$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk keempat segiempat siklik dan empat identitas sudut; satu poin untuk penjumlahan di P dan kesimpulan garis modulo π.

M9 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi sama sisi–lingkaran dan verifikasi tiga sudut; satu poin untuk segitiga APA', kongruensi SAS, dan aditivitas panjang.

M10 (2 poin). Satu poin untuk pusat tunggal/busur terarah dan identitas limit dengan Aksioma 2c; satu poin untuk dua pengurangan persamaan sinar singgung dan tanda minus pada titik ujung terbalik.

Bab 10

Solusi dan penguasaan Bab 10: Inversi

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Keempat belas blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter10.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Bab ini memuat tepat 14 latihan: sepuluh latihan biasa, dua latihan bertanda `[!]`, dan dua latihan lanjutan. Semua 14 label historis dipertahankan, termasuk ejaan `ex:appolo-circ` dan `ex:consturuction-of-inversion`. Petunjuk untuk latihan konstruksi terakhir itu hanya berkata agar konstruksi ditebak dari gambar `pic-342`; solusi di bawah memberi alternatif statis dan netral-alat. Gambar petunjuk `pic-344` dan `pic-346` juga dideskripsikan secara eksplisit.

Edisi Indonesia sumber telah mengungkap lima klarifikasi terhadap otoritas: langkah ketertutupan dalam bukti invers lingkaran umum; penggantian satu rujukan khusus-lingkaran oleh akibat untuk lingkaran umum; pemakaian kedua arah ekuivalensi ketegaklurusan; penegasan bahwa empat titik latihan memakai satu lingkaran inversi; dan perluasan argumen preservasi–perpotongan–tukar pada akibat terakhir. Solusi ini memakai klarifikasi tersebut tanpa menyamarkannya sebagai teks asli. Proposisi tanpa label, komentar editorial `move pic up if possible`, dan fungsi ilustratif Identitas Ptolemy tetap dicatat sebagai bagian topologi sumber.

10.1 Proyeksi pada hipotenusa menghasilkan titik invers

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex001`. **Label sumber:** `ex:constr-inversion`.

Soal sumber. Misalkan Ω merupakan lingkaran yang berpusat di O. Andaikan suatu garis (PT) menyinggung Ω di T. Misalkan P' merupakan kaki garis tegak lurus dari T pada (OP). Tunjukkan bahwa P' adalah invers dari P terhadap Ω.

Petunjuk penulis. Menurut `lem:tangent` , $\angle OTP'$ adalah sudut siku-siku. Oleh karena itu, $\triangle OPT \sim \triangle OTP'$ dan, khususnya, $OP \cdot OP' = OT^2$, sehingga diperoleh hasil yang diminta.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan fakta bahwa jari-jari OT tegak lurus garis singgung PT.
2. Cocokkan sudut di O dan kedua sudut siku-siku pada dua segitiga.
3. Ubah kesebangunan menjadi identitas proyeksi pada hipotenusa.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $r = OT$, kesebangunan memberi $OP'/OT = OT/OP$; jadi $OP\,OP' = r^2$, dan P' terletak pada sinar $[OP)$.

Solusi lengkap. Karena (PT) menyinggung Ω, Lema garis singgung memberi $OT \perp PT$. Jadi $\triangle OTP$ siku-siku di T. Menurut definisi kaki tegak lurus, $TP' \perp OP$, sehingga $\triangle OTP'$ siku-siku di P'. Kedua segitiga itu juga mempunyai sudut yang sama di O, sebab $P' \in (OP)$. Kriteria AA memberi

$$\triangle OTP \sim \triangle OP'T.$$

Korespondensi sisinya menghasilkan

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'}, \qquad OP \cdot OP' = OT^2 = r^2.$$

Titik singgung dari P ada hanya ketika P berada di luar atau pada Ω. Pada kasus luar, proyeksi P' berada di ruas $[OP]$; pada kasus $P = T \in \Omega$, diperoleh $P' = P$. Maka syarat sinar dan syarat produk dalam definisi inversi keduanya terpenuhi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan $OP \cdot OP' = r^2$ saja belum cukup: letak P' pada sinar $[OP)$ juga harus diperiksa. Urutan segitiga dalam kesebangunan harus menempatkan OP berhadapan dengan OT, bukan dengan OP'.

10.2 Rasio Apollonius yang konstan pada lingkaran inversi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex002`. **Label sumber:** `ex:appolo-circ`.

Soal sumber. Misalkan P' merupakan invers dari P terhadap suatu lingkaran Γ. Andaikan $P \neq P'$. Tunjukkan bahwa nilai $\frac{PX}{P'X}$ sama untuk semua $X \in \Gamma$.

Petunjuk penulis. Misalkan O menyatakan pusat Γ. Anggap bahwa $X, Y \in \Gamma$; khususnya, $OX = OY$. Perhatikan bahwa inversi memetakan X dan Y ke dirinya masing-masing. Menurut `lem:inversion-sim` ,

$$\triangle OPX \sim \triangle OXP' \quad \text{dan} \quad \triangle OPY \sim \triangle OYP'.$$

Oleh karena itu,

$$\frac{PX}{P'X} = \frac{OP}{OX} = \frac{OP}{OY} = \frac{PY}{P'Y},$$

sehingga diperoleh hasil yang diminta.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Catat bahwa setiap titik pada lingkaran inversi merupakan titik tetap.
2. Terapkan lema kesebangunan inversi pada pasangan P, X.
3. Nyatakan hasil akhirnya hanya melalui OP dan jari-jari r.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk setiap $X \in \Gamma$,

$$\frac{PX}{P'X} = \frac{OP}{OX} = \frac{OP}{r}.$$

Solusi lengkap. Tuliskan O untuk pusat Γ dan r untuk jari-jarinya. Karena $X \in \Gamma$, invers X adalah X sendiri. Terapkan Lema `lem:inversion-sim` pada pasangan P, X; diperoleh

$$\triangle OPX \sim \triangle OXP'.$$

Sisi PX berkorespondensi dengan $P'X$, sedangkan OP berkorespondensi dengan OX. Karena itu

$$\frac{PX}{P'X} = \frac{OP}{OX} = \frac{OP}{r},$$

yang tidak bergantung pada X. Syarat $P \neq P'$ memastikan P tidak berada pada Γ, sehingga penyebut $P'X$ tidak menjadi nol untuk titik X pada lingkaran tersebut. Hasil untuk dua titik X, Y langsung memberi $PX/P'X = PY/P'Y$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Lingkaran Γ harus merupakan lingkaran inversi yang sama, bukan sekadar lingkaran yang melalui beberapa titik. Konstanta ialah OP/r; tidak perlu menganggap P berada di luar lingkaran.

10.3 Pusat lingkaran dalam menjadi ortosenter setelah inversi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex003`. **Label sumber:** `ex:incenter+inversion=orthocenter`.

Soal sumber. Misalkan A', B', dan C' merupakan bayangan dari A, B, dan C oleh inversi terhadap lingkaran dalam $\triangle ABC$. Tunjukkan bahwa pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$ merupakan ortosenter $\triangle A'B'C'$.

Petunjuk penulis. Menurut `lem:inversion-sim` ,

$$\begin{aligned} \measuredangle IA'B' &\equiv -\measuredangle IBA, & \measuredangle IB'A' &\equiv -\measuredangle IAB, \\ \measuredangle IB'C' &\equiv -\measuredangle ICB, & \measuredangle IC'B' &\equiv -\measuredangle IBC, \\ \measuredangle IC'A' &\equiv -\measuredangle IAC, & \measuredangle IA'C' &\equiv -\measuredangle ICA. \end{aligned}$$

Tinggal menerapkan teorema tentang jumlah sudut segitiga (`thm:3sum`) untuk menunjukkan bahwa $(A'I) \perp (B'C')$, $(B'I) \perp (C'A')$, dan $(C'I) \perp (B'A')$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan jari-jari lingkaran dalam sebagai ρ dan gunakan vektor satuan dari I menuju ketiga titik sudut.
2. Nyatakan IB' dan IC' melalui ρ dan sudut-separo di B, C.
3. Buktikan bahwa vektor $C' - B'$ tegak lurus arah IA, lalu gunakan simetri siklik.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ adalah vektor satuan pada sinar IA, IB, IC, maka $B' = \rho \sin(B/2)\mathbf{b}$ dan $C' = \rho \sin(C/2)\mathbf{c}$. Produk skalar $\mathbf{a} \cdot (C' - B')$ bernilai nol; secara siklik ketiga garis melalui I adalah garis tinggi.

Solusi lengkap. Ambil I sebagai titik asal dan tuliskan ρ untuk jari-jari lingkaran dalam. Misalkan $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ merupakan vektor satuan searah IA, IB, IC. Kaki tegak lurus dari I pada sisi AB membentuk segitiga siku-siku, sehingga

$$\rho = IB \sin \frac{B}{2}.$$

Karena B' adalah invers B terhadap lingkaran berjari-jari ρ,

$$IB' = \frac{\rho^2}{IB} = \rho \sin \frac{B}{2}.$$

Dengan cara yang sama,

$$B' = \rho \sin \frac{B}{2}\,\mathbf{b}, \qquad C' = \rho \sin \frac{C}{2}\,\mathbf{c}.$$

Di pusat lingkaran dalam berlaku

$$\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}, \qquad \angle AIC = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}.$$

Maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\sin \frac{C}{2}, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -\sin \frac{B}{2}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (C' - B') &= \rho \left(\sin \frac{C}{2}\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \sin \frac{B}{2}\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \\ &= \rho \left(-\sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Jadi $(A'I) = (AI)$ tegak lurus $(B'C')$. Pergantian siklik huruf memberi $(B'I) \perp (C'A')$ dan $(C'I) \perp (A'B')$. Ketiga garis tinggi $\triangle A'B'C'$ berpotongan di I, sehingga I adalah ortosenternya.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Inversi tidak mempertahankan pusat lingkaran atau panjang. Faktor ρ^2/IA berbeda untuk setiap titik sudut; bukti harus memakai hubungan dengan sudut-separo, bukan menganggap $A'B'C'$ sebangun dengan ABC.

10.4 Konstruksi penggaris dan jangka untuk titik invers

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex004`. **Label sumber:** `ex:consturuction-of-inversion`. **Penanda sumber:** `[!]`.

Soal sumber. Dengan menggunakan penggaris dan jangka, konstruksikan invers suatu titik yang diberikan terhadap suatu lingkaran yang diberikan.

Petunjuk penulis. Tebaklah konstruksinya dari gambar `pic-342`. Sebagai alternatif statis terhadap gambar: gambar itu memperlihatkan lingkaran inversi, garis pusat OP, sebuah garis singgung dari titik luar, dan proyeksi titik singgung pada garis pusat.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pisahkan kasus $P = O$, $P \in \Omega$, P di luar, dan P di dalam.
2. Untuk titik luar, konstruksikan garis singgung melalui lingkaran berdiameter OP dan gunakan Latihan 10.1.
3. Untuk titik dalam, buat garis tegak lurus OP di P, lalu balikkan konstruksi titik luar.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik O tidak mempunyai invers; titik pada Ω tetap. Untuk titik luar, kaki dari titik singgung ke OP adalah invers. Untuk titik dalam, garis singgung di titik potong lingkaran dengan garis tegak lurus melalui P memotong (OP) tepat di titik invers.

Solusi lengkap. Jika $P = O$, laporkan bahwa invers tidak terdefinisi. Jika $P \in \Omega$, hasilnya P sendiri.

Andaikan P di luar Ω. Konstruksikan titik tengah M ruas OP dan lingkaran berdiameter OP. Salah satu titik potongnya dengan Ω dinamai T. Teorema Thales memberi $\angle OTP = \pi/2$, sehingga (PT) menyinggung Ω di T. Jatuhkan garis tegak lurus dari T ke (OP) dan namai kakinya P'. Solusi Latihan 10.1 memberi $OP\,OP' = r^2$.

Sekarang andaikan P di dalam Ω dan $P \neq O$. Dirikan garis tegak lurus (m) pada (OP) melalui P, dan ambil salah satu titik $T \in m \cap \Omega$. Konstruksikan garis singgung t pada Ω di T; garis itu adalah garis melalui T yang tegak lurus OT. Namai $P' = t \cap (OP)$. Dalam segitiga siku-siku OTP', titik P adalah kaki tegak lurus dari T ke hipotenusa OP'. Teorema proyeksi memberi

$$OP \cdot OP' = OT^2 = r^2.$$

Karena P' berada pada sinar $[OP)$, titik itu tepat invers yang dicari. Seluruh langkah memakai perpotongan garis/lingkaran, garis sumbu, dan garis tegak lurus, sehingga merupakan konstruksi penggaris dan jangka.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Konstruksi garis singgung langsung hanya berlaku untuk titik luar. Untuk titik dalam, peran P dan P' harus dibalik. Kasus pusat tidak boleh dipaksa menghasilkan titik hingga.

10.5 Pusat lingkaran tidak dipetakan menjadi pusat inversnya

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex005`. **Label sumber:** `ex:inv-center not=center-inv`. **Penanda sumber:** `[!]`.

Soal sumber. Andaikan suatu lingkaran Γ' merupakan invers dari suatu lingkaran Γ yang berpusat di Q. Misalkan Q' merupakan invers dari Q. Tunjukkan bahwa Q' bukan pusat Γ'.

Petunjuk penulis. Anggap $r > 0$, $x \neq 0$, dan $y \neq 0$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{r^2}{(x+y)/2} = \left(\frac{r^2}{x} + \frac{r^2}{y}\right)/2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y.$$

Misalkan ℓ menyatakan garis yang melalui Q, Q', dan pusat inversi O. Pilih suatu isometri $\ell \to \mathbb{R}$ yang memetakan O ke 0; misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan koordinat kedua titik pada $\ell \cap \Gamma$; perhatikan bahwa $x \neq y$. Anggap r adalah jari-jari lingkaran inversi. Maka ruas kiri di atas adalah koordinat Q' dan ruas kanannya adalah koordinat pusat Γ'.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan koordinat bertanda pada garis pusat OQ.
2. Ingat bahwa pusat Q adalah titik tengah dua titik potong diameter.
3. Bandingkan invers titik tengah dengan titik tengah kedua invers.

Jawaban atau pemeriksaan. Persamaan yang diperlukan agar Q' menjadi pusat Γ' menyederhana menjadi $(x-y)^2 = 0$, bertentangan dengan dua titik potong yang berbeda.

Solusi lengkap. Karena Q' terdefinisi, $Q \neq O$. Karena Γ' diberikan sebagai lingkaran, Γ tidak melalui pusat inversi O. Garis OQ memotong Γ pada dua titik berbeda X, Y; pilih koordinat bertanda pada garis itu dengan $O = 0$, dan tuliskan koordinat X, Y sebagai x, y. Maka $x, y \neq 0$, $x \neq y$, dan koordinat pusat Q ialah $(x+y)/2$.

Jika jari-jari lingkaran inversi adalah r, koordinat bertanda setelah inversi adalah $t \mapsto r^2/t$. Jadi

$$q' = \frac{r^2}{(x+y)/2}, \qquad c' = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{x} + \frac{r^2}{y}\right),$$

di mana c' adalah koordinat titik tengah diameter $X'Y'$, yaitu pusat Γ'. Andaikan $q' = c'$. Setelah membagi dengan r^2 dan mengalikan dengan $2xy(x+y)$, diperoleh

$$4xy = (x+y)^2, \qquad (x-y)^2 = 0.$$

Ini memaksa $x = y$, bertentangan dengan $X \neq Y$. Maka Q' bukan pusat Γ'.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Koordinat harus bertanda; lingkaran dapat memotong kedua sisi O. Argumen juga memakai bahwa Γ' benar-benar lingkaran. Bila Γ melalui O, bayangannya adalah garis dan tidak mempunyai pusat lingkaran.

10.6 Batas alat lingkaran umum: pusat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex006`. **Label sumber:** `ex:circumtool`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa hanya dengan suatu alat lingkaran umum, mustahil mengonstruksi pusat suatu lingkaran yang diberikan.

Petunjuk penulis. Suatu penyelesaian diberikan dalam `sec:verification` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Perhatikan bahwa inversi memetakan titik, lingkaran umum, dan perpotongan menjadi objek dengan hubungan insidensi yang sama.
2. Karena itu setiap konstruksi yang hanya memakai alat lingkaran umum harus ekuivarian terhadap inversi.
3. Gunakan Latihan 10.5 untuk memperoleh kontradiksi terhadap pusat.

Jawaban atau pemeriksaan. Inversi mempertahankan seluruh bahasa konstruksi alat lingkaran umum, tetapi tidak memetakan pusat lingkaran ke pusat bayangannya. Jadi pusat bukan objek yang dapat ditentukan oleh bahasa alat tersebut.

Solusi lengkap. Andaikan ada prosedur hingga yang, dari sebuah lingkaran Γ, selalu menghasilkan pusatnya dengan operasi berikut saja: memilih titik yang tersedia, menggambar lingkaran umum melalui tiga titik, dan mengambil titik potong lingkaran-lingkaran umum yang telah digambar.

Pilih suatu inversi F yang memetakan Γ menjadi sebuah lingkaran Γ' dan yang pusat inversinya tidak menimbulkan objek tak terdefinisi dalam langkah-langkah hingga tersebut. Teorema invers lingkaran umum menyatakan bahwa F memetakan setiap lingkaran umum dalam konstruksi menjadi lingkaran umum. Ia juga mempertahankan hubungan "melalui" dan memetakan titik potong ke titik potong. Dengan induksi pada jumlah langkah, jika semua data awal dan semua pilihan bantu dipetakan oleh F, setiap objek hasil prosedur juga tepat merupakan bayangan F dari objek semula.

Misalkan prosedur menghasilkan pusat Q dari Γ. Prosedur yang sama pada data yang telah dipetakan harus menghasilkan $F(Q)$. Namun, menurut Latihan 10.5, invers $F(Q)$ bukan pusat Γ'. Ini bertentangan dengan anggapan bahwa prosedur selalu menghasilkan pusat. Oleh karena itu tidak ada konstruksi semacam itu dengan alat lingkaran umum saja.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pernyataan ini bukan berarti pusat tidak dapat dikonstruksi dengan penggaris dan jangka. Yang dibuktikan adalah ketidakmampuan bahasa operasi yang hanya mempertahankan struktur inversif; pusat bukan invarian inversif.

10.7 Dua lingkaran bersinggungan menjadi dua garis sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex007`. **Label sumber:** `ex:tangent-circ->parallels`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa untuk setiap pasangan lingkaran bersinggungan di bidang inversif, terdapat suatu inversi yang memetakannya menjadi sepasang garis sejajar.

Petunjuk penulis. Terapkan inversi terhadap sebuah lingkaran yang berpusat di satu-satunya titik potong kedua lingkaran; kemudian gunakan `thm:inverse` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jadikan titik singgung T sebagai pusat inversi.
2. Gunakan bahwa setiap lingkaran melalui pusat inversi menjadi garis.
3. Singkirkan kemungkinan kedua garis mempunyai titik potong hingga.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua bayangan adalah garis. Titik potong hingga pada kedua garis akan berinvers menjadi titik potong kedua lingkaran yang berbeda dari T; karena itu garis-garis tersebut sejajar.

Solusi lengkap. Misalkan kedua lingkaran Γ_1, Γ_2 bersinggungan di T. Pilih sebarang lingkaran inversi berpusat di T. Karena masing-masing Γ_i melalui pusat inversi, Teorema `thm:inverse` memetakannya menjadi suatu garis ℓ_i. Kedua garis itu berbeda karena kedua lingkaran asal berbeda.

Andaikan ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan pada titik hingga X. Invers X' akan berada pada $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ dan berbeda dari T, sebab T berkorespondensi dengan titik di tak hingga. Ini bertentangan dengan fakta bahwa dua lingkaran yang bersinggungan mempunyai tepat satu titik perpotongan. Jadi ℓ_1 dan ℓ_2 tidak berpotongan pada titik hingga; dengan kata lain, keduanya sejajar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pusat inversi harus tepat titik singgung. Jika pusat dipilih di tempat lain, kedua lingkaran umumnya tetap menjadi lingkaran dan kesimpulan sejajar tidak mengikuti.

10.8 Empat titik singgung pada satu lingkaran umum

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex008`. **Label sumber:** `ex:4-circles`.

Soal sumber. Andaikan empat lingkaran saling bersinggungan. Tunjukkan bahwa empat dari enam titik singgungnya terletak pada satu lingkaran umum.

Petunjuk penulis. Berilah label pada titik-titik persinggungan seperti pada gambar `pic-344`. Terapkan inversi yang berpusat di P. Perhatikan bahwa dua lingkaran yang bersinggungan di P menjadi garis-garis sejajar dan dua lingkaran lainnya saling bersinggungan serta bersinggungan dengan kedua garis sejajar tersebut. Perhatikan bahwa titik-titik persinggungan A', B', X', dan Y' dengan garis-garis sejajar merupakan titik-titik sudut sebuah persegi; khususnya, titik-titik itu terletak pada satu lingkaran. Titik-titik ini merupakan bayangan dari A, B, X, dan Y oleh inversi tersebut. Menurut `thm:inverse-cline` , titik-titik A, B, X, dan Y juga terletak pada satu lingkaran umum. Sebagai alternatif statis, deskripsi ini memuat seluruh informasi matematis gambar petunjuk.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih satu titik singgung P dan inversikan dengan pusat P.
2. Hitung jari-jari dua lingkaran yang sama-sama menyinggung dua garis sejajar berjarak h.
3. Tunjukkan empat titik singgung pada kedua garis membentuk persegi.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah inversi, dua lingkaran menjadi dua garis berjarak h; dua lingkaran lain berjari-jari $h/2$. Karena keduanya juga bersinggungan, empat titik singgung pada garis-garis itu membentuk persegi dan karenanya siklik.

Solusi lengkap. Namai empat lingkaran $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, dan pilih P sebagai titik singgung Γ_1 dengan Γ_2. Empat titik yang akan dipakai ialah titik singgung Γ_3 dan Γ_4 masing-masing dengan Γ_1 dan Γ_2; namai titik-titik itu A, B, X, Y.

Lakukan inversi berpusat di P. Menurut solusi Latihan 10.7, Γ_1 dan Γ_2 menjadi dua garis sejajar ℓ_1, ℓ_2. Lingkaran Γ_3 dan Γ_4 tidak melalui P, sehingga bayangannya K_3, K_4 adalah lingkaran. Keteguhan persinggungan di bawah inversi membuat masing-masing K_i bersinggungan dengan kedua garis dan keduanya saling bersinggungan.

Jika jarak ℓ_1 ke ℓ_2 adalah h, setiap lingkaran yang bersinggungan dengan keduanya mempunyai jari-jari $h/2$ dan pusat pada garis tengah sejajar. Karena K_3 dan K_4 juga bersinggungan, jarak kedua pusatnya adalah h. Jadi empat titik singgung A', B', X', Y' dengan ℓ_1, ℓ_2 membentuk persegi bersisi h. Keempatnya terletak pada lingkaran luar persegi itu.

Invers lingkaran luar tersebut merupakan sebuah lingkaran umum, dan Teorema `thm:inverse-cline` menunjukkan bahwa lingkaran umum itu memuat A, B, X, Y. Inilah empat dari enam titik singgung asal yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Empat titik yang dipilih tidak mencakup P atau titik singgung Γ_3 dengan Γ_4. Kesimpulan sumber adalah “lingkaran umum”; bayangan balik lingkaran persegi boleh saja menjadi garis.

10.9 Garis singgung bersama dalam konfigurasi tiga lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex009`. **Label sumber:** `ex:inverse`. **Jenis sumber:** latihan lanjutan.

Soal sumber. Andaikan tiga lingkaran saling bersinggungan satu sama lain dan dengan dua garis sejajar seperti ditunjukkan pada gambar. Tunjukkan bahwa (AB) menyinggung dua lingkaran di A.

Petunjuk penulis. Terapkan inversi terhadap sebuah lingkaran berpusat di A. Titik A akan dipetakan ke titik di tak hingga; dua lingkaran yang bersinggungan di A akan menjadi garis-garis sejajar, sedangkan dua garis yang semula sejajar akan menjadi lingkaran-lingkaran yang bersinggungan di A. Tinggal menunjukkan bahwa garis putus-putus (AB') pada gambar `pic-346` sejajar dengan kedua garis lainnya. Sebagai alternatif statis, gambar hasil inversi terdiri atas dua garis sejajar, dua lingkaran luar berjari-jari sama yang menyinggung keduanya, serta satu lingkaran tengah yang menyinggung dua lingkaran luar masing-masing di A dan B'.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Inversikan seluruh konfigurasi pada lingkaran berpusat di A.
2. Pada gambar hasil, gunakan bahwa dua lingkaran yang menyinggung kedua garis sejajar mempunyai jari-jari yang sama.
3. Pakai pembagian ruas pusat pada dua titik singgung untuk menunjukkan bahwa A dan B' mempunyai tinggi yang sama.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam gambar hasil inversi, dua lingkaran luar mempunyai jari-jari sama. Titik A dan B' membagi dua ruas dari pusat lingkaran tengah ke dua pusat luar dengan rasio yang sama; karena kedua pusat luar berada pada garis sejajar, (AB') juga sejajar.

Solusi lengkap. Lakukan inversi F berpusat di A. Dua lingkaran yang bersinggungan di A menjadi dua garis sejajar ℓ_1, ℓ_2. Garis (AB) melalui pusat inversi, sehingga bayangannya adalah garis yang sama; titik B berubah menjadi B'. Sesuai gambar petunjuk, cukup dibuktikan $(AB') \parallel \ell_1 \parallel \ell_2$.

Kita buktikan fakta pada konfigurasi hasil. Misalkan K_L dan K_R adalah dua lingkaran yang masing-masing menyinggung kedua garis sejajar. Jarak kedua garis adalah $2R$, sehingga kedua lingkaran berjari-jari R dan pusatnya, katakan U, V, berada pada garis tengah m yang sejajar dengan ℓ_1. Misalkan lingkaran ketiga berjari-jari s, berpusat di W, dan menyinggung K_L, K_R berturut-turut di A, B'. Karena persinggungan luar,

$$WU = WV = R + s.$$

Titik singgung membagi ruas pusat dengan faktor yang sama:

$$A = W + \frac{s}{R+s}(U - W), \qquad B' = W + \frac{s}{R+s}(V - W).$$

Maka

$$B' - A = \frac{s}{R+s}(V - U).$$

Karena $(UV) = m$ sejajar dengan ℓ_1, ℓ_2, diperoleh $(AB') \parallel \ell_1 \parallel \ell_2$.

Inversi memetakan persinggungan dan sudut antara lingkaran umum ke persinggungan dan sudut yang sama besar, mungkin dengan perubahan orientasi. Jadi fakta bahwa bayangan (AB) sejajar, yakni bersinggungan di titik tak hingga dengan kedua garis bayangan, berarti (AB) menyinggung dua lingkaran asal di A.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Gambar tidak boleh dipakai sebagai bukti kesamaan tinggi A dan B'. Kesamaan itu berasal dari kesamaan jari-jari K_L, K_R dan rasio pembagian ruas pusat yang identik. Titik B' adalah bayangan B, bukan label baru yang boleh disamakan dengan B.

10.10 Dua pasangan titik invers terletak pada satu lingkaran umum

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex010`. **Label sumber:** `ex:inscribed+inv`.

Soal sumber. Misalkan P, Q, P', dan Q' merupakan titik-titik di bidang Euklides. Andaikan P' dan Q' berturut-turut merupakan invers dari P dan Q terhadap lingkaran yang sama. Tunjukkan bahwa segiempat $PQP'Q'$ terinskripsi.

Petunjuk penulis. Terapkan `lem:inverse-4-angle` *lem: inverse-4-angle: angle* , `ex:quadrangle` , dan `thm:inscribed-angle` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Catat $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ dari definisi inversi.
2. Jika O, P, Q tidak segaris dan kedua pasangan berbeda, gambar lingkaran melalui P, P', Q lalu terapkan teorema daya titik dari O pada dua garis secan.
3. Gunakan ketunggalan titik pada sinar dengan hasil kali jarak yang ditentukan, lalu tangani kasus segaris, titik tetap, dan titik berulang.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika O dan r adalah pusat dan jari-jari inversi, maka $OP\,OP' = OQ\,OQ' = r^2$. Pada lingkaran melalui P, P', Q, teorema daya titik memaksa perpotongan kedua pada sinar $[OQ)$ tepat Q'.

Solusi lengkap. Misalkan O dan r berturut-turut pusat dan jari-jari lingkaran inversi. Definisi inversi memberi

$$P, P' \in [OP), \quad Q, Q' \in [OQ), \qquad OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'.$$

Jika $P = P'$ atau $Q = Q'$, pasangan itu menyumbang satu titik berbeda saja; seluruh daftar mempunyai paling banyak tiga titik berbeda dan karena itu termuat pada suatu lingkaran umum. Maka selanjutnya andaikan kedua pasangan berbeda.

Jika O, P, Q segaris, keempat titik berada pada garis yang sama, yang merupakan lingkaran umum. Jika tidak, terdapat satu lingkaran biasa Γ melalui tiga titik taksegaris P, P', Q. Sinar $[OP)$ memotong Γ di P, P', sedangkan sinar $[OQ)$ memotongnya di Q dan suatu titik kedua R. Teorema daya titik pada dua garis secan dari O memberi

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OR.$$

Ruas kiri sama dengan $r^2 = OQ \cdot OQ'$. Karena R dan Q' berada pada sinar yang sama dari O dan $OQ > 0$, diperoleh $OR = OQ'$ dan karenanya $R = Q'$. Jadi Γ memuat P, Q, P', Q', sebagaimana diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesimpulan tidak selalu berupa lingkaran biasa; jika semua titik segaris, lingkaran umumnya adalah garis. Jangan menambahkan asumsi ketakdegeneratan yang tidak ada pada pernyataan sumber. Bayangan lingkaran melalui P, P', Q hanya diketahui melalui P, P', Q', bukan melalui Q; jadi ketunggalan tiga titik tidak dapat diterapkan langsung pada lingkaran dan bayangannya.

10.11 Pusat dua lingkaran tegak lurus mempunyai invers yang sama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex011`. **Label sumber:** `ex:centers-of-perp-circles`.

Soal sumber. Misalkan Ω_1 dan Ω_2 merupakan dua lingkaran yang saling tegak lurus dengan pusat berturut-turut di O_1 dan O_2. Tunjukkan bahwa invers dari O_1 terhadap Ω_2 berimpit dengan invers dari O_2 terhadap Ω_1.

Petunjuk penulis. Misalkan $T \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Misalkan P adalah kaki garis tegak lurus dari T pada (O_1O_2). Tunjukkan bahwa $\triangle O_1PT \sim \triangle O_1TO_2 \sim \triangle TPO_2$. Simpulkan bahwa P berimpit dengan bayangan inversi O_1 terhadap Ω_2 dan bayangan inversi O_2 terhadap Ω_1.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan ketegaklurusan lingkaran untuk memperoleh $O_1T \perp O_2T$.
2. Terapkan kesebangunan tiga segitiga pada garis tinggi ke hipotenusa.
3. Baca kedua identitas proyeksi sebagai definisi inversi.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $r_i = O_iT$ dan $d = O_1O_2$, maka $O_1P = r_1^2/d$ dan $O_2P = r_2^2/d$. Jadi P adalah invers O_2 terhadap Ω_1 sekaligus invers O_1 terhadap Ω_2.

Solusi lengkap. Pada titik perpotongan T, garis singgung kedua lingkaran saling tegak lurus. Karena masing-masing jari-jari tegak lurus garis singgungnya, $O_1T \perp O_2T$. Jadi $\triangle O_1TO_2$ siku-siku di T.

Jatuhkan garis tinggi TP pada hipotenusa O_1O_2. Kesebangunan standar memberi

$$\triangle O_1PT \sim \triangle O_1TO_2 \sim \triangle TPO_2.$$

Teorema proyeksi pada hipotenusa menghasilkan

$$O_1P \cdot O_1O_2 = O_1T^2 = r_1^2, \qquad O_2P \cdot O_1O_2 = O_2T^2 = r_2^2.$$

Titik P berada pada ruas $[O_1O_2]$. Identitas pertama mengatakan bahwa P adalah invers O_2 terhadap lingkaran Ω_1, sedangkan identitas kedua mengatakan bahwa P adalah invers O_1 terhadap Ω_2. Kedua invers itu berimpit.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jari-jari O_1T dan O_2T juga tegak lurus, bukan sejajar, karena masing- masing merupakan rotasi 90° dari dua garis singgung yang tegak lurus. Urutan pusat pada dua identitas inversi harus dibaca dengan benar.

10.12 Lingkaran keempat juga tegak lurus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex012`. **Label sumber:** `ex:4-th-perp-circ`.

Soal sumber. Tiga lingkaran berbeda — Ω_1, Ω_2, dan Ω_3 — berpotongan di dua titik — A dan B. Andaikan suatu lingkaran Γ tegak lurus terhadap Ω_1 dan Ω_2. Tunjukkan bahwa $\Gamma \perp \Omega_3$.

Petunjuk penulis. Karena $\Gamma \perp \Omega_1$ dan $\Gamma \perp \Omega_2$, Akibat `cor:perp-inverse-clines` menyiratkan bahwa lingkaran Ω_1 dan Ω_2 dipetakan oleh inversi terhadap Γ ke dirinya masing-masing. Simpulkan bahwa A dan B saling merupakan bayangan inversi. Karena $\Omega_3 \ni A, B$, Akibat `cor:perp-inverse` menyiratkan bahwa $\Omega_3 \perp \Gamma$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Inversi terhadap Γ mempertahankan kedua himpunan Ω_1, Ω_2.
2. Buktikan bahwa inversi itu tidak dapat menetapkan A dan B satu per satu; karena itu ia menukarkannya.
3. Terapkan kriteria lingkaran umum melalui sepasang titik invers.

Jawaban atau pemeriksaan. Himpunan perpotongan $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{A, B\}$ dipertahankan. Tidak ada A atau B pada Γ, jadi inversi menukar keduanya. Lingkaran Ω_3 memuat pasangan invers itu dan karenanya tegak lurus Γ.

Solusi lengkap. Misalkan F inversi terhadap Γ. Akibat `cor:perp-inverse-clines` dalam kedua arah memberi

$$F(\Omega_1) = \Omega_1, \qquad F(\Omega_2) = \Omega_2.$$

Oleh karena itu F mempertahankan himpunan $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{A, B\}$.

Kita tunjukkan $A, B \notin \Gamma$. Andaikan, misalnya, $A \in \Gamma$. Karena Γ tegak lurus terhadap Ω_1 dan Ω_2, garis singgung Ω_1 dan Ω_2 di A keduanya tegak lurus garis singgung Γ di A, sehingga keduanya sama. Jadi Ω_1 dan Ω_2 bersinggungan di A. Dua lingkaran berbeda yang bersinggungan tidak dapat mempunyai titik potong kedua B, kontradiksi. Argumen yang sama berlaku untuk B.

Maka F tidak menetapkan A atau B secara individual. Karena ia mempertahankan pasangan $\{A, B\}$, harus berlaku $F(A) = B$ dan $F(B) = A$. Lingkaran Ω_3 melalui pasangan titik invers A, B; Akibat `cor:perp-inverse` memberi $\Omega_3 \perp \Gamma$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Preservasi himpunan dua titik belum otomatis berarti pertukaran; kemungkinan kedua titik tetap harus disingkirkan. Di sinilah fakta bahwa tiga lingkaran sumber berbeda dan mempunyai dua titik potong dipakai.

10.13 Konstruksi lingkaran umum yang tegak lurus terhadap dua lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex013`. **Label sumber:** `ex:construction-perp-clines`.

Soal sumber. Diberikan dua lingkaran Ω_1, Ω_2 dan suatu titik P yang tidak terletak pada lingkaran-lingkaran tersebut, gunakan hanya alat lingkaran umum dan inversor untuk mengonstruksi suatu lingkaran umum Γ yang melalui P, dan tegak lurus terhadap Ω_1 dan Ω_2.

Petunjuk penulis. Misalkan P_1 dan P_2 adalah bayangan inversi P terhadap Ω_1 dan Ω_2. Terapkan `cor:perp-inverse` dan `thm:perp-inverse` untuk menunjukkan bahwa lingkaran umum Γ yang melalui P, P_1, dan P_2 merupakan suatu penyelesaian.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan inversor dua kali untuk memperoleh P_1, P_2.
2. Gunakan alat lingkaran umum pada tiga titik itu.
3. Tangani secara terbuka kemungkinan $P_1 = P_2$.

Jawaban atau pemeriksaan. $\Gamma = (PP_1P_2)$ memuat pasangan invers P, P_i untuk setiap i; karena itu $\Gamma \perp \Omega_i$.

Solusi lengkap. Gunakan inversor untuk membangun

$$P_1 = I_{\Omega_1}(P), \qquad P_2 = I_{\Omega_2}(P).$$

Karena P tidak berada pada Ω_i, berlaku $P_i \neq P$. Jika P, P_1, P_2 merupakan tiga titik berbeda, gunakan alat lingkaran umum untuk menggambar satu-satunya lingkaran umum Γ yang melalui

ketiganya. Karena Γ memuat P dan inversnya P_1 terhadap Ω_1, Akibat `cor:perp-inverse` memberi $\Gamma \perp \Omega_1$. Argumen yang sama dengan P_2 memberi $\Gamma \perp \Omega_2$.

Jika $P_1 = P_2$, pilih titik bantu R yang berbeda dari P, P_1 dan gunakan alat lingkaran umum pada P, P_1, R. Lingkaran umum hasil tetap memuat pasangan invers yang sama untuk kedua lingkaran, sehingga bukti ketegaklurusan tidak berubah. Jika ketiga titik berbeda tetapi segaris, alat menghasilkan garis; garis adalah lingkaran umum yang sah.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak perlu mengonstruksi pusat lingkaran mana pun. Seluruh bukti memakai pasangan titik invers dan kriteria ketegaklurusan lingkaran umum. Kasus titik invers berimpit harus ditangani agar alat tidak diberi tiga masukan yang hanya mewakili dua titik berbeda.

10.14 Konstruksi lingkaran umum yang tegak lurus terhadap tiga lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch10-ex014`. **Label sumber:** `ex:3-construction-perp-clines`. **Jenis sumber:** latihan lanjutan.

Soal sumber. Diberikan tiga lingkaran saling lepas Ω_1, Ω_2, dan Ω_3, gunakan hanya alat lingkaran umum dan inversor untuk mengonstruksi suatu lingkaran umum Γ yang tegak lurus terhadap masing-masing lingkaran Ω_1, Ω_2, dan Ω_3. Pikirkan apa yang harus dilakukan jika dua di antara lingkaran tersebut berpotongan.

Petunjuk penulis. Semua lingkaran yang tegak lurus terhadap Ω_1 dan Ω_2 melalui suatu titik tetap P. Cobalah mengonstruksi P. Jika dua dari lingkaran tersebut berpotongan, cobalah menerapkan `cor:invese-comp` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih sepasang lingkaran yang tidak sepusat. Dengan Latihan 10.13, bangun dua lingkaran umum berbeda yang tegak lurus terhadap pasangan itu; hipotesis saling lepas membuat dua titik pembatasnya nyata.
2. Ambil dua titik potongnya P, R dan buktikan bahwa kedua inversi pasangan terpilih menukar P dan R.
3. Pilih salah satu dari P, R yang bukan titik tetap Ω_3, inversikan titik itu terhadap Ω_3, lalu gunakan alat lingkaran umum. Tangani secara terpisah kasus ketiga lingkaran sepusat.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk pasangan tidak sepusat dan saling lepas, dua anggota berbeda dari keluarga tegak-lurus bersama berpotongan pada pasangan pembatas nyata P, R, dan $I_{\Omega_1}(P) = R = I_{\Omega_2}(P)$. Pilih $L \in \{P, R\}$ yang tidak terletak pada Ω_3 dan bentuk $L_3 = I_{\Omega_3}(L)$. Lingkaran umum melalui P, R, L_3 tegak lurus terhadap ketiganya. Jika ketiganya sepusat, sebarang garis yang dibangun tegak lurus terhadap dua yang pertama sudah tegak lurus terhadap yang ketiga.

Solusi lengkap. Kita mulai dengan kasus setidaknya ada dua lingkaran yang tidak sepusat; namai pasangan itu Ω_1, Ω_2. Tulis pusat dan jari-jarinya dalam suatu sistem koordinat sebagai $O_1 = (0, 0)$,

$O_2 = (d, 0)$, a, dan b, dengan $d > 0$. Jika sebuah lingkaran K berpusat di (u, v) dan berjari-jari s tegak lurus terhadap keduanya, maka

$$u^2 + v^2 = s^2 + a^2, \qquad (u - d)^2 + v^2 = s^2 + b^2.$$

Jadi semua pusat K mempunyai koordinat pertama

$$c = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2d}.$$

Setiap K melalui dua titik $(p, 0)$ yang memenuhi

$$p^2 - 2cp + a^2 = 0.$$

Diskriminannya adalah

$$4(c^2 - a^2) = \frac{\big(d^2 - (a+b)^2\big)\big(d^2 - (a-b)^2\big)}{d^2} > 0,$$

karena dua lingkaran tidak berpotongan: baik $d > a + b$ maupun $d < |a - b|$. Dengan demikian terdapat dua titik pembatas nyata dan berbeda P, R, dan setiap lingkaran yang tegak lurus terhadap Ω_1, Ω_2 melalui keduanya. Perhitungan ini hanya membuktikan ketepatan konstruksi; pelaksanaannya tetap memakai dua alat yang diizinkan sebagai berikut.

Pilih titik bantu X, Y sehingga Latihan 10.13 menghasilkan dua lingkaran umum berbeda K_X, K_Y yang tegak lurus terhadap Ω_1, Ω_2. Pilih ulang Y bila kedua hasil berimpit. Alat-alat memberi

$$\{P, R\} = K_X \cap K_Y.$$

Kedua titik potong berbeda menurut perhitungan di atas. Inversi terhadap Ω_i menetapkan K_X dan K_Y sebagai himpunan, sehingga mempertahankan pasangan $\{P, R\}$. Ia tidak dapat menetapkan salah satunya: jika, misalnya, $P \in \Omega_i$, maka K_X dan K_Y sama-sama tegak lurus terhadap Ω_i di P, sehingga mempunyai garis singgung yang sama di P; dua lingkaran umum berbeda itu tidak mungkin sekaligus bersinggungan di P dan mempunyai titik potong kedua R. Jadi masing-masing inversi menukar pasangan tersebut dan

$$I_{\Omega_1}(P) = R = I_{\Omega_2}(P).$$

Kedua titik P, R tidak mungkin sama-sama terletak pada Ω_3: bila demikian, Ω_3 melalui pasangan invers P, R dan Akibat `cor:perp-inverse` akan membuatnya berpotongan tegak lurus dengan Ω_1 dan Ω_2, bertentangan dengan hipotesis saling lepas. Pilih $L \in \{P, R\}$ yang tidak berada pada Ω_3 dan bangun $L_3 = I_{\Omega_3}(L)$. Jika L_3 berbeda dari P, R, alat lingkaran umum menghasilkan Γ melalui P, R, L_3. Jika L_3 adalah titik pembatas yang lain, pilih sebarang titik ketiga S dan bentuk Γ melalui P, R, S; dalam cabang ini P, R sendiri sudah merupakan pasangan invers terhadap Ω_3. Dalam kedua cabang, Γ memuat pasangan invers berbeda untuk setiap Ω_i. Akibat `cor:perp-inverse` memberi

$$\Gamma \perp \Omega_1, \qquad \Gamma \perp \Omega_2, \qquad \Gamma \perp \Omega_3.$$

Tersisa kasus ketiga lingkaran sepusat. Terapkan Latihan 10.13 pada dua titik bantu berbeda. Lingkaran umum yang tegak lurus terhadap dua lingkaran sepusat berbeda harus berupa garis melalui pusat bersama: lingkaran biasa berpusat di C dan berjari-jari s tidak mungkin memenuhi sekaligus $CO^2 = s^2 + a^2$ dan $CO^2 = s^2 + b^2$ untuk $a \neq b$. Karena itu setiap garis yang dihasilkan Latihan 10.13 melalui pusat bersama dan otomatis tegak lurus terhadap lingkaran ketiga; keluarkan salah satu garis tersebut sebagai Γ.

Catatan tambahan sumber tentang dua lingkaran yang berpotongan memang memerlukan cabang berbeda, bukan pasangan pembatas nyata. Misalkan $A, B \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ dan lakukan inversi J berpusat

di A. Bayangan $\ell_1 = J(\Omega_1)$ dan $\ell_2 = J(\Omega_2)$ adalah dua garis yang berpotongan di $B' = J(B)$. Menurut cor:invese-comp , sebuah penyelesaian Γ ada tepat ketika bayangannya $J(\Gamma)$ tegak lurus terhadap ℓ_1, ℓ_2, dan $J(\Omega_3)$. Lingkaran umum yang tegak lurus terhadap kedua garis itu harus berupa lingkaran berpusat di B'. Jika $J(\Omega_3)$ berpusat di C dan berjari-jari ρ, kuadrat jari-jari satu-satunya kandidat ialah

$$s^2 = B'C^2 - \rho^2.$$

Jadi cabang berpotongan mempunyai penyelesaian nyata hanya jika B' berada di luar $J(\Omega_3)$; jika demikian, konstruksikan lingkaran berpusat di B' dengan jari-jari panjang garis singgung s, lalu petakan kembali oleh J. Jika B' berada pada atau di dalam lingkaran ketiga bayangan, kandidat degenerat atau imajiner dan tidak ada lingkaran umum nyata. Akibat cor:invese-comp membuktikan bahwa pemetaan kembali mempertahankan semua pasangan invers dan, oleh karena itu, ketiga relasi ketegaklurusan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik P, R bukan pusat Ω_1 atau Ω_2; keduanya adalah titik pembatas yang ditentukan sebagai perpotongan dua lingkaran umum bantu. Kasus tiga lingkaran sepusat tidak mempunyai dua titik pembatas hingga dan harus menghasilkan garis. Cabang dua lingkaran berpotongan tidak boleh diam-diam dianggap mempunyai pasangan pembatas nyata atau penyelesaian nyata tanpa pemeriksaan $B'C^2 - \rho^2 > 0$.

Uji penguasaan Bab 10

1. **(2 poin).** Turunkan identitas proyeksi untuk titik invers dan gunakan identitas itu untuk membuktikan rasio Apollonius yang konstan.
2. **(2 poin).** Buktikan pusat lingkaran dalam menjadi ortosenter setelah inversi, dengan pemeriksaan lengkap pada ketiga garis tinggi.
3. **(2 poin).** Berikan konstruksi penggaris-jangka titik invers untuk semua kasus yang terdefinisi dan jelaskan kasus pusat.
4. **(2 poin).** Buktikan invers pusat bukan pusat lingkaran bayangan dan gunakan ekuivarians inversif untuk membuktikan kemustahilan alat lingkaran umum.
5. **(2 poin).** Ubah dua lingkaran bersinggungan menjadi garis sejajar, lalu buktikan empat titik singgung pada konfigurasi empat lingkaran terletak pada satu lingkaran umum.
6. **(2 poin).** Selesaikan konfigurasi tiga lingkaran dan dua garis sejajar dengan bukti rasio pembagian ruas pusat pada gambar hasil inversi.
7. **(2 poin).** Buktikan dua pasangan titik invers terinskripsi, termasuk kasus segaris dan titik berulang yang diizinkan definisi lingkaran umum.
8. **(2 poin).** Buktikan dua pusat lingkaran tegak lurus mempunyai bayangan invers yang sama dan gunakan argumen pertukaran untuk lingkaran keempat.
9. **(2 poin).** Lakukan konstruksi satu lingkaran umum melalui titik yang diberikan dan tegak lurus terhadap dua lingkaran, termasuk cabang invers berimpit.
10. **(2 poin).** Konstruksikan pasangan pembatas untuk tiga lingkaran lepas, selesaikan konstruksi tegak-lurus bersama, dan jelaskan batas cabang berpotongan.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 10.1 dan 10.2.

M2. 10.3.

M3. 10.4.

M4. 10.5 dan 10.6.

M5. 10.7 dan 10.8.

M6. 10.9.

M7. 10.10.

M8. 10.11 dan 10.12.

M9. 10.13.

M10. 10.14.

M1 (2 poin). Satu poin untuk kesebangunan/proyeksi dan syarat sinar; satu poin untuk rasio $PX/P'X = OP/r$ yang benar-benar bebas dari X.

M2 (2 poin). Satu poin untuk panjang invers melalui $\rho\sin(B/2)$; satu poin untuk tiga produk skalar nol atau bukti sudut berarah yang ekuivalen.

M3 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi titik luar dengan lingkaran berdiameter OP; satu poin untuk cabang titik dalam, titik tetap, dan pusat tak terdefinisi.

M4 (2 poin). Satu poin untuk perbandingan invers-titik-tengah dengan titik-tengah-invers; satu poin untuk induksi ekuivarians seluruh langkah alat lingkaran umum.

M5 (2 poin). Satu poin untuk inversi berpusat di titik singgung dan kontradiksi titik potong kedua; satu poin untuk persegi empat titik singgung serta bayangan balik lingkaran umumnya.

M6 (2 poin). Satu poin untuk konfigurasi hasil inversi dan kesamaan jari-jari; satu poin untuk persamaan pembagian ruas yang membuktikan (AB') sejajar.

M7 (2 poin). Satu poin untuk identitas hasil kali invers dan teorema daya titik; satu poin untuk penanganan garis, titik tetap, dan titik berulang.

M8 (2 poin). Satu poin untuk tiga kesebangunan/proyeksi pada segitiga pusat; satu poin untuk preservasi himpunan $\{A, B\}$, penolakan titik tetap, dan pertukaran.

M9 (2 poin). Satu poin untuk dua invers P_1, P_2 dan lingkaran umum melalui ketiganya; satu poin untuk justifikasi kedua ketegaklurusan serta cabang $P_1 = P_2$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk dua anggota bantu dan konstruksi pasangan pembatas P, R; satu poin untuk lingkaran melalui $P, R, I_{\Omega_3}(P)$, bukti tiga ketegaklurusan, dan batas cabang berpotongan.

Bab 11

Solusi dan penguasaan Bab 11: Bidang netral

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Kesebelas blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul "Petunjuk penulis" dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter11.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Bab sumber memuat tepat 11 latihan: delapan latihan biasa, dua latihan bertanda `[!]` (salah satunya latihan kelas), dan satu latihan lanjutan. Semua label historis dipertahankan tanpa normalisasi, termasuk ejaan `ex:abs-inscibed`, tanda sama dengan pada `ex:defect=`, tanda kurang dari pada `ex:chev<side`, dan tanda tambah pada `ex:neutral-rectangle+`. Tiga gambar petunjuk `pic-348`, `pic-349`, dan `pic-1114` tidak diperlukan sebagai premis tersembunyi: solusi berikut memberikan uraian statis bagi konfigurasi yang dipakai.

Sumber menyebut dua jalur untuk Latihan `ex:neutral-quadrangle` . Solusi di bawah menutup jalur kedua secara penuh dan juga menjelaskan reduksi ke kaki tegak lurus; jalur "pagar" pada `pic-349` tetap dipertahankan sebagai petunjuk penulis. Tidak ada hasil khusus-Euklides yang digunakan diam-diam dalam solusi geometri netral.

11.1 Langkah pertama yang gagal pada teorema sudut singgung

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex001`. **Label sumber:** `ex:tangent-angle-neutral`.

Soal sumber. Bacalah bukti Teorema `thm:tangent-angle` dan tentukan pernyataan pertama yang tidak berlaku pada bidang netral.

Petunjuk penulis. Kita tidak dapat menerapkan `thm:3sum` (buktinya bergantung pada `thm:parallel-2` , yang pada gilirannya menggunakan `thm:parallel` , dan hasil tersebut bergantung pada syarat kesebangunan SAS, yang pada hakikatnya merupakan Aksioma `def:birkhoff-axioms:4`).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tandai setiap langkah bukti sebelum rumus jumlah tiga sudut.
2. Periksa mana yang hanya memakai garis singgung, ketegaklurusan, dan segitiga sama kaki.
3. Bedakan pernyataan teorema yang mungkin gagal dari langkah pertama dalam bukti yang tidak lagi tersedia.

Jawaban atau pemeriksaan. Langkah pertama yang tidak sah adalah kalimat "Dengan menerapkan Teorema `thm:3sum` pada $\triangle XOY$". Semua langkah sebelumnya berlaku pada bidang netral.

Solusi lengkap. Dalam bukti sumber, fakta bahwa jari-jari OX tegak lurus garis singgung (XQ) mengikuti lema garis singgung, yang merupakan hasil netral. Kesamaan panjang $OX = OY$ menjadikan $\triangle XOY$ sama kaki; Teorema `thm:isos` dan kesamaan kedua sudut alas juga berlaku pada bidang netral. Jadi, sampai pada identitas

$$\measuredangle QXY + \measuredangle YXO \equiv \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \measuredangle YXO = \measuredangle OYX,$$

tidak ada Aksioma `def:birkhoff-axioms:4` yang dipakai.

Langkah berikutnya menyatakan

$$\pi \equiv \measuredangle YXO + \measuredangle OYX + \measuredangle XOY$$

dengan menerapkan Teorema `thm:3sum` . Inilah langkah pertama yang tidak tersedia dalam geometri netral. Bukti Teorema `thm:3sum` memakai sifat transversal `thm:parallel-2` ; rantai ketergantungannya berlanjut ke `thm:parallel` dan akhirnya ke Aksioma `def:birkhoff-axioms:4` . Dalam bidang netral kita hanya mempunyai ketaksamaan jumlah sudut Teorema `thm:3sum-a` , bukan persamaan Euklides. Karena itu, penggantian mekanis dengan teorema netral tidak menghasilkan kesimpulan sudut singgung yang sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Yang diminta ialah langkah pertama yang gagal, bukan pernyataan pertama yang terlihat "Euklides". Lema garis singgung dan teorema segitiga sama kaki tetap sah. Sebaliknya, fakta bahwa sebuah rumus benar pada bidang Euklides tidak membuat bukti yang memakai jumlah sudut π sah pada semua bidang netral.

11.2 Garis bagi yang juga median memaksa segitiga sama kaki

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex002`. **Label sumber:** `ex:abs-bisect=median`.

Soal sumber. Berikan bukti Latihan `ex:bisect=median` yang berlaku pada bidang netral.

Petunjuk penulis. Misalkan D merupakan titik tengah $[BC]$. Andaikan (AD) merupakan garis bagi sudut di A.

Misalkan $A' \in [AD)$ merupakan hasil pencerminan A terhadap D. Perhatikan bahwa $\triangle CAD \cong \triangle BA'D$. Khususnya, $\measuredangle BAA' = \measuredangle AA'B$. Terapkan `thm:isos` pada $\triangle ABA'$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Cerminkan A terhadap titik tengah D, sehingga $DA = DA'$.
2. Gunakan sudut bertolak belakang di D dan $CD = DB$ untuk memperoleh satu pasangan segitiga kongruen.
3. Ubah kesamaan sudut garis bagi menjadi kesamaan dua sudut alas pada $\triangle ABA'$.

Jawaban atau pemeriksaan. Kekongruenan $\triangle CAD \cong \triangle BA'D$ memberi $CA = BA'$. Garis bagi dan kekongruenan memberi dua sudut alas yang sama pada $\triangle ABA'$, sehingga $AB = BA'$. Jadi $AB = AC$.

Solusi lengkap. Misalkan D titik tengah $[BC]$ dan andaikan (AD) membagi dua sudut di A. Cerminkan A terhadap D dan namai bayangannya A'. Maka D adalah titik tengah $[AA']$, sehingga

$$CD = DB, \qquad DA = DA'.$$

Sudut CDA dan BDA' bertolak belakang dan mempunyai ukuran yang sama. Kriteria SAS memberi

$$\triangle CDA \cong \triangle BDA'.$$

Dengan korespondensi $C \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow A'$, kita memperoleh

$$CA = BA', \qquad |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BA'D|.$$

Karena A, D, A' segaris dan A' berada pada sinar $[AD)$, sudut BAA' sama dengan sudut BAD. Sifat garis bagi memberi $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DAC|$, sedangkan kekongruenan di atas memberi $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle AA'B|$. Jadi dua sudut alas pada $\triangle ABA'$ sama besar. Kebalikan Teorema `thm:isos` , yang berlaku pada bidang netral, menghasilkan

$$AB = BA'.$$

Menggabungkannya dengan $BA' = CA$ memberi $AB = AC$. Maka segitiga semula sama kaki, tanpa memakai teorema perbandingan garis bagi atau kesebangunan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memakai Lema rasio garis bagi, karena bukti lema itu menggunakan kesebangunan dan Aksioma `def:birkhoff-axioms:4` . Kekongruenan yang benar adalah $\triangle CDA \cong \triangle BDA'$; urutan titik harus dipertahankan agar kesimpulan $CA = BA'$ dan sudut alas yang dipakai tidak tertukar.

11.3 Identitas sudut segiempat tali busur pada bidang netral

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex003`. **Label sumber:** `ex:abs-inscibed`.

Soal sumber. Misalkan $ABCD$ merupakan segiempat tali busur pada suatu bidang netral. Tunjukkan bahwa

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA \equiv \measuredangle BCD + \measuredangle DAB.$$

Petunjuk penulis. Pernyataan tersebut jelas jika A, B, C, dan D terletak pada satu garis. Dalam kasus lainnya, misalkan O menyatakan pusat lingkaran luar. Terapkan `thm:isos` pada $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, dan $\triangle DOA$.

(Pada bidang Euklides, pernyataan tersebut mengikuti dari `cor:inscribed-quadrangle` dan `ex:quadrangle` , tetapi pernyataan-pernyataan itu tidak dapat digunakan pada bidang netral.)

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Sisipkan sinar dari setiap titik sudut ke pusat O dalam keempat sudut segiempat.
2. Pasangkan sudut alas dari empat segitiga sama kaki yang berjari-jari.
3. Jumlahkan pasangan itu secara siklik; jangan memakai jumlah sudut segitiga.

Jawaban atau pemeriksaan. Empat kesamaan sudut alas ialah

$$\measuredangle ABO = \measuredangle OAB, \quad \measuredangle BCO = \measuredangle OBC, \quad \measuredangle CDO = \measuredangle OCD, \quad \measuredangle DAO = \measuredangle ODA.$$

Setelah keempat sudut segiempat diuraikan melalui O, kedua ruas identitas memuat empat suku yang sama.

Solusi lengkap. Jika keempat titik segaris, setiap sudut yang muncul merupakan sudut lurus atau nol dengan aritmetika yang sama pada kedua ruas; identitas berlaku. Andaikan sekarang segiempat terletak pada lingkaran biasa berpusat di O. Karena

$$OA = OB = OC = OD,$$

Teorema `thm:isos` pada empat segitiga berjari-jari memberi kesamaan sudut alas

$$\begin{aligned} \measuredangle ABO &= \measuredangle OAB, \quad \measuredangle BCO = \measuredangle OBC, \\ \measuredangle CDO &= \measuredangle OCD, \quad \measuredangle DAO = \measuredangle ODA. \end{aligned}$$

Semua kesamaan dipahami sebagai kongruensi ukuran sudut berarah; perubahan wakil sebesar 2π tidak memengaruhi kesimpulan.

Dengan aksioma penjumlahan sudut, uraikan sudut-sudut melalui sinar ke pusat:

$$\begin{aligned} \measuredangle ABC &\equiv \measuredangle ABO + \measuredangle OBC, \\ \measuredangle BCD &\equiv \measuredangle BCO + \measuredangle OCD, \\ \measuredangle CDA &\equiv \measuredangle CDO + \measuredangle ODA, \\ \measuredangle DAB &\equiv \measuredangle DAO + \measuredangle OAB. \end{aligned}$$

Ganti $\measuredangle ABO$ dengan $\measuredangle OAB$, $\measuredangle OBC$ dengan $\measuredangle BCO$, dan dua pasangan lain secara serupa. Kedua jumlah

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA \quad \text{dan} \quad \measuredangle BCD + \measuredangle DAB$$

menjadi jumlah komutatif dari empat suku yang sama. Identitas terbukti tanpa Teorema `thm:3sum`, teorema sudut singgung, atau teorema sudut keliling.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memakai pernyataan Euklides bahwa sudut-sudut berhadapan berjumlah π; itulah justru pernyataan yang tidak tersedia. Yang dipakai hanya kesamaan sudut alas pada empat segitiga sama kaki dan penjumlahan sudut berarah. Pusat O bukan diasumsikan berada di dalam segiempat.

11.4 Kriteria kesejajaran dari dua sudut pada bidang netral

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex004`. **Label sumber:** `ex:parallel-abs`. **Penanda sumber:** `[!]`.

Soal sumber. Andaikan A, B, C, dan D merupakan titik-titik pada suatu bidang netral sedemikian sehingga

$$2 \cdot \measuredangle ABC + 2 \cdot \measuredangle BCD \equiv 0.$$

Tunjukkan bahwa $(AB) \parallel (CD)$.

Petunjuk penulis. Dengan argumen kontradiksi, andaikan $2 \cdot (\measuredangle ABC + \measuredangle BCD) \equiv 0$, tetapi $(AB) \nparallel (CD)$. Misalkan $Z \in (AB) \cap (CD)$. Perhatikan bahwa

$$2 \cdot \measuredangle ABC \equiv 2 \cdot \measuredangle ZBC, \qquad 2 \cdot \measuredangle BCD \equiv 2 \cdot \measuredangle BCZ.$$

Terapkan `prop:2sum` pada $\triangle ZBC$ dan cobalah memperoleh kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika dua garis berpotongan, ganti A, D oleh titik potong Z di dalam ukuran sudut; penggandaan menghapus selisih π antarsinar.
2. Pilih wakil dua sudut dalam $\triangle ZBC$ yang mempunyai tanda sama.
3. Gabungkan batas ketat dua sudut dengan fakta bahwa dua kali jumlahnya kongruen nol.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika garis berpotongan, tulis $\theta = \measuredangle ZBC$ dan $\phi = \measuredangle BCZ$ dengan wakil sudut dalam yang bertanda sama. Maka $0 < |\theta + \phi| < \pi$, sedangkan hipotesis memberi $2(\theta + \phi) \equiv 0$, suatu kontradiksi.

Solusi lengkap. Andaikan, untuk memperoleh kontradiksi, (AB) dan (CD) tidak sejajar. Keduanya berpotongan di suatu titik Z. Karena A, B, Z segaris, sinar $[BA)$ sama dengan atau berlawanan dengan sinar $[BZ)$. Jadi $\measuredangle ABC$ dan $\measuredangle ZBC$ berbeda sebesar 0 atau π; setelah dikalikan dua,

$$2\measuredangle ABC \equiv 2\measuredangle ZBC.$$

Dengan alasan yang sama pada garis (CD),

$$2\measuredangle BCD \equiv 2\measuredangle BCZ.$$

Hipotesis karena itu memberi

$$2(\measuredangle ZBC + \measuredangle BCZ) \equiv 0. \tag{1}$$

Jika B, C, Z segaris, maka $(AB) = (CD)$; menurut konvensi sumber, setiap garis sejajar dengan dirinya sendiri, sehingga kesimpulan sudah berlaku. Jadi, di bawah andaian kontradiksi bahwa kedua garis tidak sejajar, $\triangle ZBC$ tak degenerat. Pilih wakil sudut dalam

$$\theta = \measuredangle ZBC, \qquad \phi = \measuredangle BCZ.$$

Teorema tanda sudut segitiga memberi tanda yang sama untuk θ dan ϕ, dan keduanya tidak nol. Proposisi `prop:2sum` memberi

$$0 < |\theta| + |\phi| = |\theta + \phi| < \pi. \tag{2}$$

Namun, (1) mengatakan bahwa $\theta + \phi$ merupakan kelipatan π. Tidak ada kelipatan π yang mempunyai nilai mutlak ketat di antara 0 dan π. Ini bertentangan dengan (2). Maka titik Z tidak ada, sehingga $(AB) \parallel (CD)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sifat transversal `thm:parallel-2` tidak boleh dipakai karena sifat itu bergantung pada aksioma Euklides yang dihapus. Kesimpulan dari $2x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ adalah $x \equiv 0 \pmod{\pi}$, bukan selalu $x = 0$; batas ketat Proposisi `prop:2sum` yang menyingkirkan semua kemungkinan kelipatan π.

11.5 Syarat kekongruenan sisi-sudut-sudut dalam geometri netral

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex005`. **Label sumber:** `ex:SAA`.

Soal sumber. Buktikan syarat kekongruenan sisi-sudut-sudut dalam geometri netral. Dengan kata lain, misalkan ABC dan $A'B'C'$ merupakan dua segitiga pada suatu bidang netral; andaikan $\triangle A'B'C'$ tak degenerat. Tunjukkan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ jika

$$AB = A'B', \qquad \measuredangle ABC = \pm \measuredangle A'B'C', \qquad \measuredangle BCA = \pm \measuredangle B'C'A'.$$

Petunjuk penulis. Pilih $C'' \in [B'C')$ sedemikian sehingga $B'C'' = BC$. Gunakan SAS untuk menunjukkan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$. Simpulkan bahwa $\measuredangle B'C'A' = \measuredangle B'C''A'$.

Gambar `pic-348` menunjukkan B', C', C'' pada satu sinar dan A' di luar garis itu. Karena itu, cukup ditunjukkan bahwa $C'' = C'$. Jika $C' \neq C''$, terapkan `prop:2sum` pada $\triangle A'C'C''$ dan cobalah memperoleh kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Salin panjang BC pada sinar $[B'C')$ dan gunakan SAS dengan sudut di B.
2. Nyatakan kesamaan sudut di C' dan C'' sebagai dua sudut yang, jika titiknya berbeda, mengisi satu sudut lurus.
3. Gunakan ketaksamaan ketat dua sudut segitiga untuk menolak jumlah π.

Jawaban atau pemeriksaan. SAS memberi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$. Jika $C'' \neq C'$, dua sudut dalam $\triangle A'C'C''$ di C' dan C'' mempunyai jumlah nilai mutlak π, bertentangan dengan `prop:2sum` . Jadi $C'' = C'$ dan kedua segitiga yang diminta kongruen.

Solusi lengkap. Pada sinar $[B'C')$, pilih satu-satunya titik C'' dengan $B'C'' = BC$. Data sisi dan sudut di B memberi

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C'', \qquad |\measuredangle ABC| = |\measuredangle A'B'C''|.$$

Kriteria SAS, dengan kemungkinan isometri langsung atau tak langsung sesuai tanda sudut, menghasilkan

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''. \tag{3}$$

Khususnya,

$$|\measuredangle BCA| = |\measuredangle B'C''A'|.$$

Data SAA semula memberi

$$|\measuredangle B'C'A'| = |\measuredangle BCA| = |\measuredangle B'C''A'|. \tag{4}$$

Andaikan $C' \neq C''$. Karena keduanya berada pada sinar yang sama dari B', titik B', C', C'' segaris dan $\triangle A'C'C''$ tak degenerat: A' tidak berada pada $(B'C')$ karena $\triangle A'B'C'$ tak degenerat. Di salah

satu dari C', C'', sinar menuju titik lainnya searah sinar menuju B'; di titik yang lain kedua sinar itu berlawanan. Akibatnya, dua sudut dalam $\triangle A'C'C''$ pada C' dan C'' mempunyai nilai mutlak berturut-turut t dan $\pi - t$, dengan t adalah nilai bersama dalam (4). Jadi jumlah kedua sudut itu tepat π. Ini bertentangan dengan Proposisi `prop:2sum` , yang mengharuskan jumlah dua sudut segitiga tak degenerat ketat lebih kecil dari π.

Maka $C' = C''$. Mengganti C'' oleh C' dalam (3) memberi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, sebagaimana diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan melengkapi dua sudut yang diketahui menjadi sudut ketiga dengan rumus jumlah sudut π; rumus itu tidak berlaku pada bidang netral. Tanda $\pm$ pada data sudut bukan empat kasus terpisah: SAS mengizinkan kekongruenan langsung atau tak langsung, sedangkan bukti ketunggalan memakai nilai mutlak sudut dalam.

11.6 Titik dalam pada sisi tidak dapat terjauh dari kedua ujung

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex006`. **Label sumber:** `ex:chev<side`.

Soal sumber. Andaikan titik D terletak di antara titik sudut A dan B dari $\triangle ABC$ pada suatu bidang netral. Tunjukkan bahwa

$$CD < CA \quad \text{atau} \quad CD < CB.$$

Petunjuk penulis. Gunakan `ex:side-angle` dan `prop:2sum` .

Sebagai alternatif, ikuti penyelesaian `ex:inside-outside` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Andaikan kedua ketaksamaan yang diminta gagal.
2. Ubah dua perbandingan sisi pada $\triangle ACD$ dan $\triangle BCD$ menjadi perbandingan sudut.
3. Bandingkan jumlahnya dengan sudut lurus di D dan dengan dua sudut $\triangle ABC$.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $CD \geq CA$ dan $CD \geq CB$, teorema sisi-sudut memberi

$$|\measuredangle CAD| \geq |\measuredangle ADC|, \qquad |\measuredangle CBD| \geq |\measuredangle BDC|.$$

Ruas kanan berjumlah π, sedangkan ruas kiri adalah dua sudut $\triangle ABC$ dan harus berjumlah kurang dari π.

Solusi lengkap. Andaikan kesimpulan salah. Maka

$$CD \geq CA \qquad \text{dan} \qquad CD \geq CB. \tag{5}$$

Pada $\triangle ACD$, sisi CD berhadapan dengan sudut di A, sedangkan sisi CA berhadapan dengan sudut di D. Latihan `ex:side-angle` memberi ekuivalensi untuk perbandingan ketat; bersama trikotomi dan Teorema `thm:isos` pada kasus sama panjang, (5) menyiratkan

$$|\measuredangle CAD| \geq |\measuredangle ADC|. \tag{6}$$

Dengan cara yang sama pada $\triangle BCD$,

$$|\measuredangle CBD| \geq |\measuredangle BDC|. \tag{7}$$

Karena D terletak di antara A dan B, sinar $[DA)$ dan $[DB)$ berlawanan. Dua sudut dalam di D yang dipotong oleh sinar $[DC)$ karena itu saling berpelurus:

$$|\measuredangle ADC| + |\measuredangle BDC| = \pi. \tag{8}$$

Selain itu, sinar $[AD)$ sama dengan $[AB)$ dan sinar $[BD)$ sama dengan $[BA)$, sehingga

$$|\measuredangle CAD| = |\measuredangle CAB|, \qquad |\measuredangle CBD| = |\measuredangle CBA|.$$

Menjumlahkan (6)–(8) memberi

$$|\measuredangle CAB| + |\measuredangle CBA| \geq \pi.$$

Ini bertentangan dengan Proposisi `prop:2sum` pada $\triangle ABC$. Jadi sekurang-kurangnya satu ketaksamaan dalam (5) gagal; yakni, $CD < CA$ atau $CD < CB$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ketaksamaan segitiga saja hanya memberi $CA + CB > AB$ dan tidak membandingkan CD dengan kedua sisi. Ketika satu pasangan sisi sama panjang, gunakan kasus kesamaan Teorema `thm:isos` ; jangan memaksa versi ketat `ex:side-angle` . Sudut yang berjumlah π berada di D, bukan dua sudut di A dan B.

11.7 Sisi puncak segiempat dua-siku tidak lebih pendek

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex007`. **Label sumber:** `ex:neutral-quadrangle`.

Soal sumber. Misalkan $ABCD$ merupakan suatu segiempat pada bidang netral. Andaikan $\angle DAB$ dan $\angle ABC$ merupakan sudut siku-siku. Tunjukkan bahwa $AB \leq CD$.

Petunjuk penulis. Tetapkan $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, dan $d = DA$; kita perlu menunjukkan bahwa $c \geq a$. Tirulah bukti `thm:3sum-a` untuk pagar yang ditunjukkan pada `pic-349`, yang tersusun dari salinan-salinan segiempat $ABCD$. Anda akan memperoleh

$$a \leq c + \frac{d}{n}$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, dan hal ini menyiratkan ketaksamaan yang diperlukan.

Cara alternatif. Menurut `lem:perp<oblique` , kita dapat mengandaikan bahwa $\angle BCD$ siku-siku. Gunakan `thm:3sum-a` untuk menunjukkan bahwa $|\measuredangle CBD| \geq |\measuredangle ADB|$. Gunakan `prop:angle-side` dan konstruksi dalam bukti netral `thm:hypotenuse-leg` untuk menunjukkan bahwa $2c \geq 2a$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jatuhkan tegak lurus dari D ke (BC); ruas tegak lurus tidak lebih panjang daripada CD, sehingga cukup menangani tiga sudut siku-siku.
2. Bandingkan dua sudut yang dibentuk diagonal BD memakai batas jumlah tiga sudut.
3. Gandakan kedua kaki yang hendak dibandingkan dengan pencerminan pada titik kaki, lalu bandingkan alas dua segitiga sama kaki.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah reduksi ke $\angle BCD$ siku-siku, diperoleh $|\measuredangle CBD| \geq |\measuredangle ADB|$. Pencerminan D terhadap C dan B terhadap A membentuk dua segitiga sama kaki dengan sisi sama BD, sudut puncak berturut-turut dua kali sudut tersebut, dan alas $2CD$, $2AB$. Proposisi `prop:angle-side` memberi $2CD \geq 2AB$.

Solusi lengkap. Jatuhkan garis tegak lurus dari D ke garis (BC) dan namai kaki tegak lurusnya C_0. Lema `lem:perp<oblique` memberi

$$DC \geq DC_0.$$

Karena A dan D berada pada satu garis yang tegak lurus (AB), sedangkan B dan C_0 berada pada satu garis yang juga tegak lurus (AB), kedua garis itu tidak berpotongan: sebuah perpotongan akan membentuk segitiga dengan dua sudut siku-siku, bertentangan dengan `prop:2sum` . Maka ABC_0D adalah segiempat tiga-siku yang terurut. Cukup membuktikan $AB \leq DC_0$; setelah itu $AB \leq DC_0 \leq DC$. Untuk menyederhanakan notasi, tulis kembali C untuk C_0.

Letakkan

$$\alpha = |\measuredangle ADB|, \qquad \beta = |\measuredangle CBD|.$$

Pada $\triangle ABD$, sudut di A siku-siku, sehingga Teorema `thm:3sum-a` memberi

$$|\measuredangle ABD| + \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Diagonal BD membagi sudut siku-siku ABC, jadi

$$|\measuredangle ABD| + \beta = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Dari (9)–(10), $\beta \geq \alpha$.

Proposisi `prop:2sum` pada kedua segitiga siku-siku juga memberi $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Karena itu, sudut puncak 2α dan 2β dalam konstruksi berikut merupakan sudut dalam tak degenerat dan dapat dibandingkan langsung.

Cerminkan D terhadap C dan namai bayangannya D'. Karena $BC \perp DD'$ dan C titik tengah $[DD']$, diperoleh $BD = BD'$; jadi $\triangle BDD'$ sama kaki, beralas $DD' = 2CD$. Kekongruenan dua bagian di sekitar BC menunjukkan bahwa sudut puncaknya mempunyai nilai mutlak 2β. Demikian pula, cerminkan B terhadap A dan namai bayangannya B'. Segitiga DBB' sama kaki dengan $DB = DB'$, alas $BB' = 2AB$, dan sudut puncak bernilai mutlak 2α.

Kedua segitiga sama kaki itu mempunyai dua sisi yang sama panjang, semuanya sepanjang BD. Jika $\beta = \alpha$, SAS membuat keduanya kongruen dan $2CD = 2AB$. Jika $\beta > \alpha$, Proposisi `prop:angle-side` memberi bahwa alas yang berhadapan dengan sudut puncak 2β lebih panjang:

$$2CD > 2AB.$$

Dalam kedua kasus $CD \geq AB$, dan reduksi awal menyelesaikan segiempat semula.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pengurangan ke sudut siku-siku ketiga tidak berarti titik C semula sudah merupakan kaki tegak lurus; Lema `lem:perp<oblique` yang menjaga arah ketaksamaan. Jangan menganggap dua garis yang sama-sama tegak lurus garis ketiga berjarak konstan—itu merupakan sifat Euklides yang hendak diuji. Pencerminan dipakai untuk menggandakan kaki, bukan untuk menganggap dua segitiga siku-siku langsung kongruen.

11.8 Defek bersifat aditif ketika segitiga dibelah

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex008`. **Label sumber:** `ex:defect`. **Penanda sumber:** `[!]`, latihan kelas.

Soal sumber. Misalkan $\triangle ABC$ merupakan segitiga tak degenerat pada suatu bidang netral. Andaikan D terletak di antara A dan B. Tunjukkan bahwa

$$\text{defek}(\triangle ABC) = \text{defek}(\triangle ADC) + \text{defek}(\triangle DBC).$$

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa

$$|\measuredangle ADC| + |\measuredangle CDB| = \pi.$$

Kemudian terapkan definisi defek.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan definisi defek untuk ketiga segitiga.
2. Pasangkan sudut di A, di B, dan dua bagian sudut di C.
3. Gunakan bahwa dua sudut di D berpelurus untuk menghapus satu salinan π.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam jumlah dua defek kecil, sudut di D menyumbang π, sedangkan dua sudut di C menjumlah menjadi sudut ACB. Jadi $2\pi - \pi$ dan seluruh sudut sisanya tepat menghasilkan definisi defek $\triangle ABC$.

Solusi lengkap. Karena D terletak di ruas terbuka AB, sinar $[DA)$ dan $[DB)$ berlawanan. Maka dua sudut dalam di D berpelurus:

$$|\measuredangle ADC| + |\measuredangle CDB| = \pi. \tag{11}$$

Sinar $[CD)$ berada di dalam sudut ACB, sehingga

$$|\measuredangle ACD| + |\measuredangle DCB| = |\measuredangle ACB|. \tag{12}$$

Selain itu, $[AD) = [AB)$ dan $[BD) = [BA)$, jadi sudut pada A dan B dalam dua segitiga kecil sama dengan sudut yang bersesuaian pada segitiga besar.

Ekspansi definisi memberi

$$\begin{aligned}&\text{defek}(\triangle ADC) + \text{defek}(\triangle DBC)\\ &\quad = 2\pi - |\measuredangle CAD| - |\measuredangle ACD| - |\measuredangle ADC|\\ &\qquad\quad - |\measuredangle DBC| - |\measuredangle BCD| - |\measuredangle CDB|.\end{aligned}$$

Gunakan (11), (12), dan kesamaan sudut di A, B. Ruas kanan menjadi

$$\pi - |\measuredangle CAB| - |\measuredangle ABC| - |\measuredangle BCA| = \text{defek}(\triangle ABC).$$

Inilah identitas yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Defek tidak dijumlahkan hanya karena luas tampak aditif; pada tahap ini hubungan kelengkungan–luas belum boleh dipakai. Bukti berasal langsung dari definisi dan dua identitas sudut. Nilai mutlak penting karena ukuran sudut berarah dapat seluruhnya bertanda negatif.

11.9 Defek dipertahankan oleh konstruksi pencerminan titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex009`. **Label sumber:** `ex:defect=`.

Soal sumber. Misalkan ABC merupakan segitiga tak degenerat pada suatu bidang netral. Andaikan X merupakan hasil pencerminan C terhadap titik tengah M dari $[AB]$. Tunjukkan bahwa

$$\operatorname{defek}(\triangle ABC) = \operatorname{defek}(\triangle AXC).$$

Petunjuk penulis. Tunjukkan bahwa $\triangle AMX \cong \triangle BMC$. Terapkan `ex:defect` pada $\triangle ABC$ dan $\triangle AXC$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan dua pasangan ruas sama panjang dan sudut bertolak belakang di M.
2. Belah $\triangle ABC$ pada titik $M \in [AB]$.
3. Belah $\triangle AXC$ pada titik yang sama, kini dengan $M \in [XC]$, lalu batalkan dua defek segitiga kongruen.

Jawaban atau pemeriksaan. $AM = MB$, $MX = MC$, dan sudut AMX, BMC bertolak belakang; jadi dua segitiga itu kongruen dan berdefek sama. Aditivitas memberi

$$\operatorname{defek}(ABC) = \operatorname{defek}(AMC) + \operatorname{defek}(BMC) = \operatorname{defek}(AMC) + \operatorname{defek}(AMX) = \operatorname{defek}(AXC).$$

Solusi lengkap. Karena M titik tengah $[AB]$,

$$AM = MB.$$

Karena X adalah cerminan C terhadap M, titik M juga merupakan titik tengah $[CX]$, sehingga

$$MX = MC.$$

Garis (AB) dan (CX) berpotongan di M; sudut AMX dan BMC bertolak belakang. Kriteria SAS menghasilkan

$$\triangle AMX \cong \triangle BMC. \tag{13}$$

Defek hanya bergantung pada tiga ukuran sudut, sehingga segitiga kongruen mempunyai defek yang sama:

$$\operatorname{defek}(\triangle AMX) = \operatorname{defek}(\triangle BMC). \tag{14}$$

Karena M terletak di antara A dan B, Latihan `ex:defect` pada $\triangle ABC$ memberi

$$\operatorname{defek}(\triangle ABC) = \operatorname{defek}(\triangle AMC) + \operatorname{defek}(\triangle BMC). \tag{15}$$

Karena M terletak di antara X dan C, latihan yang sama pada $\triangle AXC$ memberi

$$\operatorname{defek}(\triangle AXC) = \operatorname{defek}(\triangle AMX) + \operatorname{defek}(\triangle AMC). \tag{16}$$

Ruas kanan (15) dan (16) sama menurut (14). Jadi defek kedua segitiga besar sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Segitiga ABC dan AXC tidak diklaim kongruen; yang kongruen hanyalah dua potongan AMX dan BMC. Saat menerapkan aditivitas kedua kalinya, titik M berada pada sisi XC, bukan pada sisi AX. Jangan menganggap defek invarian di bawah transformasi yang bukan isometri tanpa pembuktian ini.

11.10 Sisi berhadapan pada persegi panjang netral sama panjang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch11-ex010`. **Label sumber:** `ex:neutral-rectangle`.

Soal sumber. Misalkan $ABCD$ merupakan suatu persegi panjang pada bidang netral; yakni, $ABCD$ merupakan segiempat yang semua sudutnya siku-siku. Tunjukkan bahwa $AB = CD$.

Petunjuk penulis. Amati bahwa jumlah total nilai mutlak ukuran sudut dalam $\triangle ABC$ dan $\triangle CDA$ sekurang-kurangnya 2π. Terapkan `thm:3sum-a` untuk menunjukkan bahwa

$$\operatorname{defek}(\triangle ABC) = \operatorname{defek}(\triangle CDA) = 0.$$

Gunakan hasil ini untuk menunjukkan bahwa $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$ dan $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$. Menurut ASA, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, dan khususnya $AB = CD$.

Perhatikan bahwa hasil ini juga mengikuti dari `ex:neutral-quadrangle` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Belah persegi panjang dengan diagonal AC dan hitung sumbangan empat sudut siku-sikunya pada dua segitiga.
2. Karena masing-masing jumlah sudut paling besar π, buktikan bahwa keduanya harus tepat π.
3. Cocokkan dua pasangan sudut pada diagonal dan gunakan ASA.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua jumlah sudut segitiga bersama-sama sama dengan 2π, sedangkan masing-masing paling besar π; keduanya jadi tepat π. Pembelahan sudut siku-siku di A, C memberi dua pasangan sudut silang yang sama. ASA dengan sisi bersama AC menghasilkan $AB = CD$.

Solusi lengkap. Tarik diagonal AC. Tuliskan

$$\alpha = |\measuredangle CAB|, \quad \beta = |\measuredangle BCA|, \quad \gamma = |\measuredangle ACD|, \quad \delta = |\measuredangle CAD|.$$

Diagonal membagi sudut siku-siku di A dan C, sehingga

$$\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Sudut di B dan D juga siku-siku. Karena itu, jumlah seluruh sudut dari dua segitiga adalah

$$(\alpha + \beta + \tfrac{\pi}{2}) + (\gamma + \delta + \tfrac{\pi}{2}) = 2\pi. \tag{18}$$

Teorema `thm:3sum-a` membatasi setiap tanda kurung pada (18) oleh π. Karena jumlah keduanya sudah 2π, kedua batas tercapai:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \qquad \gamma + \delta = \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Bandingkan (17) dan (19). Diperoleh

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Dengan kata lain, dua sudut pada ujung diagonal AC dalam $\triangle ABC$ sama dengan dua sudut yang bersesuaian dalam $\triangle CDA$. Sisi AC adalah sisi bersama. Syarat thm:ASA yang berlaku dalam geometri netral memberi

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Sisi AB berkorespondensi dengan CD, sehingga $AB = CD$.

Sebagai pemeriksaan singkat, Latihan ex:neutral-quadrangle pada dua arah memberi $AB \leq CD$ dari sudut siku-siku di A, B, dan $CD \leq AB$ dari sudut siku-siku di C, D; maka kembali diperoleh kesamaan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan memakai sifat "sisi berhadapan persegi panjang sama panjang" sebagai definisi; itulah yang harus dibuktikan. Dari jumlah keseluruhan 2π dan dua batas $\leq \pi$, kita perlu menyatakan mengapa masing-masing sama dengan π. Syarat thm:ASA sudah merupakan hasil netral; jangan menggantinya dengan argumen kesebangunan atau rumus jumlah sudut Euklides.

11.11 Satu persegi panjang memaksa semua defek segitiga nol

ID stabil: o004-c100-sol-ch11-ex011. **Label sumber:** ex:neutral-rectangle+. **Jenis sumber:** latihan lanjutan.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa jika suatu bidang netral memiliki persegi panjang, maka semua segitiganya memiliki defek nol.

Petunjuk penulis. Pilih suatu segitiga $\triangle_0$. Tunjukkan bahwa $\triangle_0$ dapat ditutupi oleh suatu persegi panjang besar $\square$ yang merupakan gabungan beberapa salinan persegi panjang yang diberikan. Selanjutnya, bagi $\square$ menjadi segitiga-segitiga $\triangle_0, \ldots, \triangle_n$. Tunjukkan bahwa jumlah defek $\triangle_i$ adalah nol dan gunakan fakta bahwa defek bersifat tak negatif.

Gambar pic-1114 memperlihatkan persegi panjang besar yang ditata dari salinan-salinan kecil dan ditriangulasi dengan segitiga sasaran sebagai salah satu mukanya.

Catatan. Ini merupakan langkah kunci dalam bukti bagian *(thm:=IV:defect)* dan *(thm:=IV:rectangle)* pada Teorema thm:=IV .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Cerminkan persegi panjang yang diberikan berulang kali pada sisinya untuk membentuk blok persegi panjang hingga yang memuat segitiga sebarang.
2. Perluas aditivitas Latihan ex:defect dari satu belahan ke triangulasi hingga.
3. Bandingkan triangulasi yang memuat segitiga sasaran dengan pembelahan persegi panjang oleh diagonal.

Jawaban atau pemeriksaan. Persegi panjang besar mempunyai triangulasi dengan jumlah defek nol karena diagonal membaginya menjadi dua segitiga berdefek nol. Aditivitas membuat jumlah itu tetap nol pada setiap penghalusan triangulasi. Jika triangulasi dipilih agar memuat $\triangle_0$, semua defek sukunya tak negatif; maka defek $\triangle_0$ sendiri nol.

Solusi lengkap. Andaikan bidang netral memuat satu persegi panjang R. Dengan mencerminkan R berturut-turut terhadap sisi-sisinya, kita memperoleh baris dan kolom salinan kongruen yang bertemu sisi penuh dengan sisi penuh. Setiap blok hingga $m \times n$ kembali merupakan persegi panjang: semua sudut batasnya siku-siku dan sisi-sisi internal berpasangan. Berdasarkan sifat Archimedes pada koordinat garis, untuk setiap himpunan berhingga titik terdapat m, n cukup besar dan suatu blok hasil pencerminan yang memuat semua titik itu di bagian dalam. Secara khusus, suatu salinan blok besar S dapat dipilih sehingga memuat segitiga tak degenerat sebarang $\triangle_0$.

Kita catat dua fakta tentang defek. Pertama, Latihan `ex:neutral-rectangle` dan pembuktiannya menunjukkan bahwa diagonal sebuah persegi panjang membaginya menjadi dua segitiga yang masing-masing berdefek nol. Jadi ada triangulasi S dengan jumlah defek nol.

Kedua, Latihan `ex:defect` menyatakan bahwa membelah sebuah segitiga dengan ruas dari titik sudut ke titik pada sisi lawan mempertahankan jumlah defek. Hal yang sama berlaku jika sebuah titik baru diletakkan di dalam segitiga: hubungkan titik itu ke tiga titik sudut, perpanjang salah satu ruas ke sisi lawan, lalu terapkan aditivitas beberapa kali. Dengan demikian, setiap penghalusan triangulasi hingga—menambah titik pada sisi atau di interior dan menambah ruas-ruas tak berpotongan—mempertahankan jumlah defek. Dua triangulasi berhingga mempunyai penghalusan bersama dengan menambahkan semua titik potong dan ruas yang diperlukan; karena itu jumlah defek tidak bergantung pada triangulasi.

Tambahkan ketiga sisi $\triangle_0$ pada sebuah triangulasi S dan triangulasikan sisa poligonnya. Diperoleh segitiga-segitiga

$$\triangle_0, \triangle_1, \ldots, \triangle_N$$

yang menutupi S tanpa tumpang tindih interior. Dari dua fakta di atas,

$$\sum_{i=0}^{N} \operatorname{defek}(\triangle_i) = 0. \tag{20}$$

Teorema `thm:3sum-a` mengatakan setiap suku pada (20) tak negatif. Jumlah hingga bilangan tak negatif dapat nol hanya jika setiap suku nol. Khususnya,

$$\operatorname{defek}(\triangle_0) = 0.$$

Karena $\triangle_0$ dipilih sebarang, semua segitiga pada bidang tersebut berdefek nol.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan langsung mengutip Teorema `thm:=IV` bahwa keberadaan persegi panjang ekuivalen dengan bidang Euklides; latihan ini merupakan bagian dari pembuktian ekuivalensi itu. “Jumlah defek nol” tidak berarti defek dapat saling meniadakan: nonnegativitas dari `thm:3sum-a` yang memaksa setiap suku nol. Triangulasi harus hingga dan perubahan triangulasi harus direduksi ke aditivitas yang sudah dibuktikan.

Uji penguasaan Bab 11

1. **(2 poin).** Audit bukti teorema sudut singgung dan identifikasi tepat langkah pertama yang tidak berlaku pada bidang netral beserta rantai ketergantungannya.

2. **(2 poin).** Buktikan secara netral bahwa garis bagi yang juga median memaksa segitiga sama kaki, dengan pencerminan terhadap titik tengah.
3. **(2 poin).** Buktikan identitas sudut segiempat tali busur dengan empat segitiga sama kaki, tanpa memakai jumlah sudut segitiga.
4. **(2 poin).** Turunkan kriteria kesejajaran dari persamaan dua sudut dengan kontradiksi Proposisi dua sudut pada segitiga potong.
5. **(2 poin).** Buktikan syarat SAA netral memakai titik C'' dan ketaksamaan ketat dua sudut, bukan rumus sudut ketiga.
6. **(2 poin).** Buktikan bahwa cevian dari titik interior sisi lebih pendek daripada sekurang-kurangnya satu dari dua sisi yang menuju titik sudut.
7. **(2 poin).** Buktikan $AB \leq CD$ pada segiempat dengan dua sudut siku-siku berdekatan, termasuk reduksi ke kaki tegak lurus dan konstruksi ruas ganda.
8. **(2 poin).** Buktikan aditivitas defek dan gunakan pencerminan titik untuk menunjukkan kesamaan dua defek pada konfigurasi ABC dan AXC.
9. **(2 poin).** Buktikan sisi berhadapan persegi panjang sama panjang melalui dua segitiga berdefek nol dan ASA.
10. **(2 poin).** Tutup argumen tiling–triangulasi yang menunjukkan satu persegi panjang memaksa defek setiap segitiga bernilai nol.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 11.1.

M2. 11.2.

M3. 11.3.

M4. 11.4.

M5. 11.5.

M6. 11.6.

M7. 11.7.

M8. 11.8 dan 11.9.

M9. 11.10.

M10. 11.11.

M1 (2 poin). Satu poin untuk menempatkan kegagalan pertama tepat pada penerapan `thm:3sum` ; satu poin untuk rantai `thm:parallel-2` , `thm:parallel` , dan Aksioma `def:birkhoff-axioms:4` .

M2 (2 poin). Satu poin untuk kekongruenan $\triangle CDA \cong \triangle BDA'$; satu poin untuk dua sudut alas, Teorema `thm:isos` , dan kesimpulan $AB = AC$.

M3 (2 poin). Satu poin untuk empat kesamaan sudut alas di pusat; satu poin untuk uraian siklik yang menghasilkan kedua jumlah yang sama tanpa `thm:3sum` .

M4 (2 poin). Satu poin untuk penggantian A, D oleh titik potong setelah penggandaan sudut; satu poin untuk kontradiksi $0 < |\theta + \phi| < \pi$ dengan $2(\theta + \phi) \equiv 0$.

M5 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi C'' dan SAS; satu poin untuk kontradiksi jumlah dua sudut $\triangle A'C'C''$ sama dengan π.

M6 (2 poin). Satu poin untuk dua implikasi sisi–sudut pada segitiga kecil; satu poin untuk sudut berpelurus di D dan pelanggaran `prop:2sum` pada $\triangle ABC$.

M7 (2 poin). Satu poin untuk reduksi kaki tegak lurus dan perbandingan $|\measuredangle CBD| \geq |\measuredangle ADB|$; satu poin untuk dua pencerminan, sudut puncak ganda, dan penerapan `prop:angle-side` .

M8 (2 poin). Satu poin untuk ekspansi definisi dan sudut berpelurus yang membuktikan aditivitas; satu poin untuk $\triangle AMX \cong \triangle BMC$ dan dua penerapan aditivitas.

M9 (2 poin). Satu poin untuk menunjukkan kedua jumlah sudut segitiga tepat π; satu poin untuk dua kesamaan sudut silang, ASA, dan $AB = CD$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk blok persegi panjang hingga serta invariansi jumlah defek di bawah penghalusan triangulasi; satu poin untuk nonnegativitas yang memaksa defek segitiga sasaran nol.

Bab 12

Solusi dan penguasaan Bab 12: Bidang hiperbolik

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Sembilan blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul "Petunjuk penulis" dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter12.json`. Latihan `ex:hyp-fun` memang tidak mempunyai blok petunjuk dalam sumber; ketiadaan itu dinyatakan, bukan diisi seolah-olah berasal dari penulis. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Bab sumber memuat tepat 10 latihan tingkat atas: tujuh latihan biasa dan tiga latihan bertanda `[!]`, salah satunya latihan kelas dan salah satunya latihan lanjutan. Latihan `ex:3-h-lines` memiliki tiga subbutir tanpa label sumber, yang dipertahankan dengan ID sintetis lokal; latihan `ex:cosh` memiliki empat subbutir berlabel `ex:cosh/2`, `ex:coshsinh`, `ex:coshtanh`, dan `ex:coshcosh`. Jadi terdapat 17 jangkar latihan/subbutir. Sembilan blok petunjuk menaut ke semua jangkar tingkat atas dan subbutir kecuali `ex:hyp-fun`, sehingga meliputi 16 jangkar petunjuk.

Gambar `pic-350` pada irisan petunjuk hanya memberi contoh visual bagi `ex:3-h-lines`; solusi di bawah menggantinya dengan konstruksi yang dapat diperiksa dari titik ideal dan koordinat. Gambar `pic-204` pada soal `ex:cosh` juga bukan premis tersembunyi: semua jarak Euklides yang diperlukan diturunkan secara aljabar. Tidak ada berkas gambar yang disalin ke komponen solusi ini.

12.1 Dua titik ideal menentukan satu garis-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex001`. **Label sumber:** `ex:ideal-line-unique`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa suatu garis-h ditentukan secara tunggal oleh titik-titik idealnya.

Petunjuk penulis. Misalkan A dan B merupakan titik-titik ideal garis-h ℓ. Perhatikan bahwa pusat lingkaran Euklides yang memuat ℓ terletak pada perpotongan garis-garis yang menyinggung lingkaran absolut di titik-titik ideal ℓ.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan lingkaran absolut dengan Ω dan pembawa lingkaran umum garis-h dengan Γ.
2. Jika A dan B tidak antipodal, tentukan pusat Γ dari dua garis singgung pada Ω.
3. Pisahkan kasus antipodal: kedua garis singgung sejajar, sehingga pembawa yang mungkin harus berupa garis lurus.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk pasangan tak antipodal, pusat pembawa adalah perpotongan unik garis singgung Ω di A dan B; jari-jarinya lalu ditentukan oleh A. Untuk pasangan antipodal, pembawa unik adalah diameter (AB).

Solusi lengkap. Misalkan Ω merupakan lingkaran absolut dan Γ lingkaran umum yang memuat garis-h dengan titik ideal berbeda $A, B \in \Omega$. Berdasarkan definisi, $\Gamma \perp \Omega$ di kedua titik tersebut.

Andaikan dahulu A dan B tidak antipodal. Jika C adalah pusat lingkaran Euklides Γ, ketegaklurusan kedua lingkaran di A berarti garis singgung Γ di A tegak lurus garis singgung Ω di A. Jari-jari CA tegak lurus garis singgung Γ, sehingga CA justru terletak pada garis singgung Ω di A. Dengan alasan yang sama, CB terletak pada garis singgung Ω di B. Karena A, B tidak antipodal, dua garis singgung itu tidak sejajar; keduanya berpotongan pada satu titik C. Maka pusat C unik, dan jari-jari $CA = CB$ juga unik. Jadi Γ dan irisan bagian dalamnya, yaitu garis-h, unik.

Sekarang andaikan A dan B antipodal. Garis (AB) melalui pusat Ω, sehingga sebagai lingkaran umum berbentuk garis ia tegak lurus Ω di A dan B; irisan dalam cakram memberi satu garis-h. Tidak ada lingkaran Euklides berpusat hingga yang dapat menjadi pembawa lain: pusatnya harus terletak sekaligus pada dua garis singgung Ω di A dan B, padahal kedua garis itu sejajar dan berbeda. Karena setiap lingkaran umum adalah lingkaran Euklides atau garis, diameter (AB) merupakan satu-satunya pembawa. Kedua kasus membuktikan ketunggalan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Perpotongan dua garis singgung tidak ada dalam bidang Euklides ketika titik ideal antipodal; kasus itu tidak boleh disapu ke "pusat di tak hingga" tanpa menyatakan bahwa pembawanya adalah garis. Titik ideal tidak termasuk dalam garis-h, tetapi tetap menentukan pembawa lingkaran umumnya.

12.2 Satu titik ideal dan satu titik-h menentukan satu garis-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex002`. **Label sumber:** `ex:1ideal-line-unique`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa suatu garis-h ditentukan secara tunggal oleh salah satu titik idealnya dan satu titik-h pada garis-h tersebut.

Petunjuk penulis. Andaikan A merupakan titik ideal garis-h ℓ dan $P \in \ell$. Misalkan P' merupakan bayangan inversi P terhadap lingkaran absolut. Menurut `cor:perp-inverse-clines` , ℓ terletak pada perpotongan bidang-h dan lingkaran umum (yang niscaya tunggal) yang melalui P, A, dan P'.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bentuk titik invers P' terhadap lingkaran absolut Ω.
2. Gunakan fakta bahwa pembawa garis-h yang tegak lurus Ω dan melalui P harus pula melalui P'.
3. Periksa bahwa A, P, P' adalah tiga titik berbeda, lalu pakai ketunggalan lingkaran umum melalui tiga titik.

Jawaban atau pemeriksaan. Pembawa yang dicari adalah lingkaran umum unik melalui A, P, P'. Jika ketiga titik segaris, "lingkaran umum" itu adalah garis; selain itu ia adalah lingkaran Euklides.

Solusi lengkap. Nyatakan lingkaran absolut dengan Ω. Karena P berada di dalam Ω, inversnya P' berada di luar Ω; jadi $P \neq P'$. Titik $A \in \Omega$ tetap oleh inversi dan berbeda dari keduanya. Maka terdapat tepat satu lingkaran umum Γ melalui tiga titik berbeda A, P, P': sebuah lingkaran jika ketiganya tidak segaris dan garis jika segaris.

Setiap pembawa Δ dari garis-h melalui P dan bertitik ideal A tegak lurus Ω. Akibat `cor:perp-inverse-clines` menyatakan bahwa inversi terhadap Ω memetakan Δ ke dirinya sendiri. Karena $P \in \Delta$, juga $P' \in \Delta$; selain itu $A \in \Delta$. Ketunggalan lingkaran umum melalui A, P, P' memaksa $\Delta = \Gamma$. Ini sudah membuktikan bahwa paling banyak ada satu garis-h dengan data tersebut.

Sebaliknya, inversi terhadap Ω menukar P dan P' serta menetapkan A. Bayangan invers Γ adalah lingkaran umum melalui tiga titik yang sama, sehingga kembali sama dengan Γ. Berdasarkan arah balik `cor:perp-inverse-clines` , Γ tegak lurus Ω. Irisan Γ dengan bagian dalam Ω karena itu merupakan garis-h yang melalui P dan memiliki A sebagai salah satu titik ideal. Keberadaan dan ketunggalan selesai.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menganggap tiga titik selalu menentukan lingkaran biasa; kasus segaris menentukan garis sebagai lingkaran umum. Arah balik kriteria invariansi–ketegaklurusan perlu dinyatakan untuk membuktikan bahwa pembawa yang dikonstruksi benar-benar suatu garis-h, bukan hanya kandidat unik.

12.3 Kapan ruas-h merupakan ruas lurus Euklides

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex003`. **Label sumber:** `ex:line/h-line`. **Jenis sumber:** latihan kelas bertanda `[!]`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa ruas-h $[PQ]_h$ berimpit dengan ruas Euklides $[PQ]$ jika dan hanya jika garis (PQ) melalui pusat lingkaran absolut.

Petunjuk penulis. Misalkan Ω dan O masing-masing menyatakan lingkaran absolut dan pusatnya. Misalkan Γ merupakan lingkaran umum yang memuat $[PQ]_h$. Perhatikan bahwa $[PQ]_h = [PQ]$ jika dan hanya jika Γ merupakan garis. Misalkan P' merupakan bayangan inversi P terhadap Ω. Perhatikan bahwa O, P, dan P' terletak pada satu garis. Menurut definisi garis-h, $\Omega \perp \Gamma$. Menurut `cor:perp-inverse-clines` , Γ melalui P dan P'. Oleh karena itu, Γ merupakan garis jika dan hanya jika melalui O.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bedakan pembawa Γ yang berupa lingkaran dan yang berupa garis.
2. Jika suatu busur nondegenerat sama dengan ruas lurus, gunakan ketunggalan lingkaran umum untuk menunjukkan bahwa pembawanya garis.
3. Gunakan kriteria elementer: sebuah garis tegak lurus suatu lingkaran jika dan hanya jika garis itu melalui pusat lingkaran.

Jawaban atau pemeriksaan. $[PQ]_h = [PQ]$ tepat ketika pembawa garis-h adalah garis lurus; pembawa berbentuk garis tegak lurus lingkaran absolut tepat ketika melalui pusatnya.

Solusi lengkap. Misalkan Γ pembawa lingkaran umum dari $(PQ)_h$. Jika $[PQ]_h = [PQ]$, maka Γ dan garis (PQ) mempunyai lebih dari dua titik bersama. Dua lingkaran umum berbeda tidak dapat mempunyai tiga titik bersama; jadi $\Gamma = (PQ)$ dan Γ berupa garis. Sebaliknya, bila Γ berupa garis, satu-satunya busur pada Γ dari P ke Q adalah ruas Euklides $[PQ]$, sehingga $[PQ]_h = [PQ]$.

Tinggal menerjemahkan syarat bahwa pembawa garis itu sah. Garis-h didefinisikan oleh pembawa Γ yang tegak lurus lingkaran absolut Ω. Sebuah garis memotong lingkaran secara tegak lurus tepat ketika arah garis sama dengan arah jari-jari di titik potong; ini ekuivalen dengan garis melalui pusat O. Dengan demikian

$$[PQ]_h = [PQ] \iff \Gamma \text{ berupa garis} \iff O \in \Gamma = (PQ).$$

Kedua implikasi yang diminta terbukti.

Sebagai pemeriksaan terhadap petunjuk inversi, jika P' adalah invers P terhadap Ω, maka O, P, P' segaris. Ketegaklurusan $\Gamma \perp \Omega$ membuat Γ memuat P' bersama P. Jadi pembawa itu berupa garis tepat ketika ia sama dengan (PP'), dan garis tersebut memuat O.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak cukup mengatakan “modelnya konformal”: konformal hanya menyangkut sudut, bukan bentuk ruas. Kesamaan dua ruas adalah kesamaan himpunan titik, yang memaksa pembawa lingkaran umum menjadi garis. Syarat melalui pusat diterapkan pada garis Euklides (PQ), bukan pada busur umum.

12.4 Langkah Euklides yang sama memberi jarak-h yang lebih besar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex004`. **Label sumber:** `ex:h-dist-eq`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Misalkan O merupakan pusat lingkaran absolut. Andaikan titik-titik-h O, X, Y terletak pada suatu garis-h dalam urutan yang sama dan $OX = XY$. Buktikan bahwa $OX_h < XY_h$.

Petunjuk penulis. Andaikan lingkaran absolut merupakan lingkaran satuan. Tetapkan $a = OX = XY$. Perhatikan bahwa $0 < a < \frac{1}{2}$,

$$OX_h = \ln \frac{1+a}{1-a}, \qquad XY_h = \ln \frac{(1+2a)(1-a)}{(1-2a)(1+a)}.$$

Periksa bahwa

$$1 < \frac{1+a}{1-a} < \frac{(1+2a)(1-a)}{(1-2a)(1+a)}$$

berlaku ketika $0 < a < \frac{1}{2}$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Normalkan jari-jari absolut menjadi satu; skala Euklides tidak mengubah rasio silang.
2. Tempatkan koordinat berarah $O = 0$, $X = a$, $Y = 2a$ pada diameter.
3. Bandingkan argumen kedua logaritma dengan perkalian silang; semua penyebut positif karena $0 < a < \frac{1}{2}$.

Jawaban atau pemeriksaan. Selisih dua hasil kali setelah penyebut dibersihkan adalah $4a^3 > 0$. Karena logaritma naik ketat pada bilangan positif, diperoleh $OX_h < XY_h$.

Solusi lengkap. Dengan kesebangunan Euklides kita boleh menganggap lingkaran absolut sebagai lingkaran satuan. Garis-h melalui pusat adalah diameter menurut solusi 12.3. Pilih orientasi sehingga

$$O = 0, \qquad X = a, \qquad Y = 2a.$$

Ketiga titik berada di bagian dalam cakram dan muncul dalam urutan itu; karena itu $0 < a < \frac{1}{2}$. Kedua titik ideal diameter adalah -1 dan 1. Definisi rasio silang memberi

$$\delta(O, X) = \frac{1 + a}{1 - a}, \qquad \delta(X, Y) = \frac{(1 + 2a)(1 - a)}{(1 - 2a)(1 + a)}.$$

Semua faktor penyebut positif. Jelas $1 < (1 + a)/(1 - a)$. Untuk ketaksamaan kedua, kalikan silang dan hitung

$$\begin{aligned}(1 + 2a)(1 - a)^2 - (1 - 2a)(1 + a)^2 \\ = (1 - 3a^2 + 2a^3) - (1 - 3a^2 - 2a^3) = 4a^3 > 0.\end{aligned}$$

Jadi $\delta(O, X) < \delta(X, Y)$. Fungsi ln naik ketat pada $(0, \infty)$, sehingga

$$OX_h = \ln \delta(O, X) < \ln \delta(X, Y) = XY_h.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesimpulan tidak berasal hanya dari “mendekati batas membuat jarak lebih besar”; itu intuisi, bukan pembuktian. Batas $a < \frac{1}{2}$ wajib dipakai agar Y masih titik-h dan agar faktor $1 - 2a$ positif. Jangan membandingkan logaritma sebelum memastikan kedua argumennya positif.

12.5 Garis-h tegak lurus melalui titik luar: ada dan tunggal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex005`. **Label sumber:** `ex:h-perp-unique`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Misalkan P merupakan titik-h yang tidak terletak pada suatu garis-h ℓ. Tunjukkan bahwa terdapat tepat satu garis-h melalui P yang tegak lurus terhadap ℓ.

Petunjuk penulis. Terapkan `ex:construction-perp-clines` setelah menguraikan arti istilah “tegak lurus” dan “garis-h”.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan Lema `lem:P-->O` dan Pengamatan utama `thm:main-observ` untuk memindahkan P ke pusat absolut.
2. Pada posisi ternormalisasi, tulis pembawa ℓ sebagai lingkaran Euklides berpusat C; jelaskan mengapa pembawa itu bukan diameter.
3. Tunjukkan bahwa diameter melalui O dan C adalah satu-satunya pembawa garis-h yang memotong pembawa ℓ tegak lurus.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah P dipindahkan ke pusat O, garis-h yang dicari adalah diameter (OC), dengan C pusat lingkaran Euklides yang membawa citra ℓ. Pengembalian oleh inversi memberi garis-h unik melalui P.

Solusi lengkap. Ambil lingkaran absolut satuan Ω. Berdasarkan Lema `lem:P-->O` , ada inversi pada lingkaran yang tegak lurus Ω yang memetakan P ke pusat O. Pengamatan utama `thm:main-observ` memastikan pemetaan ini bijektif pada bidang-h, memetakan garis-h ke garis-h, mempertahankan jarak, dan membalik tanda ukuran sudut. Jadi keberadaan dan ketunggalan garis tegak lurus tidak berubah. Kita boleh mengandaikan $P = O$.

Nyatakan citra ℓ tetap dengan ℓ dan pembawanya dengan Γ. Karena $O \notin \ell$, Γ tidak mungkin berupa garis: setiap pembawa garis yang tegak lurus Ω adalah diameter dan memuat O. Jadi Γ adalah lingkaran Euklides berpusat C dan berjari-jari r. Dari $\Gamma \perp \Omega$ diperoleh $OC^2 = 1 + r^2$, khususnya $C \neq O$.

Garis $d = (OC)$ merupakan diameter dan karenanya pembawa suatu garis-h melalui O. Pada titik potong dalam cakram antara d dan Γ, arah d adalah arah jari-jari C ke titik itu, sedangkan garis singgung Γ tegak lurus jari-jari tersebut. Karena model konformal, sudut-h sama dengan sudut antara garis singgung Euklides; maka $d \perp \ell$. Titik potong yang dimaksud memang berada di cakram: pada sinar OC, jarak dari O ke titik dekat Γ adalah $OC - r < 1$, sebab $OC^2 - r^2 = 1$ dan $OC + r > 1$.

Untuk ketunggalan, setiap garis-h melalui O mempunyai pembawa berupa diameter. Jika diameter e tegak lurus ℓ di X, garis e tegak lurus garis singgung Γ di X, sehingga e searah jari-jari CX. Karena e juga memuat O, titik O, C, X segaris; jadi $e = (OC) = d$. Setelah mengembalikan konfigurasi dengan inversi semula, diperoleh tepat satu garis-h melalui P yang tegak lurus ℓ.

Konstruksi ini konsisten dengan petunjuk: alat pada `ex:construction-perp-clines` , diterapkan pada Ω, Γ, dan P, membentuk pembawa melalui P yang tegak lurus keduanya. Argumen di atas menambahkan bukti ketunggalan yang tidak diberikan oleh perintah konstruksi saja.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Latihan konstruksi terdahulu membuktikan keberadaan, bukan otomatis ketunggalan. Sesudah memindahkan P ke O, pembawa ℓ tidak boleh dianggap diameter, sebab itu akan membuat $P \in \ell$. Ketegaklurusan lingkaran umum dibaca dari garis singgung di titik potong, bukan dari garis yang menghubungkan dua titik sebarang.

12.6 Segitiga-h tanpa lingkaran luar-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex006`. **Label sumber:** `ex:h-circle=circle`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Uraikan suatu segitiga-h tak degenerat $\triangle_h PQR$ yang tidak memiliki lingkaran luar-h; yakni, titik-titik sudutnya P, Q, R tidak terletak pada suatu lingkaran-h ataupun garis-h.

Petunjuk penulis. Pilih titik-titik sudut P, Q, R pada suatu lingkaran Euklides yang memotong lingkaran absolut dan tidak tegak lurus terhadapnya. Terapkan `lem:h-circle=circle` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih lingkaran Euklides Σ yang melintasi absolut secara tidak tegak lurus dan mempunyai busur nontrivial di dalam cakram.
2. Ambil tiga titik berbeda pada busur dalam yang tidak segaris Euklides.
3. Gunakan ketunggalan lingkaran Euklides melalui tiga titik untuk menolak baik lingkaran-h maupun garis-h.

Jawaban atau pemeriksaan. Sebarang tiga titik tak segaris pada busur bagian-dalam dari lingkaran Euklides Σ yang memotong absolut secara tidak ortogonal memberikan contoh yang diminta.

Solusi lengkap. Pilih lingkaran Euklides Σ yang berpotongan dengan lingkaran absolut Ω, tetapi tidak tegak lurus terhadapnya. Pilih tiga titik berbeda P, Q, R pada salah satu busur Σ yang berada di dalam Ω, dengan tidak semuanya pada satu garis. Tiga titik ini merupakan titik-h.

Andaikan ada lingkaran-h melalui P, Q, R. Menurut Lema `lem:h-circle=circle` , lingkaran-h itu adalah suatu lingkaran Euklides Δ yang seluruhnya berada di dalam bidang-h. Karena tiga titik tak segaris menentukan satu lingkaran Euklides, $\Delta = \Sigma$. Namun Σ memotong Ω, sehingga tidak seluruhnya berada di dalam bidang-h. Kontradiksi.

Andaikan sebagai gantinya ada garis-h melalui P, Q, R. Pembawa lingkaran umumnya harus memuat ketiga titik. Ketiganya tak segaris, jadi pembawa unik itu adalah Σ. Akan tetapi pembawa suatu garis-h wajib tegak lurus Ω, sedangkan Σ sengaja dipilih tidak tegak lurus. Ini juga kontradiksi. Khususnya, tidak ada satu garis-h yang memuat ketiga titik, jadi $\triangle_h PQR$ tak degenerat. Segitiga itu tidak memiliki lingkaran luar-h ataupun garis-h melalui semua titik sudutnya.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak cukup memilih sebarang lingkaran Euklides yang tidak ortogonal; harus ada tiga titik pada bagian lingkaran yang berada di dalam absolut. Jika $\Sigma \perp \Omega$, ketiga titik justru terletak pada satu garis-h. Jika Σ seluruhnya di dalam cakram, ia dapat menjadi lingkaran-h untuk pusat dan jari-jari-h tertentu menurut lema sumber.

12.7 Tiga konfigurasi kesejajaran garis-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex007`. **Label sumber:** `ex:3-h-lines`. **Tingkat:** lanjut.

Subbutir lokal:

- `o004-c100-sol-ch12-ex007-part-a`;
- `o004-c100-sol-ch12-ex007-part-b`;
- `o004-c100-sol-ch12-ex007-part-c`.

Soal sumber.

(a) Gambarlah tiga garis-h yang saling sejajar sedemikian sehingga setiap pasangan dari ketiga garis tersebut terletak pada satu sisi garis-h yang tersisa.

(b) Gambarlah garis-h ℓ, m, n sedemikian sehingga $\ell \parallel m$, $m \parallel n$, tetapi $\ell \nparallel n$. Simpulkan bahwa kesejajaran bukan merupakan relasi ekuivalensi untuk garis-h.

(c) Gambarlah garis-h k, ℓ, m, n sedemikian sehingga $k \perp \ell$, $\ell \perp m$, $m \perp n$, dan $k \parallel n$.

Petunjuk penulis. Pilih garis-garis-h yang diminta dari gambar. Gambar petunjuk `pic-350` menampilkan beberapa garis-h dalam cakram; aset itu tidak disalin di sini.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan kriteria titik ideal: dua garis-h berpotongan di dalam cakram tepat ketika pasangan titik idealnya berselang-seling pada absolut.
2. Untuk (a), gunakan tiga sisi suatu segitiga ideal. Untuk (b), pilih dua garis yang berpotongan dan satu garis kecil dekat busur batas yang menghindari keduanya.
3. Untuk (c), periksa konfigurasi lingkaran umum pada model setengah-bidang atas, lalu petakan secara konformal ke cakram.

Jawaban atau pemeriksaan. (a) Tiga sisi segitiga ideal memenuhi syarat. (b) Dua garis yang berpotongan dan satu garis-h dengan kedua titik ideal dalam satu busur komplementer memberi kegagalan transitivitas. (c) Pada setengah-bidang atas, gunakan $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 5/4)^2 + y^2 = (3/4)^2$, dan $x = 5/4$.

Solusi lengkap. Kita pakai fakta elementer berikut. Suatu garis-h ditentukan oleh dua titik ideal pada lingkaran absolut. Dua garis-h berbeda berpotongan di dalam cakram tepat ketika kedua pasang titik idealnya berselang-seling dalam urutan siklik. Ini adalah kriteria perpotongan dua busur lingkaran yang masing-masing tegak lurus batas; dapat pula diperoleh dengan inversi yang mengubah salah satu pembawa menjadi diameter.

Bagian (a). Ambil tiga titik ideal berbeda A, B, C. Garis-h dengan pasangan titik ideal AB, BC, dan CA adalah tiga sisi segitiga ideal. Setiap dua sisi hanya bertemu di titik ideal bersama, yang tidak termasuk bidang-h; jadi ketiganya saling sejajar. Terhadap sisi AB, kedua sisi lain seluruhnya berada pada setengah bidang-h yang menghadap C; pernyataan yang sama berlaku secara siklik. Jadi setiap pasangan terletak pada satu sisi garis yang tersisa.

Bagian (b). Pilih dua pasang titik ideal A, C dan B, D yang berselang-seling A, B, C, D; garis $\ell = (AC)_h$ dan $n = (BD)_h$ berpotongan, sehingga $\ell \nparallel n$. Di salah satu dari empat busur terbuka batas antara dua titik berurutan, pilih dua titik ideal baru E, F yang sangat berdekatan, dan pilih busur itu sehingga E, F berada pada komponen batas yang sama setelah titik ideal ℓ dihapus maupun setelah titik ideal n dihapus. Garis $m = (EF)_h$ tidak mempunyai pasangan ujung berselang-seling dengan ℓ ataupun n. Maka $\ell \parallel m$ dan $m \parallel n$, tetapi $\ell \nparallel n$. Relasi itu refleksif dan simetris menurut konvensi sumber, tetapi gagal transitif; jadi bukan relasi ekuivalensi.

Bagian (c). Untuk memberi konstruksi yang sepenuhnya dapat diperiksa tanpa `pic-350`, gunakan setengah-bidang $y > 0$ sebagai koordinat bantu. Pemetaan

$$\Phi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

memetakan batas real ke lingkaran satuan, setengah-bidang atas ke cakram satuan, serta garis/lingkaran yang tegak lurus batas real ke garis-h cakram. Pemetaan pecahan-linear ini adalah komposisi kesebangunan dan inversi; karena itu mempertahankan lingkaran umum, sudut, dan ketakterpotongan.

Pada $y > 0$, tetapkan pembawa

$$k : x = 0, \quad \ell : x^2 + y^2 = 1, \quad m : (x - \tfrac{5}{4})^2 + y^2 = (\tfrac{3}{4})^2, \quad n : x = \tfrac{5}{4}.$$

Semua pembawa tegak lurus batas real. Garis k memotong ℓ tegak lurus pada $(0, 1)$. Kedua lingkaran ℓ, m tegak lurus karena kuadrat jarak pusatnya

$$(\tfrac{5}{4})^2 = 1^2 + (\tfrac{3}{4})^2.$$

Garis n melalui pusat m, sehingga memotong m tegak lurus pada $(5/4, 3/4)$. Garis vertikal k dan n tidak berpotongan di setengah-bidang, jadi sejajar. Citra keempat pembawa di bawah Φ memberi tepat konfigurasi garis-h cakram yang diminta. Sebagai pemeriksaan, titik ideal k menjadi $-1, 1$, sedangkan salah satu titik ideal n juga menjadi 1; kedua citra bertemu hanya pada batas ideal, bukan dalam bidang-h.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Berbagi satu titik ideal tetap berarti sejajar, sebab titik ideal bukan bagian bidang-h. Pada (b), jangan memilih m sehingga ujungnya berselang-seling dengan salah satu pasangan. Pada (c), dua lingkaran biasa tegak lurus bila kuadrat jarak pusat sama dengan jumlah kuadrat jari-jari; sekadar tampak berpotongan tidak cukup.

12.8 Turunan dan identitas dasar fungsi hiperbolik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex008`. **Label sumber:** `ex:hyp-fun`. **Tingkat:** pengantar.

Soal sumber. Buktikan identitas-identitas

$$\cosh' x = \sinh x, \qquad \sinh' x = \cosh x, \qquad (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1.$$

Petunjuk penulis. Sumber tidak memberikan blok petunjuk untuk latihan ini. Pernyataan tersebut dipertahankan sebagai ketiadaan petunjuk penulis; paragraf ini bukan petunjuk tambahan yang diatribusikan kepada Anton Petrunin.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Substitusikan definisi eksponensial $\cosh x$ dan $\sinh x$.
2. Gunakan $(e^x)' = e^x$ dan $(e^{-x})' = -e^{-x}$.
3. Untuk identitas kuadrat, gunakan $(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$ dengan $u = e^x$ dan $v = e^{-x}$.

Jawaban atau pemeriksaan. Pendiferensialan saling menukar cosh dan sinh; selisih kuadratnya mereduksi menjadi $e^x e^{-x} = 1$.

Solusi lengkap. Dari definisi

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

aturan rantai memberi

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

dan

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Untuk identitas aljabar,

$$\begin{aligned}(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Ketiga persamaan berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Turunan e^{-x} membawa faktor -1; tanda itu yang membuat turunan cosh menjadi sinh dan turunan sinh menjadi cosh. Identitas kuadrat hiperbolik mempunyai tanda minus, berbeda dari identitas trigonometrik melingkar $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

12.9 Koordinat radial sebagai tangen hiperbolik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch12-ex009`. **Label sumber:** `ex:O-h-dist`. **Tingkat:** pengantar.

Soal sumber. Andaikan lingkaran absolut merupakan lingkaran satuan berpusat di O. Tunjukkan bahwa

$$OP = \tanh(\tfrac{1}{2}\, OP_h)$$

untuk setiap titik-h P.

Petunjuk penulis. Gunakan `lem:O-h-dist` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $x = OP$ dan $y = OP_h$.
2. Dari lema sumber, tulis $e^y = (1 + x)/(1 - x)$.
3. Ubah definisi $\tanh(y/2)$ dengan mengalikan pembilang dan penyebut oleh $e^{y/2}$.

Jawaban atau pemeriksaan. $\tanh(y/2) = (e^y - 1)/(e^y + 1) = x = OP$.

Solusi lengkap. Tetapkan $x = OP$ dan $y = OP_h$. Menurut Lema lem:O-h-dist ,

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad 0 \le x < 1.$$

Jadi $e^y = (1+x)/(1-x)$. Dari definisi fungsi hiperbolik,

$$\begin{aligned} \tanh(\tfrac{y}{2}) &= \frac{e^{y/2} - e^{-y/2}}{e^{y/2} + e^{-y/2}} = \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \\ &= \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} = \frac{2x}{2} = x. \end{aligned}$$

Karena $x = OP$ dan $y = OP_h$, inilah identitas yang diminta. Perhitungan juga mencakup $P = O$: kedua ruas bernilai nol.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Argumen fungsi tanh adalah setengah jarak-h, bukan jarak-h penuh. Jangan mengganti OP_h oleh OP di dalam eksponensial. Kasus $P = O$ tidak boleh dihilangkan ketika manipulasi membagi oleh besaran yang mungkin nol; bentuk di atas tidak melakukan pembagian oleh x.

12.10 Empat rumus jarak-h dari titik invers

ID stabil: o004-c100-sol-ch12-ex010. **Label sumber:** ex:cosh. **Jenis sumber:** latihan lanjutan bertanda [!]. **Tingkat:** lanjut.

Subbutir sumber:

- ex:cosh/2;
- ex:coshsinh;
- ex:coshtanh;
- ex:coshcosh.

Soal sumber. Misalkan P, Q merupakan dua titik-h yang berbeda dari pusat lingkaran absolut. Nyatakan dengan P', Q' bayangan inversi P, Q terhadap lingkaran absolut. Buktikan

(a) $\cosh(\frac{1}{2}PQ_h) = \sqrt{\dfrac{PQ' \cdot P'Q}{PP' \cdot QQ'}}$;

(b) $\sinh(\frac{1}{2}PQ_h) = \sqrt{\dfrac{PQ \cdot P'Q'}{PP' \cdot QQ'}}$;

(c) $\tanh(\frac{1}{2}PQ_h) = \sqrt{\dfrac{PQ \cdot P'Q'}{PQ' \cdot P'Q}}$;

(d) $\cosh PQ_h = \dfrac{PQ \cdot P'Q' + PQ' \cdot P'Q}{PP' \cdot QQ'}$.

Petunjuk penulis. Menurut cor:invese-comp dan lem:inverse-4-angle , ruas kanan identitas-identitas tersebut tidak berubah oleh inversi terhadap suatu lingkaran yang tegak lurus terhadap lingkaran absolut. Seperti biasa, kita andaikan bahwa lingkaran absolut merupakan lingkaran satuan. Misalkan O merupakan titik tengah-h dari $[PQ]_h$. Menurut pengamatan utama (thm:main-observ

), kita dapat mengandaikan bahwa O merupakan pusat lingkaran absolut. Dalam hal ini, O juga merupakan titik tengah Euklides dari $[PQ]$.

Tetapkan $a = OP = OQ$; dalam hal ini,

$$PQ = 2a, \quad PP' = QQ' = \tfrac{1}{a} - a, \quad P'Q' = \tfrac{2}{a}, \quad PQ' = QP' = \tfrac{1}{a} + a,$$

dan

$$PQ_h = \ln \frac{(1+a)^2}{(1-a)^2} = 2 \ln \frac{1+a}{1-a}.$$

Perhitungan memberi kedua ruas bagian *(a)* sama dengan $(1+a^2)/(1-a^2)$ dan kedua ruas bagian *(b)* sama dengan $2a/(1-a^2)$. Bagian *(c)* dan *(d)* diperoleh dari dua bagian itu, definisi tangen hiperbolik, dan identitas argumen ganda `double-argument` . Kita juga dapat memindahkan Q ke pusat, tetapi kemudian $Q'Q = Q'P = Q'P' = \infty$ dan setiap kemunculan $\frac{\infty}{\infty} = 1$ harus dibenarkan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pindahkan titik tengah-h $[PQ]_h$ ke pusat tanpa memindahkan hanya salah satu titik ujung ke pusat; ini menghindari panjang tak hingga.
2. Dalam koordinat diameter, letakkan $P = -a$, $Q = a$ dengan $0 < a < 1$; maka $P' = -1/a$ dan $Q' = 1/a$.
3. Hitung semua enam jarak Euklides positif dan tetapkan $u = \frac{1}{2} PQ_h = \ln((1+a)/(1-a))$.
4. Buktikan (a) dan (b) langsung, lalu turunkan (c) sebagai $\sinh u / \cosh u$ dan (d) dari $\cosh(2u) = \cosh^2 u + \sinh^2 u$.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada posisi simetris, ruas kanan (a), (b), (c), dan (d) berturut-turut menjadi

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}, \quad \frac{2a}{1-a^2}, \quad \frac{2a}{1+a^2}, \quad \frac{1+6a^2+a^4}{(1-a^2)^2},$$

yang sama dengan $\cosh u$, $\sinh u$, $\tanh u$, dan $\cosh(2u)$.

Solusi lengkap. Ruas-ruas kanan merupakan kombinasi rasio silang dari enam jarak pada dua pasangan titik invers. Akibat `cor:invese-comp` dan Lema `lem:inverse-4-angle` menunjukkan bahwa kombinasi tersebut tidak berubah di bawah inversi pada lingkaran yang tegak lurus absolut. Pengamatan utama juga mempertahankan PQ_h. Karena itu kita boleh menerapkan isometri-h yang memindahkan titik tengah-h M dari $[PQ]_h$ ke pusat O lingkaran absolut satuan.

Pada posisi ini, garis-h PQ adalah diameter, dan O merupakan titik tengah Euklides. Setelah memilih orientasi,

$$P = -a, \qquad Q = a, \qquad 0 < a < 1.$$

Inversi pada lingkaran satuan memberi $P' = -1/a$ dan $Q' = 1/a$. Maka semua jarak yang muncul adalah

$$PQ = 2a, \quad P'Q' = \frac{2}{a}, \quad PP' = QQ' = \frac{1}{a} - a, \quad PQ' = P'Q = \frac{1}{a} + a. \tag{1}$$

Definisi jarak-h pada diameter memberi

$$PQ_h = 2 \ln \frac{1+a}{1-a}.$$

Tetapkan

$$u = \frac{1}{2} PQ_h = \ln \frac{1+a}{1-a}. \tag{2}$$

Karena $e^u = (1+a)/(1-a)$, definisi eksponensial menghasilkan

$$\cosh u = \frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{1-a} + \frac{1-a}{1+a}\right) = \frac{1+a^2}{1-a^2}. \tag{3}$$

Di sisi lain, dari (1) dan positifnya semua faktor,

$$\sqrt{\frac{PQ'\cdot P'Q}{PP'\cdot QQ'}} = \frac{\frac{1}{a}+a}{\frac{1}{a}-a} = \frac{1+a^2}{1-a^2}. \tag{4}$$

Persamaan (3)–(4) membuktikan bagian *((a))*, yaitu label sumber `ex:cosh/2` .

Demikian pula,

$$\sinh u = \frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right) = \frac{2a}{1-a^2}, \tag{5}$$

sedangkan

$$\sqrt{\frac{PQ\cdot P'Q'}{PP'\cdot QQ'}} = \frac{2}{\frac{1}{a}-a} = \frac{2a}{1-a^2}. \tag{6}$$

Ini membuktikan bagian *((b))*, yakni `ex:coshsinh` .

Membagi (5) dengan (3) memberi

$$\tanh u = \frac{2a}{1+a^2}. \tag{7}$$

Sementara itu, (1) memberi

$$\sqrt{\frac{PQ\cdot P'Q'}{PQ'\cdot P'Q}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+a} = \frac{2a}{1+a^2}. \tag{8}$$

Jadi bagian *((c))*, yaitu `ex:coshtanh` , terbukti.

Terakhir, identitas argumen ganda `double-argument` dan (3),(5) memberi

$$\cosh(2u) = \cosh^2 u + \sinh^2 u = \frac{(1+a^2)^2 + 4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{1+6a^2+a^4}{(1-a^2)^2}. \tag{9}$$

Dari (1), ruas kanan bagian (d) adalah

$$\begin{aligned}\frac{PQ\cdot P'Q' + PQ'\cdot P'Q}{PP'\cdot QQ'} &= \frac{4+(\frac{1}{a}+a)^2}{(\frac{1}{a}-a)^2}\\ &= \frac{1+6a^2+a^4}{(1-a^2)^2}.\end{aligned}$$

Karena $2u = PQ_h$, persamaan ini dan (9) membuktikan bagian *((d))*, yaitu `ex:coshcosh` . Keempat identitas terbukti tanpa aritmetika panjang tak hingga.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Mengirim salah satu titik ujung ke pusat membuat titik inversnya menjadi titik tak hingga; operasi seperti ∞/∞ tidak mempunyai nilai otomatis. Positifnya akar kuadrat bergantung pada $0 < a < 1$. Dalam bagian (d), pembilang memuat jumlah dua produk, bukan produk dari dua jumlah. Invariansi ruas kanan harus disebut sebelum memilih posisi simetris.

Uji penguasaan Bab 12

1. **(2 poin).** Buktikan ketunggalan garis-h dari dua titik ideal, termasuk cabang titik ideal antipodal.
2. **(2 poin).** Rekonstruksi pembawa garis-h dari satu titik ideal dan satu titik-h dengan pasangan invers, termasuk kasus tiga titik segaris.
3. **(2 poin).** Buktikan kriteria $[PQ]_h = [PQ]$ tanpa mengandalkan gambar dan jelaskan peran pusat absolut.
4. **(2 poin).** Untuk $O = 0, X = a, Y = 2a$, turunkan kedua rasio silang dan selesaikan perbandingan ketatnya.
5. **(2 poin).** Buktikan keberadaan dan ketunggalan garis-h tegak lurus melalui titik luar dengan reduksi titik itu ke pusat.
6. **(2 poin).** Berikan contoh tiga titik-h tanpa lingkaran luar-h dan tolak secara terpisah kemungkinan lingkaran-h serta garis-h.
7. **(2 poin).** Konstruksikan kegagalan transitivitas kesejajaran dan rantai tiga ketegaklurusan yang berujung pada dua garis sejajar.
8. **(2 poin).** Turunkan dua rumus turunan fungsi hiperbolik dan identitas selisih kuadrat langsung dari eksponensial.
9. **(2 poin).** Turunkan $OP = \tanh(OP_h/2)$ dan periksa kasus $P = O$.
10. **(2 poin).** Pada posisi titik tengah-h di pusat, buktikan empat identitas jarak `ex:cosh/2` – `ex:coshcosh` tanpa panjang tak hingga.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 12.1.

M2. 12.2.

M3. 12.3.

M4. 12.4.

M5. 12.5.

M6. 12.6.

M7. 12.7.

M8. 12.8.

M9. 12.9.

M10. 12.10.

M1 (2 poin). Satu poin untuk pusat pada perpotongan garis singgung dalam kasus tak-antipodal; satu poin untuk menutup kasus antipodal dengan diameter unik.

M2 (2 poin). Satu poin untuk P' dan ketunggalan lingkaran umum melalui A, P, P'; satu poin untuk arah balik invariansi inversi yang membuktikan ketegaklurusan.

M3 (2 poin). Satu poin untuk menunjukkan kesamaan ruas memaksa pembawa berupa garis; satu poin untuk ekuivalensi garis tegak lurus lingkaran dan garis melalui pusat.

M4 (2 poin). Satu poin untuk kedua rumus rasio silang serta batas $0 < a < 1/2$; satu poin untuk selisih perkalian silang $4a^3$ dan monotonisitas logaritma.

M5 (2 poin). Satu poin untuk reduksi isometri-h $P \mapsto O$ dan keberadaan diameter OC; satu poin untuk bukti ketunggalan dari arah jari-jari pembawa ℓ.

M6 (2 poin). Satu poin untuk pilihan lingkaran Euklides yang memotong absolut tidak ortogonal; satu poin untuk dua kontradiksi ketunggalan pembawa dan ketakdegeneratan.

M7 (2 poin). Satu poin untuk kriteria perselang-seling titik ideal serta contoh nontransitif; satu poin untuk memverifikasi keempat pembawa pada konstruksi setengah-bidang dan preservasi oleh Φ.

M8 (2 poin). Satu poin untuk dua pendiferensialan dengan tanda rantai benar; satu poin untuk identitas selisih kuadrat yang mereduksi ke $e^x e^{-x} = 1$.

M9 (2 poin). Satu poin untuk mengubah lema menjadi $e^y = (1 + x)/(1 - x)$; satu poin untuk manipulasi $\tanh(y/2)$ dan pemeriksaan $x = 0$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk normalisasi simetris, semua enam jarak, serta (a)–(b); satu poin untuk (c)–(d), termasuk identitas argumen ganda dan larangan ∞/∞.

Bab 13

Solusi dan penguasaan Bab 13: Geometri bidang-h

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Sepuluh blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul "Petunjuk penulis" dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter13.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber

Bab sumber memuat tepat 10 latihan tingkat atas, semuanya latihan biasa tanpa penanda `[!]` dan tanpa subbutir. Kesepuluh latihan memiliki tepat satu blok petunjuk penulis dalam urutan yang sama, pada baris 1504–1605 dari `hints.tex`. Dengan demikian terdapat 10 jangkar latihan, 10 jangkar petunjuk, dan 10 solusi lengkap.

Gambar `pic-359` dalam petunjuk `ex:ultra-parallel` dan `pic-352` dalam petunjuk `ex:equidistant-reflection` merupakan konteks visual, bukan premis tersembunyi. Solusi berikut mengganti keduanya dengan konstruksi titik ideal, isometri, dan argumen ketunggalan yang dapat diperiksa tanpa gambar. Tidak ada berkas gambar sumber yang disalin ke komponen solusi ini.

13.1 Sudut ke sisi keempat segiempat Lambert

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex001`. **Label sumber:** `ex:lambert-parallelism`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Andaikan $\square_h ABCD$ memiliki sudut-h siku-siku di A, B, dan C. Tunjukkan bahwa $|\measuredangle_h CDA| > \phi$, dengan ϕ merupakan sudut paralelisme di D terhadap $(AB)_h$.

Petunjuk penulis. Gunakan `prop:perp-perp` untuk menunjukkan bahwa $(AB)_h \parallel (CD)_h$. Terapkan definisi sudut paralelisme.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Perhatikan bahwa $(AB)_h$ dan $(CD)_h$ sama-sama tegak lurus $(BC)_h$, sehingga keduanya tidak berpotongan.
2. Nyatakan $\theta = |\measuredangle_h CDA|$. Definisi sudut paralelisme langsung memberi $\theta \geq \phi$.
3. Untuk memperoleh ketaksamaan ketat, tolak kemungkinan bahwa kedua garis sejajar itu berbagi satu titik ideal: gunakan pencerminan terhadap $(BC)_h$ dan ketunggalan garis-h dari dua titik ideal.

Jawaban atau pemeriksaan. Garis $(CD)_h$ ultraparalel, bukan sejajar asimtotik, dengan $(AB)_h$. Karena itu arahnya dari sinar tegak lurus DA terletak melewati arah batas yang membentuk sudut paralelisme, sehingga $\theta > \phi$.

Solusi lengkap. Karena sudut di B dan C siku-siku, baik $(AB)_h$ maupun $(CD)_h$ tegak lurus terhadap $(BC)_h$. Proposisi `prop:perp-perp` memberi

$$(AB)_h \parallel (CD)_h.$$

Selain itu, DA tegak lurus $(AB)_h$ di A. Jadi, jika $\theta = |\measuredangle_h CDA|$, garis melalui D pada arah DC tidak berpotongan dengan $(AB)_h$. Berdasarkan definisi ϕ sebagai sudut terkecil dari DA yang menghasilkan garis tak berpotongan, kita sudah memperoleh $\theta \geq \phi$.

Kita perlu menutup kemungkinan kesamaan. Misalkan, demi kontradiksi, $\theta = \phi$. Garis $(CD)_h$ kemudian merupakan garis batas sejajar asimtotik dari D terhadap $(AB)_h$ dan berbagi tepat satu titik ideal, katakanlah U, dengan $(AB)_h$.

Tinjau pencerminan-h σ terhadap $(BC)_h$. Sebuah garis-h yang tegak lurus sumbu pencerminan dipetakan ke dirinya sendiri. Karena itu σ menetapkan $(AB)_h$ dan $(CD)_h$ sebagai himpunan, sambil menukar dua titik ideal pada masing-masing garis: pada garis tegak lurus, dua sinar dari titik potong saling dipertukarkan. Maka $\sigma(U)$ merupakan titik ideal kedua bagi $(AB)_h$ sekaligus bagi $(CD)_h$. Titik $\sigma(U)$ berbeda dari U, sebab titik ideal tetap pencerminan hanyalah kedua ujung ideal sumbu $(BC)_h$, sedangkan $(AB)_h$ dan $(CD)_h$ memotong sumbu itu pada titik-h B dan C.

Jadi $(AB)_h$ dan $(CD)_h$ mempunyai dua titik ideal yang sama. Ketunggalan dalam `ex:ideal-line-unique` memaksa kedua garis itu berimpit, bertentangan dengan kesejajaran dua garis berbeda melalui $B \neq C$. Kesamaan mustahil; oleh karena itu

$$|\measuredangle_h CDA| = \theta > \phi.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesejajaran saja hanya memberi $\theta \geq \phi$. Ketaksamaan ketat memerlukan alasan bahwa sisi keempat bukan garis sejajar asimtotik. Jangan menganggap dua garis yang sama-sama tegak lurus suatu garis otomatis mempunyai titik ideal bersama; justru pencerminan menunjukkan bahwa satu titik ideal bersama akan memaksa kedua titik ideal bersama dan kedua garis berimpit.

13.2 Kriteria garis tegak lurus bersama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex002`. **Label sumber:** `ex:ultra-parallel`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa dua garis-h berbeda ℓ dan m bersifat ultraparalel jika dan hanya jika keduanya memiliki suatu garis tegak lurus bersama; yakni, terdapat garis-h n sedemikian sehingga $n \perp \ell$ dan $n \perp m$.

Petunjuk penulis. Untuk bagian "hanya jika", andaikan ℓ dan m ultraparalel dengan titik-titik ideal A, B, C, D yang muncul pada lingkaran absolut dalam urutan itu. Garis-h berujung A, C berpotongan dengan garis-h berujung B, D di O. Pindahkan O ke pusat absolut; dalam posisi itu ℓ merupakan cerminan pusat Euklides dari m. Tarik garis-h n dari O yang tegak lurus ℓ dan tunjukkan $n \perp m$ (gambar petunjuk: `pic-359`).

Untuk bagian "jika", misalkan $L = n \cap \ell$ dan $M = n \cap m$. Pindahkan titik tengah-h LM ke pusat absolut. Dalam posisi itu ℓ merupakan cerminan pusat Euklides dari m. Jika sepasang titik ideal berimpit, pasangan lainnya juga berimpit; `ex:ideal-line-unique` lalu memberi $\ell = m$, sebuah kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk arah ultraparalel $\Rightarrow$ tegak lurus bersama, silangilah pasangan ujung ideal: garis AC dan BD pasti berpotongan.
2. Gunakan setengah putaran di titik perpotongan untuk memetakan ℓ ke m; garis melalui pusat putaran dipetakan ke dirinya sendiri.
3. Untuk arah balik, gunakan `prop:perp-perp` agar ℓ dan m tidak berpotongan, lalu setengah putaran di titik tengah LM untuk menolak satu titik ideal bersama.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk pasangan ultraparalel, setengah putaran yang menukar kedua pasangan ujung ideal menghasilkan sumbu tegak lurus bersama. Sebaliknya, setengah putaran di titik tengah ruas antara dua kaki tegak lurus menukar kedua garis; satu ujung ideal bersama akan menghasilkan dua, sehingga garis-garis itu sama.

Solusi lengkap. Andaikan dahulu ℓ dan m ultraparalel. Namai titik ideal ℓ dengan A, B dan titik ideal m dengan C, D sehingga urutannya pada lingkaran absolut adalah A, B, C, D. Karena ujung-ujung A, C berselang-seling dengan B, D, garis-h $(AC)_h$ dan $(BD)_h$ berpotongan pada suatu titik-h O.

Terapkan isometri-h yang memindahkan O ke pusat lingkaran absolut. Kedua garis $(AC)_h$ dan $(BD)_h$ kini merupakan diameter. Setengah putaran ρ berpusat di O menukar A dengan C dan B dengan D; karena garis-h ditentukan oleh dua titik idealnya, $\rho(\ell) = m$.

Ambil garis-h unik n melalui O yang tegak lurus ℓ. Setengah putaran memetakan setiap garis-h melalui O ke dirinya sendiri, sehingga $\rho(n) = n$. Karena ρ mempertahankan sudut,

$$n = \rho(n) \perp \rho(\ell) = m.$$

Jadi n merupakan garis tegak lurus bersama.

Sebaliknya, andaikan $n \perp \ell$ di L dan $n \perp m$ di M, dengan $\ell \neq m$. Dari `prop:perp-perp` , ℓ dan m tidak berpotongan. Misalkan O titik tengah-h $[LM]_h$ dan ρ setengah putaran berpusat di O. Transformasi ρ menetapkan n dan menukar L dengan M. Citra $\rho(\ell)$ adalah garis melalui M yang tegak lurus n; oleh ketunggalan garis tegak lurus melalui satu titik, citra itu adalah m.

Andaikan ℓ dan m berbagi satu titik ideal U. Karena ρ menukar kedua garis, $\rho(U)$ juga titik ideal bersama. Kedua titik ini berbeda: setengah putaran berpusat pada titik-h tidak mempunyai titik tetap ideal (setelah O dipindahkan ke pusat absolut, tindakannya adalah $U \mapsto -U$). Maka ℓ dan m berbagi kedua titik ideal $U, \rho(U)$, sehingga `ex:ideal-line-unique` memberi $\ell = m$, kontradiksi. Jadi keduanya tidak berpotongan dan tidak memiliki titik ideal bersama: tepat definisi ultraparalel.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis tak berpotongan belum tentu ultraparalel; garis sejajar asimtotik masih berbagi satu titik ideal. Pada arah pertama, yang dipakai adalah garis silang AC dan BD, bukan garis pembawa ℓ dan m. Pada arah balik, wajib menyatakan mengapa dua titik ideal U dan $\rho(U)$ berbeda.

13.3 Jarak dari sudut siku-siku ke hipotenusa

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex003`. **Label sumber:** `ex:right-angle-parallelism`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Andaikan $\triangle_h ABC$ memiliki sudut-h siku-siku di C. Tunjukkan bahwa jarak-h dari C ke $[AB]_h$ tidak dapat melebihi 1.

Petunjuk penulis. Tunjukkan bahwa sudut paralelisme di C terhadap $(AB)_h$ kurang dari $\frac{\pi}{4}$, lalu terapkan `prop:angle-parallelism`. Kita dapat memakai hampiran $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ dan $e \approx 2{,}718$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Buktikan dahulu bahwa kaki tegak lurus Q dari C ke $(AB)_h$ terletak pada ruas terbuka $(A,B)_h$.
2. Dalam `prop:angle-parallelism`, ambil $P = C$, $X = A$, $Y = B$, dan $\beta = \pi/2$.
3. Sederhanakan batas menjadi $\ln(1+\sqrt{2})$ dan bandingkan $1+\sqrt{2}$ dengan e tanpa bergantung pada pembulatan desimal.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $d = d_h(C, [AB]_h)$, maka

$$d < \frac{1}{2}\ln\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2}) < 1.$$

Jadi pernyataan yang lebih kuat $d < 1$ berlaku.

Solusi lengkap. Misalkan Q kaki tegak lurus dari C pada garis $(AB)_h$. Kita pastikan dahulu bahwa $Q \in (A,B)_h$. Jika, misalnya, urutannya Q, A, B, maka pada segitiga siku-siku ACQ sudut CAQ kurang dari $\pi/2$. Sinar AB berlawanan dengan sinar AQ, sehingga $|\measuredangle_h CAB| > \pi/2$. Hal ini mustahil: segitiga ABC sudah mempunyai sudut $\pi/2$ di C, sedangkan ketaksamaan jumlah sudut geometri netral memaksa dua sudut lainnya kurang dari $\pi/2$. Kasus A, B, Q sama. Jadi jarak dari C ke ruas $[AB]_h$ sama dengan CQ_h.

Tetapkan $d = CQ_h$. Pada Proposisi `prop:angle-parallelism`, pasangan $A, B \in (AB)_h$ dilihat dari C membentuk $\beta = |\measuredangle_h ACB| = \pi/2$. Bagian terakhir proposisi memberi

$$d < \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos(\pi/4)}{1-\cos(\pi/4)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}.$$

Karena

$$\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (1+\sqrt{2})^2,$$

kita memperoleh $d < \ln(1+\sqrt{2})$.

Untuk membandingkannya dengan 1 secara eksak, $\sqrt{2} < 3/2$ karena $2 < 9/4$, sedangkan deret eksponensial memberi

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} > \frac{5}{2}.$$

Jadi $1 + \sqrt{2} < 5/2 < e$. Monotonisitas logaritma menghasilkan $\ln(1 + \sqrt{2}) < \ln e = 1$. Dengan demikian $d < 1$, khususnya d tidak dapat melebihi 1.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Proposisi memberi jarak ke garis, sedangkan soal meminta jarak ke ruas; posisi kaki Q di dalam $[AB]_h$ harus dibuktikan. Nilai batasnya bukan 1, melainkan angka yang lebih kecil $\ln(1 + \sqrt{2})$. Pembulatan desimal boleh dipakai sebagai pemeriksaan, tetapi bukan alasan bagi arah ketaksamaan ketat.

13.4 Sudut segitiga sama sisi yang sangat panjang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex004`. **Label sumber:** `ex:small-angle`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Misalkan ABC merupakan segitiga-h sama sisi dengan panjang sisi 100. Tunjukkan bahwa

$$|\measuredangle_h ABC| < \frac{1}{10\,000\,000\,000}.$$

Buatlah sketsa $\triangle_h ABC$ dalam model konformal.

Petunjuk penulis. Menurut ketaksamaan segitiga, jarak-h dari B ke $(AC)_h$ sekurang-kurangnya 50. Menurut `prop:angle-parallelism` , sudut $\beta = |\measuredangle_h ABC|$ memenuhi $\beta < 2\phi$, dengan ϕ sudut paralelisme pada jarak 50. Tunjukkan $\cos\phi = (e^{100} - 1)/(e^{100} + 1)$ dan taksir ϕ. Kita boleh menggunakan $\cos\phi \le 1 - \phi^2/10$ untuk $|\phi| < \pi/2$ dan $e^3 > 10$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Turunkan tinggi dari B ke AC. Kekongruenan dua segitiga siku-siku menunjukkan bahwa kakinya membagi AC menjadi dua ruas panjang 50.
2. Gunakan ketaksamaan segitiga ketat untuk memperoleh tinggi $h > 50$.
3. Bandingkan sudut di B dengan dua garis sejajar asimtotik dari B ke $(AC)_h$, lalu gunakan rumus eksplisit sudut paralelisme.
4. Untuk sketsa, pindahkan A ke pusat cakram; B, C berada pada lingkaran Euklides berjari-jari $\tanh 50$ dan sangat dekat satu sama lain pada batas absolut.

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan ϕ_0 sudut paralelisme pada jarak 50,

$$\beta < 2\phi_0, \qquad \phi_0^2 < \frac{20}{e^{100}} < 2 \cdot 10^{-32}.$$

Jadi $\beta < 4 \cdot 10^{-16} < 10^{-10}$. Pada sketsa konformal, dua sisi dari pusat berupa ruas radial, sedangkan sisi ketiga berupa busur lingkaran yang tegak lurus lingkaran absolut.

Solusi lengkap. Karena segitiga sama sisi, SSS menunjukkan bahwa ketiga sudutnya sama. Defek positif `thm:3sum-h` membuat setiap sudut kurang dari $\pi/3$, jadi semuanya lancip. Misalkan H kaki tegak lurus dari B pada $(AC)_h$; karena sudut di A dan C lancip, $H \in (A,C)_h$.

Segitiga siku-siku ABH dan CBH mempunyai hipotenusa yang sama panjang, $AB_h = CB_h = 100$, dan kaki bersama BH_h. Kekongruenan hipotenusa–kaki memberi $AH_h = HC_h$. Karena $AC_h = 100$, kita mempunyai $AH_h = HC_h = 50$. Ketaksamaan segitiga ketat dalam $\triangle_h ABH$ memberi

$$100 = AB_h < AH_h + BH_h = 50 + BH_h,$$

sehingga tinggi $h = BH_h > 50$.

Misalkan ϕ_0 sudut paralelisme pada jarak 50. Sudut paralelisme menurun terhadap jarak, sehingga sudut paralelisme dari B terhadap $(AC)_h$ kurang dari ϕ_0. Kedua sinar BA dan BC memotong $(AC)_h$ dan berada di antara dua arah sejajar asimtotik; akibatnya

$$\beta = |\measuredangle_h ABC| < 2\phi_0. \tag{1}$$

Rumus dalam `prop:angle-parallelism` memberi

$$\cos\phi_0 = \frac{e^{100}-1}{e^{100}+1}, \qquad 1-\cos\phi_0 = \frac{2}{e^{100}+1} < \frac{2}{e^{100}}. \tag{2}$$

Karena $0 < \phi_0 < \pi/2$ dan $\cos x \le 1 - x^2/10$ pada interval tersebut, (2) menghasilkan

$$\frac{\phi_0^2}{10} \le 1-\cos\phi_0 < \frac{2}{e^{100}}, \qquad \phi_0^2 < \frac{20}{e^{100}}. \tag{3}$$

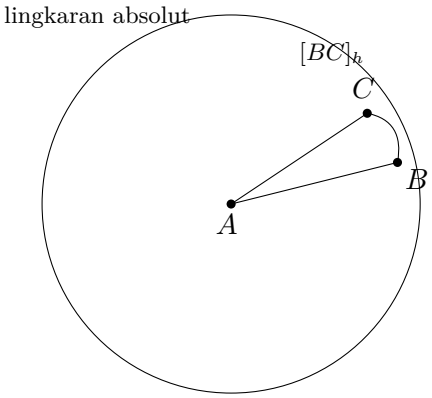
Dari $e^3 > 10$ diperoleh $e^{99} > 10^{33}$, jadi juga $e^{100} > 10^{33}$. Maka

$$\phi_0^2 < 2\cdot 10^{-32}, \qquad \phi_0 < 2\cdot 10^{-16}.$$

Bersama (1), ini memberi

$$|\measuredangle_h ABC| < 4\cdot 10^{-16} < 10^{-10} = \frac{1}{10\,000\,000\,000}.$$

Berikut sketsa tak berskala; sudut di A sengaja dilebihkan agar unsur-unsur terlihat. Lingkaran besar adalah lingkaran absolut, A dipindahkan ke pusatnya, dan $AB_h = AC_h = 100$ berarti $AB = AC = \tanh 50$, hampir sama dengan 1.



Busur $[BC]_h$ adalah bagian dari lingkaran Euklides yang tegak lurus pada lingkaran absolut; dua sisi melalui pusat adalah ruas garis Euklides.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Panjang-h 100 tidak berarti panjang Euklides 100 di dalam cakram satuan. Ketika satu titik sudut berada di pusat, jari-jari Euklidesnya adalah $\tanh 50 < 1$. Sketsa tidak dapat menggambarkan sudut orde 10^{-16} secara berskala; pelebaran visual harus dinyatakan. Arah ketaksamaan kosinus pada (3) tidak boleh dibalik.

13.5 Supremum sisi pada segiempat tiga siku-siku

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex005`. **Label sumber:** `ex:side-sup`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Misalkan $\square_h ABCD$ merupakan segiempat pada bidang-h sedemikian sehingga sudut-sudut-h di A, B, dan C siku-siku serta $AB_h = BC_h$. Tentukan batas atas optimal untuk AB_h.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa sudut paralelisme di B terhadap $(CD)_h$ lebih besar dari $\pi/4$, dan nilainya mendekati $\pi/4$ ketika $CD_h \to \infty$. Dengan `prop:angle-parallelism` , diperoleh

$$BC_h < \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Ruas kanan merupakan limit BC_h ketika $CD_h \to \infty$, sehingga itulah batas atas optimal.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Bandingkan segitiga siku-siku ABD dan CBD: keduanya mempunyai hipotenusa BD dan kaki yang sama panjang, $AB = BC$.
2. Simpulkan bahwa diagonal BD membagi dua sudut siku-siku di B; khususnya $|\measuredangle_h CBD| = \pi/4$.
3. Karena BD masih memotong $(CD)_h$, sudut ini lebih kecil daripada sudut paralelisme dari B terhadap $(CD)_h$.
4. Tunjukkan ketajaman dengan membiarkan titik potong D menuju titik ideal garis $(CD)_h$.

Jawaban atau pemeriksaan. Batas atas optimal, yang merupakan supremum dan tidak dicapai segiempat tak-degenerat, adalah

$$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}.$$

Solusi lengkap. Diagonal BD membagi segiempat menjadi dua segitiga siku-siku ABD dan CBD. Keduanya mempunyai hipotenusa bersama BD, sedangkan $AB_h = BC_h$ menurut asumsi. Syarat kekongruenan hipotenusa–kaki memberi

$$\triangle_h ABD \cong \triangle_h CBD.$$

Karena $\measuredangle_h ABC = \pi/2$, diagonal itu membagi sudut di B menjadi dua sudut sama, sehingga

$$|\measuredangle_h CBD| = |\measuredangle_h DBA| = \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Jarak-h dari B ke $(CD)_h$ adalah BC_h karena $BC \perp CD$. Misalkan ϕ sudut paralelisme di B terhadap $(CD)_h$, diukur dari sinar BC. Sinar BD benar-benar memotong $(CD)_h$ di titik-h D. Berdasarkan definisi arah batas sejajar asimtotik, (1) memberi

$$\frac{\pi}{4} < \phi. \tag{2}$$

Rumus sudut paralelisme prop:angle-parallelism dan monotonisitas fungsi $x \mapsto \frac{1}{2}\ln((1+\cos x)/(1-\cos x))$ menghasilkan

$$\begin{aligned} BC_h &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi} \\ &< \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos(\pi/4)}{1-\cos(\pi/4)} = \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Karena $AB_h = BC_h$, batas yang sama berlaku bagi AB_h.

Tinggal membuktikan optimalitas. Untuk setiap $s < \ln(1+\sqrt{2})$, ambil segmen BC dengan panjang-h s dan garis $(CD)_h$ melalui C yang tegak lurus BC. Rumus di atas menyatakan bahwa sudut paralelismenya $\phi(s) > \pi/4$. Karena itu sinar dari B yang membentuk sudut $\pi/4$ dengan BC masih memotong $(CD)_h$ pada suatu titik D. Cerminkan segitiga BCD terhadap pembagi sudut di B; citra C adalah titik A, dan citra garis CD adalah garis AD. Isometri pencerminan memberi $AB_h = BC_h = s$ serta sudut siku-siku di A, B, C. Jadi semua nilai $s < \ln(1+\sqrt{2})$ yang cukup dekat dengan batas benar-benar direalisasikan.

Ketika $s \uparrow \ln(1+\sqrt{2})$, $\phi(s) \downarrow \pi/4$ dan titik potong D bergerak menuju titik ideal; setara dengan $CD_h \to \infty$. Pada nilai batas, BD hanya sejajar asimtotik dan D bukan lagi titik-h. Maka batas tersebut merupakan supremum optimal, bukan maksimum.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Nilai $\ln(1+\sqrt{2})$ tidak dicapai oleh segiempat hingga. Kesamaan $|\measuredangle CBD| = \pi/4$ berasal dari kekongruenan dua segitiga hipotenusa–kaki, bukan dari simetri Euklides yang diasumsikan. Ketajaman memerlukan keluarga segiempat nyata yang mendekati batas, bukan hanya bentuk aljabar suatu ketaksamaan.

13.6 Lokus pencerminan titik terhadap titik-titik pada garis

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex006`. **Label sumber:** `ex:equidistant-reflection`.
Tingkat: menengah.

Soal sumber. Misalkan g merupakan himpunan semua pencerminan-h suatu titik-h P terhadap titik-titik pada suatu garis-h m. Tunjukkan bahwa g merupakan ekuidistan dari m.

Petunjuk penulis. Misalkan P' titik-h lain, dan R, R' berturut-turut kaki tegak lurus dari P, P' pada m. Tunjukkan bahwa P' merupakan hasil pencerminan-h P terhadap $Q \in m$ jika dan hanya jika P, P' berada pada sisi berlawanan dari m, $PR_h = P'R'_h$, dan Q merupakan titik tengah-h $[RR']_h$. Kita mungkin memerlukan prop:vert , SAS, dan SAA (lihat ex:SAA); konteks gambar petunjuk adalah `pic-352`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Setengah putaran berpusat pada $Q \in m$ menetapkan m sebagai himpunan dan menukar kedua sisinya.
2. Citra kaki tegak lurus R adalah kaki R'; isometri mempertahankan PR_h dan membuat Q titik tengah RR'.
3. Untuk arah balik, ambil titik tengah Q dari RR' dan gunakan ketunggalan garis tegak lurus serta ketunggalan titik pada sinar dengan jarak tertentu.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $d = d_h(P, m) > 0$, lokus g tepat himpunan titik pada sisi seberang m yang berjarak-h d dari m, yaitu salah satu ekuidistan m. Jika $P \in m$, lokusnya adalah m sendiri, kasus degenerat berjarak nol.

Solusi lengkap. Andaikan dahulu $P \notin m$. Misalkan R kaki tegak lurus P pada m dan $d = PR_h > 0$. Untuk setiap $Q \in m$, nyatakan setengah putaran atau pencerminan titik berpusat Q dengan ρ_Q, dan tetapkan $P' = \rho_Q(P)$.

Transformasi ρ_Q menetapkan garis m sebagai himpunan dan menukar dua setengah bidangnya. Karena $PR \perp m$, citranya adalah garis melalui $R' = \rho_Q(R)$ yang tegak lurus m; dengan demikian R' adalah kaki tegak lurus P' pada m. Isometri memberi

$$P'R'_h = PR_h = d.$$

Selain itu Q merupakan titik tengah-h $[RR']_h$. Jadi setiap citra P' terletak pada sisi m yang berlawanan dari P dan pada jarak tetap d dari m. Ini membuktikan satu inklusi lokus.

Sebaliknya, ambil sebarang titik P' pada sisi berlawanan dengan P sedemikian sehingga $d_h(P', m) = d$. Misalkan R' kaki tegak lurusnya dan Q titik tengah-h $[RR']_h$. Setengah putaran ρ_Q memetakan R ke R' dan memetakan garis tegak lurus m di R ke garis tegak lurus m di R'. Karena P dan P' berada pada sisi berlawanan, $\rho_Q(P)$ dan P' berada pada sinar yang sama dari R' yang tegak lurus m. Keduanya berjarak d dari R':

$$R'\rho_Q(P)_h = RP_h = d = R'P'_h.$$

Pada satu sinar terdapat tepat satu titik pada jarak yang diberikan, sehingga $\rho_Q(P) = P'$. Inklusi balik terbukti. Maka g tepat ekuidistan dari m pada sisi seberang P.

Kriteria dalam petunjuk juga kini terbukti dua arah: syarat sisi berlawanan, kesamaan $PR_h = P'R'_h$, dan titik tengah Q bukan hanya perlu, melainkan cukup untuk memperoleh $P' = \rho_Q(P)$.

Jika $P \in m$, setiap citranya tetap pada m. Sebaliknya, untuk sebarang $P' \in m$, pilih titik tengah-h Q dari $[PP']_h$; maka $\rho_Q(P) = P'$. Jadi lokus adalah m, yang dapat dipandang sebagai ekuidistan degenerat pada jarak nol. Cabang ini tidak mengubah pernyataan utama untuk ekuidistan positif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. "Pencerminan terhadap titik" adalah setengah putaran, bukan pencerminan terhadap garis m. Lokus berada pada sisi yang berlawanan dari titik awal; gabungan kedua ekuidistan tidak muncul. Kesamaan jarak ke m saja belum mengidentifikasi pusat pencerminan: pusatnya harus titik tengah RR'.

13.7 Segitiga siku-siku sama kaki pada horosiklus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex007`. **Label sumber:** `ex:right-trig-horocycle`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Tentukan panjang kaki suatu segitiga-h siku-siku sama kaki yang terinskripsi pada horosiklus.

Petunjuk penulis. Ambil lingkaran absolut sebagai lingkaran satuan. Untuk segitiga hiperbolik PQR yang siku-siku di Q, dengan $PQ_h = QR_h$ dan ketiga titik pada suatu horosiklus, pindahkan Q ke pusat absolut. Maka $\measuredangle_h PQR = \measuredangle PQR = \pm\pi/2$ dan $PQ = QR$. Lingkaran Euklides melalui P, Q, R menyinggung lingkaran absolut. Simpulkan $PQ = 1/\sqrt{2}$, lalu terapkan `lem:O-h-dist` .

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Setelah $Q = O$, putar koordinat sehingga $P = (a, 0)$ dan $R = (0, a)$.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran melalui O, P, R.
3. Gunakan syarat singgung internal dengan lingkaran satuan untuk memperoleh $a = 1/\sqrt{2}$.
4. Ubah jarak Euklides radial a menjadi panjang-h dan sederhanakan.

Jawaban atau pemeriksaan. Panjang masing-masing kaki adalah

$$\boxed{\ln(3 + 2\sqrt{2}) = 2\ln(1 + \sqrt{2})}.$$

Solusi lengkap. Gunakan isometri-h untuk memindahkan sudut siku-siku Q ke pusat O dari lingkaran absolut satuan. Model bersifat konformal, sehingga sudut Euklides PQR juga siku-siku. Karena isometri dan rumus radial `lem:O-h-dist` mempertahankan kesamaan panjang-h, $PQ_h = QR_h$ menyiratkan $PQ = QR$. Setelah rotasi Euklides terhadap O, kita boleh menulis

$$Q = (0, 0), \qquad P = (a, 0), \qquad R = (0, a), \qquad 0 < a < 1.$$

Lingkaran Euklides Γ melalui ketiga titik itu memiliki pusat $S = (a/2, a/2)$ dan jari-jari

$$\rho = SQ = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Jarak pusat S dari pusat lingkaran absolut adalah juga $OS = a/\sqrt{2}$. Karena P, Q, R terletak pada satu horosiklus, Γ menyinggung lingkaran absolut dari sebelah dalam. Syarat singgung internal adalah

$$OS + \rho = 1.$$

Karena kedua suku sama dengan $a/\sqrt{2}$, kita memperoleh $a\sqrt{2} = 1$, jadi $a = 1/\sqrt{2}$.

Lema `lem:O-h-dist` sekarang memberi panjang kaki

$$\begin{aligned} PQ_h = QR_h &= \ln\frac{1 + a}{1 - a} = \ln\frac{1 + 1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} \\ &= \ln\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \ln(\sqrt{2} + 1)^2 \\ &= 2\ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(3 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Nilai itu tidak bergantung pada posisi awal segitiga karena normalisasi yang dipakai merupakan isometri-h.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan kaki-h berubah menjadi kesamaan kaki Euklides hanya setelah titik Q berada di pusat dan kedua kaki radial. Syarat singgung internal adalah $OS + \rho = 1$, bukan $|OS - \rho| = 1$. Nilai $1/\sqrt{2}$ adalah panjang Euklides; jawaban soal adalah panjang-h logaritmik.

13.8 Transformasi yang mempertahankan sudut adalah isometri

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex008`. **Label sumber:** `ex:angle-preserving-hyp`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap transformasi bidang-h yang mempertahankan sudut merupakan transformasi isometrik.

Petunjuk penulis. Terapkan syarat kekongruenan AAA (thm:AAA).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ambil dua titik berbeda P, Q yang jaraknya hendak dibandingkan.
2. Pilih $R \notin (PQ)_h$ agar PQR merupakan segitiga tak degenerat.
3. Bandingkan segitiga PQR dengan segitiga citranya; ketiga sudut bersesuaian sama.
4. AAA memberi kekongruenan, sehingga sisi PQ dan citranya sama panjang.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk setiap P, Q, pilih titik ketiga R tak segaris. AAA memberi $\triangle_h PQR \cong \triangle_h P'Q'R'$, sehingga $P'Q'_h = PQ_h$. Karena pasangan P, Q sebarang, transformasi mempertahankan semua jarak-h.

Solusi lengkap. Misalkan F suatu bijeksi bidang-h yang mempertahankan sudut dan tulis $P' = F(P)$. Ambil sebarang dua titik berbeda P, Q. Pilih R di luar garis-h $(PQ)_h$. Berdasarkan definisi transformasi yang mempertahankan sudut,

$$\measuredangle_h PQR = \measuredangle_h P'Q'R', \quad \measuredangle_h QRP = \measuredangle_h Q'R'P', \quad \measuredangle_h RPQ = \measuredangle_h R'P'Q'.$$

Segitiga citra tak degenerat: jika P', Q', R' segaris, salah satu sudut citranya bernilai 0 atau π, bertentangan dengan sudut-sudut tak nol dari segitiga PQR yang dipertahankan.

Syarat kekongruenan AAA thm:AAA berlaku bagi kedua segitiga tak degenerat tersebut. Kesamaan bertanda di atas bahkan lebih kuat daripada kesamaan nilai mutlak yang diperlukan, sehingga

$$\triangle_h PQR \cong \triangle_h P'Q'R'.$$

Akibatnya semua sisi bersesuaian sama panjang, khususnya

$$d_h(F(P), F(Q)) = P'Q'_h = PQ_h = d_h(P, Q).$$

Untuk $P = Q$, kesamaan jarak jelas bernilai nol. Karena pasangan P, Q sebarang, F mempertahankan fungsi jarak-h pada seluruh bidang. Bersama bijektivitas yang sudah termasuk dalam definisi transformasi, inilah tepat pernyataan bahwa F merupakan transformasi isometrik bidang-h.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dalam geometri Euklides, kesamaan tiga sudut hanya memberi kesebangunan; di bidang hiperbolik, AAA memberi kekongruenan karena defek menentukan skala. Titik ketiga harus dipilih tak segaris. Tidak perlu terlebih dahulu menebak rumus koordinat transformasi atau membuktikan preservasi jarak hanya secara lokal.

13.9 Pertumbuhan keliling lingkaran-h

ID stabil: o004-c100-sol-ch13-ex009. **Label sumber:** ex:circum. **Tingkat:** dasar.

Soal sumber. Misalkan $\mathrm{circum}_h(r)$ menyatakan keliling lingkaran-h berjari-jari-h r. Tunjukkan bahwa

$$\mathrm{circum}_h(r+1) > 2\,\mathrm{circum}_h(r)$$

untuk setiap $r > 0$.

Petunjuk penulis. Terapkan `prop:circum` . Gunakan fakta bahwa fungsi $r \mapsto e^{-r}$ menurun dan $e > 2$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Hilangkan faktor positif 2π dengan memakai $\mathrm{circum}_h(r) = 2\pi \sinh r$.
2. Tulis selisih $\sinh(r+1) - 2\sinh r$ dalam bentuk eksponensial.
3. Kelompokkan suku berfaktor e^{r} dan e^{-r}; kedua koefisiennya positif.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$\sinh(r+1) - 2\sinh r = \frac{1}{2}\left[e^{r}(e-2) + e^{-r}(2-e^{-1})\right] > 0.$$

Perkalian dengan $2\pi > 0$ memberi ketaksamaan yang diminta.

Solusi lengkap. Menurut Proposisi `prop:circum` , untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$\mathrm{circum}_h(r) = 2\pi \sinh r.$$

Karena 2π positif, cukup membuktikan $\sinh(r+1) > 2\sinh r$. Dari definisi sinus hiperbolik,

$$\begin{aligned}\sinh(r+1) - 2\sinh r &= \frac{e^{r+1} - e^{-r-1}}{2} - (e^{r} - e^{-r}) \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{r}(e-2) + e^{-r}(2-e^{-1})\right].\end{aligned}$$

Kita mempunyai $e^{r} > 0$ dan $e^{-r} > 0$. Selain itu $e > 2$, sehingga $e - 2 > 0$, dan $e^{-1} < 1 < 2$, sehingga $2 - e^{-1} > 0$. Jadi kedua suku di dalam kurung positif dan selisihnya positif ketat. Oleh karena itu

$$\sinh(r+1) > 2\sinh r,$$

dan akhirnya

$$\mathrm{circum}_h(r+1) = 2\pi\sinh(r+1) > 4\pi\sinh r = 2\,\mathrm{circum}_h(r).$$

Argumen sebenarnya juga berlaku untuk $r = 0$ sebagai ketaksamaan positif, tetapi domain soal $r > 0$ dipertahankan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pertumbuhan ini tidak mengikuti dari monotonisitas sinh saja; monotonisitas hanya memberi faktor lebih besar dari 1, bukan lebih besar dari 2. Suku e^{-r} tidak boleh dibuang dalam pembuktian eksak meskipun kecil untuk r besar. Faktor 2π harus dipertahankan sampai arah ketaksamaan diamankan oleh kepositifannya.

13.10 Batas ketat hipotenusa hiperbolik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch13-ex010`. **Label sumber:** `ex:c+1>a+b`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Andaikan $\triangle_h ACB$ memiliki sudut siku-siku di C. Tetapkan $a = BC_h$, $b = CA_h$, dan $c = AB_h$. Tunjukkan bahwa

$$c + \ln 2 > a + b.$$

Petunjuk penulis. Terapkan teorema Pythagoras hiperbolik dan definisi kosinus hiperbolik. Gunakan bahwa $x \mapsto e^x$ positif dan meningkat. Menurut ketaksamaan segitiga,

$$-c \le a - b \qquad \text{dan} \qquad -c \le b - a.$$

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kembangkan $2\cosh c = 2\cosh a \cosh b$ sepenuhnya dalam eksponensial.
2. Pisahkan besaran $2e^c - e^{a+b}$ yang tanda positifnya ekuivalen dengan kesimpulan setelah mengambil logaritma.
3. Gunakan $c \ge |a-b|$ untuk membatasi dua suku silang dari bawah oleh e^{-c}; suku e^{-a-b} memberi ketaksamaan ketat.

Jawaban atau pemeriksaan. Teorema Pythagoras hiperbolik menghasilkan

$$2e^c - e^{a+b} = e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} - 2e^{-c} > 0.$$

Jadi $e^c > e^{a+b}/2 = e^{a+b-\ln 2}$, dan monotonisitas eksponensial memberi $c > a + b - \ln 2$.

Solusi lengkap. Teorema Pythagoras hiperbolik `thm:pyth-h-poincare` memberi

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Dengan definisi $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, kalikan persamaan itu dengan 4:

$$2e^c + 2e^{-c} = e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b}. \tag{1}$$

Susun ulang (1) menjadi

$$2e^c - e^{a+b} = e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} - 2e^{-c}. \tag{2}$$

Ketaksamaan segitiga memberi $c \ge |a-b|$. Dengan demikian

$$-c \le a - b \qquad \text{dan} \qquad -c \le b - a.$$

Karena eksponensial meningkat,

$$e^{a-b} \ge e^{-c}, \qquad e^{b-a} \ge e^{-c}.$$

Masukkan kedua batas ini ke ruas kanan (2):

$$e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} - 2e^{-c} \ge e^{-a-b} > 0.$$

Jadi $2e^c - e^{a+b} > 0$, atau

$$e^c > \frac{e^{a+b}}{2} = e^{a+b-\ln 2}.$$

Monotonisitas ketat eksponensial menghasilkan

$$c > a + b - \ln 2,$$

yang ekuivalen dengan $c + \ln 2 > a + b$.

Ketaksamaan tetap ketat bahkan jika salah satu batas $e^{a-b} \ge e^{-c}$ menjadi kesamaan, karena suku tambahan e^{-a-b} selalu positif. Inilah alasan yang hilang jika suku eksponensial kecil dibuang sebagai hampiran.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ketaksamaan segitiga $c < a + b$ tidak mempunyai arah yang cukup untuk hasil ini; yang diperlukan adalah dua bentuk $-c \le \pm(a - b)$. Jangan memakai $\cosh c > \cosh(a + b - \ln 2)$ tanpa memeriksa tanda argumen kedua, sebab cosh tidak meningkat pada seluruh garis real. Pembuktian eksponensial menghindari masalah domain itu dan sekaligus mempertahankan ketaksamaan ketat.

Uji penguasaan Bab 13

1. **(2 poin).** Buktikan ketaksamaan ketat sudut pada segiempat Lambert dan jelaskan mengapa kesejajaran saja hanya memberi ketaksamaan lemah.
2. **(2 poin).** Buktikan dua arah kriteria ultraparalel dengan konstruksi titik ideal dan setengah putaran, termasuk penolakan satu ujung ideal bersama.
3. **(2 poin).** Tunjukkan bahwa kaki tinggi dari sudut siku-siku berada pada hipotenusa dan turunkan batas $d < \ln(1 + \sqrt{2}) < 1$.
4. **(2 poin).** Buktikan batas sudut segitiga sama sisi panjang 100 dan jelaskan sketsa konformal setelah satu titik dipindahkan ke pusat.
5. **(2 poin).** Tentukan supremum sisi segiempat tiga siku-siku dan buktikan bahwa nilainya didekati tetapi tidak dicapai.
6. **(2 poin).** Karakterisasikan dua arah kapan P' merupakan setengah putaran P terhadap titik $Q \in m$, lalu identifikasi lokusnya.
7. **(2 poin).** Dalam cakram satuan, hitung panjang kaki segitiga siku-siku sama kaki yang terinskripsi pada horosiklus dari syarat singgung internal.
8. **(2 poin).** Buktikan bahwa bijeksi yang mempertahankan sudut mempertahankan jarak setiap pasangan titik dengan memilih segitiga bantu dan memakai AAA.
9. **(2 poin).** Buktikan $\mathrm{circum}_h(r + 1) > 2\,\mathrm{circum}_h(r)$ melalui selisih eksponensial tanpa mengabaikan suku e^{-r}.
10. **(2 poin).** Dari Pythagoras hiperbolik, turunkan $c + \ln 2 > a + b$ memakai dua bentuk ketaksamaan segitiga dan pertahankan sumber ketaksamaan ketat.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 13.1.

M2. 13.2.

M3. 13.3.

M4. 13.4.

M5. 13.5.

M6. 13.6.

M7. 13.7.

M8. 13.8.

M9. 13.9.

M10. 13.10.

M1 (2 poin). Satu poin untuk kesejajaran dari dua ketegaklurusan dan $\theta \geq \phi$; satu poin untuk menolak kesamaan melalui titik ideal dan pencerminan terhadap garis tegak lurus bersama.

M2 (2 poin). Satu poin untuk konstruksi garis tegak lurus bersama dari ujung ideal silang; satu poin untuk arah balik, termasuk setengah putaran dan kontradiksi dua ujung ideal bersama.

M3 (2 poin). Satu poin untuk membuktikan kaki tegak lurus berada dalam hipotenusa dan menerapkan batas pada $\beta = \pi/2$; satu poin untuk penyederhanaan $\ln(1+\sqrt{2}) < 1$ dengan arah ketaksamaan benar.

M4 (2 poin). Satu poin untuk tinggi > 50, rumus sudut paralelisme, dan taksiran $\phi_0^2 < 20e^{-100}$; satu poin untuk kesimpulan numerik serta sketsa cakram yang benar dan dinyatakan tak berskala.

M5 (2 poin). Satu poin untuk pembagian diagonal menjadi dua sudut $\pi/4$ dan batas $\ln(1+\sqrt{2})$; satu poin untuk keluarga konstruktif yang mendekati batas dan penjelasan bahwa titik D menjadi ideal pada limit.

M6 (2 poin). Satu poin untuk keniscayaan syarat sisi, jarak, dan titik tengah; satu poin untuk kecukupan melalui ketunggalan sinar serta penanganan jujur kasus $P \in m$.

M7 (2 poin). Satu poin untuk pusat/jari-jari lingkaran horosiklus dan $a = 1/\sqrt{2}$; satu poin untuk konversi jarak-h dan penyederhanaan ke $2\ln(1+\sqrt{2})$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk memilih titik ketiga tak segaris dan menerapkan AAA; satu poin untuk menyimpulkan preservasi jarak bagi setiap pasangan, termasuk kasus pasangan berimpit.

M9 (2 poin). Satu poin untuk menggunakan $2\pi \sinh r$ dan mengembangkan selisih; satu poin untuk membuktikan kedua koefisien positif dan mengembalikan faktor 2π.

M10 (2 poin). Satu poin untuk identitas eksponensial (1)–(2) dan batas $e^{a-b}, e^{b-a} \geq e^{-c}$; satu poin untuk ketatnya suku e^{-a-b} serta langkah monotonisitas menuju $c + \ln 2 > a + b$.

Bab 14

Solusi dan penguasaan Bab 14: Geometri afin

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Empat belas blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul "Petunjuk penulis" dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter14.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber dan batas rigor

Bab sumber memuat tepat 15 latihan tingkat atas: 4 latihan bertanda `[!]` (salah satunya "Latihan kelas"), 10 latihan biasa, dan 1 "Latihan lanjutan" yang tidak bertanda. Terdapat 8 subbutir: empat pada `ex:afine-linear`, dua pada `ex:f(1)=1`, dan dua pada `ex:ceva-affine`. Empat belas blok petunjuk penulis pada baris 1611–1746 mencakup semua 15 latihan karena `ex:affine-continuous` dan `ex:affine-coordinates` berbagi satu blok petunjuk.

Bab 14 berada dalam bagian tambahan Bab 14–20 yang oleh sumber diperlakukan dengan caveat rigor. Karena itu, solusi ini tidak mengangkat sketsa atau rujukan silang menjadi teorema baru secara diam-diam. Setiap pemakaian hasil pendamping yang telah diterima disebutkan; langkah yang hilang dari petunjuk ditutup di sini. Pada petunjuk `ex:inversions-inversive`, notasi $\alpha(\Gamma) = \Gamma$ setelah definisi α' dipertahankan apa adanya sebagai teks sumber, lalu ketidakkonsistenannya diungkap dan normalisasi yang diperlukan dibuktikan secara eksplisit. Kesimpulan petunjuk bahwa α menjadi komposisi pencerminan saja juga dipertahankan lalu dibatasi ke kesimpulan yang benar, yaitu komposisi inversi dan pencerminan. Notasi jajar genjang literal `WBPQ` pada petunjuk `ex:R-hom` menghasilkan $b - a$, bukan $a - b$, menurut urutan siklik biasa; solusi memberi susunan tak degenerat yang benar. Gambar `pic-354` merupakan konteks konstruksi titik tengah dan `pic-229` merupakan konteks konfigurasi Ceva/Van Aubel; keduanya bukan premis tersembunyi. Tidak ada berkas gambar sumber yang disalin.

14.1 Garis sejajar tetap sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex001`. **Label sumber:** `ex:affine-par`. **Tingkat:** dasar (latihan kelas bertanda).

Soal sumber. Buktikan bahwa transformasi afin pada bidang Euklides memetakan setiap pasangan garis sejajar ke pasangan garis sejajar.

Petunjuk penulis. Andaikan garis-garis berbeda ℓ dan m dipetakan ke garis-garis berpotongan ℓ' dan m'. Misalkan P' menyatakan titik perpotongan keduanya. Misalkan P merupakan prapeta dari P'. Menurut definisi pemetaan afin, P harus terletak pada ℓ maupun m. Simpulkan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan kebijektifan untuk memastikan bahwa dua garis berbeda tidak dapat mempunyai citra yang sama.
2. Jika kedua garis citra berpotongan, tarik titik potong itu kembali melalui invers pemetaan titik.
3. Keanggotaan pada masing-masing garis citra memaksa prapeta yang sama berada pada kedua garis asal.

Jawaban atau pemeriksaan. Citra dua garis sejajar yang berbeda adalah dua garis berbeda dan tidak berpotongan; jadi keduanya sejajar.

Solusi lengkap. Misalkan F transformasi afin dan $\ell \parallel m$, dengan $\ell \neq m$. Karena F bijektif, $F(\ell)$ dan $F(m)$ berbeda: jika keduanya sama, pilih $X \in \ell$; setiap titik citra pada garis bersama mempunyai prapeta tunggal, sehingga kesamaan himpunan citra akan memberi $\ell = m$.

Andaikan $F(\ell)$ dan $F(m)$ berpotongan di P'. Kebijektifan memberi tepat satu P dengan $F(P) = P'$. Karena $P' \in F(\ell)$, ada $L \in \ell$ dengan $F(L) = P'$; ketunggalan prapeta memberi $L = P$, sehingga $P \in \ell$. Argumen yang sama memberi $P \in m$. Ini bertentangan dengan $\ell \cap m = \varnothing$. Maka $F(\ell)$ dan $F(m)$ adalah dua garis berbeda yang tidak berpotongan, yakni pasangan garis sejajar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Definisi “memetakan garis ke garis” saja belum menolak dua garis asal mempunyai citra sama. Kebijektifan pada titik diperlukan untuk membedakan citra dan untuk menarik titik potong kembali secara tunggal.

14.2 Empat keluarga pemetaan afin dalam koordinat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex002`. **Label sumber:** `ex:afine-linear`. **Tingkat:** dasar–menengah (latihan bertanda; 4 subbutir).

Soal sumber. Buktikan bahwa pemetaan berikut dari suatu bidang koordinat ke dirinya sendiri mendefinisikan transformasi afin:

(a) *Pemetaan geser* yang didefinisikan oleh $(x, y) \mapsto (x + k \cdot y, y)$ untuk suatu konstanta k.

(b) Penskalaan yang didefinisikan oleh $(x, y) \mapsto (a \cdot x, a \cdot y)$ untuk suatu konstanta $a \neq 0$.

(c) Penskalaan-x dan penskalaan-y yang berturut-turut didefinisikan oleh

$$(x, y) \mapsto (a \cdot x, y), \quad \text{dan} \quad (x, y) \mapsto (x, a \cdot y)$$

untuk suatu konstanta $a \neq 0$.

(d) Transformasi yang didefinisikan oleh

$$(x, y) \mapsto (a \cdot x + b \cdot y + r, c \cdot x + d \cdot y + s)$$

untuk konstanta-konstanta a, b, c, d, r, s sedemikian sehingga matriks $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertibel.

Petunjuk penulis. Dalam setiap kasus, periksa bahwa pemetaan tersebut merupakan bijeksi dan terapkan `ex:line-coord`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Satukan keempat kasus sebagai $F(p) = Ap + t$.
2. Jika A invertibel, tulis invers $p = A^{-1}(q - t)$.
3. Parametrisasi garis sebagai $p_0 + \lambda v$ dengan $v \neq 0$, lalu hitung citranya.
4. Periksa determinan matriks pada setiap subbutir.

Jawaban atau pemeriksaan. Keempat keluarga mempunyai matriks invertibel. Karena $F(p_0 + \lambda v) = F(p_0) + \lambda Av$ dan $Av \neq 0$, setiap garis dipetakan tepat ke suatu garis.

Solusi lengkap. Pertama buktikan satu kriteria seragam. Misalkan

$$F(p) = Ap + t$$

dengan A matriks real 2×2 yang invertibel. Pemetaan ini bijektif, dengan $F^{-1}(q) = A^{-1}(q - t)$. Setiap garis mempunyai parametrisasi $L = \{p_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ untuk suatu $v \neq 0$. Maka

$$F(L) = \{Ap_0 + t + \lambda Av : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Karena A invertibel, $Av \neq 0$, sehingga himpunan terakhir adalah garis. Jadi F transformasi afin.

Untuk *(a)*, matriksnya $\left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, berdeterminan 1. Inversnya $(u, v) \mapsto (u - kv, v)$. Untuk *(b)*, matriksnya aI, berdeterminan $a^2 \neq 0$, dengan invers penskalaan faktor $1/a$. Untuk *(c)*, matriksnya berturut-turut $\mathrm{diag}(a, 1)$ dan $\mathrm{diag}(1, a)$; keduanya berdeterminan $a \neq 0$. Untuk *(d)*, bentuknya persis $Ap + t$ dengan $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dan $t = (r, s)$; invertibilitas telah diasumsikan. Keempat subbutir dengan demikian memenuhi kebijektifan dan syarat garis-ke-garis.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Membuktikan bahwa rumus kontinu atau linear belum cukup: definisi transformasi afin di sini juga meminta bijeksi. Syarat invertibilitas sekaligus menjamin bijeksi dan mencegah vektor arah garis runtuh menjadi nol.

14.3 Dari preservasi segaris ke transformasi afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex003`. **Label sumber:** `ex:collinear=affine`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Misalkan $P \mapsto P'$ adalah bijeksi pada bidang Euklides yang memetakan tripel titik segaris ke tripel titik segaris. Buktikan bahwa pemetaan itu memetakan tripel tidak segaris ke tripel tidak segaris. Simpulkan bahwa pemetaan tersebut merupakan transformasi afin.

Petunjuk penulis. Pilih suatu garis (AB). Andaikan $X' \in (A'B')$ untuk suatu $X \notin (AB)$. Karena $P \mapsto P'$ memetakan titik-titik segaris ke titik-titik segaris, ketiga garis (AB), (AX), dan (BX) dipetakan ke $(A'B')$. Selain itu, setiap garis yang menghubungkan sepasang titik pada ketiga garis tersebut juga dipetakan ke $(A'B')$. Gunakan fakta ini untuk menunjukkan bahwa seluruh bidang dipetakan ke $(A'B')$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa pemetaan tersebut merupakan bijeksi. Berdasarkan asumsi, jika $X \in (AB)$, maka $X' \in (A'B')$. Menurut uraian di atas, jika $X \notin (AB)$, maka $X' \notin (A'B')$. Gunakan fakta ini untuk membuktikan pernyataan kedua.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tolak kemungkinan bahwa tiga titik tidak segaris mempunyai tiga citra segaris dengan menunjukkan bahwa seluruh bidang akan masuk ke satu garis.
2. Untuk titik sembarang di luar tiga garis awal, pilih sebuah garis melaluinya yang memotong dua dari garis awal pada titik berbeda.
3. Setelah nonkegarisan dipertahankan, buktikan inklusi balik $F((AB)) = (A'B')$ memakai prapeta titik pada garis kanan.

Jawaban atau pemeriksaan. Tripel tidak segaris tidak dapat runtuh ke satu garis karena itu akan memaksa seluruh bidang mempunyai citra dalam garis tersebut, bertentangan dengan surjektivitas. Selanjutnya setiap garis dipetakan tepat ke garis melalui citra dua titiknya.

Solusi lengkap. Tuliskan pemetaan sebagai F. Misalkan A, B, X tidak segaris, tetapi demi kontradiksi A', B', X' terletak pada satu garis L'. Setiap titik pada (AB), (AX), atau (BX) mempunyai citra di L', sebab citranya segaris dengan citra dua titik pembentuk garis tersebut.

Ambil titik sembarang T di bidang. Jika T berada pada salah satu dari ketiga garis itu, sudah diketahui $T' \in L'$. Jika tidak, pilih $U \in (AB)$ sehingga garis (TU) tidak sejajar (AX); hanya satu pilihan U yang mungkin memberi arah terlarang, jadi pilihan lain tersedia. Garis (TU) memotong (AX) di suatu V. Titik U' dan V' berada pada L' dan berbeda karena F injektif. Karena U, T, V segaris, T' terletak pada garis $(U'V') = L'$. Jadi setiap titik bidang dipetakan ke L', bertentangan dengan surjektivitas F ke seluruh bidang. Maka tripel tidak segaris selalu dipetakan ke tripel tidak segaris.

Sekarang pilih garis $\ell = (AB)$. Preservasi kegarisan memberi $F(\ell) \subseteq (A'B')$. Sebaliknya, ambil $Y' \in (A'B')$ dan prapetanya Y. Jika $Y \notin (AB)$, tripel A, B, Y tidak segaris sedangkan citranya segaris, bertentangan dengan hasil barusan. Jadi $Y \in \ell$, sehingga $Y' \in F(\ell)$. Dengan demikian $F(\ell) = (A'B')$ untuk setiap garis ℓ; bersama kebijektifan, ini persis definisi transformasi afin.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menganggap invers langsung mempertahankan kegarisan; itulah bagian yang belum diketahui. Inklusi balik citra garis harus diperoleh dari preservasi nonkegarisan dan surjektivitas.

14.4 Bijeksi yang memetakan lingkaran ke lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex004`. **Label sumber:** `ex:circle=affine`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Misalkan α adalah bijeksi pada bidang Euklides yang memetakan setiap lingkaran ke suatu lingkaran. Buktikan bahwa α merupakan transformasi afin.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa α memetakan tripel titik tidak segaris ke tripel titik tidak segaris. Oleh karena itu, α^{-1} memetakan tripel titik segaris ke tripel titik segaris. Tinggal menerapkan `ex:collinear=affine`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tiga titik berbeda yang tidak segaris terletak pada sebuah lingkaran.
2. Garis memotong lingkaran pada paling banyak dua titik, sehingga tiga citra berbeda pada lingkaran citra tidak mungkin segaris.
3. Ubah pernyataan itu menjadi preservasi kegarisan oleh α^{-1}, lalu gunakan kriteria latihan sebelumnya.

Jawaban atau pemeriksaan. α^{-1} adalah bijeksi yang mempertahankan tripel segaris; maka α^{-1} afin dan inversnya, α, juga afin.

Solusi lengkap. Ambil tiga titik berbeda A, B, C yang tidak segaris. Ketiganya menentukan sebuah lingkaran Γ. Menurut asumsi, $\alpha(\Gamma)$ adalah lingkaran. Titik A', B', C' berbeda karena α injektif dan semuanya terletak pada $\alpha(\Gamma)$. Sebuah garis dan sebuah lingkaran memiliki paling banyak dua titik persekutuan; jadi A', B', C' tidak segaris. Dengan demikian α mempertahankan nonkegarisan.

Sekarang ambil tripel segaris A', B', C' dan prapetanya A, B, C. Jika A, B, C tidak segaris, hasil sebelumnya akan membuat citranya tidak segaris, kontradiksi. Jadi α^{-1} memetakan tripel segaris ke tripel segaris. Latihan `ex:collinear=affine`, dengan pemetaan α^{-1}, menunjukkan bahwa α^{-1} transformasi afin. Invers transformasi afin memetakan garis ke garis dan bijektif, sehingga α juga transformasi afin.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Asumsi hanya mengatakan citra setiap lingkaran adalah lingkaran; tidak langsung mengatakan prapeta setiap lingkaran adalah lingkaran. Bukti sengaja melewati nonkegarisan sebelum berbicara tentang invers.

14.5 Titik tengah sebagai konstruksi afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex005`. **Label sumber:** `ex:midpoint-affine`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Misalkan M adalah titik tengah ruas $[AB]$ pada bidang Euklides. Misalkan suatu transformasi afin memetakan titik-titik A, B, dan M berturut-turut ke A', B', dan M'. Buktikan bahwa M' adalah titik tengah $[A'B']$.

Petunjuk penulis. Cukup konstruksikan titik tengah $[AB]$ dengan penggaris dan alat garis sejajar. Tebak konstruksinya dari gambar.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih $C \notin (AB)$ dan lengkapi A, C, B menjadi jajar genjang $ACBD$ hanya dengan garis sejajar.
2. Titik potong diagonal AB dan CD adalah M.
3. Terapkan transformasi afin pada seluruh konfigurasi konstruksi.

Jawaban atau pemeriksaan. Transformasi afin membawa jajar genjang bantu ke jajar genjang dan titik potong diagonal ke titik potong diagonal; diagonal jajar genjang saling membagi dua.

Solusi lengkap. Pilih $C \notin (AB)$. Gambar melalui A garis sejajar (BC) dan melalui B garis sejajar (AC); misalkan keduanya berpotongan di D. Maka $AC \parallel BD$ dan $CB \parallel AD$, sehingga $ACBD$ adalah jajar genjang. Diagonal-diagonalnya adalah AB dan CD, dan keduanya berpotongan di titik M, karena diagonal jajar genjang saling membagi dua. Ini merupakan konstruksi M yang hanya memakai garis, kesejajaran, dan perpotongan.

Misalkan F transformasi afin. Berdasarkan `ex:affine-par`, $A'C'B'D'$ kembali jajar genjang. Kebijektifan memberi

$$F((AB) \cap (CD)) = (A'B') \cap (C'D'),$$

jadi citra titik potong diagonal adalah M'. Diagonal jajar genjang citra juga saling membagi dua, sehingga $A'M' = M'B'$. Karena M' berada pada ruas $[A'B']$ (sebagai titik potong diagonal jajar genjang tak degenerat), M' adalah titik tengahnya.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pernyataan tidak boleh dibuktikan dengan mengasumsikan transformasi afin mempertahankan panjang. Yang dipertahankan adalah konstruksi insidensi dan kesejajaran yang kebetulan mengarakterisasi titik tengah.

14.6 Konstruksi empat operasi real secara afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex006`. **Label sumber:** `ex:R-hom`. **Tingkat:** menengah–lanjut (latihan bertanda).

Soal sumber. Misalkan diberikan titik-titik dengan koordinat $(0,0)$, $(1,0)$, $(a,0)$, dan $(b,0)$ dengan $b \neq 0$. Dengan menggunakan penggaris dan alat garis sejajar, konstruksilah titik-titik dengan koordinat $(a+b,0)$, $(a-b,0)$, $(a \cdot b,0)$, dan $(\frac{a}{b},0)$.

Petunjuk penulis. Misalkan O, E, A, dan B berturut-turut merupakan titik-titik dengan koordinat $(0,0)$, $(1,0)$, $(a,0)$, dan $(b,0)$. Untuk mengonstruksi titik W dengan koordinat $(a+b,0)$ (atau $(a-b,0)$), cobalah mengonstruksi dua jajar genjang $OAPQ$ dan $BWPQ$ (atau $WBPQ$). Untuk mengonstruksi Z dengan koordinat $(a \cdot b,0)$, pilih garis $(OE') \neq (OE)$ dan cobalah mengonstruksi titik-titik $A' \in (OE')$ dan $Z \in (OE)$ sedemikian sehingga $\triangle OEE' \sim \triangle OAA'$ dan $\triangle OE'B \sim \triangle OA'Z$. Dengan cara serupa, konstruksikan titik $(\frac{a}{b},0)$.

Urutan siklik literal $WBPQ$ pada petunjuk akan memberi koordinat $b-a$, bukan $a-b$. Teks petunjuk dipertahankan, sedangkan konstruksi lengkap di bawah memakai penyalinan $\overrightarrow{BO}$ ke titik A, yang benar-benar menghasilkan $a-b$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Salin vektor pada sumbu melalui dua jajar genjang yang memakai satu titik bantu di luar sumbu; ini menangani penjumlahan dan pengurangan.
2. Pilih E' di luar sumbu. Garis melalui A sejajar EE' memotong OE' di $A' = aE'$.
3. Garis melalui A' sejajar $E'B$ memotong sumbu di ab.
4. Bentuk $B' = bE'$ lalu gunakan garis melalui E' sejajar $B'A$ untuk memperoleh a/b.

Jawaban atau pemeriksaan. Semua titik diperoleh sebagai perpotongan garis yang digambar dengan penggaris atau melalui kesejajaran. Kesebangunan memberi parameter berturut-turut $a+b$, $a-b$, ab, dan a/b; syarat $b \neq 0$ tepat diperlukan untuk pembagian.

Solusi lengkap. Tuliskan $\ell = (OE)$. Untuk menyalin vektor $\overrightarrow{OA}$ ke titik B tanpa degenerasi, pilih $P \notin \ell$. Lengkapi O, A, P menjadi jajar genjang sehingga diperoleh $Q = P + \overrightarrow{OA}$. Lalu lengkapi P, Q, B menjadi jajar genjang; titik keempatnya $W = B + \overrightarrow{PQ} = B + \overrightarrow{OA}$ terletak pada ℓ dan berkoordinat $(a+b, 0)$. Dengan cara yang sama, salin $\overrightarrow{BO}$ mula-mula ke titik bantu di luar ℓ, kemudian ke A; titik akhirnya adalah $A + \overrightarrow{BO} = (a-b, 0)$. Setiap pelengkapan jajar genjang hanya memakai dua garis sejajar dan perpotongannya.

Untuk perkalian dan pembagian, pilih $E' \notin \ell$. Garis melalui A yang sejajar EE' memotong OE' di A'. Kesebangunan (atau rasio berarah pada dua garis yang dipotong garis-garis sejajar) memberi $\overrightarrow{OA'} = a\,\overrightarrow{OE'}$. Gambar melalui A' garis sejajar $E'B$; titik potongnya Z dengan ℓ memenuhi

$$\frac{OZ}{OB} = \frac{OA'}{OE'} = a \quad \text{secara berarah,}$$

sehingga $Z = (ab, 0)$.

Selanjutnya, garis melalui B sejajar EE' memotong OE' di $B' = bE'$. Gambar melalui E' garis sejajar $B'A$ dan sebut titik potongnya dengan ℓ sebagai T. Kesebangunan segitiga $OE'T$ dan $OB'A$ memberi

$$\frac{OT}{OA} = \frac{OE'}{OB'} = \frac{1}{b},$$

jadi $T = (a/b, 0)$. Rasio berarah membuat konstruksi tetap sah untuk a atau b negatif; jika $a = 0$, titik hasil perkalian dan pembagian langsung O.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Menyalin vektor sepanjang garis yang sama dengan satu jajar genjang bersifat degenerat dan tidak menentukan titik keempat. Titik bantu di luar sumbu dan dua tahap penyalinan diperlukan. Untuk pembagian, $b \neq 0$ bukan sekadar syarat aljabar: tanpa itu garis konstruksi yang menentukan rasio tidak memberi $1/b$.

14.7 Pusat lingkaran dengan penggaris dan alat sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex007`. **Label sumber:** `ex:center-circ-affine`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Konstruksilah pusat lingkaran yang diberikan dengan menggunakan penggaris dan alat garis sejajar.

Petunjuk penulis. Gambarlah dua tali busur sejajar $[XX']$ dan $[YY']$. Misalkan $Z \in (XY) \cap (X'Y')$ dan $Z' \in (XY') \cap (X'Y)$. Perhatikan bahwa (ZZ') melalui pusat lingkaran. Ulangi konstruksi yang sama untuk sepasang tali busur sejajar lainnya. Pusat lingkaran terletak pada perpotongan garis-garis yang diperoleh.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan simetri lingkaran terhadap diameter yang tegak lurus arah kedua tali busur (ketegaklurusan hanya untuk pembuktian, bukan operasi alat).
2. Simetri itu menukar $X \leftrightarrow X'$ dan $Y \leftrightarrow Y'$, sehingga menetapkan Z dan Z'.
3. Maka Z, Z' berada pada diameter yang sama. Ulangi dengan arah tali busur berbeda dan ambil perpotongan dua diameter.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua aplikasi konstruksi petunjuk menghasilkan dua garis diameter berbeda; perpotongannya adalah pusat lingkaran.

Solusi lengkap. Pilih dua tali busur sejajar berbeda $[XX']$ dan $[YY']$ sedemikian sehingga empat garis silang pada petunjuk tidak sejajar. Semua titik Z, Z' dapat dikonstruksi dengan penggaris. Untuk membuktikan klaim, misalkan d adalah diameter yang tegak lurus kedua tali busur. Pencerminan terhadap d menjaga lingkaran dan masing-masing tali busur sebagai himpunan, serta menukar $X \leftrightarrow X'$ dan $Y \leftrightarrow Y'$.

Karena itu pencerminan menukar garis (XY) dengan $(X'Y')$. Titik potong tunggalnya Z tetap, sehingga $Z \in d$. Dengan cara sama, garis (XY') dan $(X'Y)$ saling ditukar, jadi $Z' \in d$. Maka garis yang dapat dikonstruksi (ZZ') adalah d dan melalui pusat lingkaran.

Ulangi seluruh langkah dengan sepasang tali busur sejajar yang arahnya tidak sejajar pasangan pertama. Diperoleh diameter lain $e \neq d$. Titik $d \cap e$ adalah pusat lingkaran yang diminta. Ketegaklurusan hanya muncul dalam pembuktian bahwa garis hasil adalah diameter; konstruksinya sendiri hanya memakai garis, garis sejajar, lingkaran yang diberikan, dan titik potong.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menggambar diameter dengan alat tegak lurus yang tidak tersedia. Diameter muncul sebagai garis ZZ' dari insidensi; simetri tegak lurus hanya menjustifikasi hasil setelah konstruksi selesai.

14.8 Kemustahilan konstruksi tegak lurus secara afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex008`. **Label sumber:** `ex:affine-perp`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Buktikan bahwa garis yang tegak lurus terhadap garis yang diberikan tidak dapat dikonstruksi dengan penggaris dan alat garis sejajar.

Petunjuk penulis. Andaikan suatu konstruksi menghasilkan dua garis tegak lurus. Terapkan pemetaan geser yang mengubah sudut antara kedua garis tersebut (lihat `ex:afine-linear`*`ex: afine-linear: shear`*). Perhatikan bahwa pemetaan itu mengubah konstruksi tersebut menjadi konstruksi yang sama untuk pilihan lain atas titik-titik bebasnya. Oleh karena itu, secara umum

konstruksi kita tidak menghasilkan garis-garis tegak lurus. (Konstruksi itu mungkin menghasilkan garis tegak lurus hanya secara kebetulan.)

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Setiap langkah yang memakai garis, perpotongan, dan kesejajaran bersifat ekuivarian terhadap transformasi afin.
2. Normalisasikan garis masukan menjadi sumbu-x dan andaikan hasilnya sebuah garis vertikal.
3. Terapkan geser $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$ dengan $k \neq 0$; sumbu-x tetap, tetapi garis vertikal menjadi miring.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika konstruksi universal ada, citranya di bawah geser harus sekaligus menjadi keluaran sah untuk masukan yang sama dan tegak lurus terhadap masukan. Namun geser mengubah garis tegak lurus menjadi garis tidak tegak lurus.

Solusi lengkap. Sebuah konstruksi dengan dua alat tersebut terdiri atas operasi berikut: menarik garis melalui dua titik yang telah ada, menarik garis melalui titik yang sejajar garis yang telah ada, dan mengambil perpotongan garis. Transformasi afin membawa setiap operasi itu ke operasi yang sama pada data citra. Oleh karena itu, seluruh konstruksi bersifat ekuivarian terhadap transformasi afin, termasuk semua pilihan titik bebasnya.

Andaikan ada konstruksi yang untuk setiap garis masukan ℓ dan setiap pilihan bebas yang sah selalu menghasilkan garis $m \perp \ell$. Setelah suatu isometri, boleh diandaikan ℓ adalah sumbu-x; maka m vertikal. Pilih geser

$$S_k(x, y) = (x + ky, y), \qquad k \neq 0.$$

Geser ini mempertahankan ℓ sebagai himpunan dan merupakan transformasi afin menurut latihan koordinat. Konfigurasi yang digeser adalah pelaksanaan konstruksi yang sama dengan pilihan bebas yang juga digeser. Ekuivarians memaksa keluarannya menjadi $S_k(m)$. Jika m berpersamaan $x = c$, maka $S_k(m)$ berpersamaan $x - ky = c$, yang tidak tegak lurus terhadap sumbu-x untuk $k \neq 0$. Ini bertentangan dengan jaminan universal konstruksi. Jadi konstruksi semacam itu tidak ada.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Argumen tidak mengatakan bahwa dua garis yang kebetulan tegak lurus tidak pernah dapat muncul. Yang mustahil adalah prosedur berbasis kedua alat yang menjamin ketegaklurusan untuk semua pilihan bebas yang sah.

14.9 Aturan jajar genjang dan kesamaan vektor

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex009`. **Label sumber:** `ex:parallelogram-rule`. **Tingkat:** menengah (latihan bertanda).

Soal sumber. Buktikan bahwa transformasi afin memetakan jajar genjang ke jajar genjang. Simpulkan bahwa jika $P \mapsto P'$ merupakan transformasi afin, maka

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}, \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Petunjuk penulis. Bagian pertama diperoleh dari `ex:affine-par`. Andaikan A, B, X, dan Y tidak segaris; dalam hal ini, $\square ABYX$ merupakan jajar genjang. Menurut aturan jajar genjang, bagian "hanya jika" terbukti. Sekarang andaikan A, B, X, dan Y terletak pada garis ℓ. Pilih dua titik tambahan $P, Q \notin \ell$ sedemikian sehingga $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}$ dan karena itu $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$. Dari uraian di atas, kita peroleh $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{P'Q'}$ dan $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{A'B'}$. Dengan demikian, bagian "hanya jika" terbukti dalam kasus umum. Bagian "jika" diperoleh karena invers suatu transformasi afin juga merupakan transformasi afin.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Citra dua pasang sisi berhadapan yang sejajar tetap dua pasang sejajar.
2. Untuk empat titik yang tidak semuanya segaris, gunakan karakterisasi kesamaan vektor oleh jajar genjang $ABYX$.
3. Untuk kasus segaris, pindahkan vektor ke garis sejajar melalui titik bantu P; lalu gunakan transitivitas.
4. Terapkan arah yang sudah terbukti pada transformasi invers.

Jawaban atau pemeriksaan. Kesejajaran membuktikan invariansi jajar genjang; aturan jajar genjang memberi preservasi vektor pada kasus tak segaris, titik bantu menutup kasus segaris, dan invers memberi ekuivalensi dua arah.

Solusi lengkap. Jika $ABCD$ jajar genjang, maka $AB \parallel CD$ dan $BC \parallel AD$. Latihan `ex:affine-par` memberi $A'B' \parallel C'D'$ dan $B'C' \parallel A'D'$, sehingga $A'B'C'D'$ jajar genjang.

Andaikan $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Jika A, B, X, Y tidak semuanya segaris, kesamaan ini ekuivalen dengan fakta bahwa $ABYX$ adalah jajar genjang (kasus vektor nol juga langsung, karena injektivitas menjaga kesamaan titik). Citranya jajar genjang, maka aturan jajar genjang memberi $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{A'B'}$.

Jika keempat titik terletak pada satu garis ℓ, pilih $P \notin \ell$ dan tetapkan $Q = P + \overrightarrow{XY}$. Karena vektor itu sejajar ℓ, garis PQ sejajar dan berbeda dari ℓ, sehingga $P, Q \notin \ell$. Dua penerapan kasus tak segaris memberi

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{P'Q'} \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Jadi arah maju berlaku selalu. Invers transformasi afin juga bijektif dan memetakan garis ke garis; menerapkan arah maju pada invers memberi arah balik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Karakterisasi jajar genjang tidak boleh dipakai begitu saja ketika semua titik segaris. Titik bantu pada garis sejajar diperlukan untuk menutup cabang degenerat itu.

14.10 Kontinuitas transformasi afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex010`. **Label sumber:** `ex:affine-continuous`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap transformasi afin bersifat kontinu.

Petunjuk penulis. Pilih suatu sistem koordinat dan terapkan teorema dasar geometri afin (`thm:fundamental-theorem-of-affine-geometry`) pada titik-titik $O = (0,0)$, $X = (1,0)$, dan $Y = (0,1)$.

Blok petunjuk ini dipakai bersama oleh `ex:affine-continuous` dan `ex:affine-coordinates` pada baris sumber 1716–1717.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis $P = (x,y)$ sebagai $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}$.
2. Teorema dasar memberi rumus eksplisit untuk P' dengan koefisien yang sama.
3. Setiap komponen rumus itu adalah fungsi linear dalam x, y ditambah konstanta, sehingga kontinu.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam koordinat, transformasi berbentuk $(x,y) \mapsto (ax+by+r, cx+dy+s)$; fungsi polinomial derajat satu ini kontinu.

Solusi lengkap. Pilih $O = (0,0)$, $X = (1,0)$, dan $Y = (0,1)$. Untuk $P = (x,y)$ berlaku

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}.$$

Teorema dasar geometri afin yang dinyatakan dan dibuktikan dalam bab sumber memberi

$$P' = O' + x(X' - O') + y(Y' - O').$$

Jika $O' = (r,s)$, $X' - O' = (a,c)$, dan $Y' - O' = (b,d)$, rumus itu menjadi

$$F(x,y) = (ax + by + r, cx + dy + s).$$

Untuk $p = (x,y)$ dan $q = (u,v)$, norma Euklides memenuhi

$$\|F(p) - F(q)\| \le (|a| + |c|)|x - u| + (|b| + |d|)|y - v|.$$

Ruas kanan menuju nol ketika $q \to p$, sehingga F kontinu di setiap titik. Pemakaian teorema dasar di sini adalah dependensi sumber yang eksplisit; rumus dan estimasi kontinuitasnya ditutup lengkap, bukan diasumsikan dari gambar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kontinuitas bukan bagian definisi transformasi afin. Ia merupakan konsekuensi teorema dasar; menyebut “jelas kontinu” sebelum memperoleh bentuk koordinat akan berputar secara logis.

14.11 Bentuk koordinat setiap transformasi afin

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex011`. **Label sumber:** `ex:affine-coordinates`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap transformasi afin dapat ditulis dalam koordinat sebagai $(x,y) \mapsto (a\cdot x + b\cdot y + r,\ c\cdot x + d\cdot y + s)$ untuk konstanta-konstanta a, b, c, d, r, s sedemikian sehingga matriks $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertibel.

Petunjuk penulis. Pilih suatu sistem koordinat dan terapkan teorema dasar geometri afin (`thm: fundamental-theorem-of-affine-geometry`) pada titik-titik $O = (0, 0)$, $X = (1, 0)$, dan $Y = (0, 1)$.

Ini adalah blok petunjuk sumber yang sama dengan blok pada `ex:affine-continuous`; pengulangan di sini hanya membuat unit solusi mandiri dan tidak dihitung sebagai blok sumber kedua.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan dekomposisi koordinat terhadap basis OX, OY.
2. Baca kolom matriks dari vektor $O'X'$ dan $O'Y'$, serta translasi dari O'.
3. Gunakan bahwa citra segitiga OXY tidak degenerat untuk membuktikan kedua kolom bebas linear.

Jawaban atau pemeriksaan. Rumusnya adalah $P' = O' + x\overrightarrow{O'X'} + y\overrightarrow{O'Y'}$; matriks kolom $\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'}$ invertibel karena kedua vektor tidak segaris.

Solusi lengkap. Dengan notasi koordinat yang sama seperti solusi sebelumnya, setiap $P = (x, y)$ memenuhi $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}$. Teorema dasar geometri afin memberi ekuivalensi

$$P' = O' + x\overrightarrow{O'X'} + y\overrightarrow{O'Y'}.$$

Tuliskan $O' = (r, s)$, $\overrightarrow{O'X'} = (a, c)$, dan $\overrightarrow{O'Y'} = (b, d)$. Maka

$$P' = (ax + by + r, cx + dy + s),$$

seperti yang diminta.

Segitiga OXY tidak degenerat. Transformasi afin mempertahankan nonkegarisan (lihat penutupan pada `ex:collinear=affine`), sehingga O', X', Y' tidak segaris. Dengan demikian vektor $\overrightarrow{O'X'}$ dan $\overrightarrow{O'Y'}$ bebas linear. Matriks $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ yang mempunyai keduanya sebagai kolom berdeterminan tak nol dan invertibel. Ini juga memperlihatkan bahwa rumus koordinat konsisten dengan kebijektifan asal.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Mendapat rumus enam konstanta belum cukup; harus dibuktikan bahwa bagian linearnya invertibel. Fakta itu berasal dari nondegenerasi segitiga citra, bukan dari kontinuitas.

14.12 Transformasi afin yang mempertahankan sebuah lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex012`. **Label sumber:** `ex:preserved-circle`. **Tingkat:** menengah–lanjut.

Soal sumber. Misalkan Γ adalah lingkaran berpusat di O. Misalkan $\alpha : P \mapsto P'$ merupakan transformasi afin yang memetakan Γ ke dirinya sendiri. Buktikan bahwa α merupakan transformasi isometrik yang memiliki O sebagai titik tetap; artinya, $O' = O$.

Petunjuk penulis. Gunakan `ex:center-circ-affine` untuk menunjukkan bahwa $O' = O$. Pilih suatu sistem koordinat dengan titik asal O. Menurut `ex:affine-coordinates`,

$$\alpha\,(x, y) \mapsto (a \cdot x + b \cdot y,\ c \cdot x + d \cdot y).$$

Gunakan fakta bahwa $\alpha(\Gamma) = \Gamma$ untuk menunjukkan bahwa $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Simpulkan bahwa α merupakan transformasi isometrik.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pusat adalah keluaran konstruksi afin yang unik, sehingga harus tetap.
2. Setelah translasi pusat ke asal, tulis $\alpha(v) = Av$.
3. Dari $\|Au\| = 1$ untuk setiap vektor satuan, buktikan $A^{\mathsf{T}}A = I$; karena A persegi invertibel, juga $AA^{\mathsf{T}} = I$ seperti bentuk pada petunjuk.
4. Simpulkan preservasi jarak semua pasangan.

Jawaban atau pemeriksaan. $O' = O$ dan matriks linear A ortogonal. Maka $\|\alpha(P) - \alpha(Q)\| = \|A(P - Q)\| = \|P - Q\|$.

Solusi lengkap. Konstruksi pusat pada `ex:center-circ-affine` hanya memakai insidensi dan kesejajaran, sehingga transformasi afin membawa pusat sebuah lingkaran ke pusat lingkaran citra. Karena citra Γ adalah Γ sendiri dan pusatnya unik, $O' = O$.

Ambil O sebagai asal dan misalkan jari-jari Γ adalah $R > 0$. Dari bentuk koordinat, $\alpha(v) = Av$ dengan A invertibel. Untuk setiap vektor satuan u, titik Ru berada pada Γ, sehingga RAu juga berada pada Γ dan $\|Au\| = 1$. Homogenitas kemudian memberi $\|Av\| = \|v\|$ untuk setiap v. Secara aljabar,

$$v^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}}A - I)v = 0 \quad \text{untuk setiap } v.$$

Matriks di dalam kurung simetris; substitusi basis e_1, e_2 dan $e_1 + e_2$ menunjukkan setiap entrinya nol. Jadi $A^{\mathsf{T}}A = I$. Karena A invertibel, ini juga memberi $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ dan $AA^{\mathsf{T}} = I$, yakni persamaan matriks dalam petunjuk.

Untuk setiap P, Q,

$$|\alpha(P)\alpha(Q)| = \|A(P - Q)\| = \|P - Q\| = |PQ|.$$

Jadi α isometri dan, seperti telah dibuktikan, menetapkan O.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Memetakan satu lingkaran ke dirinya tidak membuat transformasi umum otomatis isometri; kesimpulan memakai linearitas afin. Urutan perkalian matriks pada petunjuk tetap sah karena ortogonalitas memberi kedua identitas $A^{\mathsf{T}}A = I$ dan $AA^{\mathsf{T}} = I$.

14.13 Klasifikasi transformasi inversif

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex013`. **Label sumber:** `ex:inversions-inversive`. **Tingkat:** lanjut (tidak bertanda).

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap transformasi inversif merupakan komposisi sejumlah inversi dan pencerminan.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa setiap pencerminan memenuhi syarat tersebut. Menurut Teorema `thm:inverse-cline`, setiap inversi juga memenuhi syarat tersebut. Oleh karena itu, hal yang sama berlaku untuk setiap komposisi inversi dan pencerminan. Untuk membuktikan kebalikannya, pilih bijeksi α yang memetakan lingkaran umum ke lingkaran umum. Tunjukkan bahwa kita dapat mengomposisikan α dengan beberapa inversi dan pencerminan untuk memperoleh bijeksi α' sedemikian sehingga $\alpha'(\infty) = \infty$ dan $\alpha(\Gamma) = \Gamma$ untuk suatu lingkaran Γ. Menurut `ex:preserved-circle`, α' merupakan transformasi isometrik. Menurut `ex:3-reflections`, α' merupakan komposisi pencerminan. Oleh karena itu, α juga merupakan komposisi pencerminan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pascakomposisikan dengan satu inversi bila perlu agar citra ∞ menjadi ∞.
2. Pemetaan ternormalisasi lalu memetakan garis ke garis, sehingga afin.
3. Pascakomposisikan dengan kesebangunan yang merupakan komposisi pencerminan dan dua inversi konsentris agar sebuah lingkaran citra kembali ke lingkaran asal.
4. Gunakan latihan lingkaran-terpelihara dan klasifikasi isometri oleh paling banyak tiga pencerminan, lalu balik semua komposisi.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah dua normalisasi yang masing-masing tersusun dari generator yang diizinkan, transformasi inversif menjadi isometri yang memperbaiki sebuah lingkaran. Isometri adalah komposisi pencerminan; membalik normalisasi memberi klasifikasi yang diminta.

Solusi lengkap. Arah mudah memakai hasil pendamping yang telah diterima: pencerminan memetakan lingkaran umum ke lingkaran umum, dan Teorema `thm:inverse-cline` menyatakan hal yang sama untuk inversi. Sifat itu tertutup terhadap komposisi.

Untuk arah balik, misalkan α transformasi inversif dan $p = \alpha(\infty)$. Jika p berhingga, pilih inversi I berpusat p; jika $p = \infty$, ambil I sebagai identitas kosong. Maka $\gamma = I \circ \alpha$ menetapkan ∞. Setiap garis umum melalui ∞, sehingga citranya di bawah γ adalah lingkaran umum melalui ∞, yaitu garis. Karena hanya ∞ yang memetakan ke ∞, γ membatasi diri menjadi bijeksi bidang Euklides yang memetakan garis ke garis; jadi γ transformasi afin.

Pilih sebuah lingkaran biasa C. Karena C tidak memuat ∞ dan γ bijektif menetapkan ∞, citra $C' = \gamma(C)$ juga lingkaran biasa. Ada kesebangunan S yang memetakan C' ke C. Kesebangunan itu dapat dibangun dari generator yang diizinkan: isometri Euklides merupakan komposisi pencerminan menurut hasil pendamping `ex:3-reflections`, sedangkan dilatasi positif berpusat O dan faktor λ adalah komposisi dua inversi konsentris dengan kuadrat rasio jari-jari sama dengan λ. Dengan demikian S merupakan komposisi inversi dan pencerminan serta menetapkan ∞.

Transformasi $\delta = S \circ \gamma$ adalah afin dan memenuhi $\delta(C) = C$. Solusi 14.12 menunjukkan bahwa δ isometri; hasil `ex:3-reflections` membuatnya komposisi pencerminan. Akhirnya

$$\alpha = I^{-1} \circ S^{-1} \circ \delta.$$

Invers pencerminan adalah dirinya sendiri dan invers suatu inversi juga inversi; invers komposisi generator kembali komposisi generator. Jadi α merupakan komposisi inversi dan pencerminan.

Teks sumber menulis $\alpha(\Gamma) = \Gamma$ setelah memperkenalkan α'. Agar langkah berikutnya sah, syarat yang diperlukan adalah bahwa transformasi *ternormalisasi* mempertahankan lingkaran. Bukti di atas tidak mengubah teks itu secara diam-diam: ia membangun transformasi tersebut sebagai δ dan membuktikan setiap tahap normalisasinya.

Kalimat penutup petunjuk sumber menyatakan bahwa α juga merupakan komposisi pencerminan. Itu lebih kuat daripada yang dibuktikan setelah normalisasi yang memakai inversi. Kesimpulan yang sah dan persis sama dengan soal adalah bahwa α merupakan komposisi *inversi dan pencerminan*, sebagaimana faktorisasi eksplisit di atas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Menetapkan ∞ hanya memberi bahwa garis dipetakan ke garis; masih perlu kebijektifan untuk memperoleh transformasi afin. Selain itu, kesebangunan normalisasi harus benar-benar diuraikan menjadi inversi dan pencerminan agar argumen klasifikasi tidak melingkar.

14.14 Dua konsekuensi ekstrem dari multiplikativitas

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex014`. **Label sumber:** `ex:f(1)=1`. **Tingkat:** dasar (2 subbutir).

Soal sumber. Misalkan $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi syarat (`lem:R-auto:c`) dalam lema tersebut. Buktikan bahwa

(i) jika $f(1) \neq 1$, maka $f(x) = 0$ untuk setiap x;

(ii) jika $f(0) \neq 0$, maka $f(x) = 1$ untuk setiap x.

Petunjuk penulis. Tetapkan $a = f(1)$ dan $b = f(0)$. Tunjukkan dan gunakan fakta bahwa $a = a^2$ dan $b = b^2$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Substitusikan $x \cdot 1$ dan $0 \cdot x$ ke persamaan multiplikatif.
2. Untuk subbutir (i), gunakan langsung $f(x) = f(x)a$.
3. Untuk subbutir (ii), gunakan $b = bf(x)$ dan bagi dengan $b \neq 0$.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $a \neq 1$, persamaan $(1 - a)f(x) = 0$ memberi $f \equiv 0$. Jika $b \neq 0$, persamaan $b = bf(x)$ memberi $f \equiv 1$.

Solusi lengkap. Multiplikativitas memberi

$$a = f(1) = f(1 \cdot 1) = a^2, \qquad b = f(0) = f(0 \cdot 0) = b^2.$$

Lebih penting, untuk setiap x,

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)a.$$

Jika $a \neq 1$, maka $(1 - a)f(x) = 0$ dan faktor $1 - a$ tidak nol, sehingga $f(x) = 0$ untuk semua x. Ini membuktikan *(i)*.

Untuk *(ii)*, bagi setiap x berlaku

$$b = f(0) = f(0 \cdot x) = f(0)f(x) = bf(x).$$

Jika $b \neq 0$, pembagian dengan b memberi $f(x) = 1$ untuk semua x. Identitas idempoten $a = a^2$ dan $b = b^2$ juga memeriksa bahwa di bilangan real nilai masing-masing hanya mungkin 0 atau 1, konsisten dengan kedua cabang.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak ada aditivitas atau kontinuitas yang diasumsikan. Kedua kesimpulan berasal hanya dari multiplikativitas dan sifat bahwa bilangan real bukan memiliki pembagi nol.

14.15 Ceva dan Van Aubel dari Menelaus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch14-ex015`.

Label sumber: `ex:ceva-affine` (alias sumber `thm:ceva-affine`).

Tingkat: lanjut (2 subbutir).

Soal sumber. Misalkan ABC merupakan segitiga tak degenerat. Misalkan tiga titik berbeda A', B', dan C' berturut-turut terletak pada garis (BC), (CA), dan (AB). Andaikan bahwa garis-garis (AA'), (BB'), dan (CC') berpotongan di suatu titik X. Gunakan teorema Menelaus untuk membuktikan pernyataan berikut.

(a) **Teorema Ceva:**
$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

(b) **Teorema Van Aubel:** Jika A' terletak di antara B dan C, maka
$$\frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'} = \frac{AX}{A'X}.$$

Seperti diwajibkan oleh semua pecahan yang ditampilkan, konfigurasi dibaca pada domain tak degenerat tempat penyebut $BC', CA', AB', A'X$ tidak nol dan kedua transversal Menelaus mempunyai titik potong yang terdefinisi. Jika syarat ini gagal, rumus sumber sendiri tidak terdefinisi; tidak ada nilai limiting yang disisipkan diam-diam.

Petunjuk penulis. Terapkan teorema Menelaus pada $\triangle AA'B$ dengan garis (CC') dan pada $\triangle AA'C$ dengan garis (BB').

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari transversal CXC' pada $\triangle AA'B$, nyatakan $AX/A'X$.
2. Dari transversal BXB' pada $\triangle AA'C$, nyatakan rasio yang sama.
3. Samakan kedua ekspresi untuk memperoleh Ceva.
4. Jika $BC = BA' + A'C$, pecah ekspresi pertama untuk $AX/A'X$ dan ganti satu suku memakai Ceva.

Jawaban atau pemeriksaan. Menelaus memberi
$$\frac{AX}{A'X} = \frac{BC}{A'C}\frac{AC'}{BC'} = \frac{BC}{A'B}\frac{AB'}{CB'}.$$
Kesamaan kedua ruas memberi Ceva; pemecahan $BC = BA' + A'C$ memberi Van Aubel.

Solusi lengkap. Pada segitiga $AA'B$, garis (CC') memotong garis sisi AA' di X, garis $A'B = (BC)$ di C, dan garis BA di C'. Teorema Menelaus (dengan panjang positif sebagaimana konvensi sumber) memberi

$$\frac{AX}{A'X} \cdot \frac{A'C}{CB} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1,$$

atau

$$\frac{AX}{A'X} = \frac{BC}{A'C} \cdot \frac{AC'}{BC'}. \tag{1}$$

Pada segitiga $AA'C$, transversal (BB') melalui X, B, B' memberi

$$\frac{AX}{A'X} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

atau

$$\frac{AX}{A'X} = \frac{BC}{A'B} \cdot \frac{AB'}{CB'}. \tag{2}$$

Menyamakan (1) dan (2), lalu membatalkan BC, menghasilkan

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1,$$

yang persis rumus Ceva pada *(a)* karena $A'B = BA'$ dan $A'C = CA'$.

Untuk *(b)*, asumsi A' berada di antara B dan C memberi $BC = BA' + A'C$. Dari (1),

$$\begin{aligned}\frac{AX}{A'X} &= \frac{BA' + A'C}{A'C} \cdot \frac{AC'}{BC'} \\ &= \frac{AC'}{BC'} + \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'}.\end{aligned}$$

Rumus Ceva yang baru dibuktikan ekuivalen dengan

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'}.$$

Substitusi memberi identitas Van Aubel yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pemecahan $BC = BA' + A'C$ hanya sah pada cabang "A' di antara B dan C". Jangan menyelipkannya ke pembuktian Ceva umum. Versi rasio bertanda mempunyai konvensi tanda berbeda; soal ini memakai panjang positif seperti teorema Menelaus pada sumber.

Uji penguasaan Bab 14

1. **(2 poin).** Buktikan bahwa transformasi afin mempertahankan kesejajaran dan verifikasi secara seragam bahwa keempat keluarga pemetaan koordinat pada latihan bertanda merupakan transformasi afin.

2. **(2 poin).** Tutup argumen "seluruh bidang runtuh ke satu garis" dan gunakan itu untuk membuktikan bahwa bijeksi yang memetakan lingkaran ke lingkaran adalah afin.

3. **(2 poin).** Konstruksikan titik tengah ruas dan pusat lingkaran hanya dengan penggaris serta alat garis sejajar, disertai pembuktian invariansinya.

4. **(2 poin).** Berikan konstruksi bebas-degenerasi untuk $a + b, a - b, ab, a/b$, termasuk cabang nilai negatif dan alasan syarat $b \neq 0$.

5. **(2 poin).** Formalkan argumen geser yang menolak konstruksi universal garis tegak lurus, termasuk peran titik bebas.
6. **(2 poin).** Buktikan ekuivalensi dua arah preservasi vektor oleh transformasi afin dan tutup kasus ketika keempat titik segaris.
7. **(2 poin).** Turunkan bentuk koordinat umum transformasi afin, buktikan matriksnya invertibel, dan simpulkan kontinuitas dengan estimasi eksplisit.
8. **(2 poin).** Jika transformasi afin mempertahankan sebuah lingkaran, buktikan pusat tetap dan bagian linearnya ortogonal.
9. **(2 poin).** Berikan normalisasi lengkap transformasi inversif hingga menjadi isometri, serta uraikan kesebangunan normalisasi ke inversi dan pencerminan.
10. **(2 poin).** Buktikan dua cabang fungsi multiplikatif, lalu turunkan Ceva dan Van Aubel dari dua penerapan Menelaus tanpa mencampur konvensi rasio.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 14.1 dan 14.2.

M2. 14.3 dan 14.4.

M3. 14.5 dan 14.7.

M4. 14.6.

M5. 14.8.

M6. 14.9.

M7. 14.10 dan 14.11.

M8. 14.12.

M9. 14.13.

M10. 14.14 dan 14.15.

M1 (2 poin). Satu poin untuk prapeta titik potong dan pembedaan citra garis; satu poin untuk kriteria $Ap + t$, invers eksplisit, citra garis parametrik, dan keempat determinan.

M2 (2 poin). Satu poin untuk membuktikan seluruh bidang akan masuk ke satu garis dan memperoleh kesamaan citra garis; satu poin untuk argumen tiga titik pada lingkaran dan penerapan yang sah kepada invers.

M3 (2 poin). Satu poin untuk jajar genjang bantu dan titik potong diagonal sebagai titik tengah; satu poin untuk konstruksi Z, Z', argumen simetri, dan perpotongan dua diameter tanpa memakai alat tegak lurus.

M4 (2 poin). Satu poin untuk dua penyalinan vektor yang tidak degenerat bagi jumlah dan selisih; satu poin untuk konstruksi kesebangunan perkalian/pembagian, rasio berarah, dan penggunaan $b \neq 0$.

M5 (2 poin). Satu poin untuk ekuivarians setiap operasi konstruksi; satu poin untuk geser yang menetapkan garis masukan tetapi mengubah garis vertikal, termasuk pilihan bebas yang digeser.

M6 (2 poin). Satu poin untuk jajar genjang pada kasus tak segaris; satu poin untuk transfer ke P, Q pada garis sejajar dan penerapan kepada invers.

M7 (2 poin). Satu poin untuk rumus $P' = O' + x\overrightarrow{O'X'} + y\overrightarrow{O'Y'}$ dan determinan tak nol; satu poin untuk estimasi yang membuktikan kontinuitas.

M8 (2 poin). Satu poin untuk pusat tetap melalui konstruksi afin yang unik; satu poin untuk $A^{\mathsf{T}}A = I$ dan preservasi jarak setiap pasangan.

M9 (2 poin). Satu poin untuk normalisasi ∞ dan deduksi bahwa pemetaan menjadi afin; satu poin untuk normalisasi lingkaran, dua inversi bagi dilatasi, klasifikasi isometri, dan pembalikan komposisi.

M10 (2 poin). Satu poin untuk kedua kesimpulan fungsi multiplikatif tanpa asumsi tambahan; satu poin untuk dua persamaan Menelaus, Ceva, serta pemecahan ruas yang sah untuk Van Aubel.

Bab 15

Solusi dan penguasaan Bab 15: Geometri proyektif

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Empat belas blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter15.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, penutupan rigor, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber, domain, dan batas rigor

Bab sumber memuat tepat 14 latihan tingkat atas: 13 “Latihan” biasa dan satu “Latihan lanjutan”, semuanya tanpa tanda `[!]`. Delapan subbutir berlabel sumber tersebar pada empat latihan. Empat belas blok petunjuk penulis pada baris 1752–1893 dari `source/id-ID/hints.tex` mencakup keempat belas latihan satu per satu.

Label sumber dipertahankan secara harfiah, termasuk salah eja internal `ex:dula-coordinates`, spasi pada `ex:tangentruler`, serta tanda `=` dan `:=` pada label rasio silang. ID stabil tambahan tidak mengubah label tersebut.

Bab 15 berada dalam bagian tambahan Bab 14–20 yang oleh sumber diberi batas rigor. Karena itu, pernyataan yang hanya disebut “mudah”, gagasan bukti, atau klaim tanpa bukti tidak dinaikkan diam-diam menjadi hasil tuntas. Solusi ini menutup fakta ruang Euklides yang diperlukan, bukti Pappus, domain rasio silang, dualitas koordinat, dan klaim polar. Semua konstruksi dipaparkan sebagai urutan operasi penggaris yang dapat diperiksa. Pilihan “generik” selalu berarti menghindari himpunan berhingga titik atau garis yang membuat dua objek yang harus berpotongan menjadi berimpit atau sejajar; pilihan semacam itu dapat diganti tanpa mengubah kesimpulan proyektif.

Untuk rumus jarak pada rasio silang, semua titik asal dan citra yang muncul harus berada pada bidang afin, dan keempat titik pada setiap ruas harus berbeda. Rumus sumber memakai panjang tak berarah, sehingga yang dipertahankan adalah nilai mutlak rasio silang. Rasio silang terarah memerlukan konvensi orientasi tersendiri dan tidak diasumsikan di sini.

Penutupan prasyarat ruang dan dualitas

Misalkan sebuah bidang di $\mathbb{R}^3$ diberikan oleh

$$H = \{x : n \cdot x + d = 0\}, \qquad n \neq 0.$$

Pilih $x_0 \in H$ dan basis ortonormal e_1, e_2 untuk bidang vektor $n^{\perp}$. Pemetaan $(u, v) \mapsto x_0 + ue_1 + ve_2$ bijektif dari $\mathbb{R}^2$ ke H, dan selisih dua citranya mempunyai kuadrat panjang $(u-u')^2 + (v-v')^2$. Jadi setiap bidang ruang memang isometrik dengan bidang Euklides.

Rentang afin tiga titik mempunyai dimensi paling banyak dua. Jika dimensinya kurang dari dua, perluas satu atau nol arah yang tersedia menjadi dua arah bebas; translasi rentang dua arah itu merupakan sebuah bidang yang memuat ketiga titik. Selanjutnya, dua bidang berbeda dengan irisan tak kosong tidak dapat mempunyai vektor normal sebanding, sebab dalam keadaan itu keduanya berimpit. Dua persamaan afin dengan normal bebas mempunyai himpunan solusi berdimensi satu, yakni sebuah garis. Ini menutup ketiga fakta ruang yang dinyatakan tanpa bukti dalam bab sumber.

Khusus untuk objek melalui titik asal, garis $L = \operatorname{span}(v)$ dipetakan ke bidang $L^{\perp}$, dan bidang $N = n^{\perp}$ dipetakan kembali ke garis $\operatorname{span}(n)$. Kedua operasi saling invers. Lebih lanjut, $\operatorname{span}(p) \subset n^{\perp}$ tepat ketika $p \cdot n = 0$, yang simetris terhadap p dan n. Jadi korespondensi titik–garis yang dipakai dalam teorema dualitas benar-benar bijektif dan mempertahankan insidensi secara terbalik.

15.1 Rasio silang di bawah transformasi proyektif

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex001`. **Label sumber:** `ex:proj-cross-ratio`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: bentuk koordinat transformasi afin, transformasi perspektif β, dan teorema pemindahan garis.

Ketergantungan: bukti di bawah mandiri; rujukan petunjuk ke `ex:cross-ratio-area` tidak diperlukan.

Soal sumber. Untuk empat titik berbeda P_1, P_2, P_3, P_4 pada satu garis, buktikan bahwa

$$\frac{P_1P_2 \cdot P_3P_4}{P_2P_3 \cdot P_4P_1} = \frac{P_1'P_2' \cdot P_3'P_4'}{P_2'P_3' \cdot P_4'P_1'}$$

untuk (a) transformasi afin, (b) transformasi perspektif $(x, y) \mapsto (x/y, 1/y)$, dan (c) transformasi proyektif, pada domain afin tempat kedua ruas terdefinisi.

Petunjuk penulis. Untuk membuktikan *(a)*, terapkan `prop:affine-linear`.

Untuk membuktikan *(b)*, andaikan $P_i = (x_i, y_i)$; tunjukkan dan gunakan fakta bahwa

$$\frac{P_1P_2 \cdot P_3P_4}{P_2P_3 \cdot P_4P_1} = \left|\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)}\right|$$

jika semua P_i terletak pada garis horizontal $y = b$, dan

$$\frac{P_1P_2 \cdot P_3P_4}{P_2P_3 \cdot P_4P_1} = \left|\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_4 - y_1)}\right|$$

dalam kasus lainnya. (Lihat `ex:cross-ratio-area` untuk bukti lain.)

Untuk membuktikan *(c)*, terapkan *(a)*, *(b)*, dan `thm:moving`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pada sebuah garis parametrik, transformasi afin mengalikan semua jarak dengan faktor positif yang sama.
2. Untuk garis nonhorizontal, gunakan y sebagai parameter; setelah menerapkan β, parameter itu menjadi $1/y$.
3. Faktorkan setiap selisih $1/y_i - 1/y_j$, lalu periksa bahwa semua faktor $|y_1 y_2 y_3 y_4|$ saling menghapus.
4. Uraikan transformasi proyektif sebagai transformasi afin atau sebagai β sesudah transformasi afin.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga pemetaan mempertahankan nilai mutlak rasio silang. Untuk β, syarat bahwa semua citra tetap afin sama dengan $y_i \neq 0$ bagi setiap i.

Solusi lengkap. Tuliskan garis asal sebagai $P(t) = P_0 + tv$, $v \neq 0$. Jika $F(x) = Ax + b$ merupakan transformasi afin, maka

$$F(P(t)) - F(P(s)) = (t - s)Av.$$

Jadi setiap jarak pada garis dikalikan faktor $\|Av\|/\|v\| > 0$, dan empat faktor tersebut saling menghapus dalam hasil bagi. Ini membuktikan (a).

Untuk (b), andaikan lebih dahulu garisnya horizontal, $y = b$. Karena citra harus afin, $b \neq 0$, dan $\beta(x, b) = (x/b, 1/b)$. Semua jarak dikalikan $1/|b|$, sehingga rasio tetap.

Jika garis tidak horizontal, tuliskan $x = my + n$. Dua titik dengan parameter y_i, y_j mempunyai jarak $\sqrt{m^2 + 1}\,|y_i - y_j|$. Citra garis memenuhi

$$\beta(my + n, y) = (m + n/y, 1/y),$$

sehingga jarak dua citra adalah $\sqrt{n^2 + 1}\,|1/y_i - 1/y_j|$. Faktor akar kembali saling menghapus, dan

$$\frac{|1/y_1 - 1/y_2|\,|1/y_3 - 1/y_4|}{|1/y_2 - 1/y_3|\,|1/y_4 - 1/y_1|} = \frac{|y_1 - y_2|\,|y_3 - y_4|}{|y_2 - y_3|\,|y_4 - y_1|},$$

karena pembilang dan penyebut memperoleh faktor yang sama $|y_1 y_2 y_3 y_4|^{-1}$. Ini membuktikan (b).

Menurut `thm:moving`, transformasi proyektif bersifat afin atau dapat ditulis $\beta \circ \alpha$ dengan α afin. Bagian (a) dan (b) berlaku berturut-turut. Titik antara $\alpha(P_i)$ tetap afin; syarat bahwa citra akhir afin menyingkirkan garis kutub $y = 0$ bagi β. Maka (c) mengikuti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak sah menuliskan jarak ke titik ideal. Pernyataan sumber harus dibaca pada domain tempat keempat titik dan keempat citranya afin. Selain itu, panjang Euklides menghasilkan nilai mutlak rasio silang, bukan rasio silang terarah.

15.2 Dua proyeksi dan identitas hasil kali

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex002`. **Label sumber:** `ex:proj-cross-ratio=1`. **Tingkat:** lanjut (2 subbutir).

Prasyarat: solusi 15.1 dan konfigurasi `pic-231`.

Ketergantungan: urutan keempat titik dalam rasio silang dipertahankan persis; semua ruas pada penyebut diasumsikan tak nol.

Soal sumber. Untuk konfigurasi $A, B, C, P, Q, V, W, X, Y$ pada gambar sumber, buktikan

(a) $\dfrac{AX \cdot BY}{AY \cdot BX} = \dfrac{AP \cdot CQ}{AQ \cdot CP}$;

(b) $AX \cdot BY = AY \cdot BX$.

Petunjuk penulis. Untuk proyeksi perspektif dari (AB) ke (AC) yang berpusat di W, berlaku $A \mapsto A$, $B \mapsto C$, $X \mapsto P$, dan $Y \mapsto Q$. Oleh karena itu, `ex:proj-cross-ratio` memberikan *(`ex: proj-cross-ratio=1: =`)*.

Dengan menerapkan argumen yang sama dengan pusat V, diperoleh $\frac{AY \cdot BX}{AX \cdot BY} = \frac{AP \cdot CQ}{AQ \cdot CP}$. Oleh karena itu, $\frac{AX \cdot BY}{AY \cdot BX} = \frac{AY \cdot BX}{AX \cdot BY}$, sehingga diperoleh *(`ex: proj-cross-ratio=1: 1`)*.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis rasio silang keempat titik pada (AB) dalam urutan (A, X, B, Y).
2. Pusat W mengirim urutan itu ke (A, P, C, Q).
3. Ulangi dengan pusat V, lalu namai ruas kiri bagian (a) dengan $r > 0$.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua proyeksi memberi $r = s$ dan $r^{-1} = s$. Karena semua jarak positif, $r > 0$, sehingga $r = 1$.

Solusi lengkap. Invariansi pada solusi 15.1 untuk proyeksi berpusat W memberi

$$\frac{AX \cdot BY}{XB \cdot YA} = \frac{AP \cdot CQ}{PC \cdot QA}.$$

Panjang ruas tidak berarah, jadi $XB = BX$, $YA = AY$, $PC = CP$, dan $QA = AQ$; inilah bagian (a).

Tetapkan

$$r = \frac{AX \cdot BY}{AY \cdot BX}, \qquad s = \frac{AP \cdot CQ}{AQ \cdot CP}.$$

Proyeksi berpusat W memberi $r = s$. Proyeksi berpusat V, dengan urutan titik yang ditukar seperti dalam petunjuk, memberi $r^{-1} = s$. Maka $r = r^{-1}$. Karena semua ruas dalam konfigurasi tak degenerat memiliki panjang positif, $r > 0$, sehingga $r^2 = 1$ memaksa $r = 1$. Setelah mengalikan dengan $AY \cdot BX$, diperoleh bagian (b).

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan $r = r^{-1}$ juga mempunyai akar aljabar -1; akar itu ditolak oleh kepositifan panjang. Urutan titik tidak boleh diubah tanpa sekaligus mengubah bentuk rasio silang.

15.3 Pembuktian lengkap teorema Pappus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex003`. **Label sumber:** `ex:pappus`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: `thm:moving`, kesebangunan atau koordinat terarah pada dua garis.

Ketergantungan: bukti memisahkan garis dasar berpotongan dan sejajar; kasus titik hasil yang berimpit ditangani sebelum garisnya dipindahkan.

Soal sumber. Lengkapi bukti teorema Pappus dari gagasan yang memindahkan dua titik hasil ke garis ideal.

Petunjuk penulis. Andaikan (AB) berpotongan dengan $(A'B')$ di O. Karena $(AB') \parallel (BA')$, diperoleh $\triangle OAB' \sim \triangle OBA'$ dan $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$.

Dengan cara serupa, $(AC') \parallel (CA') \Longrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'}$. Oleh karena itu, $\frac{OB}{OC} = \frac{OC'}{OB'}$. Dengan menerapkan syarat kesebangunan SAS, diperoleh $\triangle OBC' \sim \triangle OCB'$. Akibatnya, $(BC') \parallel (CB')$. Kasus $(AB) \parallel (A'B')$ serupa.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika dua titik hasil yang hendak dipindahkan berimpit, selesaikan kasus degenerat itu langsung. Jika berbeda, pindahkan garis penghubungnya ke garis ideal.
2. Pada gambar afin hasil, dua pasangan garis silang menjadi sejajar.
3. Gunakan koordinat bertanda pada kedua garis dasar agar urutan titik tidak menimbulkan kasus tersembunyi.
4. Perlakukan kedua garis dasar yang berpotongan dan yang sejajar secara terpisah.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah Y dan Z berada pada garis ideal, syaratnya menjadi $(AB') \parallel (A'B)$ dan $(AC') \parallel (A'C)$; kedua syarat itu memaksa $(BC') \parallel (B'C)$, sehingga X juga ideal.

Solusi lengkap. Andaikan semua perpotongan yang dinamai unik. Jika dua di antara X, Y, Z berimpit, pernyataan kegarisan langsung berlaku. Dalam kasus tak degenerat, gunakan `thm:moving` untuk memetakan garis (YZ) ke garis ideal. Transformasi proyektif mempertahankan insidensi, jadi cukup membuktikan bahwa X juga ideal. Dalam bidang afin yang baru,

$$(AB') \parallel (A'B), \qquad (AC') \parallel (A'C).$$

Mula-mula andaikan garis dasar $g = (ABC)$ dan $g' = (A'B'C')$ berpotongan di O. Pilih vektor arah bebas u, v bagi g, g', lalu tulis

$$A = au,\ B = bu,\ C = cu, \qquad A' = a'v,\ B' = b'v,\ C' = c'v,$$

dengan titik asal O. Kesejajaran $AB' \parallel A'B$ berarti $b'v - au$ sebanding dengan $bv - a'u$; perbandingan koefisien bertanda memberi

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}.$$

Dengan cara sama, $AC' \parallel A'C$ memberi $a/c = c'/a'$. Jadi

$$\frac{b}{c} = \frac{c'}{b'}, \qquad bb' = cc'.$$

Kesamaan terakhir tepat menyatakan bahwa vektor $c'v - bu$ sebanding dengan $cu - b'v$; maka $(BC') \parallel (B'C)$.

Sekarang andaikan $g \parallel g'$. Ambil koordinat afin sehingga $g = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ dan $g' = \{tu + v : t \in \mathbb{R}\}$. Tuliskan koordinat bertanda titik dengan huruf kecil yang sama. Dari $AB' \parallel A'B$ diperoleh $a + b' = a' + b$, sedangkan $AC' \parallel A'C$ memberi $a + c' = a' + c$. Maka $b + c' = b' + c$, yang persis merupakan syarat $BC' \parallel B'C$. Jadi dalam kedua kasus X berada pada garis ideal. Mengembalikan transformasi proyektif membuktikan bahwa X, Y, Z segaris.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Gagasan bukti sumber belum menutup kasus garis dasar sejajar dan tidak menyatakan syarat perpotongan unik. Rasio panjang tak bertanda juga tidak boleh dipakai ketika titik berada pada sinar berlawanan; koordinat bertanda menutup semua urutan.

15.4 Kebalikan parsial Pappus sebagai pelabelan ulang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex004`. **Label sumber:** `ex:pappus-converse`. **Tingkat:** menengah–lanjut.

Prasyarat: solusi 15.3.

Ketergantungan: ketunggalan semua perpotongan yang disebutkan dalam soal dipakai untuk mengenali kembali A', B', C'.

Soal sumber. Diberikan A, B, C segaris dan titik berbeda X, Y, Z segaris, dengan X, Y, Z merupakan perpotongan silang yang didefinisikan dalam soal, buktikan bahwa A', B', C' segaris.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa pernyataan tersebut ekuivalen dengan teorema Pappus.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan (A, B, C) sebagai tripel pertama dan (X, Y, Z) sebagai tripel kedua dalam teorema Pappus.
2. Tulis ulang setiap titik silang yang dihasilkan oleh kedua tripel itu.
3. Gunakan ketunggalan perpotongan untuk mengenalinya sebagai A', B', C'.

Jawaban atau pemeriksaan. Teorema Pappus untuk tripel (A, B, C) dan (X, Y, Z) menghasilkan titik $BZ \cap CY = A'$, $CX \cap AZ = B'$, dan $AY \cap BX = C'$.

Solusi lengkap. Dari definisi titik dalam soal,

$$Y \in (CA'), \quad Z \in (A'B),$$

sehingga ketunggalan perpotongan memberi $A' = (CY) \cap (BZ)$. Dengan cara yang sama,

$$B' = (CX) \cap (AZ), \qquad C' = (AY) \cap (BX).$$

Sekarang terapkan teorema Pappus yang telah dibuktikan dalam solusi 15.3 kepada dua tripel segaris A, B, C dan X, Y, Z. Tiga perpotongan silang yang dinyatakan segaris oleh teorema itu tepat A', B', C' dalam urutan di atas. Hasil yang diminta mengikuti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kata “ekuivalen” dalam petunjuk bukan pengganti pelabelan. Tanpa tiga identitas perpotongan di atas, penerapan Pappus belum menentukan titik mana yang harus segaris.

15.5 Garis sejajar dari jajar genjang dengan penggaris

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex005`.

Label sumber: `ex:desargues-construction`.

Tingkat: lanjut (2 subbutir).

Prasyarat: teorema Desargues, solusi Pappus 15.3, dan operasi penggaris.

Ketergantungan: kedua algoritme hanya menggambar garis melalui dua titik dan mengambil perpotongan dua garis; titik ideal dipakai dalam bukti, bukan sebagai objek yang harus digambar.

Soal sumber. Diberikan sebuah jajar genjang dan garis ℓ yang memotong keempat sisi atau perpanjangannya di titik berbeda, konstruksikan garis lain yang sejajar dengan ℓ hanya menggunakan penggaris: (a) dengan Desargues dan (b) dengan Pappus.

Petunjuk penulis. *(ex: desargues-construction: desargues).* Andaikan jajar genjang itu dibentuk oleh dua pasang garis sejajar $(AB) \parallel (A'B')$ dan $(BC) \parallel (B'C')$, serta $\ell = (AC)$ dalam notasi teorema Desargues (`thm:desargues`).

(ex: desargues-construction: pappus). Andaikan jajar genjang itu dibentuk oleh dua pasang garis sejajar $(AB') \parallel (A'B)$ dan $(BC') \parallel (B'C)$, serta $\ell = (AC')$ dalam notasi teorema Pappus (`thm:pappus`).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk Desargues, jadikan dua pasang sisi sejajar sebagai dua pasang sisi bersesuaian dari dua segitiga perspektif.
2. Pilih pusat perspektivitas pada garis yang menghubungkan dua titik sudut jajar genjang yang berhadapan.
3. Untuk Pappus, jadikan empat sisi jajar genjang sebagai empat garis silang; dua titik hasil Pappus otomatis berada pada garis ideal.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada konstruksi Desargues, keluaran adalah $(A'C')$. Pada konstruksi Pappus, keluaran adalah (CA'). Dalam setiap bukti, perpotongan keluaran dengan ℓ dipaksa berada pada garis ideal.

Solusi lengkap. *(a) Desargues.* Labeli dua sisi bersebelahan yang bertemu di B dengan (AB) dan (BC), serta sisi berhadapan dengan $(A'B')$ dan $(B'C')$, sehingga

$$(AB) \parallel (A'B'), \qquad (BC) \parallel (B'C').$$

Tentukan $A = \ell \cap (AB)$, $C = \ell \cap (BC)$, dan titik sudut berhadapan $B' = (A'B') \cap (B'C')$. Pilih titik O pada (BB'), menghindari pilihan yang membuat perpotongan berikut tidak unik. Konstruksikan

$$A' = (AO) \cap (A'B'), \qquad C' = (CO) \cap (B'C').$$

Segitiga ABC dan $A'B'C'$ perspektif dari O. Dua titik potong sisi bersesuaian, $(AB) \cap (A'B')$ dan $(BC) \cap (B'C')$, merupakan dua titik ideal berbeda karena kedua pasangan sisi jajar genjang mempunyai arah berbeda. Menurut Desargues, titik ketiga $(AC) \cap (A'C') = \ell \cap (A'C')$ terletak pada garis ideal yang sama. Jadi $(A'C') \parallel \ell$.

(b) Pappus. Labeli empat sisi sehingga

$$r = (AB') \parallel r' = (A'B), \qquad s = (BC') \parallel s' = (B'C).$$

Tentukan $A = \ell \cap r$, $C' = \ell \cap s$, $B = r' \cap s$, dan $B' = r \cap s'$. Gambar garis (AB) dan $(B'C')$, lalu konstruksikan

$$C = (AB) \cap s', \qquad A' = (B'C') \cap r'.$$

Dengan demikian A, B, C segaris dan A', B', C' segaris. Dalam konfigurasi Pappus, dua titik silang

$$(BC') \cap (B'C) = s \cap s', \qquad (AB') \cap (A'B) = r \cap r'$$

adalah dua titik ideal berbeda. Pappus memaksa titik silang ketiga $(CA') \cap (C'A) = (CA') \cap \ell$ berada pada garis ideal. Maka $(CA') \parallel \ell$.

Semua langkah merupakan operasi penggaris. Syarat bahwa ℓ memotong keempat sisi di titik berbeda, bersama pilihan O yang tidak degenerat, menjamin objek yang dinamai dapat dikonstruksi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik ideal tidak pernah "dipilih" dengan penggaris. Ia hanya menyatakan bahwa dua garis keluaran sejajar. Petunjuk sumber juga belum menentukan titik bantu dan urutan perpotongan; urutan di atas merupakan bagian penting solusi.

15.6 Konfigurasi dual tanpa ketergantungan pada gambar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex006`. **Label sumber:** `ex:dual-configurations`. **Tingkat:** menengah (2 subbutir).

Prasyarat: insidensi dual $P \in \ell \iff p \ni L$.

Ketergantungan: tabel insidensi di bawah menggantikan ketergantungan logis pada `pic-245`; gambar tetap merupakan konteks sumber.

Soal sumber. (a) Gambar ulang konfigurasi sumber setelah memindahkan garis q ke tak hingga dan beri label bersesuaian. (b) Mulai dengan segi empat generik $KLMN$, perluas menjadi gambar dual, dan beri nama titik serta garis sesuai konvensi bab.

Petunjuk penulis. *(`ex: dual-configurations: infty`).* Perhatikan dan gunakan fakta bahwa $\square ABCD$ dan $\square ABDX$ merupakan jajar genjang.

(`ex: dual-configurations: dual`). Gambarlah $a = (KN)$, $b = (KL)$, $c = (LM)$, dan $d = (MN)$; tandai $P \in b \cap d$, lalu lanjutkan.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Setelah q menjadi garis ideal, semua garis yang semula melalui satu titik pada q menjadi satu keluarga garis sejajar.
2. Untuk bagian (b), catat keenam garis yang menghubungkan empat titik generik dan keenam titik potong pasangan garis bersesuaian.
3. Dualkan setiap baris tabel insidensi, bukan bentuk visualnya.

Jawaban atau pemeriksaan. Konfigurasi lengkap bagian (b) ditentukan oleh

$$\begin{array}{c|c|c|c} K = a \cap b & k = (AB) & L = b \cap c & \ell = (BC) \\ M = c \cap d & m = (CD) & N = d \cap a & n = (DA) \\ P = b \cap d & p = (BD) & Q = a \cap c & q = (AC). \end{array}$$

Setiap persamaan pada kolom kanan adalah dual dari persamaan pada kolom kiri.

Solusi lengkap. *(a).* Pilih transformasi proyektif yang memetakan q ke garis ideal. Untuk setiap titik $R \in q$, semua garis pada gambar sumber yang melalui R sekarang sejajar; garis-garis yang tidak bertemu di q tetap berpotongan pada citra titik potong semula. Gambar $ABCD$ sebagai jajar genjang, lalu gambar $ABDX$ sebagai jajar genjang kedua yang berbagi sisi AB. Agar konstruksi ini sama sekali tidak bergantung pada gambar sumber, beri nama tiga titik ideal

$$U = (AB) \cap (CD) = (AB) \cap (DX), \qquad V = (BC) \cap (AD), \qquad W = (BD) \cap (AX).$$

Inventaris lengkap setelah q menjadi garis ideal adalah

objek	titik-titik yang berinsidensi
q	U, V, W
(AB)	A, B, U
(CD)	C, D, U
(DX)	D, X, U
(BC)	B, C, V
(AD)	A, D, V
(BD)	B, D, W
(AX)	A, X, W

Dengan demikian inventaris labelnya adalah

$$\begin{aligned} \text{titik:} \quad & A, B, C, D, X, U, V, W, \\ \text{garis:} \quad & q, (AB), (CD), (DX), (BC), (AD), (BD), (AX). \end{aligned}$$

Tidak ada label atau insidensi yang harus dipulihkan dari gambar. Dari tabel ini langsung diperoleh

$$AB \parallel CD, \quad BC \parallel AD, \qquad AB \parallel DX, \quad BD \parallel AX.$$

Keempat relasi ini menentukan kedua jajar genjang, dan tabel menentukan ulang seluruh konfigurasi sampai transformasi afin. Karena jawaban hanya ditentukan sampai transformasi afin setelah q dipilih sebagai garis ideal, tidak ada ukuran panjang atau sudut tambahan yang harus dipertahankan.

(b). Mulai dengan empat titik generik K, L, M, N. Definisikan

$$a = (KN), \quad b = (KL), \quad c = (LM), \quad d = (MN),$$

dan dua titik diagonal

$$P = b \cap d, \qquad Q = a \cap c.$$

Sekarang namai titik dual garis a, b, c, d dengan A, B, C, D. Insidensi $K \in a, b$ berdual dengan garis k yang melalui A, B, jadi $k = (AB)$. Dengan cara yang sama,

$$\ell = (BC), \qquad m = (CD), \qquad n = (DA).$$

Karena $P \in b, d$, garis dualnya adalah $p = (BD)$; karena $Q \in a, c$, garis dualnya adalah $q = (AC)$. Tabel pada bagian pemeriksaan sekarang memuat setiap insidensi, sehingga konfigurasi dual dapat digambar dan diperiksa tanpa melihat kembali gambar sumber.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dualitas tidak mempertahankan bentuk, jarak, atau sudut; ia menukar titik dan garis sambil mempertahankan insidensi. Huruf besar dan kecil harus ditukar secara konsisten, bukan sekadar dipindahkan ke posisi yang tampak simetris.

15.7 Mengapa bidang Euklides tidak mempunyai dualitas

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex007`. **Label sumber:** `ex:dual-euclid`. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: definisi dualitas dan keberadaan garis sejajar berbeda.

Ketergantungan: argumen berlangsung pada bidang Euklides, tanpa menambahkan titik ideal.

Soal sumber. Buktikan bahwa bidang Euklides tidak memiliki dualitas.

Petunjuk penulis. Andaikan terdapat suatu dualitas. Pilih dua garis sejajar berbeda ℓ dan m. Misalkan L dan M merupakan titik-titik dualnya. Tetapkan $s = (ML)$; maka titik dualnya, S, harus terletak pada ℓ dan m sekaligus—suatu kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dualkan dua garis sejajar menjadi dua titik.
2. Hubungkan kedua titik itu dengan satu garis.
3. Dualkan kembali dua insidensi pada garis penghubung.

Jawaban atau pemeriksaan. Dualitas akan memaksa dua garis sejajar berbeda mempunyai satu titik bersama.

Solusi lengkap. Andaikan dualitas ada. Ambil garis sejajar berbeda ℓ, m, dan nyatakan titik dualnya dengan L, M. Garis $s = (LM)$ mempunyai suatu titik dual S. Karena $L \in s$, dualitas memberi $S \in \ell$; karena $M \in s$, dualitasnya memberi $S \in m$. Jadi $S \in \ell \cap m$, bertentangan dengan $\ell \parallel m$ dan $\ell \neq m$. Maka dualitas semacam itu tidak ada.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada perluasan proyektif, dua garis sejajar memang bertemu di titik ideal; itulah sebabnya kontradiksi ini hanya membuktikan ketiadaan dualitas pada bidang Euklides yang belum diperluas.

15.8 Dualitas koordinat dan garis ideal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex008`. **Label sumber:** `ex:dula-coordinates`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: koordinat homogen dan persamaan garis.

Ketergantungan: label sumber memuat salah eja `dula`; label itu dipertahankan, sedangkan isi membuktikan dualitas yang benar.

Soal sumber. Untuk $P = (a, b) \neq O$, petakan P ke garis $p : ax + by = 1$. Perluas korespondensi menjadi dualitas pada bidang proyektif, dan tentukan pasangan bagi O serta bagi garis $ax + by = 0$.

Petunjuk penulis. Andaikan $M = (a, b)$ dan garis s dinyatakan oleh $px + qy = 1$. Maka $M \in s$ ekuivalen dengan $pa+qb = 1$. Hal ini, pada gilirannya, ekuivalen dengan $m \ni S$, dengan m merupakan garis $ax + by = 1$ dan $S = (p, q)$.

Untuk memperluas bijeksi ini ke seluruh bidang proyektif, andaikan bahwa (1) garis ideal bersesuaian dengan titik asal dan (2) titik ideal yang diberikan oleh berkas garis $bx - ay = c$ bersesuaian dengan garis $ax + by = 0$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Homogenkan titik (a, b) menjadi $[a : b : 1]$.
2. Gunakan matriks diagonal $J = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ untuk menukar koordinat titik dan koefisien garis.
3. Periksa insidensi dengan satu hasil kali matriks.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam koordinat homogen,

$$[X : Y : Z] \longleftrightarrow Xx + Yy - Zz = 0.$$

Jadi $O = [0 : 0 : 1]$ berpasangan dengan garis ideal $z = 0$, sedangkan titik ideal arah $[a : b : 0]$ berpasangan dengan garis $ax + by = 0$.

Solusi lengkap. Tuliskan titik sebagai vektor kolom homogen $P = [X : Y : Z]$, dan garis sebagai vektor koefisien $\ell = [u : v : w]$ untuk persamaan $ux + vy + wz = 0$. Tetapkan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Petakan titik P ke garis berkoefisien JP, dan garis ℓ ke titik $J\ell$. Karena $J^2 = I$, korespondensi ini bijektif dan saling invers sampai perkalian skalar homogen.

Insidensi $P \in \ell$ berarti $\ell^{\mathsf{T}} P = 0$. Karena $J^{\mathsf{T}} J = I$,

$$(JP)^{\mathsf{T}} (J\ell) = P^{\mathsf{T}} \ell = 0.$$

Artinya, titik dual $J\ell$ terletak pada garis dual JP; syarat dualitasnya terpenuhi.

Untuk $P = [a : b : 1]$, garis dualnya mempunyai persamaan $ax + by - z = 0$, yakni $ax + by = 1$ pada bagan afin $z = 1$. Untuk $O = [0 : 0 : 1]$, persamaannya $-z = 0$, yaitu garis ideal. Titik ideal $[a : b : 0]$, yang merupakan arah berkas $bx - ay = c$, berpasangan dengan $ax + by = 0$. Ini juga menjawab pertanyaan balik tentang garis melalui titik asal.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Persamaan bernormalisasi $px + qy = 1$ tidak mencakup garis melalui titik asal. Bagan homogen diperlukan untuk menambahkan garis-garis itu dan garis ideal tanpa membagi dengan nol.

15.9 Teorema dual Pappus

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex009`. **Label sumber:** `ex:dual-pappus`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: teorema Pappus dan dualitas proyektif.

Ketergantungan: konfigurasi `pic-356` merupakan konteks gambar penulis; daftar insidensi berikut cukup untuk memeriksa hasilnya.

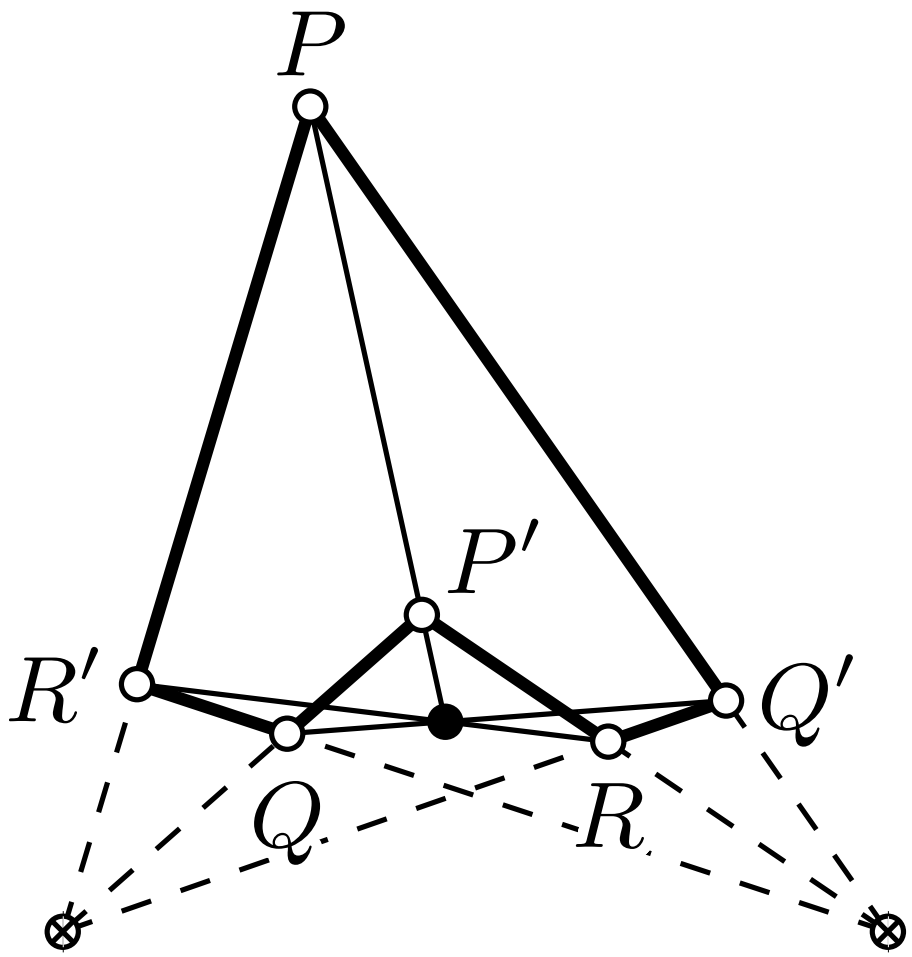
Soal sumber. Rumuskan teorema dual Pappus.

Petunjuk penulis. Andaikan diberikan satu himpunan garis konkuren a, b, c, dan satu himpunan garis konkuren lain a', b', c'. Misalkan

$$P \in b \cap c', \qquad Q \in c \cap a', \qquad R \in a \cap b',$$
$$P' \in b' \cap c, \qquad Q' \in c' \cap a, \qquad R' \in a' \cap b.$$

Maka garis-garis (PP'), (QQ'), dan (RR') konkuren.

Konfigurasi sembilan titik dan sembilan garis yang diperoleh sama dengan konfigurasi dalam teorema semula, dan hasilnya merupakan perumusan ulang teorema tersebut.



Gambar petunjuk penulis `pic-356`, karya Anton Petrunin; aset MPS dari snapshot kerja beku dan dipertahankan tanpa modifikasi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dualkan dua tripel titik segaris menjadi dua tripel garis konkuren.
2. Dualkan setiap garis silang menjadi titik potong dua garis.
3. Dualkan kesimpulan “tiga titik segaris” menjadi “tiga garis konkuren”.

Jawaban atau pemeriksaan. Pernyataan pada petunjuk penulis adalah teorema dual Pappus lengkap.

Solusi lengkap. Terapkan suatu dualitas pada teorema Pappus. Tripel segaris A, B, C berubah menjadi garis konkuren a, b, c, dan tripel A', B', C' berubah menjadi garis konkuren a', b', c'. Titik silang $(BC') \cap (B'C)$, misalnya, berdual dengan garis yang menghubungkan titik $b \cap c' = P$ dan $b' \cap c = P'$, yaitu (PP'). Dua titik silang lainnya berdual berturut-turut dengan (QQ') dan (RR').

Kesimpulan Pappus bahwa ketiga titik silang segaris berdual dengan pernyataan bahwa ketiga garis (PP'), (QQ'), dan (RR') melalui satu titik. Karena dualitas merupakan bijeksi insidensi, penerapan dua kali mengembalikan pernyataan semula; jadi formulasi ini ekuivalen, bukan sekadar konsekuensi satu arah.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis (PP') bukan dual titik P saja; ia merupakan dual dari titik silang dua garis pada konfigurasi Pappus. Urutan prima harus dipertahankan agar keenam perpotongan tidak tertukar.

15.10 Garis sejajar melalui titik dengan penggaris

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex010`. **Label sumber:** `ex:dual-desargues-construction`. **Tingkat:** lanjut (2 subbutir).

Prasyarat: teorema dual Desargues dan teorema Pappus.

Ketergantungan: bagian Pappus membangun kedua tripel segaris secara eksplisit, sehingga kata “cobalah” dalam petunjuk ditutup menjadi algoritme langsung dan lengkap.

Soal sumber. Diberikan dua garis sejajar, konstruksikan garis ketiga yang sejajar dan melalui titik yang diberikan, hanya menggunakan penggaris: (a) dengan teorema dual Desargues; (b) dengan Pappus atau bentuk dualnya.

Petunjuk penulis. *(`ex: dual-desargues-construction: desargues`).* Andaikan (AA') dan (BB') merupakan garis-garis yang diberikan, dan C merupakan titik yang diberikan. Terapkan teorema dual Desargues (`thm:dual-desargues`) untuk mengonstruksi C' sedemikian sehingga (AA'), (BB'), dan (CC') konkuren. Karena $(AA') \parallel (BB')$, diperoleh $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$.

(`ex: dual-desargues-construction: pappus`). Andaikan P merupakan titik yang diberikan dan $(R'Q)$, $(P'R)$ merupakan garis-garis sejajar yang diberikan. Cobalah mengonstruksi titik Q' seperti dalam teorema dual Pappus (lihat solusi `ex:dual-pappus`).

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk Desargues, pilih dua pasangan titik pada dua garis masukan; paksa tiga titik potong sisi bersesuaian terletak pada satu garis bantu.
2. Untuk Pappus, bangun dua tripel segaris sehingga satu titik silang adalah titik ideal kedua garis masukan dan titik silang kedua adalah titik target.
3. Garis yang menghubungkan titik target dengan titik silang ketiga kemudian mempunyai arah yang diwajibkan oleh Pappus.

Jawaban atau pemeriksaan. Bagian (a) menghasilkan garis (CC'). Bagian (b) menghasilkan garis (PZ). Kedua keluaran melalui titik yang diberikan dan sejajar dengan kedua garis masukan.

Solusi lengkap. *(a) Dual Desargues.* Nyatakan dua garis masukan dengan $r \parallel s$, dan titik yang diberikan dengan C. Pilih titik berbeda $A, A' \in r$ dan $B, B' \in s$, semuanya dalam kedudukan generik terhadap C. Konstruksikan

$$Z = (AB) \cap (A'B').$$

Pilih garis bantu t melalui Z, kemudian tetapkan

$$X = t \cap (BC), \qquad Y = t \cap (CA), \qquad C' = (B'X) \cap (A'Y).$$

Sekarang

$$X = (BC) \cap (B'C'), \quad Y = (CA) \cap (C'A'), \quad Z = (AB) \cap (A'B')$$

segaris pada t. Teorema dual Desargues memberi bahwa $(AA') = r$, $(BB') = s$, dan (CC') konkuren. Titik persekutuan r, s adalah titik ideal arahnya, sehingga (CC') melalui titik ideal yang sama: $(CC') \parallel r \parallel s$.

(b) Pappus. Nyatakan garis masukan dengan $\ell \parallel m$ dan titik masukan dengan P. Jika P terletak pada salah satu garis masukan, garis itu sendiri adalah jawaban. Jika tidak, pilih $C \in m$ dan $C' \in \ell$ sehingga C, C', P tidak segaris. Pilih

$$A' \in (CP) \setminus \{C, P\}, \qquad A \in (C'P) \setminus \{C', P\}.$$

Konstruksikan

$$B = (AC) \cap \ell, \qquad B' = (A'C') \cap m, \qquad Z = (AB') \cap (A'B).$$

Titik A, B, C segaris, demikian pula A', B', C'. Dalam konfigurasi Pappus, satu titik silang ialah

$$(BC') \cap (B'C) = \ell \cap m,$$

yaitu titik ideal bersama kedua garis masukan. Titik silang kedua ialah

$$(CA') \cap (C'A) = (CP) \cap (C'P) = P.$$

Titik silang ketiga adalah Z menurut konstruksi. Pappus menyatakan bahwa titik ideal tersebut, P, dan Z segaris. Maka (PZ) melalui titik ideal arah ℓ, m, sehingga $(PZ) \parallel \ell \parallel m$.

Setiap objek pada kedua bagian diperoleh dari penggaris. Hanya sejumlah berhingga pilihan A, A', B, B', t, C, C' yang membuat garis konstruksi berimpit, $Z = P$, atau perpotongan menjadi ideal yang tidak diinginkan; pilih ulang jika itu terjadi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak cukup mengatakan "terapkan Desargues" tanpa membangun X, Y, Z. Pada bagian Pappus, dua tripel segaris harus benar-benar dibangun. Menamai titik-titik tanpa memastikan $BC' = \ell$, $B'C = m$, dan $(CA') \cap (C'A) = P$ belum menghasilkan garis sejajar.

Penutupan rigor untuk polar lingkaran

Klaim polar dalam sumber tidak disertai bukti, padahal empat latihan berikut bergantung padanya. Berikut penutupan mandiri.

Mula-mula buktikan teorema segi empat lengkap bagi suatu konik tak degenerat. Empat titik berbeda X, X', Y, Y' pada konik berada dalam kedudukan proyektif umum. Pilih koordinat homogen yang mengirimnya berturut-turut ke

$$e_1, \qquad e_2, \qquad e_3, \qquad e_1 + e_2 + e_3.$$

Setiap konik yang melalui keempat titik itu mempunyai persamaan

$$\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Tiga titik diagonal segi empat lengkap yang diperlukan adalah

$$P = (XX') \cap (YY') = e_1 + e_2, \qquad Z = (XY) \cap (X'Y') = e_1 + e_3,$$

dan

$$Z' = (XY') \cap (X'Y) = e_2 + e_3.$$

Polarisasi bentuk kuadrat di atas menunjukkan bahwa polar $P = e_1 + e_2$ mempunyai persamaan

$$\alpha(x + y) + (\beta + \gamma)z = \alpha(x + y - z) = 0.$$

Garis melalui $Z = [1 : 0 : 1]$ dan $Z' = [0 : 1 : 1]$ juga mempunyai persamaan $x + y - z = 0$. Jadi (ZZ') adalah polar P, terlepas dari dua secan yang dipilih. Karena pernyataan ini ditulis hanya dengan insidensi dan polaritas konik, transformasi koordinat balik membuktikannya untuk konfigurasi semula.

Sekarang ambil lingkaran

$$\Gamma : x^2 + y^2 = R^2$$

berpusat di $O = (0, 0)$. Matriks homogen koniknya adalah $Q = \operatorname{diag}(1, 1, -R^2)$. Oleh karena itu, polar titik afin $P = (p, q)$ ialah

$$px + qy = R^2. \tag{15.P}$$

Rumus ini membuktikan sekaligus:

1. garis hasil konstruksi segi empat lengkap tidak bergantung pada dua secan;
2. jika $P \in \Gamma$, persamaan (15.P) adalah persamaan garis singgung di P, sebab vektor normalnya (p, q) adalah jari-jari;
3. resiprositas insidensi berlaku: $Q \in p_P \iff p \cdot Q = R^2 \iff P \in p_Q$;
4. jika $P \neq O$, kaki tegak lurus dari O ke polar adalah

$$P^* = \frac{R^2}{p^2 + q^2}(p, q),$$

tepat invers P terhadap Γ.

Ada satu batas sumber yang material. Titik O juga memenuhi $O \notin \Gamma$, tetapi inversnya tidak terdefinisi dan persamaan polarnya adalah garis ideal $z = 0$, bukan garis afin. Jadi bagian invers–kaki dari klaim sumber berlaku untuk $P \neq O$. Demikian pula, garis afin yang melalui O mempunyai kutub ideal; tidak ada kutub afin berhingga untuk garis semacam itu.

15.11 Membalik konstruksi polar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex011`. **Label sumber:** `ex:revert`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: penutupan polar 15.10.

Ketergantungan: keluaran afin berhingga ada tepat ketika garis masukan tidak melalui pusat lingkaran.

Soal sumber. Diberikan lingkaran Γ dan garis tak singgung p, konstruksikan titik P yang polarnya terhadap Γ adalah p.

Petunjuk penulis. Andaikan $p = (QR)$; nyatakan garis-garis dual yang dihasilkan oleh konstruksi dengan q dan r. Maka, menurut `clm:polar`, P merupakan titik potong q dan r.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih dua titik berbeda $Q, R \in p$ yang tidak menyebabkan konstruksi polar menjadi degenerat.
2. Konstruksikan polar q dari Q dan polar r dari R.
3. Gunakan resiprositas insidensi untuk mengenali $q \cap r$.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $O \notin p$, jawaban afin adalah $P = q \cap r$. Jika $O \in p$, kutub p adalah titik ideal pada arah normal p, sehingga tidak ada jawaban afin berhingga.

Solusi lengkap. Pilih $Q, R \in p$, $Q \neq R$, menghindari paling banyak dua titik potong p dengan lingkaran dan pilihan lain yang membuat dua polar berimpit. Dengan konstruksi polar sumber, bangun $q = p_Q$ dan $r = p_R$, lalu ambil $P = q \cap r$.

Karena $Q \in p$, resiprositas polar memberi bahwa kutub P_p dari p terletak pada q. Dari $R \in p$ diperoleh $P_p \in r$. Ketunggalan perpotongan memberi $P = P_p$, sehingga polar P memang p.

Secara koordinat, jika $p : ux + vy = w$ dengan $w \neq 0$, rumus (15.P) memberi

$$P = \left(\frac{R^2 u}{w}, \frac{R^2 v}{w} \right),$$

yang berhingga dan unik. Jika $w = 0$, garis melalui O; vektor homogen kutubnya $[u : v : 0]$ adalah titik ideal. Cabang terakhir merupakan batas yang tidak disebutkan dalam soal sumber.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Dua titik pada p tidak didualkan menjadi dua titik lagi, melainkan dua garis yang perpotongannya adalah kutub. Garis melalui pusat tidak mempunyai kutub afin dan tidak boleh dipaksa menghasilkan perpotongan berhingga.

15.12 Garis singgung dari titik luar dengan penggaris

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex012`. **Label sumber:** `ex:tangentruler`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: polaritas lingkaran dan resiprositas insidensi.

Ketergantungan: perpotongan garis polar p dengan lingkaran ada karena P berada di luar lingkaran.

Soal sumber. Jika p adalah polar P dan memotong Γ di V, W, buktikan bahwa (PV) dan (PW) menyinggung Γ. Berikan konstruksi penggaris bagi dua garis singgung melalui titik luar P.

Petunjuk penulis. Garis v yang merupakan polar dari V menyinggung Γ. Karena $V \in p$, menurut `clm:polar`, diperoleh $P \in v$; artinya, $(PV) = v$. Dengan demikian, pernyataan tersebut terbukti.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Konstruksikan polar $p = p_P$ dengan dua secan melalui P.
2. Temukan $V, W = p \cap \Gamma$.
3. Gunakan resiprositas $V \in p_P \iff P \in p_V$, lalu identifikasi p_V sebagai garis singgung di V.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua garis yang dicari adalah (PV) dan (PW).

Solusi lengkap. Karena $V \in p_P$, resiprositas yang dibuktikan pada penutupan polar memberi $P \in p_V$. Titik V terletak pada lingkaran, jadi p_V adalah garis singgung di V. Garis ini memuat P dan V, sehingga $p_V = (PV)$. Argumen yang sama memberi $p_W = (PW)$.

Untuk konstruksi, pilih dua secan generik melalui P dan gunakan konstruksi segi empat lengkap sumber untuk memperoleh polar p_P. Ambil dua perpotongannya dengan lingkaran, V dan W, lalu tarik (PV) dan (PW). Seluruh langkah setelah lingkaran diberikan memakai hanya garis melalui dua titik dan perpotongan objek yang sudah ada. Jika P tepat pada lingkaran, kedua titik V, W berimpit dan hanya ada satu garis singgung; soal sengaja mengambil P di luar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis singgung tidak diasumsikan sebagai operasi baru. Ia diperoleh sebagai polar titik pada lingkaran, sesudah titik V, W dikonstruksi.

15.13 Pusat bersama dua lingkaran sepusat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex013`. **Label sumber:** `ex:concentric-circ`. **Tingkat:** lanjut.

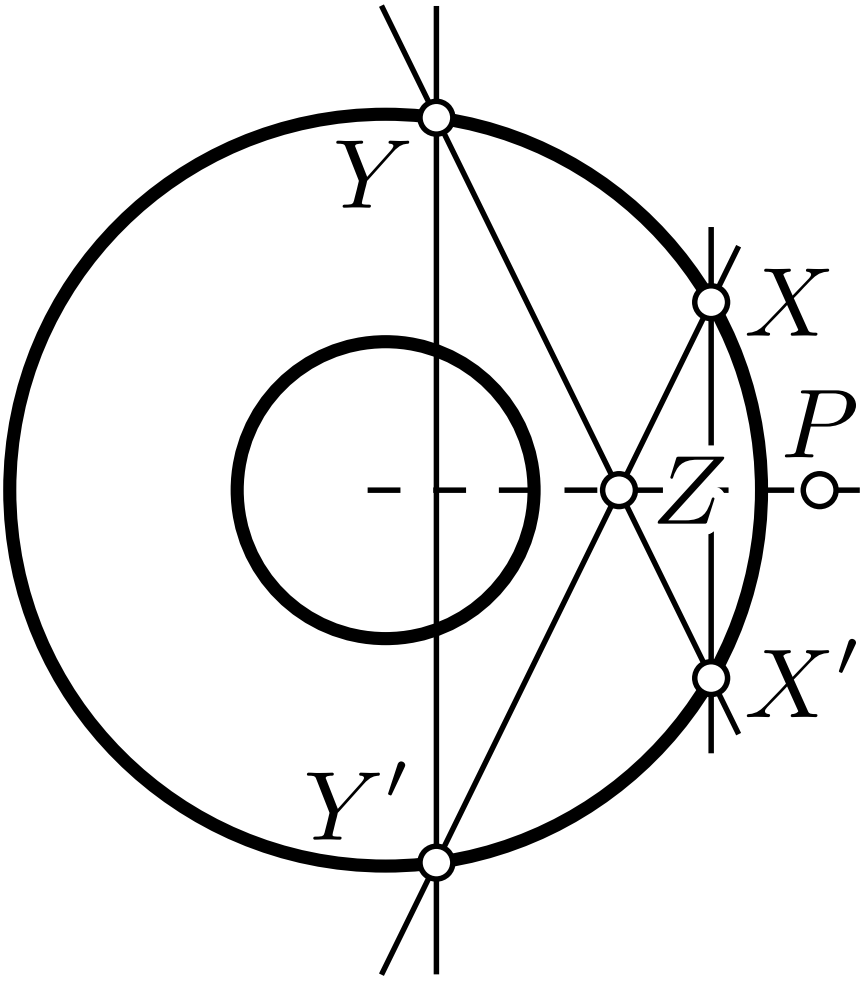
Prasyarat: persamaan polar lingkaran dan konstruksi garis polar.

Ketergantungan: dua lingkaran sepusat diasumsikan berbeda; jika radiusnya sama, data hanya berupa satu lingkaran dan langkah dua-polar runtuh.

Soal sumber. Diberikan dua lingkaran sepusat Γ dan Γ', konstruksikan pusat bersamanya hanya menggunakan penggaris.

Petunjuk penulis. Pilih titik P di luar lingkaran yang lebih besar. Konstruksikan garis-garis dual dari P untuk kedua lingkaran. Perhatikan bahwa kedua garis tersebut sejajar.

Andaikan garis-garis tersebut memotong lingkaran yang lebih besar pada dua pasang titik X, X' dan Y, Y'. Misalkan $Z \in (XY) \cap (X'Y')$. Perhatikan bahwa garis (PZ) melalui pusat bersama kedua lingkaran.



Gambar petunjuk penulis `pic-370`*, karya Anton Petrunin; aset MPS dari snapshot kerja beku dan dipertahankan tanpa modifikasi.*

Pusat tersebut merupakan titik potong (PZ) dengan garis lain yang dikonstruksi dengan cara yang sama.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan rumus polar untuk membuktikan kedua polar P sejajar.
2. Pasangkan titik potong dengan lingkaran besar menurut pencerminan terhadap garis (OP).
3. Buktikan bahwa (XY) dan $(X'Y')$ merupakan pasangan garis cermin, sehingga perpotongannya terletak pada (OP).
4. Ulangi dari titik kedua yang tidak segaris radial dengan pilihan pertama.

Jawaban atau pemeriksaan. Dua kali konstruksi menghasilkan dua garis yang terbukti melalui pusat; perpotongan kedua garis itu adalah pusat bersama.

Solusi lengkap. Misalkan radius lingkaran besar dan kecil berturut-turut $R > r > 0$, dan pilih koordinat hanya untuk pembuktian dengan pusat tak diketahui $O = (0, 0)$ serta $P = (d, 0)$, $d > R$.

Menurut rumus (15.P), kedua polar P adalah

$$x = \frac{R^2}{d} \qquad \text{dan} \qquad x = \frac{r^2}{d}.$$

Jadi keduanya sejajar dan keduanya memotong lingkaran besar. Tuliskan

$$X = (R^2/d, u), \quad X' = (R^2/d, -u), \qquad Y = (r^2/d, v), \quad Y' = (r^2/d, -v),$$

dengan pemilihan nama yang bersesuaian. Pencerminan terhadap sumbu OP menukar $X \leftrightarrow X'$ dan $Y \leftrightarrow Y'$, sehingga menukar garis (XY) dengan $(X'Y')$. Titik perpotongan $Z = (XY) \cap (X'Y')$ tetap oleh pencerminan itu; dalam kedudukan generik, titik tetapnya berada pada sumbu (OP). Maka P, Z, O segaris.

Secara konstruktif, pilih P di luar lingkaran besar, bangun kedua polarnya, ambil pasangan perpotongan X, X', Y, Y' dengan lingkaran besar, lalu bentuk $Z = (XY) \cap (X'Y')$ dan tarik (PZ). Ulangi seluruh proses dari titik luar P_2 yang dipilih agar garis radial hasilnya tidak sama. Kedua garis hasil melalui O, sehingga perpotongannya adalah pusat bersama yang dicari.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Satu garis (PZ) belum menentukan pusat. Kedua lingkaran harus berbeda agar dua polar pertama berbeda, dan titik luar kedua harus dipilih agar kedua garis pusat tidak berimpit.

15.14 Garis tegak lurus dengan penggaris dan polaritas

ID stabil: `o004-c100-sol-ch15-ex014`. **Label sumber:** `ex:proj-perp`. **Tingkat:** menengah–lanjut.

Prasyarat: konstruksi polar, resiprositas, dan rumus invers–kaki.

Ketergantungan: syarat sumber $O \notin \ell$ memastikan kutub ℓ berhingga.

Soal sumber. Diberikan garis ℓ dan lingkaran Γ berpusat O, dengan $O \notin \ell$, konstruksikan garis dari O yang tegak lurus ℓ, hanya menggunakan penggaris.

Petunjuk penulis. Konstruksikan garis-garis polar untuk dua titik pada ℓ. Nyatakan titik potong keduanya dengan L. Perhatikan bahwa ℓ merupakan polar dari L, sehingga $(OL) \perp \ell$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih dua titik biasa berbeda $Q, R \in \ell$, bukan titik potong ℓ dengan lingkaran jika pilihan itu menyulitkan konstruksi.
2. Bangun polar $q = p_Q$ dan $r = p_R$, lalu ambil $L = q \cap r$.
3. Gunakan resiprositas untuk membuktikan bahwa $\ell = p_L$.
4. Terapkan rumus invers–kaki pada L.

Jawaban atau pemeriksaan. Garis keluaran adalah (OL), dengan L kutub ℓ.

Solusi lengkap. Pilih dua titik berbeda $Q, R \in \ell$ yang bukan pilihan degenerat, bangun polar $q = p_Q$ dan $r = p_R$, lalu konstruksikan $L = q \cap r$. Karena $Q \in \ell$, kutub L_ℓ dari ℓ terletak pada q; dari $R \in \ell$, ia juga terletak pada r. Jadi $L = L_\ell$, dan $\ell = p_L$.

Untuk memeriksa arah secara koordinat, tulis

$$\ell : ux + vy = w.$$

Syarat $O \notin \ell$ berarti $w \neq 0$. Rumus polar memberi

$$L = \left(\frac{R^2 u}{w}, \frac{R^2 v}{w} \right).$$

Vektor arah OL sebanding dengan (u, v), yakni vektor normal garis ℓ. Oleh karena itu $(OL) \perp \ell$. Ini sama dengan argumen geometris sumber: invers L adalah kaki tegak lurus O pada $p_L = \ell$, sehingga kaki itu terletak pada (OL).

Semua langkah konstruksi memakai penggaris; ketegaklurusan hanya merupakan sifat yang dibuktikan setelah garis (OL) selesai dibangun.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menggunakan operasi “gambar garis tegak lurus” secara terselubung. Jika $O \in \ell$, kutubnya ideal dan algoritme berhingga ini tidak berlaku; itulah tepat alasan syarat sumber diperlukan.

Uji penguasaan Bab 15

1. **(2 poin).** Buktikan invariansi nilai mutlak rasio silang bagi transformasi afin, perspektif normal, dan transformasi proyektif, termasuk domain titik afin.
2. **(2 poin).** Gunakan dua pusat proyeksi pada konfigurasi rasio silang untuk memperoleh identitas hasil kali dan jelaskan mengapa akar negatif ditolak.
3. **(2 poin).** Lengkapi bukti Pappus pada dua cabang garis dasar dan buktikan kebalikan parsialnya dengan pelabelan ulang eksplisit.
4. **(2 poin).** Berikan dua algoritme penggaris yang membangun garis sejajar dengan garis masukan dari sebuah jajar genjang, masing-masing melalui Desargues dan Pappus.
5. **(2 poin).** Bangun tabel insidensi konfigurasi dual dari segi empat generik, lalu jelaskan perubahan keluarga garis ketika satu garis dipindahkan ke tak hingga.
6. **(2 poin).** Buktikan ketiadaan dualitas pada bidang Euklides dan konstruksikan dualitas koordinat lengkap pada perluasan proyektif.
7. **(2 poin).** Rumuskan serta buktikan teorema dual Pappus dengan mendualkan setiap insidensi, bukan hanya kesimpulannya.
8. **(2 poin).** Konstruksikan garis sejajar melalui titik yang diberikan dengan dual Desargues dan Pappus; tuliskan semua titik bantu dan kondisi tak degenerat.
9. **(2 poin).** Buktikan klaim polar melalui segi empat lengkap, turunkan persamaan polar lingkaran, dan gunakan resiprositas untuk membalik polar serta membangun garis singgung.
10. **(2 poin).** Gunakan dua polar sepusat untuk menemukan pusat dua lingkaran berbeda, lalu gunakan kutub garis untuk membangun garis tegak lurus dengan penggaris.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi atau penutupan berlabel berikut:

M1. 15.1.
M2. 15.2.
M3. 15.3 dan 15.4.
M4. 15.5.
M5. 15.6.
M6. 15.7 dan 15.8.
M7. 15.9.
M8. 15.10.
M9. 15.10, 15.11, dan 15.12.
M10. 15.13 dan 15.14.

M1 (2 poin). Satu poin untuk faktor skala afin serta dua cabang garis pada β; satu poin untuk pembatalan faktor y_i, komposisi proyektif, dan syarat semua titik serta citra afin.

M2 (2 poin). Satu poin untuk korespondensi berpusat W dan urutan rasio silang; satu poin untuk proyeksi berpusat V, persamaan $r = r^{-1}$, dan kepositifan.

M3 (2 poin). Satu poin untuk cabang garis dasar berpotongan dan sejajar dalam bukti Pappus; satu poin untuk identitas $A' = BZ \cap CY$, $B' = AZ \cap CX$, $C' = AY \cap BX$.

M4 (2 poin). Satu poin untuk pusat perspektivitas dan penerapan Desargues; satu poin untuk dua tripel segaris, dua titik ideal silang, dan garis keluaran Pappus.

M5 (2 poin). Satu poin untuk aturan titik pada garis ideal menjadi keluarga sejajar; satu poin untuk tabel enam garis/enam titik lengkap dan pertukaran huruf besar-kecil yang konsisten.

M6 (2 poin). Satu poin untuk kontradiksi dua garis sejajar melalui dual garis penghubung; satu poin untuk matriks J, bijektivitas, insidensi, $O \leftrightarrow z = 0$, dan pasangan titik ideal.

M7 (2 poin). Satu poin untuk keenam titik silang dalam bentuk dual; satu poin untuk mendeduksi kekonkurenan tiga garis dan menjelaskan ekuivalensi dua arah.

M8 (2 poin). Satu poin untuk urutan Z, t, X, Y, C' pada dual Desargues; satu poin untuk urutan C, C', A', A, B, B', Z pada Pappus serta semua pilihan generik.

M9 (2 poin). Satu poin untuk koordinat segi empat lengkap dan persamaan $px+qy = R^2$, termasuk batas $P = O$; satu poin untuk konstruksi kutub, resiprositas, dan dua garis singgung.

M10 (2 poin). Satu poin untuk dua polar sejajar, argumen pencerminan, dan dua garis pusat; satu poin untuk kutub L dari ℓ, rumus koordinatnya, dan $(OL) \perp \ell$ tanpa memakai alat tegak lurus.

Bab 16

Solusi dan penguasaan Bab 16: Wawasan geometri sferis

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Sembilan blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter16.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, penutupan domain, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber, domain, dan batas rigor

Bab sumber memuat tepat sembilan latihan tingkat atas: tujuh latihan biasa, satu latihan bertanda `[!]`, dan satu “Latihan lanjutan”. Latihan `ex:s-medians` mempunyai dua subbutir berlabel sumber. Latihan `ex:taurinus` mempunyai tiga subbutir tanpa label sumber; ketiganya dipertahankan sebagai subbutir tanpa label sumber dan diberi ID sintetis stabil `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-a`, `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-b`, dan `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-c`. Sembilan blok petunjuk penulis pada baris 1899–1968 dari `source/id-ID/hints.tex` mencakup semua sembilan latihan dan empat belas jangkar induk/subbutir.

Jarak sferis di bawah selalu berarti panjang busur minor pada bola satuan. Untuk dua titik berbeda yang tidak antipodal, jarak itu berada dalam $(0, \pi)$; nilai ujung dipakai hanya ketika batasnya memang didefinisikan. Proyeksi sentral dibatasi pada $z > 0$, sehingga semua penyebut z tidak nol. Proyeksi stereografik memperlakukan kutub selatan sebagai ∞. Setiap rumus inversi yang hanya memakai titik berhingga menyatakan secara eksplisit syarat titik berbeda dari pusat inversi, ruas penyebut tak nol, dan objek yang tidak berimpit.

Bab 16 berada dalam bagian tambahan Bab 14–20 yang oleh sumber diberi batas rigor. Khususnya, prinsip Taurinus tentang penggantian semua jarak dengan jarak imajiner dinyatakan tanpa bukti oleh sumber. Solusi terakhir hanya menghitung konsekuensi formal prinsip itu; solusi ini tidak membuktikan atau diam-diam menaikkan prinsip tersebut menjadi teorema.

16.1 Defek segitiga sferis

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex001`. **Label sumber:** `ex:defect-sphere`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: lema luas segitiga sferis dan ketaknegatifan luas.

Ketergantungan: segitiga memakai sisi busur minor dan tidak memiliki titik sudut antipodal, sebagaimana dibatasi dalam bab sumber.

Soal sumber. Buktikan bahwa defek setiap segitiga sferis tidak positif.

Petunjuk penulis. Terapkan `lem:area-spher-triangle`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan defek sebagai $\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.
2. Ganti jumlah sudut memakai rumus luas segitiga sferis padat.
3. Gunakan bahwa luas suatu daerah tidak negatif.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$\delta = -\operatorname{luas}(\blacktriangle_s ABC) \leq 0.$$

Solusi lengkap. Menurut Lema `lem:area-spher-triangle`,

$$\operatorname{luas}(\blacktriangle_s ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Oleh karena itu,

$$\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma = -\operatorname{luas}(\blacktriangle_s ABC).$$

Luas daerah sferis padat tersebut tidak negatif, sehingga $\delta \leq 0$. Kesamaan terjadi tepat ketika luasnya nol; untuk segitiga sferis tak degenerat, luasnya positif dan defeknya negatif.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Defek sferis mempunyai tanda berlawanan dengan luas, bukan sama dengan luas. Rumus ini tidak memberi tanda yang sama seperti defek pada bidang netral.

16.2 Titik tengah dan garis berat di bawah proyeksi sentral

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex002`. **Label sumber:** `ex:s-medians`. **Tingkat:** menengah (2 subbutir berlabel sumber).

Prasyarat: proyeksi sentral, vektor posisi pada bola satuan, dan kekonkurenan garis berat Euklides.

Ketergantungan: hipotesis bidang sejajar memaksa ketiga koordinat z sama dan positif; syarat tidak antipodal menjamin $A + B \neq 0$.

Soal sumber. Misalkan $\triangle_s ABC$ merupakan segitiga sferis tak degenerat dengan $A, B, C \in \Sigma^+$. Andaikan bidang Π^+ sejajar dengan bidang yang melalui A, B, C, dan A', B', C' merupakan proyeksi sentral ketiganya.

(a) Buktikan bahwa titik-titik tengah $[A'B']$, $[B'C']$, dan $[C'A']$ berturut-turut merupakan proyeksi sentral titik-titik tengah $[AB]_s$, $[BC]_s$, dan $[CA]_s$.

(b) Gunakan bagian (a) untuk membuktikan bahwa garis-garis berat segitiga sferis berpotongan di satu titik.

Petunjuk penulis. *(ex: s-medians: a).* Perhatikan dan gunakan fakta bahwa $OA' = OB' = OC'$.

(ex: s-medians: b). Perhatikan bahwa garis-garis berat segitiga sferis ABC dipetakan ke garis-garis berat segitiga Euklides $A'B'C'$. Tinggal menerapkan `thm:centroid` pada $\triangle A'B'C'$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan bidang ABC sebagai $z = h$, dengan $h > 0$.
2. Titik tengah busur minor dari A dan B adalah normalisasi vektor $A + B$.
3. Proyeksikan normalisasi itu ke $z = 1$; faktor normalisasinya harus saling menghapus.
4. Pindahkan ketiga garis berat ke Π^+ dan gunakan sentroid Euklides.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $M_{AB} = (A + B)/\|A + B\|$, maka

$$M'_{AB} = \frac{A + B}{2h} = \frac{A' + B'}{2}.$$

Titik konkuren sferis adalah proyeksi sentral balik dari $G' = (A' + B' + C')/3$.

Solusi lengkap. Karena bidang melalui A, B, C sejajar dengan $\Pi^+ : z = 1$, terdapat $h > 0$ sehingga

$$A_z = B_z = C_z = h, \qquad A' = A/h, \quad B' = B/h, \quad C' = C/h.$$

Untuk dua titik berbeda tak antipodal A, B pada bola satuan, arah $A + B$ membagi sudut pusat yang lebih kecil menjadi dua. Jadi titik tengah busur minor $[AB]_s$ adalah

$$M_{AB} = \frac{A + B}{\|A + B\|}.$$

Koordinat z-nya ialah $2h/\|A + B\| > 0$. Proyeksi sentralnya adalah

$$M'_{AB} = \frac{M_{AB}}{(M_{AB})_z} = \frac{A + B}{2h} = \frac{A' + B'}{2}.$$

Ini titik tengah ruas Euklides $[A'B']$. Argumen yang sama berlaku untuk dua pasangan sisi lainnya dan membuktikan bagian (a).

Proyeksi sentral memetakan setiap irisan lingkaran besar dengan Σ^+ ke sebuah garis pada Π^+. Karena titik tengah sferis dan titik sudutnya dipetakan ke titik tengah Euklides dan titik sudut yang bersesuaian, ketiga garis berat sferis dipetakan tepat ke ketiga garis berat $\triangle A'B'C'$. Menurut `thm:centroid`, garis-garis itu bertemu di

$$G' = \frac{A' + B' + C'}{3}.$$

Titik G' mempunyai koordinat $z = 1$, sehingga mempunyai tepat satu prapeta $G = G'/\|G'\| \in \Sigma^+$. Ketiga garis berat sferis melewati G, yang membuktikan bagian (b).

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik tengah busur bukan $(A + B)/2$, yang biasanya tidak terletak pada bola; ia harus dinormalisasi. Kesimpulan bahwa citranya merupakan titik tengah afin bergantung pada kesamaan $A_z = B_z = C_z = h$, bukan sifat umum proyeksi sentral.

16.3 Sudut siku-siku radial di bawah proyeksi sentral

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex003`. **Label sumber:** `ex:s-altitudes`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: vektor singgung bola dan proyeksi sentral.

Ketergantungan: $P, Q \in \Sigma^+$, $P \neq N$, dan $P \neq Q$ menjamin semua sinar singgung dan vektor bidang yang diuji tidak nol serta semua penyebut proyeksi positif.

Soal sumber. Untuk $P, Q \in \Sigma^+$, $P \neq N$, $P \neq Q$, dengan $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$, dan $N' = N$, buktikan

$$|\measuredangle_s NPQ| = \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |\measuredangle N'P'Q'| = \frac{\pi}{2}.$$

Petunjuk penulis. Terapkan pencerminan terhadap bidang yang melalui O, N, dan P.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tuliskan $P = (x, y, z)$, $Q = (u, v, w)$, dengan $z, w > 0$.
2. Proyeksikan $N - P$ dan $Q - P$ ke bidang singgung di P.
3. Hitung hasil kali skalar kedua vektor singgung.
4. Hitung hasil kali skalar $(N' - P') \cdot (Q' - P')$ dan bandingkan setelah dikalikan dengan penyebut positif $z^2 w$.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua syarat tegak lurus ekuivalen dengan

$$w(1 - z^2) - z(xu + yv) = 0.$$

Solusi lengkap. Tuliskan $P = (x, y, z)$, $Q = (u, v, w)$. Karena kedua titik berada pada Σ^+, $z, w > 0$, dan

$$P' = (x/z, y/z, 1), \qquad Q' = (u/w, v/w, 1), \qquad N' = (0, 0, 1).$$

Vektor singgung di P yang mengarah sepanjang lingkaran besar menuju N dan Q dapat diambil sebagai

$$t_N = N - (N \cdot P)P = N - zP, \qquad t_Q = Q - (P \cdot Q)P.$$

Keduanya tidak nol: $P \neq N$, sedangkan $P \neq Q$ dan kedua titik pada belahan utara tidak mungkin antipodal. Dengan $P \cdot P = 1$,

$$t_N \cdot t_Q = w - z(P \cdot Q) = w(1 - z^2) - z(xu + yv).$$

Jadi sudut sferis di P siku-siku tepat ketika ruas terakhir nol.

Di bidang Π^+,

$$N' - P' = (-x/z, -y/z, 0)$$

dan

$$Q' - P' = (u/w - x/z, v/w - y/z, 0).$$

Hasil kali skalarnya adalah

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} - \frac{xu + yv}{zw}.$$

Karena P satuan, $x^2 + y^2 = 1 - z^2$. Mengalikan dengan penyebut positif $z^2 w$ menghasilkan lagi

$$w(1 - z^2) - z(xu + yv).$$

Vektor bidangnya juga tidak nol karena proyeksi sentral bijektif dan $P \neq N, Q$. Maka hasil kali skalar yang satu nol jika dan hanya jika yang lain nol, yang membuktikan kedua arah ekuivalensi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Proyeksi sentral tidak konformal secara umum. Latihan hanya mempertahankan sudut siku-siku khusus yang salah satu sisinya menuju kutub utara; menganggap semua sudut dipertahankan akan mencampurkannya dengan proyeksi stereografik.

16.4 Proyeksi stereografik sebagai inversi ruang

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex004`. **Label sumber:** `ex:stereographic-inversion`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: inversi terhadap bola dan definisi proyeksi stereografik.

Ketergantungan: titik berhingga P harus berbeda dari pusat inversi S; pasangan $S \leftrightarrow \infty$ menangani titik yang dikeluarkan itu secara terpisah.

Soal sumber. Buktikan bahwa proyeksi stereografik $\xi_s : \Sigma \to \Pi \cup \{\infty\}$ dan inversnya berturut-turut merupakan pembatasan pada Σ dan $\Pi \cup \{\infty\}$ dari inversi terhadap bola Υ berpusat S dan berjari-jari $\sqrt{2}$. Simpulkan bahwa proyeksi stereografik mempertahankan nilai mutlak sudut antara busur.

Petunjuk penulis. Terapkan `thm:inverse`*`thm: inverse: line`* dan `thm:inversion-3d`*`thm: inversion-3d: angle`*.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ambil $P = (x, y, z) \in \Sigma \setminus \{S\}$ dan parametrisasikan garis SP sebagai $S + t(P - S)$.
2. Temukan t ketika koordinat terakhir nol.
3. Bandingkan $SP \cdot SP'$ dengan kuadrat jari-jari Υ.
4. Perlakukan $P = S$ dan titik ∞ secara eksplisit.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $P \neq S$, titik $P' = \xi_s(P)$ memenuhi

$$SP \cdot SP' = 2 = (\sqrt{2})^2.$$

Selain itu, $S \leftrightarrow \infty$.

Solusi lengkap. Ambil $P = (x, y, z) \in \Sigma \setminus \{S\}$, dengan $S = (0, 0, -1)$. Titik pada garis SP berbentuk

$$S + t(P - S).$$

Koordinat terakhirnya nol tepat ketika $-1 + t(z + 1) = 0$, sehingga $t = 1/(1 + z)$. Penyebut ini tidak nol karena $P \neq S$ pada bola satuan. Selanjutnya,

$$SP^2 = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2(1 + z).$$

Karena $P' = S + t(P - S)$, diperoleh

$$SP' = t\,SP = \frac{SP}{1+z} = \frac{2}{SP},$$

dan karenanya $SP \cdot SP' = 2$. Titik P' berada pada Π dan pada sinar $[SP)$, jadi ia tepat invers P terhadap bola berpusat S berjari-jari $\sqrt{2}$.

Sebaliknya, untuk titik berhingga $X \in \Pi$, inversi yang sama memberi

$$Y = S + \frac{2}{SX^2}(X - S).$$

Karena $SX > 0$, rumus ini terdefinisi; substitusi langsung memberi $|Y| = 1$, $Y \neq S$, dan garis SY memotong Π di X. Jadi $Y = \xi_s^{-1}(X)$. Dengan konvensi ruang inversif, $S \leftrightarrow \infty$, sehingga kedua pembatasan juga benar pada titik tambahan.

Pelestarian sudut juga dapat ditutup tanpa menjadikan teorema inversi ruang yang belum dibuktikan dalam bab sebagai ketergantungan. Untuk inversi berpusat S berjari-jari R, tuliskan

$$I(X) = S + \frac{R^2}{\|X - S\|^2}(X - S).$$

Pada $X \neq S$, tetapkan $u = (X - S)/\|X - S\|$ dan $\lambda = R^2/\|X - S\|^2 > 0$. Diferensialnya adalah

$$DI_X(v) = \lambda\big(v - 2\langle v, u\rangle u\big).$$

Pemetaan di dalam kurung merupakan pencerminan ortogonal terhadap bidang $u^{\perp}$. Jadi DI_X adalah satu faktor skala positif dikalikan isometri; ia mempertahankan nilai mutlak sudut antara setiap dua vektor singgung tak nol. Vektor singgung busur pada Σ dipetakan ke vektor singgung kurva citranya pada Π, sehingga pembatasan stereografik mempertahankan nilai mutlak sudut. Ini membuktikan kesimpulan konformal secara mandiri dan sekaligus sesuai dengan petunjuk `thm:inversion-3d`*`thm: inversion-3d: angle`*.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pusat inversi S tidak memiliki citra berhingga; ia harus dipasangkan dengan ∞. Sifat yang dipertahankan adalah sudut, bukan panjang atau titik tengah.

16.5 Citra stereografik lingkaran besar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex005`. **Label sumber:** `ex:great-circ`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: solusi 16.4 dan lingkaran umum.

Ketergantungan: lingkaran besar $C \neq \Omega$ mempunyai tepat dua titik potong antipodal dengan khatulistiwa; cabang $C \ni S$ menghasilkan garis, bukan lingkaran berhingga.

Soal sumber. Buktikan bahwa ξ_s memetakan setiap lingkaran besar selain Ω ke lingkaran umum pada bidang yang memotong Ω di titik-titik yang berseberangan, sedangkan Ω dipetakan ke dirinya sendiri.

Petunjuk penulis. Terapkan `thm:inversion-3d`*`thm: inversion-3d: b`*.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pakai bahwa stereografik adalah pembatasan inversi dari solusi sebelumnya.
2. Iris bidang lingkaran besar dengan bidang khatulistiwa Π.
3. Periksa bahwa dua titik potong pada Ω tetap oleh proyeksi.
4. Pisahkan cabang lingkaran besar yang melalui S dan yang tidak.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $C \neq \Omega$, maka $C \cap \Omega = \{U, -U\}$, dan kedua titik tetap berada pada $\xi_s(C)$. Citra itu garis jika $S \in C$, dan lingkaran berhingga jika $S \notin C$.

Solusi lengkap. Tuliskan bidang lingkaran besar sebagai

$$H : ax + by + cz = 0,$$

dengan $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Untuk titik citra berhingga $(u, v, 0) \in \Pi$, proyeksi stereografik balik dari solusi sebelumnya adalah

$$F(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2).$$

Substitusi $F(u, v) \in H$, setelah dikalikan dengan penyebut positif, memberi persamaan citra

$$2au + 2bv + c(1 - u^2 - v^2) = 0. \tag{16.G}$$

Jika $c = 0$, persamaan (16.G) adalah garis $au + bv = 0$. Dalam kasus ini H memuat sumbu z, khususnya S, dan titik S sendiri dipetakan ke ∞; jadi citranya tepat garis umum tersebut.

Jika $c \neq 0$, persamaan (16.G) menjadi

$$\left(u - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{c}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

sebuah lingkaran berhingga. Secara keseluruhan, citra umum memuat ∞ tepat ketika $S \in C$, yang pada persamaan bidang ekuivalen dengan $c = 0$; jadi kedua klasifikasi konsisten.

Pada khatulistiwa $u^2 + v^2 = 1$, persamaan (16.G) mereduksi menjadi $au + bv = 0$. Jika $C \neq \Omega$, pasangan (a, b) tidak keduanya nol; garis melalui asal ini memotong lingkaran satuan pada tepat dua titik antipodal $U, -U$. Keduanya tetap oleh stereografik karena sudah berada pada Π, sehingga lingkaran umum citra memotong Ω di titik-titik berseberangan itu.

Jika $C = \Omega$, maka $a = b = 0$ dan $c \neq 0$; (16.G) menjadi $u^2 + v^2 = 1$. Jadi $\xi_s(\Omega) = \Omega$. Perhitungan langsung ini menutup klaim lingkaran umum secara mandiri dan sesuai dengan petunjuk `thm: inversion-3d`*`thm: inversion-3d: b`*.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak setiap lingkaran besar menjadi lingkaran berhingga: yang melalui kutub proyeksi menjadi garis. Istilah “lingkaran umum” sengaja mencakup kedua kemungkinan itu.

16.6 Faktor skala lokal proyeksi stereografik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex006`. **Label sumber:** `ex:conform-sphere`. **Tingkat:** menengah–lanjut.

Prasyarat: rumus eksplisit proyeksi stereografik balik, jarak tali busur, dan limit $\arcsin t/t$.

Ketergantungan: P tetap berhingga di Π, $Q \to P$ dengan $Q \neq P$, dan busur minor $P'Q'$ dipakai untuk Q cukup dekat.

Soal sumber. Tetapkan $P \in \Pi$, ambil $Q \neq P$ dalam Π, dan misalkan $P', Q' \in \Sigma$ merupakan proyeksi stereografik balik keduanya. Dengan $x = PQ$ dan $y = P'Q'_s$, buktikan bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \frac{2}{1 + OP^2}.$$

Petunjuk penulis. Tetapkan $z = P'Q'$. Perhatikan bahwa $y/z \to 1$ ketika $x \to 0$. Tinggal membuktikan bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{z}{x} = \frac{2}{1 + OP^2}.$$

Ingat bahwa proyeksi stereografik merupakan inversi terhadap bola Υ yang berpusat di S, dengan pembatasan pada Π. Buktikan bahwa terdapat bidang Λ yang melalui S, P, Q, P', Q'. Pada Λ, pemetaan $Q \mapsto Q'$ merupakan inversi lingkaran. Perhitungan selebihnya serupa dengan pembuktian `lem:conformal`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Identifikasi Π dengan $\mathbb{R}^2$ dan tulis rumus $F(u) = \xi_s^{-1}(u)$.
2. Hitung $\|F(p) - F(q)\|$ secara aljabar.
3. Hubungkan panjang tali busur z dan jarak sferis minor y dengan $z = 2\sin(y/2)$.
4. Ambil limit $q \to p$; semua penyebut tetap positif.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $p, q \in \mathbb{R}^2$,

$$P'Q' = \frac{2\,PQ}{\sqrt{(1 + OP^2)(1 + OQ^2)}}.$$

Solusi lengkap. Tuliskan titik bidang sebagai $u \in \mathbb{R}^2$. Garis dari $S = (0, 0, -1)$ ke $(u, 0)$ memberikan rumus proyeksi stereografik balik

$$F(u) = \left(\frac{2u}{1 + \|u\|^2}, \frac{1 - \|u\|^2}{1 + \|u\|^2} \right).$$

Penyebutnya sedikitnya satu. Perhitungan hasil kali skalar, atau rumus inversi pada bidang S, P, Q, P', Q', memberi

$$z = \|F(p) - F(q)\| = \frac{2\|p - q\|}{\sqrt{(1 + \|p\|^2)(1 + \|q\|^2)}}.$$

Dengan $x = \|p - q\|$,

$$\frac{z}{x} = \frac{2}{\sqrt{(1 + \|p\|^2)(1 + \|q\|^2)}} \longrightarrow \frac{2}{1 + \|p\|^2} = \frac{2}{1 + OP^2}.$$

Untuk q cukup dekat dengan p, titik $F(p), F(q)$ berbeda dan tidak antipodal, sehingga $y \in (0, \pi)$ adalah jarak busur minor dan

$$z = 2\sin(y/2).$$

Saat $q \to p$, $y, z \to 0$, lalu

$$\frac{y}{z} = \frac{y}{2\sin(y/2)} \longrightarrow 1.$$

Mengalikan dua limit membuktikan rumus yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Besaran z adalah panjang tali busur Euklides, sedangkan y adalah panjang busur minor sferis; keduanya hanya mempunyai rasio menuju satu secara lokal. Faktor skala juga bergantung pada titik dasar P.

16.7 Penampang lingkaran pada kerucut lingkaran miring

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex007`. **Label sumber:** `ex:cone`. **Tingkat:** bertanda `[!]`.

Prasyarat: inversi ruang, persamaan bidang dan lingkaran dalam $\mathbb{R}^3$.

Ketergantungan: puncak tidak berada pada bidang alas; jari-jari inversi dipilih cukup kecil agar lingkaran citra berada pada ruas generator kerucut, bukan hanya pada perpanjangannya.

Soal sumber. Misalkan K merupakan kerucut lingkaran miring. Buktikan bahwa terdapat bidang Π yang tidak sejajar dengan bidang alas K sedemikian sehingga $\Pi \cap K$ merupakan sebuah lingkaran.

Petunjuk penulis. Perhatikan inversi lingkaran alas terhadap suatu bola yang berpusat di puncak kerucut, lalu terapkan `thm:inversion-3d`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pindahkan puncak ke titik asal dan tulis bidang alas sebagai $n \cdot x = h$, $h \neq 0$, dengan $\|n\| = 1$.
2. Inversikan lingkaran alas dengan pusat inversi di puncak dan jari-jari ρ.
3. Turunkan persamaan bidang yang memuat lingkaran citra.
4. Bandingkan komponen tangensial normal bidang citra dengan vektor perpindahan pusat alas dari kaki tegak lurus puncak.
5. Pilih ρ cukup kecil agar setiap titik citra berada di antara puncak dan titik alas asalnya.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika pusat alas adalah c, radius alas R, dan $d = \|c\|^2 - R^2$, lingkaran invers berada pada bidang

$$\left(2c - \frac{d}{h}n\right) \cdot y = \rho^2.$$

Bidang ini sejajar bidang alas tepat ketika kerucutnya tegak.

Solusi lengkap. Tempatkan puncak di $V = 0$. Pilih vektor normal satuan n dan orientasi sehingga bidang alas adalah

$$H = \{x : n \cdot x = h\}, \qquad h > 0.$$

Misalkan pusat lingkaran alas $c \in H$ dan radiusnya $R > 0$. Titik x pada lingkaran alas memenuhi

$$n \cdot x = h, \qquad \|x\|^2 - 2c \cdot x + \|c\|^2 - R^2 = 0. \tag{16.C}$$

Lingkaran alas kompak dan tidak memuat 0, jadi $m_0 = \min\{\|x\| : x \text{ pada lingkaran alas}\} > 0$. Pilih $\rho > 0$ dengan $\rho < m_0$, lalu inversikan terhadap bola berpusat 0 berjari-jari ρ:

$$y = \frac{\rho^2}{\|x\|^2} x.$$

Untuk setiap titik alas, $0 < \|y\| < \|x\|$, sehingga y berada pada ruas generator $[0, x]$ dari kerucut berhingga.

Tuliskan $d = \|c\|^2 - R^2$. Karena inversi bersifat involutif, $x = \rho^2 y/\|y\|^2$. Persamaan bidang pada (16.C) memberi

$$\|y\|^2 = \frac{\rho^2}{h}\, n \cdot y.$$

Substitusi ke persamaan lingkaran pada (16.C), setelah dikalikan dengan $\|y\|^2$ dan dibagi ρ^2, memberi

$$\left(2c - \frac{d}{h} n\right) \cdot y = \rho^2. \tag{16.P}$$

Persamaan pertama di atas sendiri sudah menutup bentuk citranya, tanpa bergantung pada teorema inversi ruang yang pembuktiannya tidak diberikan di buku sumber. Dengan $\alpha = \rho^2/(2h)$ dan $\|n\| = 1$, persamaan itu setara dengan

$$\|y - \alpha n\|^2 = \alpha^2. \tag{16.S}$$

Jadi semua titik citra terletak pada bola (16.S) sekaligus pada bidang (16.P). Sebaliknya, substitusi balik $x = \rho^2 y/\|y\|^2$ menunjukkan bahwa setiap titik irisan itu berasal dari lingkaran alas; penyebutnya tidak nol karena bidang (16.P) tidak melalui 0. Irisan bidang–bola tersebut tidak degenerat: inversi memetakan tak berhingga banyak titik lingkaran alas secara injektif ke tak berhingga banyak titik berbeda. Maka irisannya adalah sebuah lingkaran C'. Hal ini juga sejalan dengan teorema inversi ruang, tetapi tidak menjadikannya sandaran pembuktian. Persamaan (16.P) menunjukkan bahwa bidang Π yang memuat C' tidak melalui puncak.

Uraikan $c = hn + c_T$, dengan $c_T \perp n$. Kaki tegak lurus puncak pada H adalah hn, sehingga kerucut tegak tepat ketika $c_T = 0$. Komponen pada $n^{\perp}$ dari normal bidang (16.P) adalah $2c_T$. Karena kerucut diberikan miring, $c_T \neq 0$; normal Π tidak sejajar dengan n, jadi Π tidak sejajar dengan bidang alas H.

Akhirnya, setiap generator $[0, x]$ memotong Π tepat di titik invers $y \in C'$, sebab Π tidak melalui 0 dan sebuah garis melalui 0 memotongnya paling banyak sekali. Jadi $K \cap \Pi = C'$, sebuah lingkaran, dan bidangnya tidak sejajar dengan alas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Memakai inversi dengan jari-jari sembarang hanya menjamin penampang pada perpanjangan sinar generator. Pilihan $\rho < m_0$ diperlukan bila definisi K memakai ruas berhingga. Ketidak-sejajaran juga harus dibuktikan dari sifat miring, bukan disimpulkan hanya karena citranya lingkaran.

16.8 Segitiga siku-siku sferis dengan dua kaki $\pi/4$

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex008`. **Label sumber:** `ex:2(pi/4)=pi/3`. **Tingkat:** dasar–menengah.

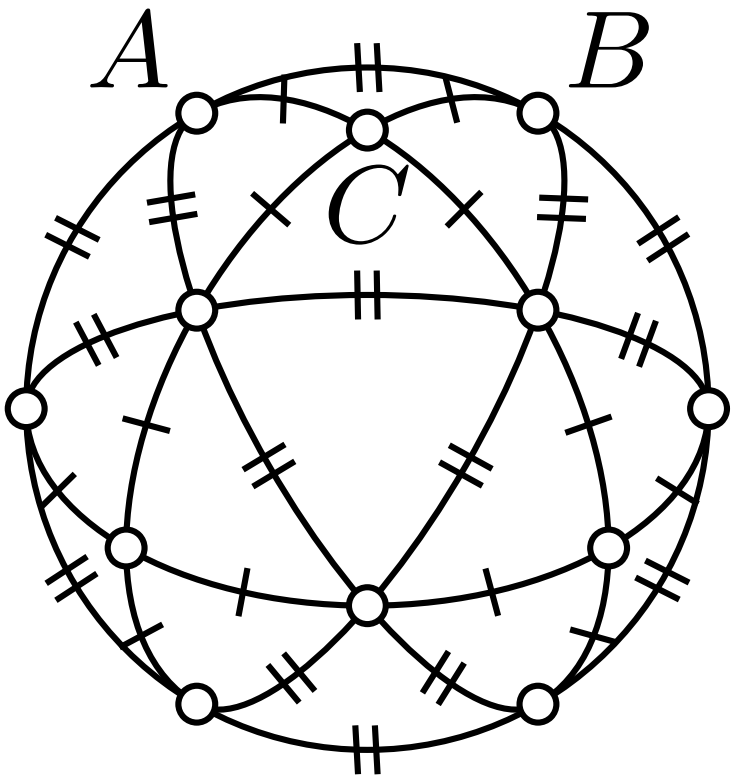
Prasyarat: teorema Pythagoras sferis dan domain jarak busur minor.

Ketergantungan: $c = AB_s \in [0, \pi]$; untuk segitiga tak degenerat dengan titik tak antipodal, sebenarnya $c \in (0, \pi)$.

Soal sumber. Buktikan bahwa jika $\triangle_s ABC$ siku-siku di C dan $AC_s = BC_s = \pi/4$, maka $AB_s = \pi/3$.

Petunjuk penulis. Terapkan teorema Pythagoras sferis untuk menunjukkan bahwa $\cos AB_s = \frac{1}{2}$, dan simpulkan bahwa $AB_s = \frac{\pi}{3}$.

Sebagai alternatif, perhatikan teselasi belahan bola pada gambar; teselasi tersebut tersusun dari 12 salinan $\triangle_s ABC$ dan empat segitiga sferis sama sisi. Berdasarkan simetri, $[AB]_s$ menempati seperenam bagian khatulistiwa.



Gambar petunjuk penulis `pic-358`*, karya Anton Petrunin; aset MPS dari snapshot kerja beku dan dipertahankan tanpa modifikasi.*

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tetapkan $a = BC_s$, $b = CA_s$, dan $c = AB_s$.
2. Substitusikan $a = b = \pi/4$ ke $\cos c = \cos a \cos b$.
3. Gunakan bahwa c adalah jarak busur minor dan kosinus menurun tegas pada $[0, \pi]$.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$\cos c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{\pi}{3}.$$

Solusi lengkap. Teorema Pythagoras sferis memberi

$$\cos c = \cos a \cos b = \cos(\pi/4)\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}.$$

Karena $c = AB_s$ adalah panjang busur minor, $c \in [0, \pi]$. Fungsi kosinus menurun tegas pada interval ini, dan satu-satunya nilai dalam interval tersebut dengan kosinus $1/2$ adalah $\pi/3$. Maka $AB_s = \pi/3$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Persamaan $\cos c = 1/2$ mempunyai tak hingga solusi pada garis real. Hanya domain utama jarak sferis $[0, \pi]$ yang membenarkan kesimpulan unik $c = \pi/3$.

16.9 Substitusi Taurinus sebagai perhitungan formal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch16-ex009`. **Label sumber:** `ex:taurinus`. **Tingkat:** lanjut (3 subbutir tanpa label sumber).

Prasyarat: rumus Euler, $\cos(ix) = \cosh x$, dan $\sin(ix) = i \sinh x$.

Ketergantungan: prinsip Taurinus bahwa substitusi menghasilkan identitas hiperbolik yang sah adalah klaim sumber yang tidak dibuktikan. Perhitungan di bawah bersifat formal dan bersyarat pada prinsip itu.

Soal sumber. Untuk segitiga sferis dengan sisi a, b, c dan sudut α, β, γ, gunakan substitusi Taurinus untuk menuliskan analog hiperbolik dari:

(a) **ID sintetis stabil:** `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-a`. Aturan kosinus sferis

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

(b) **ID sintetis stabil:** `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-b`. Aturan kosinus sferis dual

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

(c) **ID sintetis stabil:** `o004-c100-sol-ch16-ex009-part-c`. Aturan sinus sferis

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Petunjuk penulis. Gunakan rumus Euler (`sec:Euler'sformula`) untuk menunjukkan bahwa $\sin(i \cdot x) = i \cdot \sinh x$, lalu terapkan hasil tersebut. Anda akan memperoleh

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Dari rumus Euler, hitung $\cos(ix)$ dan $\sin(ix)$.
2. Pada rumus pertama, ganti ketiga sisi dengan ia, ib, ic, tetapi pertahankan ukuran sudut γ.
3. Pada rumus dual, hanya c yang merupakan jarak; jangan mengganti α, β, γ.
4. Pada aturan sinus, hapus faktor bersama i dari ketiga penyebut.

Jawaban atau pemeriksaan. Keluaran formalnya adalah tiga rumus yang tercetak dalam petunjuk penulis di atas. Tanda minus pada suku $\sinh a \sinh b \cos\gamma$ berasal dari $i^2 = -1$.

Solusi lengkap. Rumus Euler memberi

$$\cos(ix) = \cosh x, \qquad \sin(ix) = i \sinh x.$$

Untuk subbutir (a), ganti (a, b, c) dengan (ia, ib, ic):

$$\begin{aligned}\cosh c &= \cosh a \cosh b + (i \sinh a)(i \sinh b) \cos\gamma \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma.\end{aligned}$$

Untuk subbutir (b), ukuran sudut tetap, sedangkan $c \mapsto ic$. Maka

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cosh c.$$

Untuk subbutir (c), substitusi memberi

$$\frac{\sin\alpha}{i \sinh a} = \frac{\sin\beta}{i \sinh b} = \frac{\sin\gamma}{i \sinh c}.$$

Mengalikan ketiga anggota dengan i menghasilkan

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}.$$

Ini menyelesaikan manipulasi yang diminta, tetapi bukan pembuktian prinsip Taurinus. Bahwa substitusi formal tersebut mengubah setiap identitas sferis yang sah menjadi identitas hiperbolik yang sah memerlukan teorema kelanjutan analitik atau pengembangan geometri yang tidak diberikan di bab sumber. Ketiga rumus di atas diterima di sini hanya sebagai keluaran formal bersyarat sesuai instruksi latihan, bukan sebagai bukti mandiri atas prinsip umum itu.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Sudut tidak dikalikan i. Selain itu, berhasil menyederhanakan simbol kompleks tidak membuktikan bahwa prinsip Taurinus berlaku bagi semua rumus analitik; batas tidak terbukti sumber harus tetap terlihat.

Uji penguasaan Bab 16

1. **(2 poin).** Hubungkan defek segitiga sferis dengan luasnya dan jelaskan tanda serta kasus kesamaan.

2. **(2 poin).** Buktikan dengan normalisasi vektor bahwa proyeksi sentral memetakan titik tengah busur minor ke titik tengah afin di bawah hipotesis bidang sejajar, lalu deduksi kekonkurenan garis berat.

3. **(2 poin).** Buktikan kedua arah pelestarian sudut siku-siku khusus $\angle_s NPQ$ memakai vektor singgung dan cantumkan semua syarat penyebut serta vektor tak nol.

4. **(2 poin).** Turunkan proyeksi stereografik sebagai inversi berjari-jari $\sqrt{2}$, termasuk pasangan $S \leftrightarrow \infty$ dan akibat konformal.

5. **(2 poin).** Klasifikasikan citra setiap lingkaran besar sebagai garis atau lingkaran dan buktikan bahwa dua titik khatulistiwa antipodalnya tetap.

6. **(2 poin).** Turunkan rumus jarak tali busur bagi dua citra stereografik balik dan hitung faktor skala lokalnya terhadap jarak busur minor.
7. **(2 poin).** Gunakan inversi berpusat di puncak untuk membangun penampang lingkaran kerucut miring; buktikan bidangnya tidak sejajar dan penampang berada pada kerucut berhingga.
8. **(2 poin).** Terapkan Pythagoras sferis pada dua kaki $\pi/4$, lalu gunakan domain utama jarak sferis untuk memperoleh hipotenusa secara unik.
9. **(2 poin).** Hitung ketiga analog hiperbolik dalam latihan Taurinus dan tandai dengan tepat bagian mana yang hanya merupakan manipulasi formal bersyarat.
10. **(2 poin).** Bandingkan proyeksi sentral dan stereografik: nyatakan domain, objek dan invarian yang dipertahankan, serta satu klaim yang tidak boleh dipertukarkan.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 16.1.

M2. 16.2.

M3. 16.3.

M4. 16.4.

M5. 16.5.

M6. 16.6.

M7. 16.7.

M8. 16.8.

M9. 16.9.

M10. 16.2, 16.3, 16.4, dan 16.5.

M1 (2 poin). Satu poin untuk $\delta = -\operatorname{luas}\Delta$; satu poin untuk tanda luas dan kasus degenerat/tak degenerat yang benar.

M2 (2 poin). Satu poin untuk $(A+B)/\|A+B\|$ dan pembatalan faktor pada $z=h$; satu poin untuk citra ketiga median, sentroid, dan proyeksi balik.

M3 (2 poin). Satu poin untuk dua vektor singgung dan hasil kali $w(1-z^2)-z(xu+yv)$; satu poin untuk hasil kali bidang yang sama setelah dikalikan $z^2 w>0$ serta semua syarat tak nol.

M4 (2 poin). Satu poin untuk parameter $t=1/(1+z)$ dan $SP\cdot SP'=2$; satu poin untuk invers, pasangan titik tak hingga, dan pelestarian nilai mutlak sudut.

M5 (2 poin). Satu poin untuk $C\cap\Omega=\{U,-U\}$ dan kedua titik tetap; satu poin untuk cabang $S\in C$, $S\notin C$, dan $C=\Omega$.

M6 (2 poin). Satu poin untuk rumus eksplisit $F(u)$ dan panjang tali busur; satu poin untuk $z = 2\sin(y/2)$, kedua limit, dan domain lokal busur minor.

M7 (2 poin). Satu poin untuk inversi lingkaran alas, pilihan $\rho < m_0$, dan persamaan bidang citra; satu poin untuk komponen tangensial $2c_T$, ketidak-sejajaran, dan kesamaan $K \cap \Pi = C'$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk $\cos c = 1/2$; satu poin untuk monotonisitas kosinus pada $[0, \pi]$ dan kesimpulan unik $c = \pi/3$.

M9 (2 poin). Satu poin untuk tanda minus serta rumus kosinus dan kosinus dual; satu poin untuk aturan sinus dan pengungkapan bahwa prinsip umum Taurinus tidak dibuktikan.

M10 (2 poin). Satu poin untuk domain $z > 0$, citra lingkaran besar menjadi garis, dan sifat median/sudut siku-siku khusus proyeksi sentral; satu poin untuk domain $\Sigma \setminus \{S\} \leftrightarrow \Pi$, lingkaran umum, dan sifat konformal proyeksi stereografik tanpa mengklaim pelestarian panjang.

Bab 17

Solusi dan penguasaan Bab 17: Model proyektif

Pernyataan latihan dan petunjuk penulis tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin. Sepuluh blok petunjuk penulis dipertahankan di bawah judul “Petunjuk penulis” dan ditautkan ke rentang baris serta digest persisnya melalui `manifest-chapter17.json`. Petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, penutupan domain, metadata pembelajaran, uji penguasaan, kunci, dan rubrik merupakan komponen tambahan mandiri berdasarkan CC BY-SA 4.0. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas sumber, domain, dan batas rigor

Bab sumber memuat tepat sepuluh latihan tingkat atas: delapan latihan biasa dan dua “Latihan lanjutan”, tanpa subbutir. Kesepuluh blok petunjuk penulis pada baris 1984–2102 dari `source/id-ID/hints.tex` mencakup semua latihan. Dua gambar petunjuk, `pic-360` dan `pic-362`, dipertahankan sebagai aset MPS persis dan tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin.

Semua perhitungan dalam model proyektif memakai lingkaran absolut satuan setelah suatu isometri-h dinyatakan. Titik-h selalu berada ketat di dalam lingkaran absolut; titik ideal berada pada batas dan bukan titik-h. Rumus jarak pada tali busur dipakai hanya dengan urutan titik yang menjadikan semua panjang dan rasio positif. “Sejajar asimtotik” berarti mempunyai tepat satu titik ideal bersama, sedangkan “ultraparalel” berarti tidak berpotongan dan tidak mempunyai titik ideal bersama.

Sumber sendiri menyatakan bahwa bukti-bukti Bab 14–20 tidak sepenuhnya ketat. Solusi ini menutup argumen yang dipakai di sini, tetapi tidak diam-diam menaikkan semua pernyataan dalam bab tambahan menjadi teorema yang telah diaudit. Secara khusus, Latihan `ex:hex` memerlukan pembacaan tak degenerat yang lazim: ketiga lingkaran dan ketiga tali busur berbeda, dan “berpotongan di satu titik” berarti mempunyai satu titik konkuren yang unik. Jika lingkaran-lingkaran berimpit diizinkan, pernyataan harfiahnya tidak benar karena tali busurnya bertumpang tindih.

17.1 Tiga lingkaran ortogonal dan tiga tali busur

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex001`. **Label sumber:** `ex:hex`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: inversi terhadap lingkaran absolut, lingkaran ortogonal, dan bijeksi $P \leftrightarrow \hat{P}$.

Ketergantungan: pembacaan tak degenerat di atas diperlukan; setiap lingkaran yang ortogonal

terhadap Ω dipertahankan oleh inversi terhadap Ω.

Soal sumber. Misalkan $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ merupakan tiga lingkaran yang tegak lurus terhadap Ω, dan $[A_iB_i]$ tali busur persekutuan Ω dengan Γ_i. Buktikan bahwa ketiga tali busur berpotongan di satu titik di dalam Ω jika dan hanya jika ketiga lingkaran berpotongan di dua titik.

Petunjuk penulis. Tinjau bijeksi $P \leftrightarrow \hat{P}$ pada bidang-h dengan lingkaran absolut Ω. Perhatikan bahwa $\hat{P} \in [A_iB_i]$ jika dan hanya jika $P \in \Gamma_i$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Gunakan bijeksi untuk mengubah satu titik konkuren tali busur menjadi satu titik bersama ketiga lingkaran di dalam Ω.
2. Inversikan titik itu terhadap Ω.
3. Untuk arah sebaliknya, tunjukkan bahwa dua titik potong bersama yang tak degenerat saling berpasangan oleh inversi.
4. Pilih anggota pasangan yang berada di dalam Ω, lalu terapkan kembali sifat insidensi bijeksi.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika I_Ω menyatakan inversi terhadap Ω, pasangan titik potong bersama adalah P dan $I_\Omega(P)$, dengan tepat satu anggota di dalam Ω. Titik konkuren tali busur adalah $\hat{P}$.

Solusi lengkap. Karena $\Gamma_i \perp \Omega$, inversi I_Ω mempertahankan Γ_i sebagai himpunan. Bijeksi khusus bab ini juga memberi ekuivalensi insidensi

$$P \in \Gamma_i \cap \operatorname{int}\Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{P} \in [A_iB_i].$$

Andaikan ketiga tali busur konkuren di satu titik X di dalam Ω. Ambil satu-satunya P dengan $\hat{P} = X$. Ekuivalensi di atas memberi $P \in \Gamma_i$ untuk semua i. Titik $P^* = I_\Omega(P)$ berada di luar Ω, berbeda dari P, dan tetap berada pada setiap Γ_i. Jadi ketiga lingkaran mempunyai dua titik potong bersama P, P^*. Dua lingkaran berbeda tidak dapat mempunyai titik potong ketiga, sehingga pasangan itu tepat.

Sebaliknya, andaikan ketiga lingkaran berbeda mempunyai tepat dua titik potong bersama U, V. Inversi mempertahankan setiap lingkaran, sehingga mempermutasikan himpunan $\{U, V\}$. Dalam konfigurasi tak degenerat, keduanya tidak terletak pada Ω: dua titik batas bersama akan menentukan lingkaran ortogonal yang sama. Karena itu inversi menukar U dan V, dan tepat satu di antaranya, katakanlah P, berada di dalam Ω. Ekuivalensi insidensi memberi $\hat{P} \in [A_iB_i]$ untuk ketiga i. Ketiga tali busur berbeda, maka titik konkuren itu unik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Ortogonalitas terhadap Ω tidak berarti titik potong kedua lingkaran terletak pada Ω. Yang dipakai ialah invariansi lingkaran di bawah inversi. Kasus lingkaran berimpit harus dikeluarkan, bukan diselipkan ke dalam kata “jika dan hanya jika”.

17.2 Bijeksi khusus menggandakan jarak radial

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex002`. **Label sumber:** `ex:P<->hatP`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: Lema `lem:P-hat-chord`, definisi jarak-h dalam model konformal, dan diameter lingkaran absolut.

Ketergantungan: kasus $P = O$ dipisahkan; pada kasus lain titik ideal diberi urutan agar rasio silang positif.

Soal sumber. Buktikan bahwa $2\,OP_h = O\hat{P}_h$, dengan O pusat lingkaran absolut dan $P \leftrightarrow \hat{P}$ bijeksi yang dijelaskan dalam bab.

Petunjuk penulis. Terapkan `lem:P-hat-chord` dan definisi jarak-h dalam `sec:conformal-model`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tangani $P = O$ langsung.
2. Untuk $P \neq O$, pilih diameter dengan titik ideal A, B dan urutan A, O, P, B.
3. Gunakan bahwa bijeksi mempertahankan O, A, B.
4. Bandingkan faktor $\frac{1}{2}$ pada rumus jarak model proyektif dengan rumus jarak model konformal pada diameter yang sama.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk $r = O\hat{P}$,

$$OP_h = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \qquad O\hat{P}_h = \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Solusi lengkap. Jika $P = O$, maka $\hat{P} = O$ dan kedua ruas nol. Andaikan $P \neq O$. Ambil titik ideal A, B pada diameter (OP) dengan urutan A, O, P, B. Bijeksi khusus mempertahankan O, A, B, sehingga Lema `lem:P-hat-chord`, diterapkan pada O, P, memberi

$$OP_h = \frac{1}{2}\ln\frac{A\hat{P}\cdot BO}{\hat{P}B\cdot OA}.$$

Di sisi lain, definisi jarak-h model konformal pada diameter memberi

$$O\hat{P}_h = \ln\frac{A\hat{P}\cdot BO}{\hat{P}B\cdot OA}.$$

Semua faktor positif menurut urutan titik. Membandingkan kedua persamaan menghasilkan $O\hat{P}_h = 2\,OP_h$.

Untuk pemeriksaan koordinat, jika $OP = r$, proyeksi stereografik lalu proyeksi titik kaki memberi $O\hat{P} = 2r/(1+r^2)$. Identitas

$$\frac{1+2r/(1+r^2)}{1-2r/(1+r^2)} = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$$

memberi hasil yang sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pemetaan $P \mapsto \hat{P}$ bukan isometri dari satu representasi konformal ke dirinya sendiri. Ia menerjemahkan model; jika kedua koordinat dibaca dengan metrik konformal yang sama, jarak radial memang berubah.

17.3 Titik tengah dan kekonkurenan garis berat-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex003`. **Label sumber:** `ex:h-median`. **Tingkat:** lanjut.

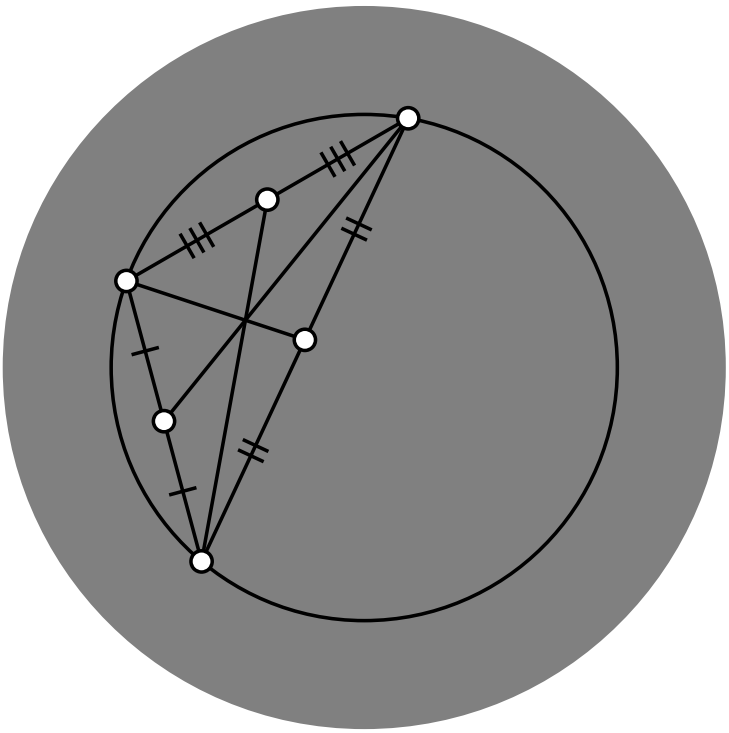
Prasyarat: pencerminan-h, model proyektif, sentroid Euklides, dan koordinat hiperboloid untuk penutupan kasus batas.

Ketergantungan: argumen lingkaran-h mengikuti petunjuk penulis; penutupan horosiklus dan ekuidistan di bawah merupakan tambahan mandiri yang lebih umum, bukan klaim bahwa sumber telah mengembangkan model hiperboloid.

Soal sumber. Misalkan P, Q sama jauh dari pusat lingkaran absolut. Perhatikan bahwa titik tengah-h $[PQ]_h$ berimpit dengan titik tengah Euklides $[PQ]$. Simpulkan bahwa garis-garis berat segitiga-h yang terinskripsi pada lingkaran-h berpotongan di satu titik. Pikirkan pula kasus segitiga yang terinskripsi pada horosiklus atau ekuidistan.

Petunjuk penulis. Pengamatan tersebut berlaku karena pencerminan terhadap garis sumbu $[PQ]$ merupakan transformasi isometrik bidang Euklides sekaligus transformasi isometrik bidang-h.

Kita dapat mengandaikan bahwa pusat lingkaran luar berimpit dengan pusat lingkaran absolut. Dalam kasus ini, garis-garis berat-h segitiga berimpit dengan garis-garis berat Euklides. Tinggal menerapkan `thm:centroid`.



Gambar petunjuk `pic-360`; karya Anton Petrunin, berupa aset MPS dari snapshot kerja beku dan dipertahankan tanpa modifikasi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Jika $OP = OQ$, tunjukkan bahwa garis sumbu $[PQ]$ melalui O dan pencerminannya mempertahankan lingkaran absolut.

2. Gunakan ketunggalan titik tengah-h untuk mengidentifikasinya dengan titik tengah Euklides.
3. Pindahkan pusat lingkaran luar-h ke O, lalu gunakan sentroid Euklides.
4. Untuk horosiklus dan ekuidistan, gunakan rumus titik tengah Klein berbobot Lorentz; rumus itu sekaligus membuktikan kasus umum.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk koordinat Klein x_1, x_2, x_3 dan $\gamma_i = (1 - \|x_i\|^2)^{-1/2}$, ketiga garis berat melalui

$$g = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}.$$

Solusi lengkap. Andaikan dahulu $OP = OQ$. Garis sumbu Euklides $[PQ]$ melalui O, sehingga pencerminan terhadapnya mempertahankan lingkaran absolut. Maka pencerminan itu merupakan isometri-h yang menukar P dan Q. Titik tengah-h yang unik dari $[PQ]_h$ harus tetap oleh pencerminan dan terletak pada tali busur lurus $[PQ]$. Titik tetap tunggal pada tali busur tersebut adalah titik tengah Euklides. Ini membuktikan pengamatan.

Sekarang ambil segitiga-h yang terinskripsi pada lingkaran-h. Dengan suatu isometri-h, pindahkan pusat lingkaran luarnya ke O. Ketiga titik sudut sekarang sama jauh dari O, sehingga setiap titik tengah sisi-h adalah titik tengah Euklides. Garis-h dalam model proyektif merupakan tali busur lurus; jadi ketiga garis berat-h berimpit dengan ketiga garis berat Euklides. Menurut `thm:centroid`, ketiganya konkuren. Isometri balik mempertahankan kekonkurenan.

Untuk menutup kasus horosiklus dan ekuidistan tanpa argumen limit, gunakan koordinat Klein. Bagi titik x di cakram satuan, tetapkan

$$\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \qquad U_x = (\gamma_x, \gamma_x x).$$

Vektor U_x berada pada hiperboloid satuan atas. Pada geodesik melalui x, y, vektor ternormalisasi yang searah dengan $U_x + U_y$ mempunyai hasil kali Lorentz yang sama dengan U_x dan U_y; karena itu ia adalah titik tengah-h. Proyeksi sentralnya ke bidang Klein adalah

$$m_{xy} = \frac{\gamma_x x + \gamma_y y}{\gamma_x + \gamma_y}.$$

Untuk titik sudut x_1, x_2, x_3, definisikan g seperti pada jawaban. Karena

$$g = \frac{\gamma_1 x_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) m_{23}}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3},$$

titik g terletak pada garis lurus, yakni garis-h, dari x_1 ke m_{23}. Dua penulisan siklik lainnya menunjukkan bahwa g juga terletak pada dua garis berat lainnya. Jadi garis berat setiap segitiga-h konkuren; khususnya, penutupan ini mencakup segitiga yang terinskripsi pada horosiklus atau ekuidistan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik tengah-h bukan titik tengah Euklides untuk pasangan Klein sembarang. Kesamaan itu pada argumen sumber bergantung pada $OP = OQ$; rumus berbobot menjelaskan koreksinya pada kasus umum.

17.4 Dikotomi tiga garis tinggi hiperbolik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex004`. **Label sumber:** `ex:h-altitudes`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: model proyektif, isometri-h, Pengamatan `obs:h-p-perp`, dan teorema ortosenter Euklides.

Ketergantungan: segitiga-h tak degenerat; “saling lepas” mencakup pasangan asimtotik dan ultraparalel.

Soal sumber. Buktikan bahwa garis-garis tinggi suatu segitiga hiperbolik berpotongan di satu titik atau saling lepas berpasangan.

Petunjuk penulis. Gunakan model proyektif. Andaikan dua garis tinggi-h berpotongan di suatu titik H. Pindahkan H ke pusat lingkaran absolut. Menurut `obs:h-p-perp`, garis-garis tinggi-h tersebut menjadi garis-garis tinggi Euklides dari segitiga. Menurut `thm:orthocenter`, garis tinggi Euklides yang tersisa melalui H. Menurut `obs:h-p-perp`, garis tinggi Euklides ini juga merupakan garis tinggi-h.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Andaikan sepasang garis tinggi bertemu di H.
2. Terapkan isometri-h yang membawa H ke O.
3. Karena dua garis tinggi melalui O, ubah kedua ortogonalitas-h menjadi ortogonalitas Euklides.
4. Gunakan ortosenter Euklides dan ubah kembali ortogonalitas ketiga.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika satu pasangan garis tinggi bertemu, ketiganya bertemu di titik yang sama. Kontraposisinya menyatakan bahwa jika ketiganya tidak konkuren, tidak ada pasangan yang bertemu.

Solusi lengkap. Misalkan dua garis tinggi-h berpotongan di H. Terapkan isometri-h yang membawa H ke pusat O lingkaran absolut dan gunakan model proyektif. Garis-h sekarang berupa tali busur Euklides. Kedua garis tinggi yang dipilih melalui O. Pada setiap titik kakinya, Pengamatan `obs:h-p-perp` mengubah ortogonalitas-h antara garis radial dan sisi segitiga menjadi ortogonalitas Euklides. Jadi keduanya adalah dua garis tinggi Euklides dari segitiga Klein yang sama.

Teorema ortosenter Euklides `thm:orthocenter` menyatakan bahwa garis tinggi Euklides ketiga juga melalui O. Garis ketiga itu radial, sehingga Pengamatan `obs:h-p-perp` dalam arah sebaliknya menunjukkan bahwa ia tegak lurus-h terhadap sisi ketiga. Ia adalah garis tinggi-h ketiga. Maka ketiga garis tinggi-h berpotongan di H setelah isometri dibalik.

Dengan demikian, adanya satu pasangan yang berpotongan memaksa kekonkurenan ketiganya. Jika kekonkurenan tidak terjadi, tidak satu pun dari tiga pasangan berpotongan; jadi garis-garis tinggi saling lepas berpasangan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Model Klein tidak mempertahankan sudut Euklides secara umum. Penggantian ortogonalitas hanya sah setelah titik potong kedua garis tinggi dipindahkan ke pusat, sehingga garis yang relevan benar-benar radial.

17.5 Kriteria kutub untuk garis tegak lurus-h

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex005`. **Label sumber:** `ex:klein-perp`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: model konformal dan proyektif, inversi lingkaran, daya titik, dan ketunggalan garis-h melalui dua titik ideal.

Ketergantungan: ℓ dan m berpotongan sebagai garis-h; titik potong $Z = s \cap t$ berada di luar lingkaran absolut.

Soal sumber. Misalkan ℓ, m garis-h dalam model proyektif. Misalkan s, t garis singgung lingkaran absolut pada dua titik ideal ℓ. Buktikan bahwa jika s, t, dan perpanjangan m berpotongan di satu titik, maka $\ell \perp m$.

Petunjuk penulis. Misalkan $\hat{\ell}$ dan $\hat{m}$ menyatakan garis-h dalam model konformal yang bersesuaian dengan ℓ dan m. Kita perlu membuktikan bahwa $\hat{\ell} \perp \hat{m}$ sebagai busur-busur pada bidang Euklides.

Titik Z, tempat s berpotongan dengan t, merupakan pusat lingkaran Γ yang memuat $\hat{\ell}$.

Jika perpanjangan m melalui Z, maka inversi terhadap Γ menukar titik-titik ideal $\hat{m}$. Akibatnya, $\hat{m}$ dipetakan ke dirinya sendiri. Dengan demikian, pernyataan tersebut terbukti.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Namai titik ideal ℓ dengan A, B, dan tetapkan $Z = s \cap t$.
2. Buktikan bahwa lingkaran berpusat Z melalui A, B ortogonal terhadap Ω; itulah lingkaran konformal Γ.
3. Jika C, D titik ideal m, gunakan daya titik $ZC \cdot ZD = ZA^2$.
4. Simpulkan bahwa inversi terhadap Γ menukar C, D dan mempertahankan lingkaran konformal yang melalui keduanya.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik Z adalah kutub tali busur ℓ. Inversi berpusat Z dan berjari-jari ZA mempertahankan busur $\hat{m}$; karena itu $\hat{m} \perp \Gamma = \hat{\ell}$.

Solusi lengkap. Tuliskan A, B untuk titik ideal ℓ dan $Z = s \cap t$. Karena ZA dan ZB merupakan dua garis singgung dari Z ke Ω, berlaku $ZA = ZB$. Lingkaran Γ berpusat Z melalui A, B memotong Ω tegak lurus: di A, radius ZA tegak lurus radius OA, dan sama di B. Jadi Γ adalah lingkaran umum yang merepresentasikan $\hat{\ell}$ dalam model konformal.

Misalkan C, D titik ideal m. Hipotesis menyatakan bahwa C, Z, D segaris. Daya Z terhadap Ω, dihitung dari garis singgung ZA dan garis potong ZCD, memberi

$$ZC \cdot ZD = ZA^2.$$

Karena itu inversi I_Γ menukar C dan D. Inversi ini juga mempertahankan Ω, sebab $\Gamma \perp \Omega$. Maka citra lingkaran umum $\hat{m}$ adalah lingkaran umum yang ortogonal terhadap Ω dan mempunyai titik ideal D, C. Lingkaran umum semacam itu unik, sehingga $I_\Gamma(\hat{m}) = \hat{m}$.

Selain Γ sendiri, suatu lingkaran umum dipertahankan oleh inversi terhadap Γ tepat ketika ia ortogonal terhadap Γ (kasus garis melalui pusat termasuk sebagai lingkaran umum). Di sini $\hat{m} \neq \Gamma$: perpanjangan m melalui kutub Z, sedangkan tali busur ℓ tidak melalui Z. Jadi $\hat{m} \perp \Gamma = \hat{\ell}$. Model konformal mengukur sudut-h sebagai sudut Euklides busurnya, maka $m \perp \ell$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik Z bukan titik-h dan tidak harus berada pada ruas m; yang melaluinya adalah perpanjangan Euklides tali busur m. Invariansi di bawah inversi, bukan sekadar pertukaran dua titik tanpa syarat ortogonal terhadap Ω, menutup argumen.

17.6 Rumus sudut paralelisme dari model proyektif

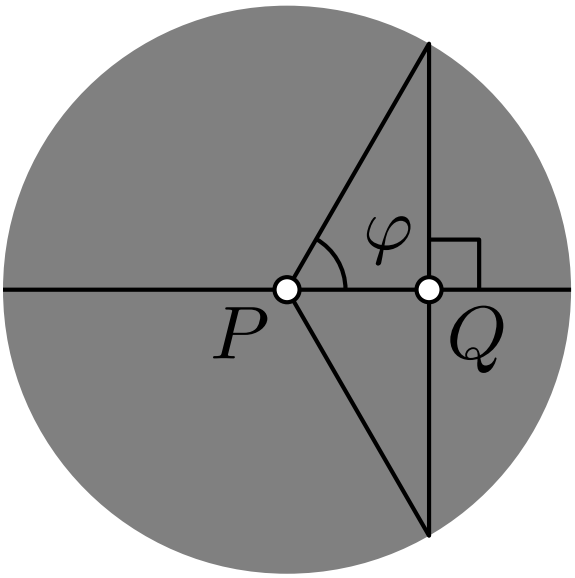
ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex006`. **Label sumber:** `ex:klein-for-angle-parallelism`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: isometri-h, rumus jarak Klein, sudut di pusat lingkaran absolut, dan garis sejajar asimtotik.

Ketergantungan: $P \notin \ell$, Q titik kaki-h, dan $h = PQ_h > 0$.

Soal sumber. Gunakan model proyektif untuk menurunkan rumus sudut paralelisme (Proposisi `prop:angle-parallelism`).

Petunjuk penulis. Misalkan Q merupakan titik kaki P pada garis tersebut dan ϕ merupakan sudut paralelisme.



Gambar petunjuk `pic-362`; karya Anton Petrunin, berupa aset MPS dari snapshot kerja beku dan dipertahankan tanpa modifikasi.

Kita dapat mengandaikan bahwa P merupakan pusat lingkaran absolut. Oleh karena itu, $PQ = \cos\phi$ dan

$$PQ_h = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos\phi}{1 - \cos\phi}.$$

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pindahkan P ke pusat O lingkaran absolut satuan.
2. Jika B titik ideal pada salah satu paralel asimtotik, buktikan bahwa segitiga OQB siku-siku Euklides di Q.
3. Gunakan $OB = 1$ dan $\angle QOB = \phi$ untuk memperoleh $OQ = \cos\phi$.
4. Masukkan nilai itu ke rumus jarak Klein dan selesaikan terhadap $\cos\phi$.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$h = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}, \qquad \cos\phi = \frac{e^{2h}-1}{e^{2h}+1} = \tanh h.$$

Solusi lengkap. Terapkan isometri-h yang membawa P ke pusat O lingkaran absolut satuan. Misalkan B titik ideal bersama antara ℓ dan salah satu garis melalui O yang sejajar asimtotik dengan ℓ. Karena $(OQ)_h \perp \ell$ dan OQ radial, Pengamatan `obs:h-p-perp` memberi $OQ \perp QB$ secara Euklides. Di pusat, sudut-h dan sudut Euklides sama, sehingga $\angle QOB = \phi$. Dari segitiga siku-siku OQB dan $OB = 1$,

$$OQ = \cos\phi.$$

Garis OQ merupakan diameter. Rumus jarak model proyektif dari pusat ke titik dengan radius Euklides r adalah

$$d_h(O, r) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Dengan $r = OQ = \cos\phi$ dan $h = PQ_h = OQ_h$, diperoleh

$$h = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}.$$

Mengeksponensialkan memberi $e^{2h} = (1+\cos\phi)/(1-\cos\phi)$, sehingga

$$\cos\phi = \frac{e^{2h}-1}{e^{2h}+1}.$$

Ini tepat dua bentuk rumus pada Proposisi `prop:angle-parallelism`.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Faktor $\frac{1}{2}$ berasal dari rumus jarak model proyektif. Menggunakan rumus model konformal tanpa menerjemahkan koordinat akan menggandakan jaraknya secara keliru.

17.7 Jari-jari dalam segitiga ideal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex007`. **Label sumber:** `ex:klein-inradius`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: kekongruenan segitiga ideal, simetri tiga lipat, dan rumus sudut paralelisme.

Ketergantungan: jari-jari dalam adalah jarak-h dari pusat dalam ke salah satu sisi; titik ideal bukan titik sudut-h berhingga.

Soal sumber. Gunakan model proyektif untuk menentukan jari-jari dalam suatu segitiga ideal.

Petunjuk penulis. Terapkan `ex:klein-for-angle-parallelism` untuk $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Normalisasikan segitiga ideal sehingga pusat dalamnya adalah O.
2. Gunakan simetri untuk menempatkan tiga titik ideal dengan selisih sudut pusat $2\pi/3$.
3. Untuk satu sisi, gambar kaki Q dari O; sudut antara OQ dan sinar ke titik ideal sisi adalah $\pi/3$.
4. Substitusikan ke rumus sudut paralelisme.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$r = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

Solusi lengkap. Semua segitiga ideal saling kongruen melalui isometri-h. Pindahkan pusat dalam ke pusat O lingkaran absolut. Simetri terhadap tiga pembagi sudut menempatkan titik-titik ideal A, B, C dengan

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2\pi}{3}.$$

Misalkan Q kaki tegak lurus dari O pada sisi $(AB)_h$. Sumbu simetri sisi AB melalui O, Q, sehingga

$$\phi = \angle QOA = \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{\pi}{3}.$$

Sudut ini adalah sudut paralelisme di O terhadap $(AB)_h$, dan $r = OQ_h$ adalah jari-jari dalam. Hasil Latihan `ex:klein-for-angle-parallelism` memberi

$$r = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos(\pi/3)}{1-\cos(\pi/3)} = \frac{1}{2}\ln\frac{3/2}{1/2} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Ketiga sisi memberikan nilai yang sama oleh simetri.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jari-jari Euklides lingkaran dalam pada gambar Klein bukan r. Nilai $\frac{1}{2}\ln 3$ adalah jarak hiperbolik dari pusat ke sisi.

17.8 Teorema Pythagoras hiperbolik dalam model proyektif

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex008`. **Label sumber:** `ex:pyth-h-proj`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: rumus jarak Klein, teorema Pythagoras Euklides, dan definisi kosinus hiperbolik.

Ketergantungan: segitiga-h tak degenerat, semua titik di dalam lingkaran satuan, serta $s < \sqrt{1-t^2}$ agar rasio jarak positif.

Soal sumber. Buktikan teorema Pythagoras hiperbolik dengan model proyektif. Untuk $\triangle_h ACB$ siku-siku di C, tetapkan $a = BC_h$, $b = CA_h$, dan $c = AB_h$, lalu buktikan

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Gagasan sumber menempatkan A di pusat lingkaran absolut, menetapkan $s = BC$, $t = CA$, $u = AB$, dan memakai $u^2 = s^2 + t^2$.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa

$$b = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t};$$

oleh karena itu,

$$\cosh b = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{1+t}{1-t}} + \sqrt{\tfrac{1-t}{1+t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$\cosh c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Misalkan X, Y merupakan titik-titik ideal $(BC)_h$. Dengan menerapkan kembali teorema Pythagoras (`thm:pyth`), diperoleh $CX = CY = \sqrt{1-t^2}$. Oleh karena itu,

$$a = \tfrac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-t^2}+s}{\sqrt{1-t^2}-s},$$

dan

$$\begin{aligned}\cosh a &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-t^2}+s}{\sqrt{1-t^2}-s}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-t^2}-s}{\sqrt{1-t^2}+s}} \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2-s^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-u^2}}.\end{aligned}$$

Akhirnya, perhatikan bahwa ketiga persamaan tersebut menyiratkan teorema.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pindahkan A ke pusat O, lalu ubah sudut siku-siku-h di C menjadi sudut siku-siku Euklides.
2. Terapkan Pythagoras Euklides untuk memperoleh $u^2 = s^2 + t^2$.
3. Hitung $\cosh b$ dan $\cosh c$ dari rumus jarak radial Klein.
4. Hitung separuh panjang tali busur (BC) sebagai $L = \sqrt{1-t^2}$, lalu hitung $\cosh a$.
5. Substitusikan $L^2 - s^2 = 1 - u^2$ dan kalikan.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$\cosh b = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \cosh a = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \cosh c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Solusi lengkap. Terapkan isometri-h yang membawa A ke pusat O lingkaran absolut satuan. Karena $(AC)_h$ radial dan tegak lurus-h terhadap $(BC)_h$, Pengamatan `obs:h-p-perp` menyatakan bahwa $AC \perp BC$ secara Euklides. Dengan $s = BC$, $t = CA$, dan $u = AB$, teorema Pythagoras Euklides memberi

$$u^2 = s^2 + t^2. \tag{1}$$

Rumus jarak radial Klein memberi

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \qquad c = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}.$$

Jika $d = \frac{1}{2}\ln((1+x)/(1-x))$, maka

$$\cosh d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Karena itu

$$\cosh b = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \cosh c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{2}$$

Garis Euklides (BC) berjarak t dari O. Jika X, Y titik potongnya dengan lingkaran satuan, maka Pythagoras Euklides memberi

$$CX = CY = L = \sqrt{1-t^2}.$$

Dengan orientasi X, B, C, Y atau orientasi balik yang setara, rumus jarak Klein menghasilkan

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{L+s}{L-s}.$$

Perhitungan kosinus hiperbolik yang sama memberi

$$\cosh a = \frac{L}{\sqrt{L^2 - s^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2-s^2}}.$$

Dari (1), $1 - t^2 - s^2 = 1 - u^2 > 0$. Maka

$$\cosh a \cosh b = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \cosh c.$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Panjang s, t, u adalah panjang Euklides pada gambar Klein, sedangkan a, b, c adalah jarak-h. Persamaan $u^2 = s^2 + t^2$ tidak boleh langsung ditulis sebagai $c^2 = a^2 + b^2$.

17.9 Konstruksi Bolyai pada bidang Euklides

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex009`. **Label sumber:** `ex:Boyai-in-Euclid`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: garis tegak lurus Euklides, lingkaran, dan ketunggalan garis sejajar.

Ketergantungan: $R \neq Q$, sehingga jari-jari $QR > 0$.

Soal sumber. Jelaskan apa yang terjadi jika konstruksi Bolyai dilakukan pada bidang Euklides.

Petunjuk penulis. Pada bidang Euklides, lingkaran Γ menyinggung k; yakni, T merupakan satu-satunya titik potong Γ dan k. Titik tersebut menentukan tepat satu garis (PT) yang sejajar dengan ℓ.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Pilih koordinat dengan $Q = (0,0)$, $\ell : y = 0$, dan $P = (0,h)$.
2. Tulis $R = (r, 0)$, sehingga $n : y = h$ dan $k : x = r$.
3. Potong k dengan lingkaran berpusat P berjari-jari $|r|$.
4. Identifikasi (PT) dengan garis sejajar Euklides melalui P.

Jawaban atau pemeriksaan. Lingkaran Γ menyinggung k di $T = (r, h)$, dan $(PT) = n \parallel \ell$.

Solusi lengkap. Gunakan koordinat Euklides

$$Q = (0,0), \qquad P = (0,h), \qquad \ell : y = 0, \qquad R = (r,0), \quad r \neq 0.$$

Garis m adalah $x = 0$, garis n adalah $y = h$, dan garis k, yang melalui R dan tegak lurus n, adalah $x = r$. Lingkaran Γ berpusat P dan berjari-jari $QR = |r|$ mempunyai persamaan

$$x^2 + (y-h)^2 = r^2.$$

Pada k, substitusi $x = r$ memberi $(y-h)^2 = 0$. Jadi satu-satunya titik potong adalah $T = (r, h)$; akar gandanya juga menunjukkan bahwa k menyinggung Γ di T. Garis (PT) mempunyai persamaan $y = h$, sehingga $(PT) = n \parallel \ell$. Dengan demikian konstruksi hiperbolik merosot tepat menjadi konstruksi garis sejajar Euklides yang unik.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Langkah memilih "salah satu" titik potong tidak menghasilkan dua pilihan di bidang Euklides. Kedua titik potong hiperbolik telah menyatu menjadi satu titik singgung.

17.10 Rekonstruksi garis tegak lurus bersama

ID stabil: `o004-c100-sol-ch17-ex010`. **Label sumber:** `ex:common-perp`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: konstruksi tegak lurus, kriteria kutub Latihan `ex:klein-perp`, isometri-h, dan teorema ortosenter Euklides.

Ketergantungan: ℓ, m harus ultraparalel; pilih $P, Q \in \ell$ sehingga dua garis bantu berpotongan pada titik-h H, sebagaimana disyaratkan secara eksplisit oleh petunjuk sumber.

Soal sumber. Perhatikan gambar sumber dan rekonstruksikan konstruksi garis tegak lurus bersama n bagi garis-h ℓ dan m. Buktikan bahwa konstruksi tersebut berlaku.

Petunjuk penulis. Pilih dua titik P dan Q pada ℓ. Tarik garis-garis tegak lurus p dan q dari P dan Q ke m (ikuti `ex:construction-perpendicular`). Tarik garis tegak lurus dari P ke q dan dari Q ke p; nyatakan titik potong keduanya dengan H. (Andaikan H ada; jika tidak, pilih P dan Q yang lain.) Tarik garis tegak lurus n dari H ke m.

Untuk membenarkan konstruksi tersebut, kita perlu membuktikan bahwa $n \perp \ell$. Untuk melakukannya, pindahkan H ke pusat lingkaran absolut, lalu terapkan `obs:h-p-perp`, `ex:klein-perp`, dan `thm:orthocenter`.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Lakukan lima langkah konstruksi dalam petunjuk penulis dan pindahkan H ke pusat O.
2. Tunjukkan versi dua arah kriteria kutub: garis yang tegak lurus-h terhadap m mempunyai perpanjangan melalui kutub Z_m.
3. Simpulkan bahwa perpanjangan p, q, n semuanya melalui Z_m.
4. Dalam segitiga Euklides HPQ, identifikasi p, q sebagai dua garis tinggi dan gunakan ortosenter untuk menunjukkan $HZ_m \perp PQ$.
5. Gunakan $n = HZ_m$, $PQ = \ell$, dan Pengamatan `obs:h-p-perp` untuk kembali ke ortogonalitas-h.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam model Klein yang menempatkan $H = O$, kutub Z_m adalah titik potong perpanjangan p, q, n. Ia merupakan ortosenter Euklides segitiga HPQ, sehingga $n = HZ_m \perp PQ = \ell$, baik secara Euklides maupun secara hiperbolik.

Solusi lengkap. Lakukan konstruksi tepat seperti petunjuk penulis. Setelah memperoleh titik-h H, terapkan isometri-h yang membawa H ke pusat O lingkaran absolut dan gunakan model proyektif.

Kita terlebih dahulu menutup kriteria kutub yang diperlukan. Misalkan Z_m titik potong dua garis singgung pada titik ideal m. Latihan `ex:klein-perp` menunjukkan bahwa setiap tali busur yang perpanjangannya melalui Z_m tegak lurus-h terhadap m. Sebaliknya, jika suatu garis r melalui titik-h $X \in m$ dan $r \perp m$, garis Euklides (XZ_m) juga tegak lurus-h terhadap m menurut hasil tadi. Ketunggalan garis tegak lurus melalui X memaksa perpanjangan r sama dengan (XZ_m). Jadi kriteria tersebut berlaku dua arah.

Karena $p \perp m$, $q \perp m$, dan $n \perp m$, perpanjangan ketiganya melalui Z_m. Di sisi lain, garis yang dikonstruksi dari P ke q adalah $(PH)_h$, sedangkan garis dari Q ke p adalah $(QH)_h$. Keduanya melalui pusat $H = O$. Pengamatan `obs:h-p-perp` mengubah

$$(PH)_h \perp q, \qquad (QH)_h \perp p$$

menjadi ortogonalitas Euklides

$$PH \perp QZ_m, \qquad QH \perp PZ_m.$$

Maka $QZ_m = q$ dan $PZ_m = p$ adalah dua garis tinggi Euklides dari segitiga HPQ. Menurut `thm:orthocenter`, garis tinggi ketiga melalui Z_m; jadi

$$HZ_m \perp PQ.$$

Namun n melalui H dan Z_m, sehingga $n = HZ_m$, sedangkan PQ adalah perpanjangan ℓ. Karena n melalui pusat $H = O$, Pengamatan `obs:h-p-perp` mengubah $n \perp PQ$ kembali menjadi $n \perp \ell$ secara hiperbolik. Bersama $n \perp m$ dari konstruksi, n adalah garis tegak lurus bersama yang dicari.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Titik Z_m berada di luar bidang-h. Ia hanya dipakai sebagai titik bantu proyektif pada perpanjangan Euklides. Jika pasangan awal membuat H tidak menjadi titik-h, petunjuk sumber memang mewajibkan pemilihan ulang; argumen tidak boleh berpura-pura bahwa setiap pasangan P, Q bekerja.

Uji penguasaan Bab 17

1. **(2 poin).** Buktikan ekuivalensi lingkaran–tali busur pada Latihan `ex:hex`, termasuk pasangan inversi dan syarat tak degenerat yang diperlukan.
2. **(2 poin).** Turunkan $O\hat{P}_h = 2OP_h$ dari rasio silang dan periksa hasilnya dengan koordinat radial.
3. **(2 poin).** Buktikan pengamatan titik tengah untuk titik yang sama jauh dari O, lalu deduksi kekonkurenan median segitiga siklik-h.
4. **(2 poin).** Gunakan bobot Lorentz untuk menunjukkan kekonkurenan median segitiga-h umum dan jelaskan bagaimana ini menutup horosiklus serta ekuidistan.
5. **(2 poin).** Buktikan dikotomi garis tinggi-h dengan memindahkan satu titik potong ke pusat dan memakai ortosenter Euklides.
6. **(2 poin).** Buktikan kriteria kutub untuk ortogonalitas dua garis-h, termasuk langkah daya titik dan invariansi inversi.
7. **(2 poin).** Turunkan kedua bentuk rumus sudut paralelisme dan hitung jari-jari dalam segitiga ideal.

8. **(2 poin).** Buktikan Pythagoras hiperbolik dari $u^2 = s^2 + t^2$ dan tiga rumus kosinus hiperbolik dalam model Klein.
9. **(2 poin).** Jelaskan secara koordinat mengapa konstruksi Bolyai menjadi garis sejajar Euklides unik dan mengapa lingkaran bantu menyinggung k.
10. **(2 poin).** Rekonstruksikan garis tegak lurus bersama dan buktikan langkah terakhir dengan kriteria kutub serta ortosenter.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah solusi berlabel berikut:

M1. 17.1.

M2. 17.2.

M3. 17.3.

M4. 17.3.

M5. 17.4.

M6. 17.5.

M7. 17.6 dan 17.7.

M8. 17.8.

M9. 17.9.

M10. 17.10.

M1 (2 poin). Satu poin untuk ekuivalensi insidensi dan pembentukan pasangan $P, I_\Omega(P)$; satu poin untuk arah balik serta pengecualian lingkaran berimpit/titik konkuren tak unik.

M2 (2 poin). Satu poin untuk aplikasi Lema `lem:P-hat-chord` dengan urutan titik dan faktor $\frac{1}{2}$; satu poin untuk rumus konformal atau pemeriksaan $2r/(1+r^2)$.

M3 (2 poin). Satu poin untuk pencerminan pada garis sumbu melalui O dan ketunggalan titik tengah-h; satu poin untuk normalisasi pusat lingkaran luar, tiga median Euklides, dan isometri balik.

M4 (2 poin). Satu poin untuk lift $U_x = (\gamma_x, \gamma_x x)$ dan rumus m_{xy}; satu poin untuk titik berbobot g, tiga penulisan garis, dan cakupan kasus horosiklus/ekuidistan.

M5 (2 poin). Satu poin untuk memindahkan perpotongan ke pusat dan mengubah dua ortogonalitas; satu poin untuk ortosenter, garis ketiga, dan kontraposisi pasangan lepas.

M6 (2 poin). Satu poin untuk pusat Z, daya $ZC \cdot ZD = ZA^2$, dan pertukaran titik ideal; satu poin untuk invariansi lingkaran umum dan kesimpulan ortogonal.

M7 (2 poin). Satu poin untuk $OQ = \cos\phi$ dan kedua bentuk rumus; satu poin untuk $\phi = \pi/3$ serta $r = \frac{1}{2}\ln 3$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk normalisasi, $u^2 = s^2 + t^2$, dan rumus radial; satu poin untuk $L = \sqrt{1 - t^2}$, rumus $\cosh a$, dan perkalian akhir.

M9 (2 poin). Satu poin untuk koordinat P, Q, R, n, k; satu poin untuk akar ganda titik potong, ketunggalan T, dan $(PT) \parallel \ell$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk kriteria kutub dua arah dan kekonkurenan perpanjangan p, q, n di Z_m; satu poin untuk ortosenter segitiga HPQ, $HZ_m \perp PQ$, dan konversi kembali ke $n \perp \ell$.

Bab 18

Koordinat kompleks

Solusi, dukungan bertahap, dan uji penguasaan

Soal dan petunjuk penulis berasal dari Bab 18, "Koordinat kompleks", dalam *Bidang Euklides dan Kerabatnya*. Terdapat 16 latihan berlabel dan 15 petunjuk penulis; latihan `ex:movie` memang tidak mempunyai petunjuk penulis. Semua petunjuk bertahap, jawaban, solusi lengkap, metadata belajar, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan tambahan orisinal berlisensi CC BY-SA 4.0. Atribusi ini tidak menyiratkan dukungan penulis sumber. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Catatan integritas dan ketelitian. Label, rumus, urutan latihan, dan enam gambar sumber dipertahankan. Contoh berlabel `prob:2right-tringles` sudah diselesaikan di dalam sumber dan direkam terpisah sebagai contoh penulis, bukan dihitung sebagai latihan baru. Sumber sendiri menyatakan bahwa bukti-bukti Bab 14–20 tidak sepenuhnya ketat. Penyelesaian ini tidak diam-diam memperluas klaim sumber: setiap asumsi ketakterdegenerasian atau penyebut taknol dinyatakan ketika diperlukan.

18.1 Nilai mutlak hasil kali

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex001`. **Label sumber:** `ex:|zw|`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: konjugasi kompleks dan identitas $|z|^2 = z\bar{z}$.

Ketergantungan: hasil ini dipakai dalam perhitungan jarak, kesebangunan, dan transformasi Möbius di seluruh bab.

Soal sumber. Buktikan bahwa $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$ untuk semua $v, w \in \mathbb{C}$.

Petunjuk penulis. Gunakan fakta bahwa $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ dan $\bar{z} \cdot \bar{u} = \overline{z \cdot u}$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kuadratkan kedua ruas; semua besaran yang dibandingkan taknegatif.
2. Konjugasikan hasil kali sebagai satu kesatuan.
3. Pisahkan faktor $v\bar{v}$ dan $w\bar{w}$, lalu ambil akar taknegatif.

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua ruas taknegatif dan kuadrat keduanya sama dengan $(v\bar{v})(w\bar{w})$.

Solusi lengkap. Sifat konjugasi memberi $\overline{vw} = \bar{v}\bar{w}$. Karena perkalian kompleks komutatif,

$$|vw|^2 = (vw)\overline{vw} = vw\bar{v}\bar{w} = (v\bar{v})(w\bar{w}) = |v|^2|w|^2.$$

Nilai mutlak selalu taknegatif, sehingga akar kuadrat taknegatif pada kedua ruas menghasilkan $|vw| = |v||w|$, termasuk ketika salah satu faktor nol.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan kuadrat saja tidak selalu mengizinkan pengambilan akar dengan tanda sembarang; di sini tanda positif sah karena nilai mutlak taknegatif.

18.2 Ketaksamaan Ptolemy dari ketaksamaan segitiga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex002`. **Label sumber:** `ex:ptolemy`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: $ZW = |z - w|$, ketaksamaan segitiga kompleks, dan Latihan `ex:|zw|`.

Ketergantungan: pemetaan titik ke $0, u, v, w$ harus mengikuti urutan A, B, C, D; tidak diperlukan kecembungan segiempat.

Soal sumber. Gunakan identitas

$$u(v - w) + v(w - u) + w(u - v) = 0$$

dan ketaksamaan segitiga untuk membuktikan ketaksamaan Ptolemy $AC \cdot BD \le AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

Petunjuk penulis. Pilih suatu segiempat $ABCD$. Andaikan $0, u, v, w$ berturut-turut merupakan koordinat kompleks dari A, B, C, D. Tuliskan ulang ketaksamaan Ptolemy dengan menggunakan u, v, w. Turunkan ketaksamaan ini dari identitas yang diberikan dan ketaksamaan segitiga.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Nyatakan keenam panjang sebagai nilai mutlak selisih koordinat.
2. Pisahkan suku $v(w - u)$ dari identitas.
3. Terapkan nilai mutlak hasil kali, kemudian ketaksamaan segitiga.

Jawaban atau pemeriksaan. Dalam koordinat terpilih, sasaran tepatnya

$$|v|\,|w - u| \le |u|\,|v - w| + |v - u|\,|w|.$$

Solusi lengkap. Identitas sumber dapat disusun ulang menjadi

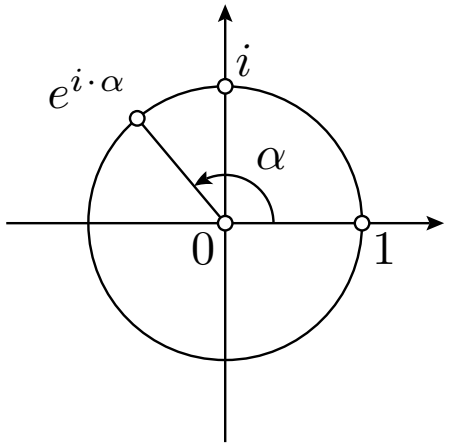
$$v(w - u) = u(w - v) + w(v - u).$$

Karena itu Latihan `ex:|zw|` dan ketaksamaan segitiga memberi

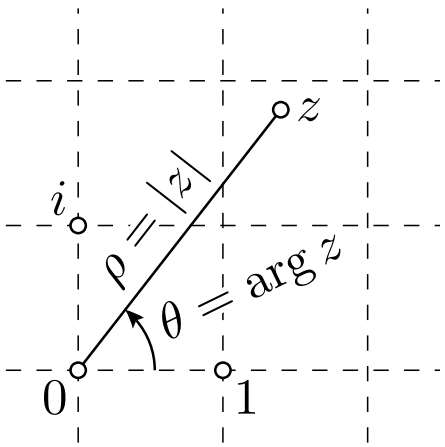
$$|v|\,|w - u| = |v(w - u)| \le |u(w - v)| + |w(v - u)| = |u|\,|v - w| + |w|\,|v - u|.$$

Sekarang $AC = |v|$, $BD = |w - u|$, $AB = |u|$, $CD = |v - w|$, $BC = |v - u|$, dan $DA = |w|$. Substitusi memberi ketaksamaan Ptolemy yang diminta. Kasus titik berimpit juga tercakup karena ketaksamaan nilai mutlak tetap berlaku.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan mengganti identitas kompleks dengan kesamaan panjang sebelum menerapkan ketaksamaan segitiga; arah ketaksamaan muncul tepat pada langkah itu.



`pic-272`: rumus Euler (gambar sumber, Anton Petrunin).



`pic-274`: argumen kompleks (gambar sumber, Anton Petrunin).

18.3 Jumlah sudut terarah suatu segitiga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex003`. **Label sumber:** `ex:3-sum-C`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: argumen hasil kali/hasil bagi dan rumus $\measuredangle VZW \equiv \arg((w-z)/(v-z))$.

Ketergantungan: Z, V, W berbeda dan tak segaris untuk segitiga takdegenerat; semua kongruensi sudut mengikuti konvensi sumber.

Soal sumber. Gunakan rumus argumen sudut untuk menunjukkan bahwa

$$\measuredangle ZVW + \measuredangle VWZ + \measuredangle WZV \equiv \pi$$

untuk setiap segitiga ZVW pada bidang Euklides.

Petunjuk penulis. Misalkan z, v, w berturut-turut menyatakan koordinat kompleks dari Z, V, W. Maka

$$\begin{aligned}\measuredangle ZVW + \measuredangle VWZ + \measuredangle WZV \equiv\\ \equiv \arg\tfrac{w-v}{z-v} + \arg\tfrac{z-w}{v-w} + \arg\tfrac{v-z}{w-z} \equiv\\ \equiv \arg\tfrac{(w-v)(z-w)(v-z)}{(z-v)(v-w)(w-z)} \equiv \arg(-1) \equiv \pi.\end{aligned}$$

Petunjuk bertahap (orisinal). Tuliskan tiap sudut sebagai argumen suatu hasil bagi; gabungkan ketiga argumen menjadi argumen satu hasil kali; cocokkan tiga pasang faktor yang berbeda tanda.

Jawaban atau pemeriksaan. Hasil bagi gabungan bernilai -1, sehingga argumennya kongruen dengan π.

Solusi lengkap. Rumus sudut kompleks memberi tiga suku persis seperti pada petunjuk penulis. Karena

$$w - v = -(v - w), \qquad z - w = -(w - z), \qquad v - z = -(z - v),$$

hasil bagi ketiga produk adalah $(-1)^3 = -1$. Jadi jumlah sudut terarah kongruen dengan $\arg(-1) \equiv \pi$. Untuk tiga sudut dalam biasa pada segitiga takdegenerat, masing-masing berada di $(0, \pi)$ dan jumlahnya berada di $(0, 3\pi)$; orientasi konsisten memilih wakil π.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Argumen didefinisikan modulo 2π. Kesimpulan kongruensi harus diperoleh lebih dahulu; pemilihan wakil π memerlukan pembacaan sudut dalam.

18.4 Kesebangunan yang dikodekan oleh perkalian kompleks

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex004`. **Label sumber:** `ex:C-sim`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: nilai mutlak dan argumen hasil kali, serta SAS.

Ketergantungan: untuk segitiga takdegenerat diperlukan $v, w \neq 0$ dan titik-titik yang bersangkutan tidak segaris.

Soal sumber. Titik O, E, V, W, Z memiliki koordinat kompleks berturut-turut $0, 1, v, w, z = vw$. Buktikan $\triangle OEV \sim \triangle OWZ$.

Petunjuk penulis. Perhatikan dan gunakan bahwa $\measuredangle EOV = \measuredangle WOZ = \arg v$ dan $\frac{OV}{OE} = \frac{OZ}{OW} = |v|$.

Petunjuk bertahap (orisinal). Bandingkan sudut di O; hitung $OZ = |vw|$; lalu gunakan perbandingan dua sisi yang mengapit sudut tersebut.

Jawaban atau pemeriksaan. Korespondensinya ialah $O \leftrightarrow O$, $E \leftrightarrow W$, dan $V \leftrightarrow Z$, dengan faktor skala $OW/OE = |w|$.

Solusi lengkap. Vektor kompleks dari O menuju E, V, W, Z berturut-turut adalah $1, v, w, vw$. Maka

$$\measuredangle EOV = \arg(v/1) = \arg v, \qquad \measuredangle WOZ = \arg(vw/w) = \arg v.$$

Selanjutnya

$$\frac{OV}{OE} = \frac{|v|}{1} = |v|, \qquad \frac{OZ}{OW} = \frac{|vw|}{|w|} = |v|.$$

Dua pasang sisi yang mengapit sudut sama itu sebanding. Kriteria SAS memberi $\triangle OEV \sim \triangle OWZ$ dengan korespondensi di atas.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada $\measuredangle WOZ$, huruf tengah O adalah titik sudut; jangan keliru menghitung sudut di W.

18.5 Rasio silang real dan segiempat terinskripsi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex005`. **Label sumber:** `ex:real-cross-ratio`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: rumus sudut melalui argumen, rasio silang kompleks, dan Akibat `cor:inscribed-quadrangle`.

Ketergantungan: empat titik berbeda, sehingga semua penyebut taknol.

Soal sumber. Gunakan fakta bahwa $z \neq 0$ real jika dan hanya jika $2\arg z \equiv 0$ untuk menunjukkan bahwa Teorema `thm:inscribed-quadrangle-C` memang merupakan perumusan ulang Akibat `cor:inscribed-quadrangle`.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\arg\frac{(v-u)(z-w)}{(v-w)(z-u)} &\equiv \arg\frac{v-u}{z-u}+\arg\frac{z-w}{v-w}\\ &= \measuredangle ZUV+\measuredangle VWZ.\end{aligned}$$

Pernyataan tersebut mengikuti karena nilai hasil bagi ini real jika dan hanya jika dua kali argumennya kongruen dengan nol.

Petunjuk bertahap (orisinal). Pisahkan argumen rasio silang menjadi dua argumen hasil bagi; baca keduanya sebagai sudut berhadapan; lalu terapkan kriteria sudut segiempat terinskripsi.

Jawaban atau pemeriksaan. Rasio silang real tepat ketika $2(\measuredangle ZUV+\measuredangle VWZ)\equiv 0$, yaitu tepat pada kondisi sudut Akibat `cor:inscribed-quadrangle`.

Solusi lengkap. Untuk empat titik berbeda, rumus sudut kompleks memberi identitas dalam petunjuk penulis. Bilangan kompleks taknol bersifat real tepat ketika argumennya 0 atau π modulo 2π, yang setara dengan dua kali argumennya nol modulo 2π. Karena itu rasio silang tersebut real tepat ketika

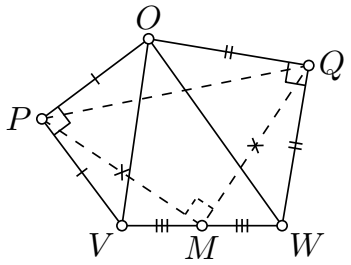
$$2\measuredangle ZUV+2\measuredangle VWZ\equiv 0.$$

Ini persis kriteria sudut terarah untuk keempat titik berada pada satu lingkaran umum; pada urutan segiempat biasa, kriteria itu menjadi jumlah sudut berhadapan π. Jadi teorema rasio silang dan akibat geometri menyatakan syarat yang sama.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. “Real” mencakup bilangan real negatif. Memaksa argumen nol saja akan menghilangkan kasus argumen π.

Contoh sumber terselesaikan: dua segitiga siku-siku sama kaki

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-source-example001`. **Label sumber:** `prob:2right-tringles`. **Status:** soal dan penyelesaian penulis; bukan latihan ke-17.



pic-276: gambar contoh sumber, Anton Petrunin.

Soal sumber. Misalkan $\triangle OPV$ dan $\triangle OQW$ merupakan segitiga siku-siku sama kaki sedemikian sehingga $\measuredangle VPO = \measuredangle OQW = \pi/2$, dan M titik tengah $[VW]$. Jika P, Q, M berbeda, buktikan bahwa $\triangle PMQ$ juga siku-siku sama kaki.

Penyelesaian penulis (dipertahankan). Pilih koordinat kompleks dengan $O = 0$, dan nyatakan koordinat titik lain dengan v, w, p, q, m. Syarat awal memberi

$$v - p = ip, \qquad q - w = iq.$$

Karena $m = (v + w)/2$,

$$m = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q.$$

Perhitungan langsung menghasilkan

$$p - m = i(q - m).$$

Jadi $|p - m| = |q - m|$ dan $\arg((p - m)/(q - m)) = \pi/2$; dengan demikian $PM = QM$ dan $\measuredangle QMP = \pi/2$.

Catatan pemeriksaan orisinal. Persamaan terakhir sekaligus mengodekan rotasi seperempat putaran dan faktor skala satu. Hipotesis titik berbeda memastikan hasil bagi sudut terdefinisi.

18.6 Tiga persegi dan jumlah tiga sudut

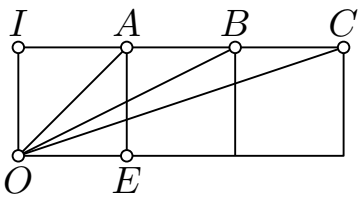
ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex006`. **Label sumber:** `ex:3-squares`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: koordinat kompleks, argumen hasil kali, dan orientasi gambar.

Ketergantungan: hasil bertanda mengikuti orientasi; konfigurasi cermin memberi tanda negatif.

Soal sumber. Tinjau tiga persegi dengan sisi-sisi bersama seperti pada gambar. Gunakan koordinat kompleks untuk menunjukkan

$$\measuredangle EOA + \measuredangle EOB + \measuredangle EOC = \pm\frac{\pi}{2}.$$



pic-278: tiga persegi (gambar sumber, Anton Petrunin).

Petunjuk penulis. Kita dapat memilih koordinat kompleks sedemikian sehingga titik-titik O, E, A, B, C memiliki koordinat masing-masing $0, 1, 1+i, 2+i, 3+i$. Tetapkan $\angle EOA = \alpha$, $\angle EOB = \beta$, dan $\angle EOC = \gamma$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &\equiv \arg(1+i)+\arg(2+i)+\arg(3+i)\\ &\equiv \arg[(1+i)(2+i)(3+i)]\\ &\equiv \arg(10i)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ketiga sudut ini lancip, lalu simpulkan bahwa $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$.

Petunjuk bertahap (orisinal). Normalisasikan satu sisi menjadi ruas dari 0 ke 1; baca tiga sudut sebagai argumen; kalikan ketiga koordinat; gunakan kelancipan untuk memilih wakil kongruensi.

Jawaban atau pemeriksaan. $(1+i)(2+i)(3+i)=10i$, sehingga jumlah argumen adalah $\pi/2$ pada orientasi gambar dan $-\pi/2$ pada bayangan cerminnya.

Solusi lengkap. Kesebangunan Euklides mengizinkan koordinat dalam petunjuk tanpa mengubah sudut. Karena OE berada pada sumbu real positif,

$$\alpha=\arg(1+i),\quad \beta=\arg(2+i),\quad \gamma=\arg(3+i).$$

Perkalian langsung memberi

$$(1+i)(2+i)=1+3i,\qquad (1+3i)(3+i)=10i.$$

Jadi $\alpha+\beta+\gamma\equiv\arg(10i)=\pi/2$. Ketiga sudut pada gambar berada di $(0,\pi/2)$, sehingga jumlahnya berada di $(0,3\pi/2)$; satu-satunya wakil kongruensi yang mungkin adalah $\pi/2$. Pencerminan mengonjugasi semua koordinat dan mengganti tanda semua argumen, sehingga bentuk berorientasi lengkapnya adalah $\pm\pi/2$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan argumen mula-mula hanya kongruensi. Informasi bahwa ketiga sudut lanciplah yang memilih nilai biasa $\pi/2$.

18.7 Enam rasio silang dan penutupan enam lingkaran

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex007`. **Label sumber:** `ex:6-circles`. **Tingkat:** menengah.

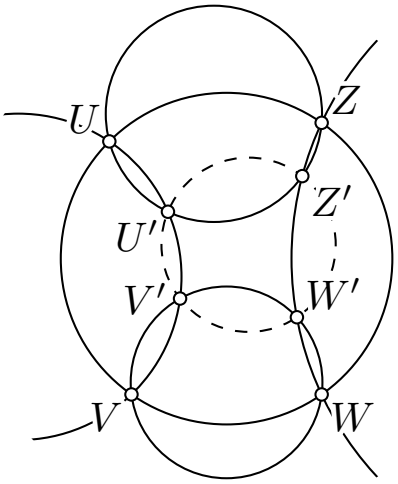
Prasyarat: definisi rasio silang kompleks dan kriteria rasio silang real untuk empat titik konsiklik.

Ketergantungan: semua titik yang muncul dalam satu rasio silang berbeda; versi dengan titik ideal dibaca melalui limit yang sama.

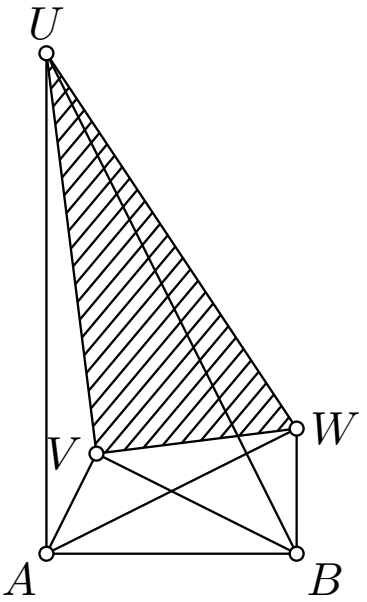
Soal sumber. Periksa identitas

$$(u,w;v,z)(u',w';v',z')=\frac{(v,w';v',w)(z,u';z',u)}{(u,v';u',v)(w,z';w',z)}.$$

Gunakan identitas ini untuk membuktikan bahwa jika $UVWZ$, $UVV'U'$, $VWW'V'$, $WZZ'W'$, dan $ZUU'Z'$ merupakan segiempat terinskripsi, maka $U'V'W'Z'$ juga terinskripsi.



pic-280 (gambar sumber, Anton Petrunin).



pic-282 (gambar sumber, Anton Petrunin).

Petunjuk penulis. Identitas tersebut dapat diperiksa dengan perhitungan langsung. Menurut `thm:inscribed-quadrangle-C`, lima dari enam rasio silang dalam identitas ini bersifat real. Akibatnya, rasio silang keenam juga harus bersifat real. Tinggal menerapkan teorema tersebut sekali lagi.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Kembangkan setiap rasio silang menjadi empat selisih.
2. Balik dua rasio silang pada penyebut ruas kanan dan cocokkan faktor, dengan memperhitungkan $x - y = -(y - x)$.
3. Tandai rasio untuk lima segiempat yang diketahui konsiklik.
4. Pecahkan identitas untuk rasio $(u', w'; v', z')$.

Jawaban atau pemeriksaan. Kelima rasio selain $(u', w'; v', z')$ real dan taknol; identitas memaksa rasio keenam real, yang merupakan kriteria konsiklik bagi $U'V'W'Z'$.

Solusi lengkap. Semua titik yang muncul dalam satu rasio silang diasumsikan berada dalam konfigurasi takdegenerat yang membuat setiap selisih pada penyebut taknol. Sebagai contoh,

$$(u, w; v, z) = \frac{(u - v)(w - z)}{(w - v)(u - z)}.$$

Kembangkan lima faktor lainnya dengan aturan yang sama. Setelah dua faktor penyebut ruas kanan dibalik, setiap selisih bertanda pada pembilang dan penyebut berpasangan; delapan perubahan urutan menghasilkan tanda total $(-1)^8 = 1$. Faktor yang tersisa tepat membentuk dua rasio silang di ruas kiri. Ini membuktikan identitas tanpa asumsi geometri.

Sekarang Teorema `thm:inscribed-quadrangle-C` membuat $(u, w; v, z)$ real dari $UVWZ$. Empat segiempat sisi membuat empat rasio di ruas kanan real. Semuanya taknol pada konfigurasi takdegenerat, sehingga

$$(u', w'; v', z') = \frac{(v, w'; v', w)(z, u'; z', u)}{(u, v'; u', v)(w, z'; w', z)(u, w; v, z)}$$

juga real. Penerapan ulang teorema yang sama menunjukkan bahwa $U'V'W'Z'$ terinskripsi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesimpulan tidak berasal dari "produk beberapa bilangan real" saja; perlu dipastikan rasio pada penyebut terdefinisi dan taknol. Degenerasi titik berimpit harus ditangani sebagai limit terpisah, bukan dibagi secara formal.

18.8 Empat segitiga sebangun dari satu kesamaan kompleks

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex008`. **Label sumber:** `ex:4-sim`. **Tingkat:** lanjut, dua subbutir.

Prasyarat: tanda sudut terarah, kriteria setengah bidang, SAS, dan interpretasi modulus/argumen suatu hasil bagi kompleks.

Ketergantungan: U, V, W berada pada sisi yang sama dari (AB); ketiga segitiga dalam hipotesis takdegenerat. Untuk kesimpulan sumber perlu pula $u - v \neq 0$ (dan karenanya $w - v \neq 0$), sehingga U, V, W tidak runtuh menjadi satu titik.

Soal sumber. Andaikan U, V, W berada pada sisi yang sama dari garis (AB) dan $\triangle UAB \sim \triangle BVA \sim \triangle ABW$. Dengan koordinat a, b, u, v, w, buktikan

(a) $\dfrac{u-a}{b-a} = \dfrac{b-v}{a-v} = \dfrac{a-b}{w-b} = \dfrac{u-v}{w-v}$;

(b) $\triangle UAB \sim \triangle BVA \sim \triangle ABW \sim \triangle UVW$.

Kualifikasi sumber. Hipotesis sumber sebagaimana tertulis masih mengizinkan keruntuhan sama sisi: ambil $a = 0$, $b = 1$, dan $u = v = w = e^{i\pi/3}$. Ketiga segitiga awal memenuhi kesebangunan dan terletak pada sisi yang sama dari (AB), tetapi $(u - v)/(w - v) = 0/0$ dan $\triangle UVW$ degenerat. Karena itu pembuktian dan klaim kesebangunan keempat di bawah ini memakai syarat tambahan $u - v \neq 0$, atau secara geometris bahwa U, V, W tidak berimpit.

Petunjuk penulis. Gunakan `thm:signs-of-triug` dan `cor:half-plane` untuk menunjukkan bahwa $\angle UAB$, $\angle BVA$, dan $\angle ABW$ memiliki tanda yang sama. Berdasarkan SAS, diperoleh

$$\frac{AU}{AB} = \frac{VB}{VA} = \frac{BA}{BW}, \qquad \measuredangle UAB = \measuredangle BVA = \measuredangle ABW.$$

Pernyataan terakhir berarti bahwa

$$\left|\frac{u-a}{b-a}\right| = \left|\frac{b-v}{a-v}\right| = \left|\frac{a-b}{w-b}\right|,$$

dan

$$\arg\frac{b-a}{u-a} = \arg\frac{a-v}{b-v} = \arg\frac{a-b}{w-b}.$$

Catatan koreksi sumber. Rumus ketiga dalam kutipan petunjuk di atas membalik hasil bagi yang menyatakan sudut di B. Sesuai definisi sudut terarah, $\measuredangle ABW = \arg((w-b)/(a-b))$, bukan $\arg((a-b)/(w-b))$. Dengan koreksi pembalikan ini, kesamaan modulus dan argumen menyiratkan dua kesamaan pertama dalam

$$\frac{b-a}{u-a} = \frac{a-v}{b-v} = \frac{w-b}{a-b} = \frac{w-v}{u-v};$$

kesamaan terakhir berlaku karena

$$\frac{(b-a)+(a-v)+(w-b)}{(u-a)+(b-v)+(a-b)} = \frac{w-v}{u-v}.$$

Untuk membuktikan *(b)*, tuliskan ulang `eq:4fractions` dengan menggunakan sudut dan jarak antartitik, lalu terapkan SAS.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Ubah tiga kesebangunan awal menjadi satu modulus dan satu argumen yang sama; syarat setengah bidang memilih tanda orientasi yang sama.
2. Bentuk kesamaan `eq:4fractions`; jumlahkan pembilang dan penyebut dari tiga wakil pertama untuk memperoleh wakil keempat.
3. Balik semua pecahan untuk memperoleh bentuk pada subbutir (a).
4. Baca modulus dan argumen wakil keempat sebagai SAS untuk $\triangle UVW$.

Jawaban atau pemeriksaan. Keempat hasil bagi pada (a) adalah satu bilangan kompleks yang sama; modulusnya memberi rasio sisi dan argumennya memberi sudut terarah yang sama.

Solusi lengkap. Karena ketiga titik puncak berada pada setengah bidang yang sama, kesebangunan awal mempunyai orientasi yang konsisten. Kesamaan sisi dan sudut dari SAS memberi

$$R := \frac{b-a}{u-a} = \frac{a-v}{b-v} = \frac{w-b}{a-b}.$$

Identitas linear berlaku tanpa pembagian tambahan:

$$(b-a)+(a-v)+(w-b) = R\big((u-a)+(b-v)+(a-b)\big),$$

atau

$$w-v = R(u-v).$$

Syarat tambahan $u-v \neq 0$ sekarang mengizinkan pembagian dan sekaligus memberi $w-v \neq 0$, sebab $R \neq 0$. Jadi $R = (w-v)/(u-v)$. Membalik keempat pecahan menghasilkan tepat kesamaan pada (a).

Modulus kesamaan terakhir memberi perbandingan sisi yang sama dengan tiga segitiga awal, sedangkan argumennya memberi sudut apit terarah yang sama. Kriteria SAS karena itu menambahkan $\triangle UVW$ ke rantai kesebangunan, dan (b) terbukti.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan modulus saja hanya memberi perbandingan panjang dan tidak menentukan orientasi. Hipotesis setengah bidang diperlukan untuk mencegah salah satu segitiga dibaca sebagai bayangan cermin; hipotesis itu sendiri tidak mencegah keruntuhan sama sisi, sehingga syarat $u-v \neq 0$ tetap diperlukan.

18.9 Pengamatan transformasi Möbius

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex009`. **Label sumber:** `ex:movie`. **Tingkat:** pengamatan terpandu.

Prasyarat: bidang kompleks diperluas dan transformasi elementer.

Ketergantungan: video eksternal bersifat opsional dan dapat berubah; alternatif statis di bawah ini membuat pemeriksaan dapat dilakukan luring.

Soal sumber. Tonton video berjudul “Möbius transformations revealed” karya Douglas Arnold dan Jonathan Rogness (tautan sumber).

Petunjuk penulis. *Tidak ada petunjuk penulis untuk latihan ini pada sumber.*

Petunjuk bertahap (orisinal; alternatif luring). Bagian ini merupakan *dukungan/pengganti penguasaan luring* yang ditulis khusus untuk edisi ini; bagian ini bukan petunjuk penulis.

1. Pada kisi bidang kompleks, lacak translasi $z \mapsto z + a$.
2. Lacak $z \mapsto \lambda z$ sebagai rotasi sebesar $\arg \lambda$ dan penskalaan sebesar $|\lambda|$.
3. Lacak $z \mapsto 1/z$ sebagai inversi lingkaran satuan disusul pencerminan pada sumbu real.
4. Untuk setiap langkah, catat citra $0, 1, \infty$, garis/lingkaran umum, sudut lokal, dan urutan empat titik melalui rasio silang.

Jawaban atau pemeriksaan. Catatan yang lengkap harus membedakan apa yang dipertahankan: transformasi Möbius mempertahankan lingkaran umum, sudut berorientasi lokal, dan rasio silang, tetapi bukan panjang Euklides pada umumnya.

Solusi lengkap atau rekaman penyelesaian. Latihan sumber adalah kegiatan menonton, bukan klaim pembuktian. Bukti penyelesaian yang dapat disimpan ialah tabel pengamatan berikut:

peta	0	1	∞
$z + a$	a	$1 + a$	∞
λz	0	λ	∞
$1/z$	∞	1	0

Translasi dan homoteti rotasional jelas memetakan garis/lingkaran ke garis/lingkaran. Peta $1/z$ adalah inversi disusul pencerminan, sehingga melakukan hal yang sama. Karena setiap transformasi linear fraksional tersusun dari tiga jenis ini, animasi video dapat diperiksa dengan membandingkan setiap bingkai terhadap komposisi elementernya. Pemeriksaan ini tidak menggantikan kredit video dan tidak menjadikan layanan eksternal sebagai prasyarat penguasaan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesan visual bahwa kisi “melentur” bukan bukti bahwa jarak dipertahankan. Yang stabil secara umum ialah struktur konformal, lingkaran umum, dan rasio silang.

18.10 Invers transformasi linear fraksional

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex010`. **Label sumber:** `ex:inverse-Mob`. **Tingkat:** dasar.

Prasyarat: transformasi elementer dan representasi matriks transformasi linear fraksional.

Ketergantungan: determinan $ad - bc \neq 0$; nilai ∞ dibaca secara proyektif.

Soal sumber. Buktikan bahwa jika f merupakan transformasi linear fraksional, maka inversnya f^{-1} juga demikian.

Petunjuk penulis. Buktikan bahwa invers setiap transformasi elementer juga elementer, lalu gunakan `prop:mob-comp`.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tuliskan $y = (az + b)/(cz + d)$; kumpulkan semua suku yang memuat z; periksa determinan matriks koefisien hasil; kemudian periksa titik kutub dan ∞.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$f^{-1}(y) = \frac{dy - b}{-cy + a}, \qquad \det \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Solusi lengkap. Dari $y(cz + d) = az + b$ diperoleh

$$(cy - a)z = b - dy, \qquad z = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Koefisien pembilang dan penyebut membentuk matriks $\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, yang berdeterminan $ad - bc \neq 0$. Maka rumus ini mendefinisikan suatu transformasi linear fraksional pada $\hat{\mathbb{C}}$. Substitusi langsung memberi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, termasuk pada titik yang dipetakan ke atau dari ∞ menurut konvensi proyektif.

Sebagai pemeriksaan yang mengikuti petunjuk penulis, invers dari $z \mapsto z + w$, $z \mapsto wz$, dan $z \mapsto 1/z$ berturut-turut ialah $z \mapsto z - w$, $z \mapsto z/w$, dan $z \mapsto 1/z$; semuanya elementer. Membalik urutan suatu komposisi mempertahankan kelas tersebut.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Membagi dengan $cy - a$ tidak menghilangkan titiknya; titik itu tepat dipetakan ke ∞ dalam bidang kompleks diperluas.

18.11 Transformasi Möbius yang ditentukan tiga titik

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex011`. **Label sumber:** `ex:3-point-Mob`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: bidang kompleks diperluas, invers transformasi Möbius, dan evaluasi di ∞.

Ketergantungan: z_0, z_1, z_∞ saling berbeda; rumus umum ditafsirkan dengan limit bila salah satunya ∞.

Soal sumber. Untuk nilai berbeda $z_0, z_1, z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$, konstruksikan transformasi linear fraksional f dengan $f(z_0) = 0$, $f(z_1) = 1$, dan $f(z_\infty) = \infty$. Buktikan bahwa transformasi itu tunggal.

Petunjuk penulis. Transformasi linear fraksional

$$f(z) = \frac{(z_1 - z_\infty)(z - z_0)}{(z_1 - z_0)(z - z_\infty)}$$

memenuhi syarat-syarat tersebut. Untuk menunjukkan ketunggalannya, andaikan terdapat transformasi lain g. Maka $h = g \circ f^{-1} = (az + b)/(cz + d)$. Karena $h(\infty) = \infty$, diperoleh $c = 0$; karena $h(0) = 0$, diperoleh $b = 0$; dan karena $h(1) = 1$, diperoleh $a/d = 1$. Jadi h identitas dan $g = f$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Buat faktor yang nol di z_0 dan faktor yang berkutub di z_∞.
2. Pilih konstanta agar nilai di z_1 sama dengan satu.
3. Untuk ketunggalan, komposisikan dua kandidat sehingga $0, 1, \infty$ semuanya tetap.

Jawaban atau pemeriksaan. Untuk ketiga titik hingga gunakan rumus petunjuk. Jika $z_\infty = \infty$, rumusnya $(z - z_0)/(z_1 - z_0)$; kasus lain diperoleh dengan limit yang dinyatakan di bawah.

Solusi lengkap. Jika ketiga nilai hingga, substitusi langsung dalam rumus petunjuk memberi $0, 1, \infty$, dan determinannya taknol karena ketiga titik berbeda. Bila satu nilai adalah ∞, limit rumus memberi

nilai ideal	$f(z)$
$z_\infty = \infty$	$\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$
$z_0 = \infty$	$\dfrac{z_1 - z_\infty}{z - z_\infty}$
$z_1 = \infty$	$\dfrac{z - z_0}{z - z_\infty}$.

Setiap baris memenuhi tiga syarat dengan konvensi $\hat{\mathbb{C}}$.

Untuk ketunggalan, andaikan g kandidat kedua. Transformasi $h = g \circ f^{-1}$ memperbaiki $0, 1, \infty$. Tuliskan $h(z) = (az + b)/(cz + d)$. Titik ∞ tetap memaksa $c = 0$, titik nol tetap memaksa $b = 0$, dan titik satu tetap memaksa $a = d$. Jadi $h(z) = z$, sehingga $g = f$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Rumus dengan simbol $\infty - \infty$ bukan aritmetika biasa; tiga kasus ideal harus dibaca sebagai limit atau melalui koordinat homogen.

18.12 Inversi sebagai konjugasi dan transformasi Möbius

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex012`. **Label sumber:** `ex:inversion-Mob`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: inversi pada lingkaran, konjugasi kompleks, komposisi transformasi inversif, dan determinan Möbius.

Ketergantungan: jari-jari $r > 0$; pusat lingkaran w hingga.

Soal sumber. Buktikan bahwa setiap inversi merupakan komposisi konjugasi kompleks dan suatu transformasi linear fraksional. Gunakan `ex:inversions-inversive` untuk menyimpulkan bahwa setiap transformasi inversif merupakan transformasi linear fraksional atau konjugat kompleks dari transformasi linear fraksional.

Petunjuk penulis. Misalkan Z' merupakan invers dari Z terhadap lingkaran berpusat W berjari-jari r, dengan koordinat z, z', w. Menurut definisi, $\arg(z - w) = \arg(z' - w)$ dan $|z - w||z' - w| = r^2$. Akibatnya, $(\bar{z}' - \bar{w})(z - w) = r^2$. Secara ekuivalen,

$$z' = \overline{\left(\frac{\bar{w}z + [r^2 - |w|^2]}{z - w}\right)}.$$

Petunjuk bertahap (orisinal). Isolasi $\bar{z}'$; kenali pecahan di dalam konjugasi sebagai peta Möbius; hitung determinannya; lalu kelompokkan komposisi inversi menurut paritas jumlah konjugasi.

Jawaban atau pemeriksaan. Jika $M(z) = (\bar{w}z + r^2 - |w|^2)/(z - w)$, maka inversi adalah $z \mapsto \overline{M(z)}$, dan $\det M = -r^2 \neq 0$.

Solusi lengkap. Persamaan dalam petunjuk penulis memberi

$$\bar{z}' = \bar{w} + \frac{r^2}{z - w} = \frac{\bar{w}z + r^2 - |w|^2}{z - w} =: M(z).$$

Matriks M ialah $\begin{smallmatrix} \bar{w} & r^2 - |w|^2 \\ 1 & -w \end{smallmatrix}$, dengan determinan $-|w|^2 - (r^2 - |w|^2) = -r^2 \neq 0$. Jadi M transformasi linear fraksional dan $z' = \overline{M(z)}$, tepat komposisi yang diminta.

Konjugasi menormalisasi kelas Möbius: $\overline{(az + b)/(cz + d)} = (\bar{a}\bar{z} + \bar{b})/(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})$. Karena transformasi inversif adalah komposisi inversi (Latihan `ex:inversions-inversive`), setiap pasangan konjugasi dapat digabungkan ke dalam transformasi Möbius. Jumlah konjugasi genap memberi transformasi Möbius; jumlah ganjil memberi konjugat kompleks dari satu transformasi Möbius.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Inversi lingkaran membalik orientasi, sedangkan transformasi Möbius holomorfik mempertahankannya. Konjugasi bukan hiasan aljabar; ia merekam perbedaan orientasi tersebut.

18.13 Invariansi rasio silang kompleks

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex013`. **Label sumber:** `ex:C-cross-ratio`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: transformasi elementer, komposisi Möbius, dan definisi rasio silang pada $\hat{\mathbb{C}}$.

Ketergantungan: empat nilai berbeda; kasus yang memuat 0 atau ∞ diperoleh melalui limit.

Soal sumber. Buktikan bahwa jika transformasi linear fraksional memetakan empat bilangan kompleks berbeda u, v, w, z ke u', v', w', z', maka

$$(u', v'; w', z') = (u, v; w, z).$$

Petunjuk penulis. Periksa pernyataan tersebut untuk setiap transformasi elementer. Kemudian terapkan `prop:mob-comp`.

Petunjuk bertahap (orisinal). Untuk translasi, selisih tidak berubah. Untuk homoteti rotasional, empat faktor λ saling meniadakan. Untuk $z \mapsto 1/z$, tulis setiap selisih sebagai $(y - x)/(xy)$ dan batalkan semua faktor.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga pembangkit Möbius mempertahankan rasio silang; invariansi bertahan di bawah komposisi.

Solusi lengkap. Untuk $T_a(\zeta) = \zeta + a$, setiap selisih $T_a(x) - T_a(y) = x - y$. Untuk $S_\lambda(\zeta) = \lambda\zeta$, dua faktor λ pada pembilang dan dua pada penyebut saling meniadakan. Untuk $I(\zeta) = 1/\zeta$,

$$\begin{aligned}(I(u), I(v); I(w), I(z)) &= \frac{(1/u - 1/w)(1/v - 1/z)}{(1/v - 1/w)(1/u - 1/z)} \\ &= \frac{(u-w)(v-z)}{(v-w)(u-z)} = (u, v; w, z),\end{aligned}$$

karena faktor $uvwz$ dan empat tanda saling meniadakan. Rumus yang memuat nol atau ∞ mengikuti dengan mengambil limit. Menurut Proposisi `prop:mob-comp`, setiap transformasi linear fraksional adalah komposisi transformasi elementer, sehingga invariansi berlaku umum.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Invariansi rasio silang adalah kesamaan kompleks, bukan hanya kesamaan nilai mutlak; baik besaran maupun argumennya dipertahankan.

18.14 Bentuk normal automorfisme cakram pada kasus kesamaan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex014`. **Label sumber:** `ex:schwarz-moebius`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: kasus kesamaan Teorema Schwarz–Pick, inversi terhadap lingkaran satuan, dan kesetaraan projektif matriks Möbius.

Ketergantungan: teorema Schwarz–Pick sendiri diterima sebagai teorema sumber; latihan hanya menurunkan bentuk koefisien peta kesamaan.

Soal sumber. Buktikan bahwa jika transformasi linear fraksional f muncul dalam kasus kesamaan Teorema Schwarz–Pick, maka

$$f(z) = \frac{vz + \bar{w}}{wz + \bar{v}}$$

untuk konstanta kompleks v, w dengan $|v| > |w|$.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa $f : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ mempertahankan lingkaran satuan $|z| = 1$. Gunakan `cor:invese-comp` dan `prop:mob-comp` untuk menunjukkan bahwa f berkomutasi dengan inversi $z \mapsto 1/\bar{z}$. Dengan kata lain,

$$1/\overline{f(z)} = f(1/\bar{z}),$$

atau, setelah koefisien dituliskan,

$$\frac{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}} = \frac{a/\bar{z} + b}{c/\bar{z} + d}$$

untuk setiap $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Identitas ini menghasilkan pernyataan yang diminta. Syarat $|w| < |v|$ mengikuti karena $f(0) \in \mathbb{D}$.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Tulis komutasi dengan $J(z) = 1/\bar{z}$ sebagai kesamaan dua pecahan linear dalam $t = \bar{z}$.
2. Gunakan bahwa dua matriks mewakili peta Möbius yang sama tepat hingga faktor skalar taknol.
3. Normalisasikan faktor skalar bermodulus satu agar koefisien diagonal dan luar menjadi pasangan konjugat.
4. Evaluasi di nol untuk memperoleh ketaksamaan ketat.

Jawaban atau pemeriksaan. Setelah satu penskalaan projektif, matriks f berbentuk $\left(\begin{smallmatrix} v & \bar{w} \\ w & \bar{v} \end{smallmatrix}\right)$, berdeterminan $|v|^2 - |w|^2 > 0$.

Solusi lengkap. Pada kasus kesamaan, hasil sumber menyatakan bahwa f adalah isometri-h Möbius cakram; khususnya ia automorfisme cakram dan mempertahankan lingkaran satuan. Inversi lingkaran $J(z) = 1/\bar{z}$ berkomutasi dengan peta tersebut. Untuk $t = \bar{z}$, identitas $Jf = fJ$ menjadi

$$\frac{\bar{c}t + \bar{d}}{\bar{a}t + \bar{b}} = \frac{bt + a}{dt + c}.$$

Dua matriks pecahan ini sebanding. Jadi untuk suatu $\lambda \neq 0$,

$$a = \lambda\bar{d}, \quad b = \lambda\bar{c}, \quad c = \lambda\bar{b}, \quad d = \lambda\bar{a}.$$

Mengonjugasi lalu mensubstitusi salah satu persamaan menunjukkan $|\lambda| = 1$. Pilih skalar projektif $\mu \neq 0$ dengan $\mu\lambda = \bar{\mu}$. Setelah semua koefisien dikalikan μ, kita memperoleh $a = \bar{d}$ dan $b = \bar{c}$. Tulis $a = v$ dan $c = w$; maka

$$f(z) = \frac{vz + \bar{w}}{wz + \bar{v}}.$$

Karena $f(0) = \bar{w}/\bar{v} \in \mathbb{D}$, $v \neq 0$ dan $|w|/|v| < 1$. Jadi $|v| > |w|$; sekaligus determinannya $|v|^2 - |w|^2$ memang taknol.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Koefisien Möbius hanya ditentukan hingga satu skalar taknol. Hubungan pasangan konjugat biasanya baru benar setelah normalisasi projektif tersebut.

18.15 Jarak cakram dan bentuk rasional Schwarz–Pick

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex015`. **Label sumber:** `ex:schwarz-tanh`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: Latihan `ex:cosh`, inversi lingkaran satuan, identitas hiperbolik, dan monotonisitas tanh.

Ketergantungan: $z, w \in \mathbb{D}$, sehingga penyebut taknol dan hasil bagi di ruas kanan kurang dari satu.

Soal sumber. Buktikan bahwa

$$\tanh\!\left(\frac{1}{2}d_h(z,w)\right) = \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|.$$

Simpulkan bahwa ketaksamaan Schwarz–Pick setara dengan

$$\left|\frac{z'-w'}{1-z'\bar{w}'}\right| \le \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|, \qquad z' = f(z), \quad w' = f(w).$$

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa invers dari titik-titik z dan w memiliki koordinat kompleks masing-masing $1/\bar{z}$ dan $1/\bar{w}$. Terapkan `ex:cosh`, lalu sederhanakan. Bagian kedua mengikuti karena fungsi $x \mapsto \tanh(\frac{1}{2}x)$ meningkat.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tetapkan $q = |(z-w)/(1-z\bar{w})|$; buktikan identitas $1 - q^2 = ((1-|z|^2)(1-|w|^2))/|1-z\bar{w}|^2$; ubah rumus jarak menjadi $\cosh d = (1+q^2)/(1-q^2)$; lalu gunakan rumus setengah sudut hiperbolik.

Jawaban atau pemeriksaan. $0 \le q < 1$ dan $\cosh d_h(z,w) = (1+q^2)/(1-q^2)$; karena itu $q = \tanh(d_h(z,w)/2)$.

Solusi lengkap. Perhitungan langsung memberi

$$|1 - z\bar{w}|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2) > 0.$$

Dengan membagi oleh $|1-z\bar{w}|^2$, diperoleh pula

$$1 - q^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2}.$$

Jadi $q < 1$. Substitusi titik invers $1/\bar{z}, 1/\bar{w}$ ke Latihan `ex:cosh`, atau penyederhanaan ekuivalennya, memberi

$$\cosh d_h(z,w) = 1 + \frac{2|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} = \frac{1+q^2}{1-q^2}.$$

Untuk $d \ge 0$, identitas $\tanh^2(d/2) = (\cosh d - 1)/(\cosh d + 1)$ memberi $\tanh(d/2) = q$. Ini membuktikan rumus pertama.

Terapkan fungsi meningkat $x \mapsto \tanh(x/2)$ pada $d_h(f(z),f(w)) \le d_h(z,w)$, lalu gunakan rumus yang baru dibuktikan pada kedua ruas. Hasilnya tepat ketaksamaan rasional dalam soal; langkah-langkah dapat dibalik, jadi kedua bentuk setara.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Konjugat muncul sebagai $z\bar{w}$, bukan zw. Tanpanya identitas $1-q^2 > 0$ dan invariansi automorfisme cakram tidak berlaku.

18.16 Lema Schwarz sebagai akibat Schwarz–Pick

ID stabil: `o004-c100-sol-ch18-ex016`. **Label sumber:** `ex:schwarz`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: Teorema Schwarz–Pick, rumus jarak radial pada cakram, dan bentuk normal Latihan `ex:schwarz-moebius`.

Ketergantungan: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfik dan $f(0) = 0$; bagian kekakuan memerlukan kesamaan pada suatu $z \neq 0$.

Soal sumber. Buktikan bahwa Lema Schwarz berikut mengikuti dari Teorema Schwarz–Pick: $|f(z)| \le |z|$ untuk setiap $z \in \mathbb{D}$; jika kesamaan berlaku pada suatu $z \neq 0$, maka $f(\zeta) = u\zeta$ untuk suatu $|u| = 1$ dan semua $\zeta \in \mathbb{D}$.

Petunjuk penulis. Terapkan Teorema Schwarz–Pick pada fungsi f sedemikian sehingga $f(0) = 0$, lalu terapkan `lem:0-h-dist`.

Petunjuk bertahap (orisinal). Ambil pasangan $(z, 0)$; ubah jarak dari nol menjadi fungsi meningkat dari modulus; pada kasus kesamaan gunakan bagian kekakuan Schwarz–Pick; akhirnya gunakan $f(0) = 0$ dalam bentuk normal automorfisme cakram.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$2\,\operatorname{artanh}|f(z)| = d_h(f(z),0) \le d_h(z,0) = 2\,\operatorname{artanh}|z|.$$

Solusi lengkap. Schwarz–Pick dan $f(0)=0$ memberi

$$d_h(f(z),0) = d_h(f(z),f(0)) \le d_h(z,0).$$

Menurut Lema `lem:O-h-dist`, $d_h(\zeta,0) = \ln((1+|\zeta|)/(1-|\zeta|)) = 2\operatorname{artanh}|\zeta|$, fungsi meningkat ketat dari $|\zeta| \in [0,1)$. Maka $|f(z)| \le |z|$.

Jika kesamaan berlaku untuk suatu $z \neq 0$, jarak pasangan berbeda $(z,0)$ juga sama. Bagian kekakuan Teorema Schwarz–Pick menyatakan bahwa f adalah isometri Möbius cakram. Dari bentuk normal

$$f(\zeta) = \frac{v\zeta + \bar{w}}{w\zeta + \bar{v}}$$

dan $f(0)=0$, diperoleh $w=0$. Jadi $f(\zeta) = (v/\bar{v})\zeta = u\zeta$ dengan $|u|=1$, untuk semua $\zeta \in \mathbb{D}$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan pada $z=0$ selalu terjadi dan tidak memicu kekakuan; teorema memerlukan satu pasangan berbeda, sehingga syarat $z \neq 0$ penting.

Uji penguasaan Bab 18

1. **(2 poin).** Buktikan sifat nilai mutlak hasil kali dan gunakan identitas tiga suku untuk memperoleh ketaksamaan Ptolemy dalam koordinat $0, u, v, w$.
2. **(2 poin).** Turunkan jumlah sudut segitiga dari argumen dan buktikan kesebangunan $\triangle OEV \sim \triangle OWZ$ ketika $z = vw$.
3. **(2 poin).** Buktikan ekuivalensi antara rasio silang real dan kriteria sudut segiempat terinskripsi, termasuk peran nilai real negatif.
4. **(2 poin).** Selesaikan konfigurasi tiga persegi dan jelaskan bagaimana persamaan $p-m = i(q-m)$ pada contoh sumber mengodekan segitiga siku-siku sama kaki.
5. **(2 poin).** Verifikasi identitas enam rasio silang dan deduksi penutupan segiempat $U'V'W'Z'$.
6. **(2 poin).** Identifikasi pembalikan rasio dalam petunjuk `ex:4-sim`, nyatakan syarat nondegenerasi yang hilang, lalu turunkan empat pecahan kompleks dan gunakan modulus serta argumennya untuk menambahkan $\triangle UVW$ ke rantai kesebangunan.
7. **(2 poin).** Berikan audit luring tiga transformasi elementer, turunkan rumus invers Möbius, dan konstruksikan peta unik yang mengirim tiga titik ke $0, 1, \infty$.
8. **(2 poin).** Nyatakan inversi lingkaran sebagai konjugasi setelah peta Möbius dan buktikan invariansi rasio silang terhadap ketiga pembangkit elementer.
9. **(2 poin).** Turunkan bentuk matriks pasangan konjugat untuk automorfisme cakram dan buktikan rumus $\tanh(d_h/2)$ dalam koordinat kompleks.
10. **(2 poin).** Deduksikan kedua bagian Lema Schwarz dari Schwarz–Pick, termasuk alasan mengapa kesamaan pada titik taknol memaksa suatu rotasi.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah bagian berlabel berikut:

M1. 18.1 dan 18.2.

M2. 18.3 dan 18.4.

M3. 18.5.

M4. 18.6 dan 18.5.

M5. 18.7.

M6. 18.8.

M7. 18.9, 18.10, dan 18.11.

M8. 18.12 dan 18.13.

M9. 18.14 dan 18.15.

M10. 18.16.

M1 (2 poin). Satu poin untuk konjugasi hasil kali dan pengambilan akar taknegatif; satu poin untuk penyusunan ulang identitas, ketaksamaan segitiga, dan pemetaan keenam panjang Ptolemy.

M2 (2 poin). Satu poin untuk produk tiga hasil bagi yang bernilai -1; satu poin untuk sudut $\arg v$, rasio sisi $|v|$, dan aplikasi SAS yang benar.

M3 (2 poin). Satu poin untuk memisahkan argumen rasio silang menjadi dua sudut; satu poin untuk syarat $2\arg R \equiv 0$, termasuk $\arg R \equiv \pi$, dan kriteria konsiklik.

M4 (2 poin). Satu poin untuk koordinat $0, 1, 1+i, 2+i, 3+i$, produk $10i$, dan pemilihan wakil sudut; satu poin untuk menafsirkan modulus dan argumen dari $p - m = i(q - m)$.

M5 (2 poin). Satu poin untuk ekspansi dan pembatalan enam rasio silang; satu poin untuk mengidentifikasi lima rasio real, memastikan penyebut taknol, dan menerapkan kriteria konsiklik pada rasio keenam.

M6 (2 poin). Satu poin untuk mengoreksi rasio sudut ketiga, menyatakan $u-v \neq 0$, dan membentuk tiga pecahan awal; satu poin untuk identitas $w - v = R(u - v)$, pembalikan pecahan, serta pembacaan modulus/argumen sebagai SAS bagi $\triangle UVW$.

M7 (2 poin). Satu poin untuk tabel citra $0, 1, \infty$ dan tiga interpretasi geometri; satu poin untuk rumus matriks invers serta konstruksi/ketunggalan tiga titik, termasuk satu kasus ∞.

M8 (2 poin). Satu poin untuk rumus inversi, determinan $-r^2$, dan argumen paritas konjugasi; satu poin untuk pemeriksaan rasio silang pada translasi, penskalaan, dan $1/z$, termasuk limit.

M9 (2 poin). Satu poin untuk komutasi dengan inversi lingkaran, normalisasi projektif, dan $|v| > |w|$; satu poin untuk identitas $1 - q^2$, rumus $\cosh d$, dan monotonisitas $\tanh(d/2)$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk pasangan $(z, 0)$, rumus jarak radial, dan $|f(z)| \leq |z|$; satu poin untuk kasus kesamaan, $w = 0$ dalam bentuk normal, dan $f(\zeta) = u\zeta$ dengan $|u| = 1$.

Bab 19

Konstruksi geometri

Solusi, dukungan bertahap, dan uji penguasaan

> Soal dan petunjuk penulis berasal dari Bab 19, “Konstruksi geometri”, dalam *Bidang Euklides dan Kerabatnya*. Sensus latihan memuat sembilan latihan berlabel dan sembilan blok petunjuk penulis; soal berlabel `prob:center-inversor+circumtool` sudah diselesaikan oleh penulis di dalam sumber dan direkam terpisah. Semua petunjuk bertahap, jawaban, penyelesaian lengkap, metadata belajar, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan tambahan orisinal berlisensi CC BY-SA 4.0. Atribusi ini tidak menyiratkan dukungan penulis sumber. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

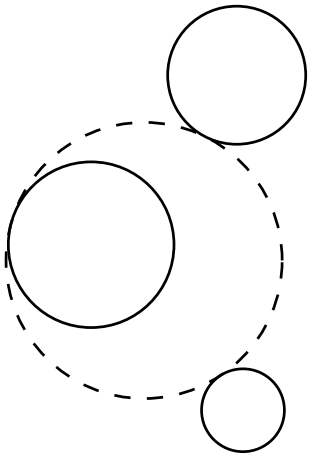
Catatan integritas dan ketelitian. Urutan latihan, delapan subbutir, label, rumus, sembilan petunjuk, satu penyelesaian penulis, dan enam gambar sumber dipertahankan. Empat komponen bertanda (a)–(d) pada `ex:comparison` tidak mempunyai label LaTeX tersendiri di sumber; metadata memberi ID turunan tanpa mengubah teks sumber. Sumber sendiri menyatakan bahwa beberapa bukti konstruksi mustahil memerlukan teori medan yang berada di luar cakupannya. Di sini setiap penggunaan hasil sumber disebutkan, dan kuantifikasi titik bebas serta ketakterdegenerasian dibuat eksplisit ketika diperlukan.

Dua soal klasik bernama: status sensus

Sebelum urutan latihan berlabel, sumber menampilkan dua kotak teorema bernama:

> **Soal Brahmagupta.** Konstruksikan suatu segiempat terinskripsi dengan panjang sisi-sisi yang diberikan.
>
> **Soal Apollonius.** Konstruksikan suatu lingkaran yang menyinggung tiga lingkaran yang diberikan.

Keduanya tidak mempunyai label sumber, tidak mempunyai blok petunjuk Bab 19, dan diperkenalkan sebagai soal klasik yang penyelesaiannya tidak sederhana; sumber merujuk pembaca ke literatur untuk beberapa penyelesaian Apollonius. Karena itu keduanya direkam sebagai konteks bernama, bukan diam-diam dihitung sebagai latihan terselesaikan dan bukan pula dihilangkan dari inventaris bab. Komponen ini tidak mengklaim memberi penyelesaian umum bagi keduanya.



pic-284: gambar sumber pada konteks Soal Apollonius (Anton Petrunin; tidak diubah).

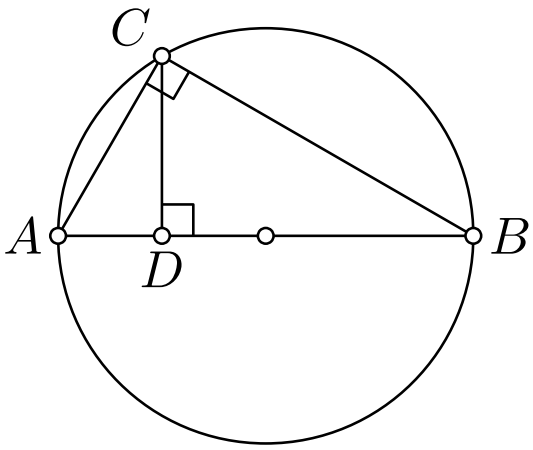
19.1 Kalkulator panjang dengan penggaris dan jangka

ID stabil: o004-c100-sol-ch19-ex001. **Label sumber:** ex:a2/b. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: kesebangunan segitiga siku-siku dan konstruksi garis sejajar.

Ketergantungan: $a, b > 0$; khusus untuk a^2/b, syarat $b > 0$ memastikan pembagian terdefinisi.

Soal sumber. Jika diberikan dua ruas garis dengan panjang a dan b, berikan konstruksi dengan penggaris dan jangka untuk ruas-ruas yang panjangnya $\frac{a^2}{b}$ dan $\sqrt{a \cdot b}$.



pic-286: kalkulator penggaris dan jangka pada sumber (Anton Petrunin; tidak diubah).

Petunjuk penulis. Untuk mengonstruksi $\sqrt{a \cdot b}$: (1) konstruksikan titik-titik A, B, dan $D \in [AB]$ sedemikian sehingga $AD = a$ dan $BD = b$; (2) konstruksikan lingkaran Γ dengan diameter $[AB]$; (3) gambarlah garis ℓ yang melalui D dan tegak lurus terhadap (AB); (4) misalkan C merupakan suatu titik perpotongan Γ dan ℓ. Maka $DC = \sqrt{a \cdot b}$.

Konstruksi $\frac{a^2}{b}$ serupa.

Petunjuk bertahap (orisinal).

1. Untuk akar, gunakan teorema tinggi pada segitiga siku-siku ACB: $CD^2 = AD \cdot DB$.

2. Untuk hasil bagi, buat dua sinar dari satu titik O, lalu gunakan satu pasangan garis sejajar untuk mewujudkan perbandingan a/b.

3. Kalikan perbandingan itu dengan ruas kedua yang panjangnya a.

Jawaban atau pemeriksaan. Konstruksi pertama memenuhi $CD^2 = ab$ dan $CD \geq 0$. Pada konstruksi kedua, kesebangunan memberi $OW/a = a/b$, sehingga $OW = a^2/b$.

Solusi lengkap. Lakukan konstruksi akar tepat seperti petunjuk penulis. Teorema Thales memberi $\angle ACB = 90^\circ$. Karena $CD \perp AB$, segitiga ACD dan CBD sebangun; teorema tinggi memberi

$$CD^2 = AD \cdot DB = ab.$$

Panjang CD taknegatif, jadi $CD = \sqrt{ab}$.

Untuk a^2/b, pilih dua sinar berbeda dari O. Pada sinar pertama konstruksikan X, Y dengan $OX = b$ dan $OY = a$; pada sinar kedua konstruksikan Z dengan $OZ = a$. Gambar XZ, lalu melalui Y konstruksikan garis sejajar XZ yang memotong sinar kedua di W. Kesebangunan $\triangle OYW \sim \triangle OXZ$ memberi

$$\frac{OW}{OZ} = \frac{OY}{OX} = \frac{a}{b}.$$

Karena $OZ = a$, diperoleh $OW = a^2/b$. Semua langkah–menyalin panjang, membuat lingkaran, garis tegak lurus, dan garis sejajar–merupakan konstruksi penggaris dan jangka standar.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan menukar $AD \cdot DB$ dengan $AB \cdot DB$, dan jangan membagi dengan b tanpa menyatakan bahwa panjang ruas tersebut positif.

19.2 Diagonal dan konstruksi segilima beraturan

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex002`. **Label sumber:** `ex:5-gon`. **Subbutir sumber:** `ex:5-gon:a`, `ex:5-gon:b`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber.

(a) Buktikan bahwa panjang diagonal suatu segilima beraturan adalah $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kali panjang sisinya.

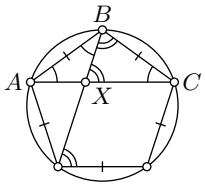
(b) Berdasarkan (a), uraikan konstruksi dengan penggaris dan jangka untuk membuat suatu segilima beraturan.

Petunjuk penulis. `ex:5-gon`, *(`ex:5-gon:a`)*. Perhatikan gambar; buktikan bahwa sudut-sudut yang diberi tanda sama memiliki ukuran yang sama.

Simpulkan bahwa $XC = BC$ dan $\triangle ABC \sim \triangle AXB$. Oleh karena itu,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AB} = \frac{AC - AB}{AB} = \frac{AC}{AB} - 1.$$

Tinggal menentukan $\frac{AC}{AB}$.



(ex: 5-gon: b). Pilih dua titik P dan Q, lalu gunakan kalkulator penggaris dan jangka untuk mengonstruksi dua titik V dan W sedemikian sehingga $VW = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot PQ$. Kemudian konstruksikan suatu segilima dengan panjang sisi PQ dan panjang diagonal VW.

Petunjuk bertahap (orisinal). Untuk (a), hitung sudut sebagai setengah busur lingkaran luar dan tetapkan $x = AC/AB > 0$. Untuk (b), konstruksikan $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}s$, lalu bangun tiga segitiga sama kaki yang berbagi diagonal sepanjang d.

Jawaban atau pemeriksaan. Nilai positif persamaan $1/x = x - 1$ adalah $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Konstruksi akhir memiliki kelima sisi s dan kelima sudut dalam $108°$.

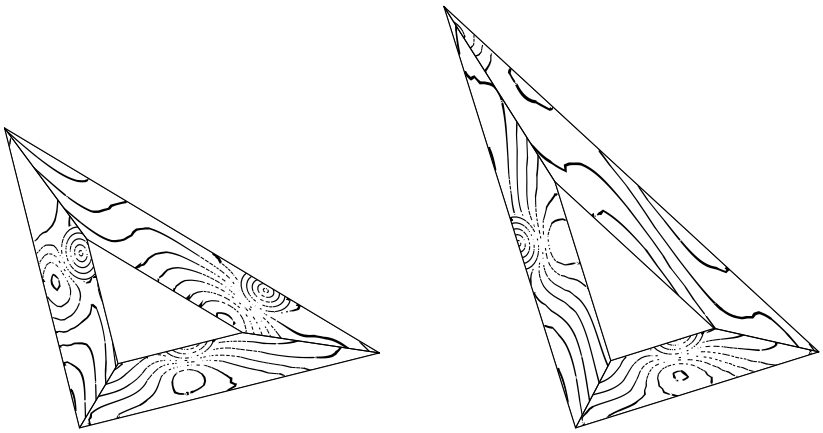
Solusi lengkap. Misalkan $ABCDE$ segilima beraturan dengan urutan seperti pada gambar dan $X = AC \cap BE$. Setiap sisi membentang busur $72°$. Maka $\angle BAC = \angle BCA = 36°$, $\angle ABX = \angle ABE = 36°$, dan $\angle XBC = 72°$. Jadi $\triangle BXC$ mempunyai sudut $72°, 36°, 72°$, sehingga $XC = BC = AB$. Selain itu $\triangle ABC \sim \triangle AXB$, dengan korespondensi $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow X$, dan $C \leftrightarrow B$. Karena $AX = AC - XC = AC - AB$,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AB} = \frac{AC - AB}{AB}.$$

Untuk $x = AC/AB > 1$, ini menjadi $1/x = x - 1$, atau $x^2 - x - 1 = 0$. Akar positifnya $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sekarang diberikan sisi $s = PQ$. Latihan sebelumnya memungkinkan kita mengonstruksi $\sqrt{5}$, lalu panjang $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}s$. Salin s sebagai AB. Lingkaran berpusat A dan B, keduanya berjari-jari d, berpotongan di D. Pilih C sebagai perpotongan lingkaran berpusat B, D berjari-jari s pada sisi garis BD yang tidak memuat A. Pilih E secara serupa dari lingkaran berpusat D, A berjari-jari s, pada sisi AD yang tidak memuat B. Maka $AB = BC = CD = DE = EA = s$. Segitiga ABD mempunyai sisi d, d, s, sehingga sudut alasnya $72°$ dan sudut puncaknya $36°$; segitiga BCD dan DEA mempunyai sisi s, s, d, sehingga sudut puncaknya $108°$ dan sudut alasnya $36°$. Penjumlahan sudut di A, B, D memberi $108°$, sementara sudut di C, E sudah $108°$. Jadi $ABCDE$ adalah segilima beraturan yang diminta.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan lima sisi saja belum membuktikan suatu segilima beraturan; pilihan setengah bidang dan pemeriksaan kelima sudut menutup kemungkinan bentuk silang.



pic-288 dan pic-289: gambar sumber untuk konstruksi penggaris segitiga (Anton Petrunin; tidak diubah).

19.3 Membagi tiga ruas dengan penggaris segitiga

ID stabil: o004-c100-sol-ch19-ex003. **Label sumber:** ex:trisect-set-square. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Bagilah suatu ruas yang diberikan menjadi tiga bagian sama panjang dengan penggaris segitiga.

Petunjuk penulis. Perhatikan bahwa dengan penggaris segitiga, kita dapat mengonstruksi garis yang melalui titik yang diberikan dan sejajar dengan garis yang diberikan. Tinggal memodifikasi konstruksi dalam ex:midpoint-affine.

Petunjuk bertahap (orisinal). Buat garis sejajar sebagai tegak lurus kedua; gunakan A, B sebagai titik berkoordinat $0, 1$; lakukan penjumlahan afin untuk membentuk 3, lalu konstruksi hasil bagi afin untuk memperoleh $1/3$ dan $2/3$.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik hasil $M, N \in [AB]$ memenuhi $AM = MN = NB = AB/3$.

Solusi lengkap. Melalui titik P, penggaris segitiga membuat garis $m \perp \ell$, lalu garis $n \perp m$; jadi $n \parallel \ell$. Dengan demikian alat ini dapat melakukan setiap langkah penggaris dan alat sejajar.

Ambil kerangka afin dengan A sebagai koordinat 0, B sebagai koordinat 1, dan satu titik bebas di luar garis AB sebagai arah bantu. Konstruksi jajar genjang pada solusi ex:midpoint-affine memberi penjumlahan koordinat hanya dengan garis sejajar. Dua kali penjumlahan mengonstruksi titik berkoordinat $3 = 1 + 1 + 1$. Konstruksi hasil bagi pada ex:R-hom kemudian menghasilkan titik M berkoordinat $1/3$; satu penjumlahan lagi menghasilkan N berkoordinat $2/3$. Semua garis bantu hanya memakai garis melalui dua titik dan garis sejajar, yang baru saja kita simulasikan dengan penggaris segitiga. Karena koordinat afin pada AB mengukur perbandingan terarah, $AM = MN = NB = AB/3$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Penggaris segitiga tidak diasumsikan bertanda skala. Kesamaan tiga bagian diperoleh dari konstruksi afin dan kesejajaran, bukan dari pengukuran panjang.

19.4 Kemustahilan segitiga sama sisi dengan penggaris segitiga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex004`. **Label sumber:** `ex:equilateraltriangle`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Buktikan bahwa mustahil mengonstruksi segitiga sama sisi dengan alas yang diberikan hanya dengan menggunakan penggaris segitiga.

Petunjuk penulis. Pilih sistem koordinat sedemikian sehingga titik-titik sudut yang diberikan adalah $(0,0)$ dan $(1,0)$. Buktikan bahwa titik sudut yang tersisa adalah $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Perhatikan bahwa titik itu irasional; terapkan `thm:set-square-constructible-numbers`.[1]

Kualifikasi model konstruksi. Pemilihan titik bebas tidak boleh dipakai sebagai tebakan kebetulan atas titik irasional sasaran. Konstruksi yang sah harus berhasil untuk setiap pilihan bebas yang memenuhi syarat insidensi. Dalam konstruksi penggaris segitiga yang relevan di sini, pilihan bebas dilakukan pada bidang atau pada garis yang berkoordinat rasional. Titik rasional rapat pada masing-masing himpunan itu, sehingga pada setiap langkah kita dapat memilih titik rasional yang menghindari berhingga banyak insidensi terlarang; Teorema `thm:set-square-constructible-numbers` lalu tetap berlaku pada jalur pilihan itu.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tuliskan dua persamaan jarak dari titik $X = (x, y)$ ke kedua ujung alas; kurangkan untuk memperoleh $x = 1/2$, lalu tentukan $y^2 = 3/4$.

Jawaban atau pemeriksaan. Satu-satunya kandidat ialah $X = (1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, yang bukan titik rasional.

Solusi lengkap. Ambil alas $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Jika $X = (x, y)$ membentuk segitiga sama sisi, maka

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Selisih kedua persamaan memberi $2x - 1 = 0$, jadi $x = 1/2$; kemudian $y^2 = 3/4$, sehingga $y = \pm\sqrt{3}/2$. Petunjuk penulis membuktikan $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, maka X irasional.

Andaikan suatu konstruksi penggaris segitiga yang sah selalu menghasilkan segitiga tersebut. Pilih semua titik bebas rasional dan generik seperti pada kualifikasi di atas. Karena konfigurasi awal rasional, Teorema `thm:set-square-constructible-numbers` memaksa setiap titik hasil berkoordinat rasional. Titik X yang wajib dihasilkan justru irasional, kontradiksi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Mengatakan "pilih saja titik X" bukan konstruksi: hasil tidak boleh bergantung pada kebetulan dalam pilihan bebas.

[1] Kita boleh menggunakan fakta bahwa $\sqrt{3}$ irasional tanpa membuktikannya. Namun, mari kita jelaskan mengapa fakta itu benar. Andaikan sebaliknya; yaitu, $\frac{m}{n} = \sqrt{3}$ untuk bilangan bulat m dan n. Kita dapat mengandaikan bahwa m dan n tidak memiliki faktor prima bersama; secara khusus, jika m habis dibagi 3, maka n tidak. Perhatikan bahwa $m^2 = 3 \cdot n^2$. Akibatnya, m habis dibagi 3; artinya, $m = 3 \cdot k$ untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya, $3 \cdot k^2 = n^2$. Oleh karena itu, n habis dibagi 3 — suatu kontradiksi.

19.5 Kemustahilan membagi dua sudut dengan penggaris segitiga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex005`. **Label sumber:** `ex:set-square-bisect`. **Tingkat:** menengah.

Soal sumber. Buktikan bahwa mustahil membagi dua sama besar suatu sudut yang diberikan hanya dengan penggaris segitiga.

Petunjuk penulis. Andaikan garis bagi $\angle AOB$ dapat dikonstruksi, dengan $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$, dan $B = (1, 1)$. Misalkan D merupakan titik perpotongan garis bagi tersebut dengan garis (AB). Gunakan `lem:bisect-ratio` untuk menunjukkan bahwa D irasional. Terapkan `thm:set-square-constructible-numbers` dan peroleh suatu kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tulis $D = (1, t)$. Teorema garis bagi memberi $t/(1 - t) = OA/OB = 1/\sqrt{2}$; selesaikan t.

Jawaban atau pemeriksaan. $D = (1, \sqrt{2} - 1)$, sehingga salah satu koordinatnya irasional.

Solusi lengkap. Untuk konfigurasi rasional pada petunjuk, $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$, dan $D = (1, t)$ dengan $0 < t < 1$. Teorema garis bagi memberi

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{OB}, \qquad \frac{t}{1 - t} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Maka $t = 1/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, yang irasional. Jika garis bagi dapat dikonstruksi, perpotongannya dengan garis AB juga dapat dikonstruksi dengan fungsi penggaris dari alat tersebut. Pilih semua titik bebas rasional dan generik. Teorema `thm:set-square-constructible-numbers` menyatakan bahwa D harus rasional, kontradiksi. Kuantifikasi pilihan bebas sama seperti pada solusi sebelumnya.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Koordinat $B = (1, 1)$ membuat sudut $AOB = 45^\circ$, bukan sudut siku-siku; garis baginya memiliki kemiringan $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$.

19.6 Kemustahilan persegi dengan penggaris segitiga 30 derajat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex006`. **Label sumber:** `ex:90-60-30`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Tinjau alat lain — penggaris segitiga 30° yang dapat menghasilkan suatu garis melalui titik yang diberikan dan membentuk sudut $\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{6}$ dengan garis yang diberikan serta dapat digunakan sebagai penggaris. Buktikan bahwa mustahil mengonstruksi suatu persegi dengan penggaris segitiga 30°.

Petunjuk penulis. Andaikan setiap titik awal memiliki koordinat $(a, b \cdot \sqrt{3})$ untuk nilai rasional a dan b. Buktikan dan gunakan fakta bahwa setiap titik yang dapat dikonstruksi dengan penggaris segitiga 30° memiliki koordinat berjenis sama.

Petunjuk bertahap (orisinal). Klasifikasikan garis nonvertikal sebagai $y = \sqrt{3}(rx + s)$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Periksa bahwa operasi sudut alat menjaga bentuk kemiringan $\sqrt{3}r$, lalu periksa perpotongan dua garis.

Jawaban atau pemeriksaan. Dari alas $(0,0), (1,0)$, setiap titik hasil berbentuk $(a, b\sqrt{3})$ dengan $a, b \in \mathbb{Q}$, sedangkan titik sudut persegi yang tersisa harus mempunyai koordinat $y = \pm 1$.

Solusi lengkap. Tetapkan

$$S = \{(a, b\sqrt{3}) : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Garis melalui dua titik S bersifat vertikal $x = a$, $a \in \mathbb{Q}$, atau mempunyai kemiringan $m = \sqrt{3}r$, $r \in \mathbb{Q}$, dan persamaan $y = \sqrt{3}(rx + s)$ dengan $s \in \mathbb{Q}$.

Jika garis bermiring $m = \sqrt{3}r$ diputar melalui sudut dengan $t = \tan\theta$, kemiringan barunya ialah $m' = (m + t)/(1 - mt)$, dengan kasus penyebut nol menghasilkan garis vertikal. Untuk $\theta = \pm\pi/6$,

$$m' = \sqrt{3}\,\frac{r \pm 1/3}{1 \mp r};$$

untuk $\theta = \pm\pi/3$,

$$m' = \sqrt{3}\,\frac{r \pm 1}{1 \mp 3r};$$

dan untuk garis tegak lurus, $m' = -1/m = \sqrt{3}(-1/(3r))$, selain pertukaran horizontal–vertikal. Jika garis awal vertikal, rotasi sebesar $\pm\pi/6$ memberi kemiringan $\mp\sqrt{3}$, sedangkan rotasi sebesar $\pm\pi/3$ memberi kemiringan $\mp 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}(\mp 1/3)$; jadi kasus vertikal juga tertutup. Dengan demikian setiap garis baru tetap dalam kelas tersebut. Perpotongan dua garis nonsejajar $y = \sqrt{3}(r_i x + s_i)$ mempunyai $x \in \mathbb{Q}$ dan $y \in \sqrt{3}\mathbb{Q}$; perpotongan dengan garis vertikal juga demikian. Induksi pada langkah konstruksi membuktikan bahwa semua titik hasil berada di S.

Berikan alas persegi $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Dua titik sudut lainnya harus $(0, \pm 1)$ dan $(1, \pm 1)$. Akan tetapi $1 = b\sqrt{3}$ akan memaksa $b = 1/\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, jadi titik-titik itu tidak berada di S. Seperti sebelumnya, bila konstruksi menggunakan titik bebas, pilih semuanya dari himpunan rapat S dan dalam posisi generik; konstruksi yang sah harus tetap berhasil pada pilihan tersebut. Kontradiksi membuktikan kemustahilan.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Medan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ terlalu besar untuk invariant ini. Bentuk terpisah $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \sqrt{3}\mathbb{Q}$-lah yang mengecualikan titik sudut persegi.

19.7 Memverifikasi segitiga sama sisi dan garis bagi

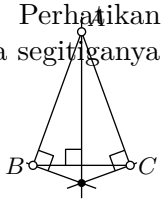
ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex007`. **Label sumber:** `ex:equilateraltriangle-verify`. **Subbutir sumber:** `ex:verify:triangle`, `ex:verify:bisector`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Uraikan konstruksi dengan penggaris segitiga yang memverifikasi bahwa

(a) suatu segitiga merupakan segitiga sama sisi;

(b) suatu garis membagi dua sama besar suatu sudut.

Petunjuk penulis. `ex:equilateraltriangle-verify`, *(ex: verify: triangle)*. Perhatikan bahwa ketiga garis tegak lurus pada gambar bertemu di satu titik jika dan hanya jika segitiganya sama kaki.



Gunakan pengamatan ini beberapa kali untuk memverifikasi bahwa segitiga yang diberikan sama sisi.

(ex: verify: bisector). Andaikan suatu garis ℓ melalui titik sudut dari sudut yang diberikan. Pilih suatu titik $P \in \ell$. Andaikan X dan Y merupakan kaki-kaki tegak lurus dari P pada sisi-sisi sudut tersebut. Buktikan dan gunakan fakta bahwa $(XY) \perp \ell$ jika dan hanya jika ℓ membagi dua sama besar sudut tersebut.

Kualifikasi sumber. Ambil dua sinar sisi berbeda dan tidak berlawanan yang menentukan sudut takdegenerat berukuran $0 < \alpha < \pi$. Untuk klaim garis bagi dalam, calonnya harus berupa sinar ℓ berpangkal di O dan terletak pada interior terbuka sudut itu; pilih $P \in \ell$ dengan $P \neq O$. Jika ℓ dibiarkan sebagai garis sembarang melalui titik sudut, syarat $XY \perp \ell$ mengarakterisasi dua garis bagi sudut: garis bagi dalam dan garis bagi luar. Karena itu uji garis bagi dalam harus lebih dahulu memverifikasi syarat interior tersebut; teks petunjuk penulis di atas sengaja tidak diubah.

Petunjuk bertahap (orisinal). Untuk (a), buktikan dulu uji kesamaan dua sisi dalam koordinat, kemudian terapkan secara siklik. Untuk (b), proyeksikan vektor P pada dua arah sisi dan hitung komponen XY sepanjang ℓ.

Jawaban atau pemeriksaan. Konkurensi tiga garis pada gambar setara dengan $AB = AC$. Pada bagian (b), $XY \perp \ell$ setara dengan $|u \cdot a| = |u \cdot b|$, yaitu garis bagi dalam atau luar; syarat interior memilih garis bagi dalam.

Solusi lengkap. Untuk uji pada gambar, ambil $B = (0,0)$, $C = (1,0)$, dan $A = (u,v)$, $v \neq 0$. Garis melalui A tegak lurus BC ialah $x = u$. Garis melalui B tegak lurus BA mempunyai arah $(v,-u)$ dan memotong $x = u$ pada tinggi $-u^2/v$. Garis melalui C tegak lurus CA mempunyai arah $(v,1-u)$ dan memotong $x = u$ pada tinggi $-(u-1)^2/v$. Ketiganya konkuren tepat ketika $u^2 = (u-1)^2$, yaitu $u = 1/2$, yang ekuivalen dengan $AB^2 = u^2 + v^2 = AC^2 = (u-1)^2 + v^2$. Semua garis ini dapat dibuat dengan penggaris segitiga dan konkurensi dapat diverifikasi. Terapkan uji tersebut secara siklik untuk $AB = AC$ dan $AB = BC$; kedua kesamaan memaksa $AB = BC = CA$.

Untuk (b), letakkan titik sudut di $O = 0$, ambil vektor satuan a, b yang menunjuk sepanjang kedua sinar sisi, dan vektor satuan u yang menunjuk sepanjang calon sinar ℓ. Pilih $P = tu$, $t \neq 0$. Kaki-kaki tegak lurusnya $X = t(u \cdot a)a$ dan $Y = t(u \cdot b)b$. Maka

$$(Y - X) \cdot u = t((u \cdot b)^2 - (u \cdot a)^2).$$

Jadi $XY \perp \ell$ tepat ketika $|u \cdot a| = |u \cdot b|$, yaitu ketika garis ℓ membuat sudut tak berorientasi sama dengan kedua garis sisi. Ada dua kemungkinan: garis bagi dalam dan garis bagi luar. Pemeriksaan insidensi bahwa sinar calon terletak di interior sudut memilih kemungkinan pertama dan menyelesaikan verifikasi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tanpa syarat interior, garis bagi luar memberikan hasil positif yang sama; dan pilihan $P = O$ membuat $X = Y = O$, sehingga tidak menguji apa pun.

Contoh sumber terselesaikan: pusat, alat lingkaran umum, dan inversor

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-source-example001`.

Label sumber: `prob:center-inversor+circumtool`.

Status: soal dan penyelesaian penulis; tidak dihitung sebagai solusi orisinal tambahan.

Soal sumber. Buktikan bahwa dengan alat lingkaran umum dan inversor, mustahil memverifikasi bahwa suatu titik yang diberikan merupakan pusat lingkaran Γ yang diberikan. Secara khusus, mustahil mengonstruksi pusat tersebut hanya dengan alat lingkaran umum.

Penyelesaian penulis (dipertahankan). Dengan berargumen melalui kontradiksi, andaikan kita memiliki konstruksi yang memverifikasi sifat tersebut.

Terapkan inversi terhadap suatu lingkaran yang tegak lurus terhadap Γ pada seluruh konstruksi. Menurut Akibat `cor:perp-inverse-clines`, lingkaran Γ dipetakan ke dirinya sendiri. Ingat bahwa inversi memetakan lingkaran umum ke lingkaran umum (`thm:inverse-cline`) dan mempertahankan hubungan inversi (`cor:invese-comp`). Oleh karena itu, seluruh konstruksi dipetakan menjadi konstruksi yang ekuivalen; artinya, konstruksi dengan pilihan titik-titik bebas yang berbeda.

Menurut Latihan `ex:inv-centernot=center-inv`, inversi memetakan pusat Γ ke titik lain. Namun, konstruksi ini menyatakan bahwa titik baru tersebut juga merupakan pusat — suatu kontradiksi. □

Catatan audit orisinal. Konjugasi setiap langkah oleh inversi tersebut menjaga dua operasi alat: lingkaran umum dipetakan ke lingkaran umum dan pasangan titik invers dipetakan ke pasangan titik invers. Pilihan titik bebas juga dipetakan bijektif ke pilihan yang sah. Karena verifier harus benar untuk setiap pilihan bebas, perubahan pusat bukan sekadar jalur kebetulan. Catatan ini menjelaskan kuantifikator yang tersirat; ia bukan penggantian penyelesaian penulis.

19.8 Titik tengah tidak dapat diverifikasi hanya dengan penggaris

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex008`. **Label sumber:** `ex:midpoint-proj`. **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Buktikan bahwa tidak ada konstruksi hanya dengan penggaris yang memverifikasi bahwa suatu titik yang diberikan merupakan titik tengah suatu ruas yang diberikan. Secara khusus, mustahil mengonstruksi titik tengah hanya dengan penggaris.

Petunjuk penulis. Tinjau proyeksi perspektif $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ (lihat `sec:perspective-projection`). Misalkan $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, dan $M = (2, 1)$. Perhatikan bahwa M merupakan titik tengah $[AB]$.

Bayangan titik-titik tersebut adalah $A' = (1, 1)$, $B' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, dan $M' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Jelas bahwa M' bukan titik tengah $[A'B']$.

Kualifikasi sumber. Paragraf pengantar sumber menyebut transformasi yang menetapkan dua titik dan memindahkan titik tengahnya, sedangkan transformasi pada petunjuk tidak menetapkan A, B. Penetapan itu tidak diperlukan: ekuivariansi membandingkan seluruh masukan (A, B, M) dengan (A', B', M'). Petunjuk tetap utuh dan argumen lengkap di bawah menjelaskan langkah tersebut.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tuliskan peta dalam koordinat homogen, gunakan invariansi insidensi setiap langkah penggaris, lalu hitung titik tengah sejati $A'B'$.

Jawaban atau pemeriksaan. Titik tengah $A'B'$ adalah $(2/3, 2/3)$, bukan $M' = (1/2, 1/2)$.

Solusi lengkap. Peta pada petunjuk merupakan transformasi proyektif

$$T[X : Y : Z] = [Z : Y : X].$$

Pada bagan $X \neq 0$, rumus afinnya memang $T(x, y) = (1/x, y/x)$. Transformasi proyektif memetakan garis ke garis, mempertahankan perpotongan, dan membawa pilihan titik bebas yang sah ke pilihan yang sah. Maka setiap konstruksi atau verifier yang hanya memakai penggaris bersifat ekuivarian terhadap T.

Untuk titik pada petunjuk, $M = (A + B)/2$, tetapi

$$\frac{A' + B'}{2} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = M'.$$

Jika verifier penggaris menerima (A, B, M), konfigurasi langkahnya setelah diterapkan T memaksa verifier yang sama menerima (A', B', M'), padahal yang kedua salah. Kontradiksi membuktikan bagian verifikasi. Jika ada konstruksi penggaris yang selalu menghasilkan titik tengah dari A, B, transformasi seluruh urutan konstruksi akan menghasilkan M' dari A', B'; karena M' bukan titik tengah, konstruksi itu juga mustahil.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Transformasi proyektif mempertahankan insidensi, bukan rasio panjang pada garis. Justru kegagalan mempertahankan rasio $1 : 1$ menghasilkan kontradiksi.

19.9 Urutan kekuatan empat himpunan alat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch19-ex009`. **Label sumber:** `ex:comparison`. **Komponen sumber:** (a), (b), (c), (d). **Tingkat:** lanjut.

Soal sumber. Bandingkan himpunan-himpunan alat berikut: (a) penggaris dan jangka, (b) penggaris segitiga, (c) penggaris dan alat sejajar, dan (d) alat lingkaran umum dan inversor.

Petunjuk penulis. (a) lebih kuat secara ketat daripada (b), (b) lebih kuat secara ketat daripada (c), (a) lebih kuat secara ketat daripada (d), dan (d) tidak terbandingkan dengan (b) maupun (c). Sebagian besar pernyataan ini mengikuti dari `ex:construction-perpendicular`, `prop:perp-perp`, `ex:consturuction-of-inversion`, `ex:affine-perp`, `ex:equilateraltriangle`, `prob:center-inversor+circumtool`.

Untuk menunjukkan bahwa (d) tidak lebih kuat daripada (c), buktikan bahwa titik tengah tidak dapat dikonstruksi dengan himpunan (d) dan gunakan penyelesaian `ex:midpoint-affine`. Untuk menunjukkan bahwa (b) tidak lebih kuat daripada (d), buktikan bahwa jika diberikan konfigurasi awal yang terdiri atas 6 titik $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, suatu segitiga sama sisi dapat dikonstruksi dengan himpunan (d), lalu terapkan `ex:equilateraltriangle`.

Petunjuk bertahap (orisinal). Pisahkan setiap pernyataan "lebih kuat" menjadi simulasi operasi dan setiap kata "ketat/tidak terbandingkan" menjadi saksi konfigurasi. Gunakan titik tengah untuk arah yang gagal pada (d), dan dua lingkaran satuan yang dikonstruksi dari enam titik rasional untuk arah sebaliknya.

Jawaban atau pemeriksaan. Dengan notasi $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ bagi (a)–(d),

$$\mathcal{A} > \mathcal{B} > \mathcal{C}, \qquad \mathcal{A} > \mathcal{D},$$

sedangkan $\mathcal{D}$ tidak terbandingkan dengan $\mathcal{B}$ maupun $\mathcal{C}$.

Solusi lengkap. *Simulasi dan ketatnya rantai pertama.* Penggaris dan jangka dapat membuat garis tegak lurus dan membagi dua sudut siku-siku, sehingga dapat meniru garis bersudut 90° dan $\pm 45^\circ$ dari penggaris segitiga. Jadi $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$. Ketatnya mengikuti karena $\mathcal{A}$ mengonstruksi segitiga sama sisi pada alas yang diberikan, sedangkan Latihan `ex:equilateraltriangle` membuktikan bahwa $\mathcal{B}$ tidak dapat melakukannya.

Penggaris segitiga membuat garis sejajar sebagai dua tegak lurus berturut- turut, sehingga $\mathcal{B} \geq \mathcal{C}$. Ketatnya mengikuti dari `ex:affine-perp`: konstruksi penggaris dan alat sejajar bersifat afin dan tidak dapat mengarakterisasi ketegaklurusan, sedangkan $\mathcal{B}$ membuat garis tegak lurus secara langsung. Maka $\mathcal{A} > \mathcal{B} > \mathcal{C}$.

Perbandingan dengan alat lingkaran umum dan inversor. Untuk tiga titik takkolinear, penggaris dan jangka mengonstruksi lingkaran luarnya dan invers suatu titik terhadap lingkaran itu. Untuk tiga titik kolinear, alat lingkaran umum menghasilkan garis ketiganya; inversi terhadap lingkaran umum berupa garis adalah pencerminan pada garis tersebut, yang juga dapat dikonstruksi dengan penggaris dan jangka. Jadi $\mathcal{A} \geq \mathcal{D}$. Ketatnya diberikan oleh contoh sumber `prob:center-inversor+circumtool`: pusat lingkaran dapat dikonstruksi oleh $\mathcal{A}$, tetapi bahkan tidak dapat diverifikasi oleh $\mathcal{D}$. Jadi $\mathcal{A} > \mathcal{D}$.

Untuk membuktikan $\mathcal{D} \not\geq \mathcal{C}$, pertama tunjukkan bahwa $\mathcal{D}$ tidak dapat mengonstruksi titik tengah. Ambil masukan kompleks $A = -1$, $B = 1$, dengan titik tengah $M = 0$, dan pilih $0 < t < 1$. Transformasi Möbius

$$f(z) = \frac{z + t}{tz + 1}$$

takdegenerat, menetapkan A, B, tetapi memetakan M ke $t \neq 0$. Transformasi Möbius memetakan lingkaran umum ke lingkaran umum. Konjugasi inversi dalam suatu

lingkaran umum oleh f adalah inversi dalam citra lingkaran umum itu: keduanya merupakan involusi anti-Möbius unik yang menetapkan lingkaran tersebut titik demi titik. Karena itu setiap langkah $\mathcal{D}$, termasuk pilihan bebas, bersifat ekuivarian terhadap f. Konstruksi titik tengah dari A, B akan harus menghasilkan sekaligus $M = 0$ dan citranya t untuk masukan yang sama, kontradiksi. Di pihak lain, $\mathcal{C}$ mengonstruksi titik tengah sebagai perpotongan diagonal jajar genjang pada `ex:midpoint-affine`. Jadi $\mathcal{D} \not\geq \mathcal{C}$, dan akibatnya $\mathcal{D} \not\geq \mathcal{B}$ pula.

Untuk arah sebaliknya, mulai dengan enam titik sumber

$$(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1).$$

Alat lingkaran umum menghasilkan Γ_0 melalui $(0,0), (2,0), (1,1)$; persamaannya $(x-1)^2 + y^2 = 1$, jadi pusatnya $U = (1,0)$ dan jari-jarinya 1. Alat yang sama menghasilkan Γ_1 melalui $(0,1), (2,1), (1,0)$; persamaannya $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, jadi pusatnya $V = (1,1)$ dan jari-jarinya 1. Kedua lingkaran berpotongan di

$$X_{\pm} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Karena $UV = UX_{\pm} = VX_{\pm} = 1$, salah satu perpotongan memberi segitiga sama sisi $UVX_{\pm}$. Jadi $\mathcal{D}$ dapat menghasilkan konfigurasi ini dari enam titik rasional. Latihan `ex:equilateraltriangle` dan argumen titik-bebas rasional menunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ tidak dapat menghasilkan titik irasional $X_{\pm}$ dari konfigurasi rasional; maka $\mathcal{B} \not\geq \mathcal{D}$. Karena $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$, juga $\mathcal{C} \not\geq \mathcal{D}$. Dua arah kegagalan membuktikan bahwa $\mathcal{D}$ tidak terbandingkan dengan $\mathcal{B}$ maupun $\mathcal{C}$. Bersama transitivitas $\mathcal{A} > \mathcal{B} > \mathcal{C}$, hasil ini menentukan hubungan untuk semua enam pasangan takberurutan dari keempat himpunan alat.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Daftar hubungan dari petunjuk bukan bukti. Setiap ketaksamaan ketat memerlukan simulasi dan satu saksi kegagalan arah balik; setiap ketakterbandingan memerlukan dua saksi arah yang berbeda.

Uji penguasaan Bab 19

1. **(2 poin).** Klasifikasikan dua soal klasik tak berlabel, lalu berikan kedua konstruksi panjang $\sqrt{ab}$ dan a^2/b beserta syarat domainnya.
2. **(2 poin).** Buktikan rasio diagonal segilima dan berikan konstruksi lengkap segilima beraturan dari sisi s, termasuk pilihan setengah bidang.
3. **(2 poin).** Jelaskan bagaimana penggaris segitiga meniru alat sejajar dan konstruksikan titik berkoordinat $1/3$ serta $2/3$ pada ruas satuan.
4. **(2 poin).** Buktikan kemustahilan segitiga sama sisi dengan penggaris segitiga dan jelaskan kuantifikasi pilihan titik bebas.
5. **(2 poin).** Hitung titik irasional pada garis bagi contoh $45°$ dan tutup kontradiksi konstruktibilitasnya.
6. **(2 poin).** Buktikan invariant $(a, b\sqrt{3})$ untuk penggaris segitiga $30°$ dan gunakan invariant itu untuk mengecualikan persegi pada alas satuan.
7. **(2 poin).** Buktikan uji konkurensi segitiga sama kaki dan audit uji garis bagi, termasuk garis bagi luar, syarat interior, dan larangan $P = O$.
8. **(2 poin).** Jelaskan ekuivariansi contoh sumber inversor dan gunakan transformasi $T(x, y) = (1/x, y/x)$ untuk membuktikan kemustahilan titik tengah penggaris.

9. **(2 poin).** Buktikan semua simulasi dan ketatnya $\mathcal{A} > \mathcal{B} > \mathcal{C}$ serta $\mathcal{A} > \mathcal{D}$.

10. **(2 poin).** Buktikan kedua ketakterbandingan $\mathcal{D}$ dengan $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, termasuk transformasi Möbius penetap $\{-1, 1\}$ dan dua lingkaran eksplisit dari enam titik rasional.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah bagian berlabel berikut:

M1. 19 dan 19.1.

M2. 19.2.

M3. 19.3.

M4. 19.4.

M5. 19.5.

M6. 19.6.

M7. 19.7.

M8. 19.7 dan 19.8.

M9. 19.9, paragraf simulasi.

M10. 19.9, paragraf ketakterbandingan.

M1 (2 poin). Satu poin untuk klasifikasi sensus dan teorema tinggi $CD^2 = ab$; satu poin untuk konstruksi kesebangunan $OW/a = a/b$ beserta $b > 0$.

M2 (2 poin). Satu poin untuk kesebangunan, $1/x = x - 1$, dan akar positif; satu poin untuk tiga segitiga sama kaki, pilihan setengah bidang, serta audit sisi dan sudut.

M3 (2 poin). Satu poin untuk paralel sebagai dua tegak lurus; satu poin untuk konstruksi afin 3, 1/3, 2/3 tanpa penggaris bertanda.

M4 (2 poin). Satu poin untuk kandidat $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ dan irasionalitas; satu poin untuk pilihan titik bebas rasional generik dan kontradiksi teorema sumber.

M5 (2 poin). Satu poin untuk $t/(1-t) = 1/\sqrt{2}$ dan $t = \sqrt{2} - 1$; satu poin untuk perpotongan garis yang dapat dikonstruksi dan audit titik bebas.

M6 (2 poin). Satu poin untuk penutupan kelas kemiringan di bawah $30°, 60°, 90°$; satu poin untuk penutupan perpotongan dan pengecualian $y = 1$.

M7 (2 poin). Satu poin untuk perhitungan konkurensi $u^2 = (u-1)^2$; satu poin untuk rumus proyeksi, dua garis bagi, syarat interior, dan $P \neq O$.

M8 (2 poin). Satu poin untuk naturalitas lingkaran umum/inversi dan kuantifikasi pilihan; satu poin untuk bentuk homogen T serta titik tengah citra $= (2/3, 2/3)$.

M9 (2 poin). Satu poin untuk simulasi $\mathcal{A} \geq \mathcal{B} \geq \mathcal{C}$; satu poin untuk ketatnya dan simulasi/ketatnya $\mathcal{A} > \mathcal{D}$.

M10 (2 poin). Satu poin untuk $f(z) = (z + t)/(tz + 1)$, invariansi alat (d), dan hambatan titik tengah; satu poin untuk persamaan Γ_0, Γ_1, titik $X_\pm$, dan dua deduksi ketakterbandingan.

Bab 20

Luas

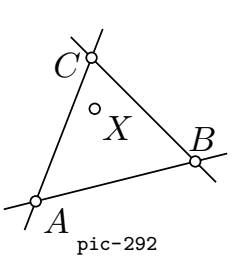
Solusi, dukungan bertahap, dan uji penguasaan

> Soal dan petunjuk penulis berasal dari Bab 20, “Luas”, dalam *Bidang Euklides dan Kerabatnya*. Sensus aktif memuat enam belas latihan, enam belas blok petunjuk penulis, dan dua subbutir berlabel pada latihan rasio silang. Semua petunjuk bertahap, jawaban, penyelesaian lengkap, metadata belajar, uji penguasaan, kunci, dan rubrik di bawah ini merupakan tambahan orisinal berlisensi CC BY-SA 4.0. Atribusi ini tidak menyiratkan dukungan penulis sumber. Provenans produksi: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

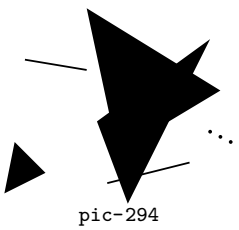
Catatan integritas dan ketelitian. Urutan latihan, kedua subbutir, semua rumus, enam belas petunjuk, dan delapan belas gambar sumber dipertahankan. Latihan dan petunjuk `ex:solid-triangle-sum` yang diberi komentar di sumber tetap tidak aktif. Dua keterbatasan domain dinyatakan terbuka: petunjuk subdivisi harus mempertahankan sisa degenerat, dan rumus rasio silang hanya terdefinisi ketika titik serta penyebut yang relevan berbeda dari nol. Teks sumber tidak diubah; syarat tersebut dicatat sebagai kualifikasi sebelum bukti lengkap.

Inventaris gambar sumber Bab 20

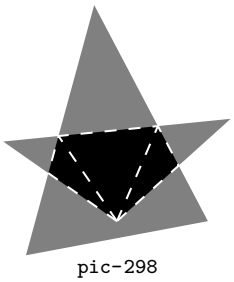
Kelima belas gambar badan bab berikut dipertahankan dalam urutan sumber dan tetap dikreditkan kepada Anton Petrunin; ketiga gambar petunjuk ditampilkan kemudian pada latihan yang bersangkutan.

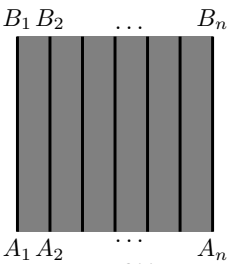


pic-292

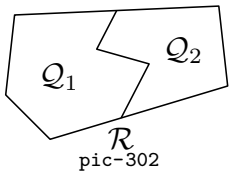

pic-294

pic-296

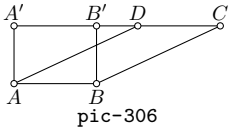

pic-298



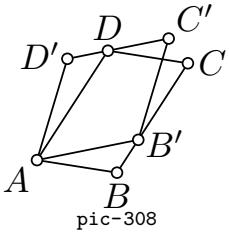
pic-300



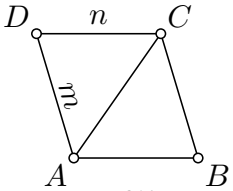
pic-302



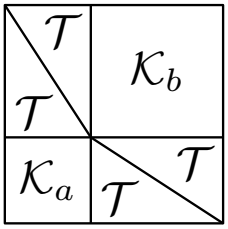
pic-306

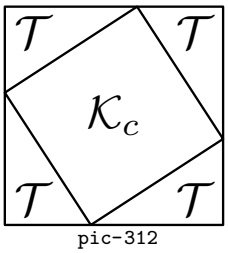


pic-308

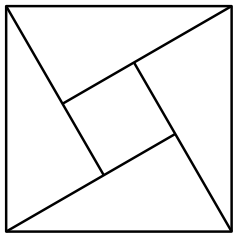


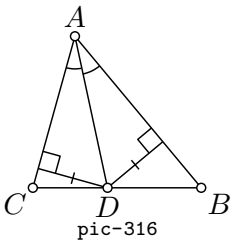
pic-310



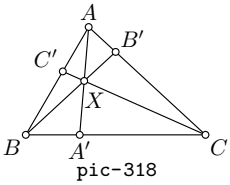


pic-312

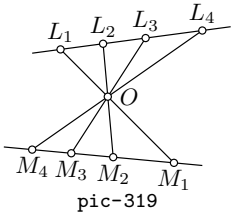

pic-314



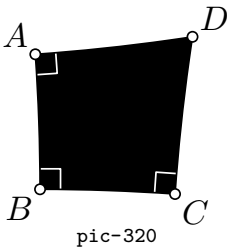
pic-316



pic-318



pic-319



pic-320

20.1 Konveksitas segitiga padat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex001`. **Label sumber:** `ex:triangle-convex`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: sisi suatu garis, ruas, dan koordinat afin.

Ketergantungan: definisi segitiga padat dan `def:birkhoff-axioms:1`; titik pada sisi termasuk dalam himpunan.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap segitiga padat merupakan *himpunan konveks*; yakni, untuk setiap pasangan titik $(X, Y \in \blacktriangle ABC)$, ruas garis $([XY])$ termuat di dalam $(\blacktriangle ABC)$.

Petunjuk penulis. Andaikan sebaliknya; yakni, terdapat titik $W \in [XY]$ sedemikian sehingga $W \notin \blacktriangle ABC$.

Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat mengandaikan bahwa W dan A terletak pada sisi-sisi yang berlawanan terhadap garis (BC).

Ini menyiratkan bahwa kedua ruas $[WX]$ dan $[WY]$ berpotongan dengan (BC). Menurut Aksioma `def:birkhoff-axioms:1`, $W \in (BC)$ — suatu kontradiksi.

Petunjuk bertahap (orisinal). Nyatakan setiap sisi tertutup dari suatu garis sebagai satu pertidaksamaan afin. Nilai fungsi afin pada $((1-t)X + tY)$ merupakan kombinasi konveks dari nilainya pada (X) dan (Y).

Jawaban atau pemeriksaan. Segitiga padat adalah irisan tiga setengah bidang tertutup. Setiap setengah bidang tertutup konveks, dan irisan himpunan konveks tetap konveks.

Solusi lengkap. Pilih koordinat afin untuk garis (BC) sehingga (BC) mempunyai persamaan $(v = 0)$ dan (A) mempunyai koordinat kedua positif. Setengah bidang tertutup yang memuat (A) adalah $(v \geq 0)$. Jika $(X = (x_1, v_1))$ dan $(Y = (x_2, v_2))$ berada di dalamnya, maka setiap titik $(Z \in [XY])$ dapat ditulis sebagai $(Z = (1-t)X + tY)$, $(0 \leq t \leq 1)$, dan

$$v(Z) = (1-t)v_1 + tv_2 \geq 0.$$

Jadi ruas yang menghubungkan dua titik setengah bidang itu tetap di dalamnya. Argumen yang sama berlaku bagi setengah bidang tertutup yang dibatasi oleh $((CA))$ dan memuat (B), serta yang dibatasi oleh $((AB))$ dan memuat (C). Menurut definisi, $(\blacktriangle ABC)$ adalah irisan ketiga setengah bidang tertutup tersebut. Karena (X) dan (Y) berada di dalam setiap setengah bidang, seluruh $([XY])$ berada di dalam ketiganya, sehingga $([XY] \subset \blacktriangle ABC)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Definisi memuat sisi-sisi segitiga. Karena itu yang digunakan adalah setengah bidang *tertutup*; bukti yang hanya menangani titik interior belum cukup.

20.2 Karakterisasi titik sudut dengan garis penyangga

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex002`. **Label sumber:** `ex:vertex`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: Latihan `ex:triangle-convex`, garis sejajar, dan koordinat afin.

Ketergantungan: segitiga (ABC) tak degenerat dan `thm:pasch` untuk jalur sintetik yang disarankan sumber.

Soal sumber. Misalkan $(\triangle ABC)$ tak degenerat dan $(X \in \blacktriangle ABC)$. Tunjukkan bahwa (X) merupakan titik sudut $(\triangle ABC)$ jika dan hanya jika terdapat garis (ℓ) yang berpotongan dengan $(\blacktriangle ABC)$ hanya di titik (X).

Petunjuk penulis. Untuk membuktikan bagian "hanya jika", perhatikan garis melalui titik sudut yang sejajar dengan sisi di hadapannya.

Untuk membuktikan bagian "jika", gunakan teorema Pasch (`thm:pasch`).

Petunjuk bertahap (orisinal). Normalkan $(A = (0,0))$, $(B = (1,0))$, $(C = (0,1))$. Titik segitiga memenuhi $(u \geq 0)$, $(v \geq 0)$, $(u + v \leq 1)$. Periksa suatu garis melalui titik bukan sudut menurut apakah titik itu interior atau berada di interior suatu sisi.

Jawaban atau pemeriksaan. Pada suatu titik sudut ada garis penyangga sejajar sisi di hadapannya. Pada titik lain, setiap arah mempunyai setidaknya satu gerak kecil yang tetap di dalam segitiga, sehingga garisnya bertemu segitiga pada titik kedua.

Solusi lengkap. Dengan koordinat pada petunjuk bertahap,

$$\blacktriangle ABC = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}.$$

Garis $(u + v = 0)$ melalui (A), sejajar (BC), dan ketiga pertidaksamaan memaksa satu-satunya titik segitiga pada garis itu menjadi $(u = v = 0)$. Dengan memberi label ulang, setiap titik sudut mempunyai garis semacam ini.

Sebaliknya, ambil $(X = (u, v))$ yang bukan titik sudut dan suatu garis melalui (X) dengan vektor arah taknol (d). Jika ketiga pertidaksamaan di atas ketat pada (X), maka untuk $(\varepsilon > 0)$ cukup kecil, baik $(X + \varepsilon d)$ maupun $(X - \varepsilon d)$ masih memenuhi semuanya. Jika (X) berada di interior suatu sisi, tepat satu pertidaksamaan menjadi persamaan dan dua lainnya tetap ketat. Bila turunan fungsi afin aktif sepanjang (d) nol, kedua arah kecil tetap pada sisi; bila tidak nol, pilih tanda (ε) yang bergerak ke setengah bidang yang diizinkan. Dengan (ε) cukup kecil, dua pertidaksamaan ketat tetap benar. Dalam semua kasus garis melalui (X) memuat titik segitiga lain. Jadi hanya titik sudut yang dapat menjadi satu-satunya perpotongan dengan suatu garis.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Pada interior suatu sisi, garis sisi sendiri memotong segitiga sepanjang seluruh sisi; garis lain memasuki interior pada salah satu arahnya. Tidak ada garis singgung yang hanya menyentuh satu titik bukan-sudut.

20.3 Persegi padat bukan himpunan degenerat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex003`. **Label sumber:** `ex:solid-square`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: definisi himpunan poligonal degenerat dan fakta bahwa dua garis taksejajar berpotongan paling banyak sekali.

Ketergantungan: persegi mempunyai panjang sisi positif.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa suatu persegi padat tak degenerat.

Petunjuk penulis. Andaikan sebaliknya; yakni, andaikan suatu persegi padat $\mathcal{K}$ dapat dinyatakan sebagai gabungan koleksi hingga ruas-ruas $[A_1B_1], \ldots, [A_nB_n]$ dan himpunan-himpunan satu titik $\{C_1\}, \ldots, \{C_k\}$.

Perhatikan bahwa $\mathcal{K}$ memuat tak hingga banyaknya ruas yang saling tak sejajar. Oleh karena itu, kita dapat memilih ruas $[XY]$ di dalam $\mathcal{K}$ yang tidak sejajar dengan satu pun ruas $[A_1B_1], \ldots, [A_nB_n]$.

Akibatnya, $[XY]$ memiliki paling banyak satu titik persekutuan dengan setiap himpunan $[A_iB_i]$ dan $\{C_i\}$. Karena $[XY]$ memuat tak hingga banyaknya titik, kita memperoleh kontradiksi.

Sebagai alternatif, pilih suatu lingkaran Γ di dalam $\mathcal{K}$. Perhatikan bahwa Γ memuat tak hingga banyaknya titik, tetapi menurut `lem:line-circle`, lingkaran itu hanya memiliki berhingga banyaknya titik potong dengan sebarang himpunan poligonal degenerat.

Perhatikan pula bahwa pernyataan tersebut akan mengikuti `cor:degenerate` dan `thm:area-rect`.

Petunjuk bertahap (orisinal). Petakan persegi secara isometri dan skala ke $([0, 1]^2)$. Di antara ruas dari $((0, 1/2))$ ke $((1, t))$, $(0 < t < 1)$, pilih kemiringan yang tidak muncul pada daftar hingga ruas penutup.

Jawaban atau pemeriksaan. Ruas pilihan mempunyai tak hingga banyak titik, tetapi gabungan penutup hanya dapat menyumbang paling banyak $(n + k)$ titik pada ruas itu.

Solusi lengkap. Andaikan representasi degenerat pada petunjuk ada. Persegi memuat ruas $(S_t = [(0, 1/2), (1, t)])$ untuk setiap $(0 < t < 1)$. Hanya berhingga banyak arah yang sejajar dengan ruas-ruas $([A_iB_i])$, jadi pilih (t) sehingga garis pendukung (S_t) tidak sejajar dengan satu pun garis

pendukungnya. Setiap ($[A_iB_i]$) kemudian memotong (S_t) paling banyak pada satu titik, dan setiap singleton juga menyumbang paling banyak satu titik. Dengan demikian gabungan yang diduga menutup (S_t) pada paling banyak ($n + k$) titik, padahal ruas nontrivial (S_t) mempunyai tak hingga banyak titik. Kontradiksi membuktikan bahwa persegi padat tak degenerat.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak cukup mengatakan bahwa persegi "dua dimensi". Bukti harus menolak secara langsung setiap gabungan *hingga* ruas dan titik yang diizinkan oleh definisi degenerat.

20.4 Lingkaran bukan himpunan poligonal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex004`. **Label sumber:** `ex:poly-circ`. **Status sumber:** latihan kelas. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: himpunan elementer dan `lem:line-circle`.

Ketergantungan: "lingkaran" berarti kurva keliling, bukan cakram tertutup.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa suatu lingkaran bukan himpunan poligonal.

Petunjuk penulis. Tunjukkan bahwa di antara himpunan-himpunan elementer, hanya himpunan satu titik yang dapat menjadi himpunan bagian suatu lingkaran. Tinggal diperhatikan bahwa setiap lingkaran memuat tak hingga banyaknya titik.

Petunjuk bertahap (orisinal). Jika gabungan beberapa himpunan sama dengan lingkaran, setiap anggota gabungan itu sendiri harus termuat dalam lingkaran. Uji tiga jenis himpunan elementer.

Jawaban atau pemeriksaan. Ruas nontrivial tidak dapat termuat dalam lingkaran karena garis pendukungnya memotong lingkaran paling banyak dua kali. Segitiga padat memuat ruas nontrivial, sehingga juga mustahil.

Solusi lengkap. Andaikan ($\Gamma = E_1 \cup \cdots \cup E_N$) dengan setiap ($E_i$) elementer. Karena gabungannya tepat (Γ), setiap ($E_i \subset \Gamma$). Jika (E_i) ruas nontrivial, garis pendukungnya akan mempunyai tak hingga banyak titik persekutuan dengan (Γ), bertentangan dengan `lem:line-circle`. Jika (E_i) segitiga padat, salah satu sisinya merupakan ruas nontrivial yang termuat di ($E_i \subset \Gamma$), kontradiksi yang sama. Jadi setiap (E_i) hanya mungkin singleton. Gabungan hingga singleton bersifat hingga, sedangkan (Γ) mempunyai tak hingga banyak titik. Maka (Γ) bukan himpunan poligonal.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Cakram tertutup bukan objek latihan ini; latihan terakhir justru akan membuktikan bahwa cakram dapat dihampiri oleh himpunan poligonal.

20.5 Dua jajar genjang di antara pasangan garis sejajar

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex005`. **Label sumber:** `ex:two-parallelograms`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: luas jajar genjang dan garis sejajar.

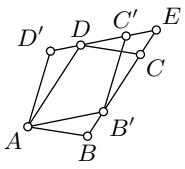
Ketergantungan: `prop:area-parallelogram`; kedua jajar genjang tak degenerat.

Soal sumber. Andaikan $(\square ABCD)$ dan $(\square AB'C'D')$ merupakan dua jajar genjang sedemikian sehingga $(B' \in [BC])$ dan $(D \in [C'D'])$. Tunjukkan bahwa

$$\text{luas}(\blacksquare ABCD) = \text{luas}(\blacksquare AB'C'D').$$

Petunjuk penulis. Misalkan E menyatakan titik potong garis (BC) dan $(C'D')$.

Gunakan `prop:area-parallelogram` untuk membuktikan bahwa jajar genjang padat berikut memiliki luas yang sama: $\blacksquare ABCD$, $\blacksquare AB'ED$, dan $\blacksquare AB'C'D'$.



Petunjuk bertahap (orisinal). Tunjukkan bahwa $(B'E \parallel AD)$ dan $(ED \parallel AB')$. Bandingkan pertama alas (AD), lalu alas (AB').

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga luas sama dengan hasil kali panjang alas yang sesuai dan jarak antara pasangan garis sejajar yang sama.

Solusi lengkap. Karena (B', B, C) segaris dan $(AD \parallel BC)$, berlaku $(B'E \parallel AD)$.
Karena (D, E, C', D') segaris dan $(AB' \parallel C'D')$, berlaku $(ED \parallel AB')$. Jadi $(AB'ED)$ adalah jajar genjang. Jajar genjang $(ABCD)$ dan $(AB'ED)$ mempunyai alas bersama (AD), sedangkan sisi-sisi berlawanan keduanya terletak pada garis (BC); menurut `prop:area-parallelogram`, luasnya sama. Selanjutnya $(AB'ED)$ dan $(AB'C'D')$ mempunyai alas bersama (AB'), sedangkan sisi berlawanan keduanya terletak pada garis $(C'D')$; luasnya juga sama. Dengan transitivitas diperoleh persamaan yang diminta. Kondisi insidensi sumber memastikan garis-garis tersebut benar-benar berpotongan dan jajar genjang antara tetap tak degenerat.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan luas tidak berasal dari kesamaan sisi miring; yang dipakai adalah alas dan jarak tegak lurus antara dua garis sejajar.

20.6 Tiga hasil kali tinggi dan sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex006`. **Label sumber:** `ex:three-trig`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: kesebangunan segitiga siku-siku.

Ketergantungan: bukti dilarang menggunakan `thm:area-of-triangle`.

Soal sumber. Misalkan (h_A), (h_B), dan (h_C) berturut-turut menyatakan tinggi $(\triangle ABC)$ dari titik sudut (A), (B), dan (C). Perhatikan bahwa Teorema `thm:area-of-triangle` menyiratkan

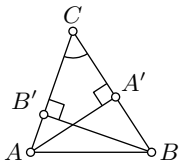
$$h_A \cdot BC = h_B \cdot CA = h_C \cdot AB.$$

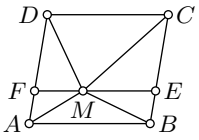
Berikan bukti pernyataan ini tanpa menggunakan Teorema `thm:area-of-triangle`.

Petunjuk penulis. Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat mengandaikan bahwa sudut ABC dan BCA lancip.

Misalkan A' dan B' berturut-turut menyatakan titik kaki dari A dan B pada (BC) dan (AC). Perhatikan bahwa $h_A = AA'$ dan $h_B = BB'$.

Perhatikan bahwa $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$; memang, sudut di C merupakan sudut persekutuan dan sudut di A' serta B' siku-siku. Secara khusus, $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC}$, atau secara ekuivalen, $h_A \cdot BC = h_B \cdot AC$.





Petunjuk bertahap (orisinal). Suatu segitiga mempunyai paling banyak satu sudut taklancip. Letakkan sudut itu, jika ada, di (A). Gunakan kesebangunan di (C) dan satu lagi di (B).

Jawaban atau pemeriksaan. Kesebangunan pada (C) memberi $(h_A/h_B = AC/BC)$, sedangkan kesebangunan pada (B) memberi $(h_A/h_C = AB/BC)$.

Solusi lengkap. Karena identitas simetris terhadap pelabelan, letakkan satu-satunya sudut taklancip, jika ada, di (A). Maka (B) dan (C) lancip, sehingga kaki tinggi yang dipakai berikut berada pada sisi terkait. Argumen petunjuk memberi

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{AC}{BC}, \qquad h_A\,BC = h_B\,AC.$$

Misalkan (C') kaki tinggi dari (C) pada (AB). Segitiga siku-siku $(\triangle AA'B)$ dan $(\triangle CC'B)$ mempunyai sudut yang sama di (B), sehingga sebangun. Maka

$$\frac{h_A}{h_C} = \frac{AB}{BC}, \qquad h_A\,BC = h_C\,AB.$$

Kedua persamaan mempunyai ruas kiri yang sama, sehingga menghasilkan ketiga hasil kali yang sama tanpa memakai rumus luas segitiga.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Satu kesebangunan hanya membuktikan satu pasangan persamaan. Kesamaan tiga hasil kali memerlukan pasangan kedua atau penerapan siklik yang sah.

20.7 Setengah luas jajar genjang dari titik interior

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex007`. **Label sumber:** `ex:half-parallelogram`. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: rumus luas jajar genjang dan segitiga.

Ketergantungan: (M) berada di interior, bukan pada sisi.

Soal sumber. Andaikan (M) terletak di dalam jajar genjang $(ABCD)$; yakni, (M) termasuk dalam jajar genjang padat $(\blacksquare ABCD)$, tetapi tidak terletak pada sisi-sisinya. Tunjukkan bahwa

$$\text{luas}(\blacktriangle ABM) + \text{luas}(\blacktriangle CDM) = \tfrac{1}{2} \cdot \text{luas}(\blacksquare ABCD).$$

Petunjuk penulis. Tarik garis ℓ melalui M yang sejajar dengan $[AB]$ dan $[CD]$; garis ini membagi $\blacksquare ABCD$ menjadi dua jajar genjang padat yang akan kita nyatakan dengan $\blacksquare ABEF$ dan $\blacksquare CDFE$. Secara khusus,

$$\begin{aligned}\text{luas}(\blacksquare ABCD) &= \\ &= \text{luas}(\blacksquare ABEF) + \text{luas}(\blacksquare CDFE).\end{aligned}$$

Menurut `prop:area-parallelogram` dan `thm:area-of-triangle`, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\text{luas}(\blacktriangle ABM) &= \tfrac{1}{2} \cdot \text{luas}(\blacksquare ABEF), \\ \text{luas}(\blacktriangle CDM) &= \tfrac{1}{2} \cdot \text{luas}(\blacksquare CDFE)\end{aligned}$$

sehingga diperoleh hasil yang dimaksud.

Petunjuk bertahap (orisinal). Ambil $(E = \ell \cap BC)$ dan $(F = \ell \cap AD)$. Bandingkan setiap segitiga dengan jajar genjang pada alas yang sama dan garis sejajar yang sama.

Jawaban atau pemeriksaan. Masing-masing segitiga mempunyai setengah luas salah satu dari dua jajar genjang yang menyusun $(ABCD)$.

Solusi lengkap. Karena (M) interior, garis $(\ell \parallel AB)$ memotong sisi (BC) dan (AD) masing-masing di titik interior (E) dan (F). Himpunan padat $(ABEF)$ dan $(CDFE)$ merupakan jajar genjang yang beririsan hanya pada ruas $([EF])$, sehingga membentuk subdivisi $(ABCD)$. Segitiga (ABM) dan jajar genjang $(ABEF)$ mempunyai alas (AB) dan tinggi yang sama, sebab (M, E, F) berada pada garis sejajar (AB). Jadi luas segitiga itu setengah luas jajar genjang pertama. Argumen yang sama pada alas (CD) memberi persamaan kedua pada petunjuk. Menjumlahkannya dan memakai aditivitas subdivisi menghasilkan tepat setengah luas $(ABCD)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Garis melalui (M) tidak membagi luas jajar genjang menjadi dua bagian sama; yang benar adalah kedua *segitiga* masing-masing setengah dari bagian jajar genjangnya.

20.8 Identitas hasil kali luas di perpotongan diagonal

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex008`. **Label sumber:** `ex:area-diag`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: rumus luas segitiga.

Ketergantungan: segiempat tak degenerat dan diagonal-diagonalnya berpotongan di (M), sehingga tinggi serta segmen diagonal yang dipakai positif.

Soal sumber. Andaikan diagonal-diagonal suatu segiempat tak degenerat $(ABCD)$ berpotongan di titik (M). Tunjukkan bahwa

$$\text{luas}(\blacktriangle ABM) \cdot \text{luas}(\blacktriangle CDM) = \text{luas}(\blacktriangle BCM) \cdot \text{luas}(\blacktriangle DAM).$$

Petunjuk penulis. Misalkan h_A dan h_C berturut-turut menyatakan jarak dari garis (BD) ke titik A dan C. Menurut `thm:area-of-triangle`,

$$\begin{aligned}\text{luas}(\blacktriangle ABM) &= \tfrac{1}{2}\cdot h_A \cdot BM;\\ \text{luas}(\blacktriangle BCM) &= \tfrac{1}{2}\cdot h_C \cdot BM;\\ \text{luas}(\blacktriangle CDM) &= \tfrac{1}{2}\cdot h_C \cdot DM;\\ \text{luas}(\blacktriangle DAM) &= \tfrac{1}{2}\cdot h_A \cdot DM.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}&\text{luas}(\blacktriangle ABM)\cdot\text{luas}(\blacktriangle CDM) =\\ &\quad= \tfrac{1}{4}\cdot h_A\cdot h_C\cdot DM\cdot BM =\\ &\quad= \text{luas}(\blacktriangle BCM)\cdot\text{luas}(\blacktriangle DAM).\end{aligned}$$

Petunjuk bertahap (orisinal). Gunakan (BM) sebagai alas bagi dua segitiga dan (DM) sebagai alas bagi dua lainnya; jangan mencampur tinggi dari (A) dan (C).

Jawaban atau pemeriksaan. Kedua hasil kali sama dengan $(\frac{1}{4}h_A h_C\, BM\, DM)$.

Solusi lengkap. Karena segiempat dan perpotongan diagonal tak degenerat, $(A, C \notin (BD))$ serta $(M \neq B, D)$; jadi $(h_A, h_C, BM, DM > 0)$. Keempat rumus pada petunjuk adalah penerapan langsung (luas $= \frac{1}{2}$(alas)(tinggi)) dengan alas pada garis (BD). Mengalikan rumus pertama dengan rumus ketiga dan rumus kedua dengan rumus keempat menghasilkan faktor yang sama, $(\frac{1}{4}h_A h_C BM\, DM)$, sehingga identitas sumber berlaku.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Tidak diperlukan asumsi bahwa diagonal saling membagi dua. Identitas muncul karena faktor (BM), (DM), (h_A), dan (h_C) masing-masing muncul sekali di kedua ruas.

20.9 Luas sebagai setengah keliling kali jari-jari dalam

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex009`. **Label sumber:** `ex:area-inradius`. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: pusat dan lingkaran dalam serta rumus luas segitiga.

Ketergantungan: $(\triangle ABC)$ tak degenerat, sehingga pusat lingkaran dalam berada di interior dan $(r > 0)$.

Soal sumber. Misalkan (r) merupakan jari-jari lingkaran dalam segitiga tak degenerat (ABC), dan misalkan (p) merupakan *setengah kelilingnya*; yakni, $(p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA))$. Tunjukkan bahwa

$$\text{luas}(\blacktriangle ABC) = p \cdot r.$$

Petunjuk penulis. Misalkan I merupakan pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$. Perhatikan bahwa $\blacktriangle ABC$ dapat disubdivisi menjadi $\blacktriangle IAB$, $\blacktriangle IBC$, dan $\blacktriangle ICA$.

Tinggal menerapkan `thm:area-of-triangle` pada setiap segitiga ini dan menjumlahkan hasilnya.

Petunjuk bertahap (orisinal). Jarak (I) ke masing-masing dari tiga garis sisi sama dengan (r). Gunakan berturut-turut alas (AB), (BC), dan (CA).

Jawaban atau pemeriksaan. Jumlah tiga luas adalah $(\frac{1}{2}r(AB + BC + CA) = pr)$.

Solusi lengkap. Pusat lingkaran dalam (I) terletak di interior segitiga, sehingga ketiga segitiga (IAB), (IBC), dan (ICA) membentuk subdivisi: gabungannya adalah segitiga semula dan irisan berpasangan hanya berupa ruas. Jarak (I) ke setiap garis sisi adalah jari-jari (r). Maka

$$\begin{aligned}\text{luas}(\blacktriangle ABC) &= \text{luas}(\blacktriangle IAB) + \text{luas}(\blacktriangle IBC) + \text{luas}(\blacktriangle ICA)\\ &= \tfrac{1}{2}r\,AB + \tfrac{1}{2}r\,BC + \tfrac{1}{2}r\,CA\\ &= r \cdot \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) = pr.\end{aligned}$$

Miskonsepsi yang perlu dihindari. (r) adalah tinggi ketiga segitiga kecil terhadap sisi-sisi asli, bukan panjang salah satu ruas dari (I) ke titik sudut.

20.10 Subdivisi hingga dan ketunggalan luas

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex010`. **Label sumber:** `ex:subdivision`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: himpunan poligonal, susunan hingga garis, subdivisi, dan triangulasi poligon konveks.

Ketergantungan:

`cor:degenerate`, `prop:subdivision`, `thm:area-rect`, dan `thm:area-of-triangle`.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa setiap himpunan poligonal memiliki subdivisi menjadi suatu koleksi hingga segitiga padat dan suatu himpunan degenerat. Simpulkan bahwa luas setiap himpunan poligonal terdefinisi secara tunggal.

Kualifikasi sumber. Petunjuk berikut mengatakan bahwa tanpa mengurangi keumuman $(\mathcal{P})$ adalah gabungan segitiga padat. Untuk himpunan poligonal yang mempunyai komponen ruas atau titik di luar semua segitiga, komponen itu tidak dapat dibuang. Bukti lengkap mempertahankannya sebagai satu sisa degenerat; teks petunjuk penulis tetap dipertahankan tanpa perubahan.

Petunjuk penulis. Tetapkan suatu himpunan poligonal $\mathcal{P}$. Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat mengandaikan bahwa $\mathcal{P}$ merupakan gabungan suatu koleksi hingga segitiga padat. Potong $\mathcal{P}$ sepanjang perpanjangan sisi-sisi semua segitiga tersebut; ini membagi $\mathcal{P}$ menjadi poligon-poligon konveks. Pemotongan setiap poligon dengan diagonal-diagonal dari satu titik sudut menghasilkan subdivisi menjadi segitiga-segitiga padat.

Petunjuk bertahap (orisinal). Tulis $(\mathcal{P} = D_0 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_N)$, dengan (D_0) degenerat. Susunan semua garis pendukung sisi (T_i) mempunyai berhingga banyak sel. Pilih sel dua-dimensi yang berada dalam gabungan (T_i), lalu triangulasikan setiap penutupannya.

Jawaban atau pemeriksaan. Penutupan sel-sel terpilih adalah poligon konveks dengan interior saling lepas; triangulasinya beririsan hanya pada ruas atau titik. Menambahkan (D_0) memberi subdivisi yang diminta.

Solusi lengkap. Menurut definisi poligonal, tulis

$$\mathcal{P} = D_0 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_N,$$

dengan (D_0) gabungan hingga ruas dan singleton, dan setiap (T_i) segitiga padat. Kasus $(N = 0)$ sudah selesai dengan subdivisi yang hanya terdiri atas (D_0).

Untuk $(N > 0)$, ambil koleksi hingga semua garis pendukung sisi-sisi (T_i). Susunan garis ini membagi bidang menjadi berhingga banyak sel konveks. Pada interior suatu sel, tanda terhadap setiap garis tetap, sehingga sel itu seluruhnya berada di dalam atau seluruhnya di luar setiap (T_i). Pilih semua sel dua-dimensi yang berada di dalam setidaknya satu (T_i). Karena gabungan segitiga terbatas, hanya sel terbatas yang terpilih. Penutupan setiap sel terpilih adalah poligon konveks, dan gabungan penutupan tersebut tepat $(T_1 \cup \cdots \cup T_N)$: setiap titik batas segitiga merupakan limit titik interior pada salah satu sel terpilih.

Triangulasikan setiap poligon konveks dengan diagonal dari satu titik sudut. Segitiga-segitiga yang dihasilkan berhingga banyak; dua di antaranya beririsan paling banyak pada ruas atau titik karena berasal dari triangulasi suatu sel atau dari sel susunan yang berbeda. Himpunan (D_0) juga beririsan dengan setiap segitiga hanya dalam himpunan degenerat. Jadi semua segitiga tersebut, bersama satu bagian degenerat (D_0), merupakan subdivisi $(\mathcal{P})$.

Untuk ketunggalan, ambil dua fungsi luas (a_1, a_2) yang memenuhi aksioma sumber. Keduanya bernilai nol pada (D_0) menurut `cor:degenerate`. Teorema persegi panjang dan segitiga, yang diturunkan dari aksioma luas, memaksa keduanya memberi nilai $(\frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi}))$ yang sama pada setiap segitiga subdivisi. Proposisi subdivisi kemudian memberi

$$a_1(\mathcal{P}) = \sum_j a_1(T_j) = \sum_j a_2(T_j) = a_2(\mathcal{P}).$$

Dengan demikian setiap fungsi luas yang memenuhi aksioma memberi nilai yang sama pada setiap himpunan poligonal; luasnya terdefinisi secara tunggal.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Himpunan poligonal dapat terputus atau seluruhnya degenerat. Mengatakan "potong poligonnya" seolah-olah ada satu batas poligon sederhana tidak mencakup kedua kemungkinan itu.

20.11 Pembuktian diseksi kedua teorema Pythagoras

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex011`. **Label sumber:** `ex:pyth-2`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: luas persegi dan segitiga serta subdivisi.

Ketergantungan: gambar `pic-314`; validasi diseksi tidak boleh menggunakan identitas Pythagoras yang sedang dibuktikan.

Soal sumber. Susunlah bukti lain untuk teorema Pythagoras berdasarkan gambar tersebut.

(Dalam notasi di atas, gambar itu menunjukkan subdivisi $(\mathcal{K}_c)$ menjadi $(\mathcal{K}_{a-b})$ dan empat salinan $(\mathcal{T})$ jika $(a > b)$.)

Petunjuk penulis. Dengan mengandaikan $a > b$, kita telah membagi $\mathcal{K}_c$ menjadi $\mathcal{K}_{a-b}$ dan empat segitiga yang kongruen dengan $\mathcal{T}$. Oleh karena itu,

$$\operatorname{luas} \mathcal{K}_c = \operatorname{luas} \mathcal{K}_{a-b} + 4 \cdot \operatorname{luas} \mathcal{T}.$$

Menurut `thm:area-of-triangle`, luas $\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$. Oleh karena itu, identitas `eq:pyth-2` dapat ditulis sebagai

$$c^2 = (a-b)^2 + 2 \cdot a \cdot b.$$

Dengan menyederhanakannya, kita memperoleh teorema Pythagoras.

Kasus $a = b$ lebih sederhana. Kasus $b > a$ dapat dikerjakan dengan cara yang sama.

Petunjuk bertahap (orisinal). Sebelum menghitung luas, periksa dari sisi-sisi dan sudut siku-siku bahwa daerah pusat benar-benar persegi bersisi $(|a-b|)$ dan empat daerah lainnya kongruen dengan segitiga awal.

Jawaban atau pemeriksaan. $(c^2 = (a-b)^2 + 4(\frac{1}{2}ab) = a^2 + b^2)$.

Solusi lengkap. Susunan pada gambar menempatkan empat salinan segitiga siku-siku dengan kaki (a, b) di dalam persegi bersisi (c). Hipotenusa keempat segitiga membentuk keempat sisi luar. Pada setiap sisi daerah pusat, bagian kaki sepanjang (a) berhadapan dengan bagian sepanjang (b), sehingga panjang sisanya $(|a-b|)$. Sudut-sudut pusat siku-siku karena dua sudut lancip segitiga awal berjumlah $(90°)$. Jadi daerah pusat memang persegi $(\mathcal{K}_{|a-b|})$, tanpa menggunakan teorema Pythagoras.

Untuk $(a > b)$, aditivitas subdivisi dan rumus luas memberi

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right) = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Jika $(b > a)$, tukarkan nama (a, b). Jika $(a = b)$, daerah pusat menyusut menjadi himpunan degenerat berluas nol dan perhitungan yang sama memberi $(c^2 = 2a^2 = a^2 + b^2)$.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Gambar bukan bukti bahwa daerah pusat persegi; kesamaan panjang sisinya dan keempat sudut siku-siku harus diperiksa sebelum persamaan luas ditulis.

20.12 Jumlah tiga jarak dalam segitiga sama sisi

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex012`. **Label sumber:** `ex:sum-3-dist`. **Tingkat:** dasar–menengah.

Prasyarat: subdivisi dan rumus luas segitiga.

Ketergantungan: titik berada di interior segitiga sama sisi.

Soal sumber. Tunjukkan bahwa jumlah jarak dari suatu titik ke sisi-sisi segitiga sama sisi bernilai sama untuk semua titik di dalam segitiga tersebut.

Petunjuk penulis. Jika X merupakan titik di dalam $\triangle ABC$, maka $\blacktriangle ABC$ disubdivisi menjadi $\blacktriangle ABX$, $\blacktriangle BCX$, dan $\blacktriangle CAX$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\operatorname{luas}(\blacktriangle ABX) + \operatorname{luas}(\blacktriangle BCX) + \\ + \operatorname{luas}(\blacktriangle CAX) = \operatorname{luas}(\blacktriangle ABC).\end{aligned}$$

Tetapkan $a = AB = BC = CA$. Misalkan h_1, h_2, dan h_3 menyatakan jarak dari X ke sisi $[AB]$, $[BC]$, dan $[CA]$. Maka menurut `thm:area-of-triangle`,

$$\begin{aligned}\text{luas}(\blacktriangle ABX) &= \tfrac{1}{2} \cdot h_1 \cdot a,\\ \text{luas}(\blacktriangle BCX) &= \tfrac{1}{2} \cdot h_2 \cdot a,\\ \text{luas}(\blacktriangle CAX) &= \tfrac{1}{2} \cdot h_3 \cdot a.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{2}{a} \cdot \text{luas}(\blacktriangle ABC).$$

Petunjuk bertahap (orisinal). Ruas kanan hanya bergantung pada segitiga tetap. Bandingkan juga dengan rumus luas yang memakai tinggi (h) segitiga itu sendiri.

Jawaban atau pemeriksaan. Jumlah tersebut selalu sama dengan tinggi segitiga sama sisi.

Solusi lengkap. Ketiga segitiga kecil membentuk subdivisi karena (X) interior. Substitusi ketiga rumus luas pada persamaan aditivitas memberi tepat persamaan terakhir pada petunjuk. Jika (h) adalah tinggi segitiga sama sisi, maka ($\text{luas}(\blacktriangle ABC) = \frac{1}{2}ah$). Jadi

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2}ah = h,$$

suatu nilai yang tidak bergantung pada (X).

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jarak ke sisi adalah panjang tegak lurus, bukan jarak ke titik sudut terdekat.

20.13 Enam luas sama yang dibentuk garis berat

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex013`. **Label sumber:** `ex:area-medians`. **Tingkat:** menengah.

Prasyarat: titik berat, median, dan perbandingan luas.

Ketergantungan: `thm:centroid` dan `clm:area-ratio`.

Soal sumber. Buktikan bahwa garis-garis berat suatu segitiga tak degenerat membaginya menjadi enam segitiga yang luasnya sama.

Petunjuk penulis. Terapkan `thm:centroid` dan `clm:area-ratio` beberapa kali.

Petunjuk bertahap (orisinal). Misalkan (D, E, F) titik tengah (BC, CA, AB), dan (G) titik berat. Tunjukkan dulu bahwa ($\text{luas}(\blacktriangle ABG) = \frac{1}{3}\,\text{luas}(\blacktriangle ABC)$), lalu belah alas (AB) di (F).

Jawaban atau pemeriksaan. Masing-masing dari enam segitiga mempunyai luas ($\frac{1}{6}\,\text{luas}(\blacktriangle ABC)$).

Solusi lengkap. Menurut `thm:centroid`, ketiga median berpotongan di (G), dan pada median (CF) berlaku $(CG : GF = 2 : 1)$. Karena $(F \in AB)$, tinggi dari (G) ke (AB) adalah sepertiga tinggi dari (C) ke (AB): hal ini mengikuti dari kesebangunan segitiga siku-siku yang diperoleh dengan memproyeksikan (C) dan (G) ke (AB). Maka segitiga (ABG) dan (ABC), yang berbagi alas (AB), mempunyai perbandingan luas $(1 : 3)$.

Karena (F) titik tengah (AB), segitiga (AFG) dan (BFG) mempunyai alas sama panjang $(AF = FB)$ dan tinggi yang sama dari (G); masing-masing berluas setengah (ABG), yakni seperenam luas (ABC). Penerapan siklik pada sisi (BC) dengan titik tengah (D), dan pada sisi (CA) dengan titik tengah (E), memberi empat segitiga lain dengan luas yang sama. Keenamnya mempunyai interior saling lepas dan mengisi segitiga semula.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Fakta bahwa setiap median membagi segitiga menjadi dua luas sama belum dengan sendirinya membuktikan enam bagian sama; rasio $(2 : 1)$ titik berat diperlukan.

20.14 Rasio luas dan kasus internal teorema Ceva

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex014`. **Label sumber:** `ex:ceva`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: perbandingan luas untuk tinggi sama.

Ketergantungan: `clm:area-ratio`; semua kata "di antara" dibaca ketat agar panjang dan luas penyebut positif.

Soal sumber. Misalkan (ABC) merupakan segitiga tak degenerat. Andaikan (A') terletak di antara (B) dan (C), titik (B') terletak di antara (C) dan (A), dan titik (C') terletak di antara (A) dan (B). Andaikan ruas-ruas garis $([AA'])$, $([BB'])$, dan $([CC'])$ bertemu di titik (X). Tunjukkan bahwa

$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle ABX)}{\text{luas}(\blacktriangle BCX)} = \frac{AB'}{B'C},$$
$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle BCX)}{\text{luas}(\blacktriangle CAX)} = \frac{BC'}{C'A},$$
$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle CAX)}{\text{luas}(\blacktriangle ABX)} = \frac{CA'}{A'B}.$$

Simpulkan bahwa

$$\frac{AB' \cdot CA' \cdot BC'}{B'C \cdot A'B \cdot C'A} = 1.$$

Petunjuk penulis. Terapkan `clm:area-ratio` untuk menunjukkan bahwa

$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle ABX)}{\text{luas}(\blacktriangle ABB')} = \frac{BX}{BB'} = \frac{\text{luas}(\blacktriangle BCX)}{\text{luas}(\blacktriangle CBB')}$$

dan, oleh karena itu,

$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle ABX)}{\text{luas}(\blacktriangle BCX)} = \frac{\text{luas}(\blacktriangle ABB')}{\text{luas}(\blacktriangle CBB')} = \frac{AB'}{B'C}.$$

Ini menyiratkan identitas pertama; identitas lainnya serupa. Dengan mengalikan semua identitas tersebut, kita memperoleh pernyataan terakhir.

Petunjuk bertahap (orisinal). Gunakan garis (BB') sebagai garis alas pada perbandingan pertama, lalu garis (AC) pada perbandingan kedua. Ulangi secara siklik.

Jawaban atau pemeriksaan. Ketiga rasio luas saling berantai; hasil kalinya di ruas kiri adalah (1), sehingga hasil kali tiga rasio ruas di kanan juga (1).

Solusi lengkap. Betweenness yang ketat membuat (A', B', C') berbeda dari titik sudut. Karena ketiga cevian berupa ruas internal dan bertemu, (X) berada di interior segitiga; semua panjang dan luas pada penyebut positif. Segitiga (ABX) dan (ABB') mempunyai titik sudut (A) serta alas (BX, BB') pada garis yang sama, sehingga rasio luasnya (BX/BB'). Hal yang sama dengan titik sudut (C) memberi rasio $(BCX : CBB' = BX : BB')$. Membagi kedua persamaan dan kemudian membandingkan segitiga (ABB') serta (CBB'), yang mempunyai tinggi sama dari (B) ke garis (AC), menghasilkan

$$\frac{\text{luas}(\blacktriangle ABX)}{\text{luas}(\blacktriangle BCX)} = \frac{AB'}{B'C}.$$

Penerapan siklik memberi dua identitas lain pada soal. Mengalikannya membuat setiap luas muncul sekali di pembilang dan sekali di penyebut, jadi ruas kiri menjadi (1); ruas kanan adalah hasil kali Ceva yang dinyatakan sumber.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Jangan membatalkan luas atau panjang sebelum memastikan penyebut taknol. Syarat betweenness sumber adalah bagian esensial bukti, bukan hiasan gambar.

20.15 Rasio silang melalui perbandingan luas

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex015`. **Label sumber:** `ex:cross-ratio-area`. **Subbutir sumber:** `ex:cross-ratio-area:a`, `ex:cross-ratio-area:b`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: perbandingan luas dan proyeksi pusat.

Ketergantungan: `clm:area-ratio`; rasio menggunakan panjang biasa dan karenanya menyatakan nilai mutlak rasio silang kecuali segmen berarah telah ditetapkan sebelumnya.

Soal sumber.

Andaikan titik-titik (L_1, L_2, L_3, L_4) terletak pada garis (ℓ) dan titik-titik (M_1, M_2, M_3, M_4) terletak pada garis (m). Andaikan garis-garis $((L_1M_1), (L_2M_2), (L_3M_3), (L_4M_4))$ melalui titik (O) yang tidak terletak pada (ℓ) maupun (m).

(a) Terapkan Klaim `clm:area-ratio` untuk menunjukkan bahwa

$$\frac{\text{luas}\,\blacktriangle OL_iL_j}{\text{luas}\,\blacktriangle OM_iM_j} = \frac{OL_i \cdot OL_j}{OM_i \cdot OM_j}$$

untuk sebarang $(i \neq j)$.

(b) Gunakan *(`ex: cross-ratio-area: a`)* untuk membuktikan bahwa

$$\frac{L_1L_2 \cdot L_3L_4}{L_2L_3 \cdot L_4L_1} = \frac{M_1M_2 \cdot M_3M_4}{M_2M_3 \cdot M_4M_1};$$

yakni, empat-tupel $((L_1, L_2, L_3, L_4))$ dan $((M_1, M_2, M_3, M_4))$ memiliki rasio silang yang sama.

Kualifikasi sumber. Pernyataan tidak menyebut bahwa titik-titik dalam setiap empat-tupel harus berbeda. Namun bagian (a) membagi dengan luas (OM_iM_j), dan bagian (b) membagi dengan $(L_2L_3, L_4L_1, M_2M_3, M_4M_1)$. Rumus-rumus tersebut hanya terdefinisi bila titik terkait berbeda; untuk klaim "setiap $(i \neq j)$", ambil keempat (L_i) berbeda, sehingga proyeksi pusat juga membuat keempat (M_i) berbeda. Ini dicatat sebagai syarat keterdefinisian implisit dan tidak ditambahkan diam-diam ke teks sumber.

Petunjuk penulis. Untuk membuktikan *(`ex: cross-ratio-area: a`)*, terapkan `clm:area-ratio` dua kali pada $\blacktriangle OL_iL_j$, $\blacktriangle OL_jM_i$, dan $\blacktriangle OM_iM_j$.

Untuk membuktikan bagian *(`ex: cross-ratio-area: b`)*, gunakan `clm:area-ratio` untuk menulis ulang ruas kiri dengan menggunakan luas $\blacktriangle OL_1L_2$, $\blacktriangle OL_2L_3$, $\blacktriangle OL_3L_4$, dan $\blacktriangle OL_4L_1$. Selanjutnya, gunakan bagian *(`ex: cross-ratio-area: a`)* untuk menulis ulang ungkapan itu dengan luas $\blacktriangle OM_1M_2$, $\blacktriangle OM_2M_3$, $\blacktriangle OM_3M_4$, dan $\blacktriangle OM_4M_1$, lalu terapkan kembali `clm:area-ratio` untuk memperoleh ruas kanan.

Petunjuk bertahap (orisinal). Untuk (a), sisipkan segitiga (OL_jM_i). Untuk (b), tulis $(A_{ij} = \text{luas}(OL_iL_j))$, $(B_{ij} = \text{luas}(OM_iM_j))$, dan $(r_i = OL_i/OM_i)$; bagian (a) menjadi $(A_{ij}/B_{ij} = r_ir_j)$.

Jawaban atau pemeriksaan. Semua faktor radial $(r_1r_2r_3r_4)$ muncul sekali di pembilang dan sekali di penyebut, sehingga hilang dari rasio silang.

Solusi lengkap. Untuk (a), segitiga (OL_iL_j) dan (OM_iL_j) mempunyai tinggi sama dari (L_j) ke garis (OL_iM_i); karena itu rasio luasnya (OL_i/OM_i). Segitiga (OM_iL_j) dan (OM_iM_j) mempunyai tinggi sama dari (M_i) ke garis (OL_jM_j); rasio luasnya (OL_j/OM_j). Mengalikan kedua persamaan memberi

$$\frac{A_{ij}}{B_{ij}} = \frac{OL_i}{OM_i}\frac{OL_j}{OM_j} = r_ir_j.$$

Untuk (b), semua segitiga (OL_iL_j) mempunyai tinggi yang sama dari (O) ke (ℓ), sehingga

$$\frac{L_1L_2 \cdot L_3L_4}{L_2L_3 \cdot L_4L_1} = \frac{A_{12}A_{34}}{A_{23}A_{41}}.$$

Di sini produk di ruas kiri dibaca dengan pengelompokan sumber, $((L_1L_2)(L_3L_4)/((L_2L_3)(L_4L_1)))$. Dengan rumus (a),

$$\frac{A_{12}A_{34}}{A_{23}A_{41}} = \frac{B_{12}B_{34}}{B_{23}B_{41}}\frac{r_1r_2r_3r_4}{r_2r_3r_4r_1} = \frac{B_{12}B_{34}}{B_{23}B_{41}}.$$

Semua segitiga (OM_iM_j) mempunyai tinggi sama dari (O) ke (m), jadi rasio terakhir sama dengan $((M_1M_2)(M_3M_4)/((M_2M_3)(M_4M_1)))$. Inilah identitas sumber.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Kesamaan tidak sah sebagai identitas $(0/0)$. Selain itu, panjang takberarah memberi rasio silang absolut; tanda rasio silang terarah memerlukan konvensi orientasi tambahan.

20.16 Cakram satuan adalah kuadrabel

ID stabil: `o004-c100-sol-ch20-ex016`. **Label sumber:** `ex:circle-is-quadrable`. **Tingkat:** lanjut.

Prasyarat: segi-(n) beraturan, luas segitiga, dan limit dasar sinus-kosinus.

Ketergantungan: definisi himpunan kuadrabel; batas luas luar harus dibuktikan tanpa lebih dahulu memakai luas cakram.

Soal sumber. Misalkan $(\mathcal{D})$ merupakan suatu *cakram satuan tertutup*; yakni, $(\mathcal{D})$ merupakan himpunan yang memuat lingkaran satuan (Γ) dan semua titik di dalam (Γ). Tunjukkan bahwa $(\mathcal{D})$ merupakan himpunan kuadrabel.

Petunjuk penulis. Misalkan $\mathcal{P}_n$ dan $\mathcal{Q}_n$ merupakan segi-n beraturan padat sedemikian sehingga Γ terinskripsi dalam $\mathcal{Q}_n$ dan mengelilingi $\mathcal{P}_n$. Jelas bahwa $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{Q}_n$.

Tunjukkan bahwa $\frac{\text{luas}\,\mathcal{P}_n}{\text{luas}\,\mathcal{Q}_n} = (\cos\frac{\pi}{n})^2$; secara khusus,

$$\frac{\text{luas}\,\mathcal{P}_n}{\text{luas}\,\mathcal{Q}_n} \to 1 \quad \text{ketika} \quad n \to \infty.$$

Selanjutnya, tunjukkan bahwa $\text{luas}\,\mathcal{Q}_n < 100$ untuk setiap n yang cukup besar.

Kedua pernyataan ini menyiratkan bahwa

$$(\text{luas}\,\mathcal{Q}_n - \text{luas}\,\mathcal{P}_n) \to 0.$$

Jadi, diperoleh hasil yang dimaksud.

Petunjuk bertahap (orisinal). Bagi kedua poligon menjadi (n) segitiga sama kaki dari pusat. Untuk poligon dalam gunakan jari-jari (1); untuk poligon luar gunakan apotema (1). Setelah memperoleh rumus luas, gunakan batas elementer pada $(\tan(\pi/n))$ untuk mengendalikan luas luar secara seragam.

Jawaban atau pemeriksaan.

$$\text{luas}\,\mathcal{P}_n = n\sin(\pi/n)\cos(\pi/n), \qquad \text{luas}\,\mathcal{Q}_n = n\tan(\pi/n).$$

Rasionya $(\cos^2(\pi/n))$, dan selisihnya dibatasi oleh konstanta kali $(\sin^2(\pi/n))$.

Solusi lengkap. Ambil poligon dalam dan luar berpusat sama serta disejajarkan per sektor bersudut pusat $(2\pi/n)$. Poligon dalam mempunyai jari-jari lingkaran luar (1). Setiap salah satu dari (n) segitiga pusatnya berluas $(\frac{1}{2}\sin(2\pi/n))$, sehingga

$$\text{luas}\,\mathcal{P}_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Poligon luar mempunyai apotema (1). Setengah sisi setiap segitiga pusat adalah $(\tan(\pi/n))$, sehingga luas satu sektor adalah $(\tan(\pi/n))$ dan

$$\text{luas}\,\mathcal{Q}_n = n\tan\frac{\pi}{n}.$$

Pembagian rumus-rumus ini memberi $(\text{luas}\,\mathcal{P}_n/\,\text{luas}\,\mathcal{Q}_n = \cos^2(\pi/n))$, yang menuju (1) karena $(\pi/n \to 0)$ dan kosinus kontinu di nol.

Masih diperlukan batas seragam yang tidak memakai luas cakram. Untuk $(n \geq 4)$, tetapkan $(x = \pi/n \leq \pi/4)$. Ketaksamaan dasar $(\sin x \leq x)$ dan $(\cos x \geq \sqrt{2}/2)$ memberi

$$\text{luas}\,\mathcal{Q}_n = n\tan x \leq n\sqrt{2}\,x = \sqrt{2}\,\pi < 100.$$

Karena $(\mathcal{P}_n \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{Q}_n)$, dan

$$0 \le \text{luas}\,\mathcal{Q}_n - \text{luas}\,\mathcal{P}_n = \text{luas}\,\mathcal{Q}_n \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) < 100 \sin^2 \frac{\pi}{n} \longrightarrow 0,$$

untuk setiap $(\varepsilon > 0)$ ada (n) sehingga selisih luas kurang dari (ε). Kedua poligon bersifat poligonal, sehingga definisi kuadrabel terpenuhi.

Miskonsepsi yang perlu dihindari. Konvergensi rasio luas ke (1) saja belum membuat selisih luas menuju nol; luas poligon luar juga harus dibatasi secara seragam.

Uji penguasaan Bab 20

Skor maksimum adalah 20 poin; setiap butir bernilai 2 poin.

1. **(2 poin).** Buktikan konveksitas segitiga padat dan karakterisasikan titik sudutnya dengan garis yang hanya mempunyai satu titik persekutuan.
2. **(2 poin).** Buktikan bahwa persegi padat tak degenerat dan bahwa lingkaran bukan himpunan poligonal.
3. **(2 poin).** Buktikan kesamaan luas dua jajar genjang sumber dan identitas tiga hasil kali tinggi-sisi tanpa memakai rumus luas segitiga.
4. **(2 poin).** Turunkan identitas setengah jajar genjang, hasil kali luas diagonal, dan rumus $(K = pr)$.
5. **(2 poin).** Berikan konstruksi susunan garis yang mensubdivisi himpunan poligonal umum, termasuk komponen terputus dan sisa degenerat, lalu buktikan ketunggalan luas.
6. **(2 poin).** Audit diseksi kedua Pythagoras dan buktikan teorema jumlah tiga jarak pada segitiga sama sisi.
7. **(2 poin).** Buktikan enam luas sama dari garis berat dan ketiga identitas luas pada kasus internal teorema Ceva.
8. **(2 poin).** Buktikan bagian (a) latihan rasio silang dengan segitiga perantara dan nyatakan semua syarat keterdefinisiannya.
9. **(2 poin).** Buktikan bagian (b), perlihatkan pembatalan empat faktor radial, dan jelaskan perbedaan rasio silang takberarah serta berarah.
10. **(2 poin).** Buktikan cakram satuan kuadrabel, termasuk rasio kosinus dan batas seragam luas poligon luar.

Kunci lengkap dan rubrik

Kunci lengkap setiap butir adalah bagian berlabel berikut:

M1. 20.1 dan 20.2.

M2. 20.3 dan 20.4.

M3. 20.5 dan 20.6.

M4. 20.7–20.9.

M5. 20.10.

M6. 20.11 dan 20.12.

M7. 20.13 dan 20.14.

M8. 20.15, bagian (a).

M9. 20.15, bagian (b) dan kualifikasi.

M10. 20.16.

M1 (2 poin). Satu poin untuk irisan tiga setengah bidang tertutup; satu poin untuk bukti lengkap arah titik-sudut dan bukan-titik-sudut.

M2 (2 poin). Satu poin untuk pemilihan arah di luar daftar hingga ruas; satu poin untuk klasifikasi himpunan elementer yang dapat termuat dalam lingkaran.

M3 (2 poin). Satu poin untuk dua perbandingan jajar genjang dengan garis sejajar; satu poin untuk dua kesebangunan yang menghasilkan ketiga hasil kali sama.

M4 (2 poin). Satu poin untuk dua subdivisi/base-height pertama; satu poin untuk empat faktor diagonal dan penjumlahan tiga segitiga berjari-jari tinggi (r).

M5 (2 poin). Satu poin untuk susunan hingga garis, sel konveks, triangulasi, dan sisa degenerat; satu poin untuk membandingkan dua fungsi luas pada subdivisi itu.

M6 (2 poin). Satu poin untuk verifikasi persegi pusat serta identitas luas Pythagoras; satu poin untuk subdivisi tiga segitiga dan konstanta tinggi segitiga sama sisi.

M7 (2 poin). Satu poin untuk rasio titik berat dan enam bagian $(1/6)$; satu poin untuk ketiga rasio Ceva, penyebut positif, dan hasil kali (1).

M8 (2 poin). Satu poin untuk dua perbandingan tinggi-sama melalui segitiga perantara; satu poin untuk distinctness semua titik yang membuat area dan rasio terdefinisi.

M9 (2 poin). Satu poin untuk penulisan empat rasio luas dan pembatalan $(r_1r_2r_3r_4)$; satu poin untuk audit panjang takberarah versus segmen berarah.

M10 (2 poin). Satu poin untuk rumus luas kedua poligon dan rasio $(\cos^2(\pi/n))$; satu poin untuk batas seragam $(n\tan(\pi/n) < 100)$ dan deduksi selisih luas menuju nol.

Indeks label sumber eksternal

Entri berikut adalah target navigasi untuk label yang berada di luar dua puluh unit solusi. Entri ini bukan salinan pernyataan sumber dan tidak menggantikan buku utama.

`cor:degenerate=pi`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:half-plane`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:inscribed-quadrangle`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:invese-comp`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:perp-inverse`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:perp-inverse-clines`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:reflection+angle`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`cor:right-angle-diameter`
Akibat sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:0`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:1`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:2a`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:2b`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:2c`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:3`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`def:birkhoff-axioms:4`
Aksioma sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`double-argument`
Identitas sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:2a=0`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:ABCO-line`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:AOB+<=>BOA-`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:SAA`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:[OA)=[OB)`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:abs-bisect=median`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:apolonnius`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:bisect=median`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:circle-coord`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:construction-parallel`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:construction-perp-clines`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:cosh/2`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:coshcosh`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:coshsinh`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:coshtanh`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:defect`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:ideal-line-unique`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:inscribed-angle`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:inscribed-angle:b`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:inside-outside`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:line-motion`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:lineAOB`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:neutral-quadrangle`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:neutral-rectangle`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:orthic-sim`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:quadrangle`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:side-angle`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:trig==`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`ex:two-chords`
Latihan sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:AOA=O`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:O-h-dist`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:P->O`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:bisect-ratio`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:h-circle=circle`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:inverse-4-angle`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:inverse-4-angle:angle`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:inversion-sim`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:parallelogram`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:perp<oblique`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`lem:tangent`
Lema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:2sum`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:angle-bisect-dist`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:angle-parallelism`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:angle-side`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:arc(angle=tan)`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:arcs`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:circum`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:perp-perp`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:point-reflection`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:point-reflection+`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`prop:vert`
Proposisi sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`sec:verification`
Bagian sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:3sum`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:3sum-a`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:3sum-h`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:=IV`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:=IV:defect`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:=IV:rectangle`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:AAA`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:ASA`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:abc`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:centroid`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:circumcenter`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:hypotenuse-leg`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:incenter`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:inscribed-angle`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:inverse`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:inverse-cline`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:isos`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:main-observ`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:orthocenter`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:parallel`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:parallel-2`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:perp-bisect`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:perp-inverse`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:pyth-h-poincare`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:signs-of-triug`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:straight-angle`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

`thm:tangent-angle`
Teorema sumber; lihat edisi Indonesia utama.

Atribusi, lisensi, dan provenans

Karya sumber: Anton Petrunin, *Euclidean Plane and Its Relatives: A Minimalist Introduction*; sumber kerja commit `0b0858e1e985f4c8dadbb6075ae9e095cd4a8981`. Pernyataan latihan dan petunjuk penulis yang dirujuk berasal dari karya tersebut dan tetap berada di bawah atribusi sumbernya.

Petunjuk bertahap tambahan, jawaban/pemeriksaan, solusi lengkap, metadata, uji penguasaan, kunci, rubrik, serta driver pembaca ini adalah komponen tambahan mandiri yang ditawarkan berdasarkan Creative Commons Attribution- ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0). Perubahan meliputi penerjemahan, penambahan solusi dan metadata pembelajaran, serta penyusunan pembaca kumulatif. Komponen ini tidak ditulis, ditinjau, atau disahkan oleh Anton Petrunin. Provenans produksi: **OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.**