

EDISI PEMBACA LENGKAP TERVERIFIKASI

Pengantar Pemodelan Matematika

Edisi Bahasa Indonesia independen

Joceline Lega

University of Arizona Pressbooks v1.01 (Maret 2026)

Terjemahan dan adaptasi Bahasa Indonesia, 23 Agustus
2026

Status edisi

Edisi pembaca lengkap

PDF ini memuat seluruh 22 unit sumber: Prakata, pengantar Bagian 1–5, Bab 1–14, Pernyataan Aksesibilitas, dan Riwayat Versi. Empat modul jembatan orisinal menambahkan alur kerja Python/Jupyter, bifurkasi lokal, kekacauan dan peta balik, serta validasi dan ketidakpastian model. Semua 113 soal sumber mempertahankan dukungan penguasaan; notebook dan paket proyek tersedia dalam arsip sumber pendamping.

Lisensi, atribusi, dan perubahan

Karya sumber: Joceline Lega, *Introduction to Mathematical Modeling*, University of Arizona Pressbooks v1.01 (Maret 2026). Karya sumber, terjemahan, dan adaptasi ini dilisensikan dengan [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International \(CC BY-NC-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Perubahan meliputi penerjemahan, pengindeksan modular, gambar ulang aksesibel, petunjuk/pemeriksaan/pembahasan baru, serta implementasi Python terbuka untuk latihan komputasi. Edisi independen ini tidak disokong atau disahkan oleh Joceline Lega maupun University of Arizona. Komponen pihak ketiga yang hanya ditautkan tidak disalin dan tetap berada di bawah ketentuan penerbit masing-masing.

Sumber digital pendamping

Notebook Python, data, paket proyek, backend ber-ID stabil, sumber HTML, manifest, dan checksum tersedia dalam arsip sumber ringkas yang diterbitkan bersama PDF ini. Penanda *[paket sumber]* menunjukkan sumber daya tersebut.

Sumber resmi: opentextbooks.library.arizona.edu/mathematicalmodeling/.

Daftar isi

PRAKATA

Prakata

BAGIAN 1

Pendahuluan

BAB 1

Tentang Hakikat Pemodelan Matematika

BAB 2

Langkah Awal: Memodelkan Gelombang

BAGIAN 2

Model-Model dari Mekanika Klasik

BAB 3

Pendulum Nonlinear

BAB 4

Pemantulan Batu di Permukaan Air

BAGIAN 3

Dinamika Populasi dan Epidemiologi

BAB 5

Model Populasi Satu Spesies

BAB 6

Model Populasi Dua Spesies

BAB 7

Epidemiologi

BAGIAN 4

Reaksi Kimia dan Efek Spasial

BAB 8

Reaksi Kimia

BAB 9

Difusi

BAB 10

Pembentukan Pola

BAGIAN 5

Lampiran

BAB 11

Penyegaran: Aljabar Linear

BAB 12

Penyegaran: Kalkulus Vektor

BAB 13

Penyegaran: Persamaan Diferensial Biasa

BAB 14

Proyek Pemodelan

PERNYATAAN AKSESIBILITAS

Pernyataan Aksesibilitas

RIWAYAT VERSI

Riwayat Versi

MODUL JEMBATAN C1

Alur Kerja Python/Jupyter yang Reprodusibel

MODUL JEMBATAN C2

Bifurkasi Lokal: Perubahan Kestabilan dan Munculnya

Osilasi

MODUL JEMBATAN C3

Penggandaan Periode, Kekacauan, dan Peta Balik

MODUL JEMBATAN C4

Kalibrasi, Identifiabilitas, Validasi, dan Ketidakpastian

Model

Prakata

0005-LEGA-V101-FM01

Apa itu model matematika? Bagaimana model tersebut dikembangkan? Seberapa besar kita patut memercayainya: dapatkah kita yakin pada prediksinya, dan tahukah kita kapan perlu bertindak berdasarkan prediksi itu? Pertanyaan-pertanyaan ini, yang secara rutin dihadapi oleh praktisi pemodelan matematika, juga penting bagi warga masyarakat dan pembuat kebijakan. Masyarakat modern kita memerlukan model yang dapat diandalkan, bukan hanya untuk memperdalam pemahaman kita tentang suatu keadaan, melainkan juga untuk menjadi dasar pengambilan keputusan kebijakan.

Pengantar pemodelan matematika ini disusun untuk mahasiswa tahun terakhir program sarjana matematika yang menekuni matematika terapan, ilmu hayati, atau teknik. Mata kuliah ini bertumpu pada pengetahuan tentang kalkulus, aljabar linear, dan persamaan diferensial untuk membahas teknik dasar serta proses berpikir yang menjadi landasan pemodelan matematika. Gaya penyajiannya sengaja dibuat santai. Tujuan utamanya ialah menjelaskan bagaimana matematika yang dipelajari dalam mata kuliah inti program sarjana dapat digunakan untuk memahami fenomena sederhana dalam fisika dan biologi, serta bagaimana model yang bersangkutan disusun, diuji, dan dianalisis.

Teks ini mencakup semua sistem baku yang lazim dibahas dalam mata kuliah pemodelan: pendulum nonlinear, pemetaan kacau, model pemangsa–mangsa, spesies yang bersaing, reaksi kimia, serta, menjelang akhir, difusi dan sistem yang terbentang secara spasial. Tidak satu pun di antaranya merupakan topik yang rumit, dan orang dapat berpendapat bahwa model semacam itu terlalu sederhana untuk berguna. Namun, semuanya merupakan unsur pembangun pemodelan matematika dan, meskipun sederhana, menyediakan perangkat untuk menangani model yang lebih rumit dan realistis. Penekanan diberikan pada latihan menggunakan metode yang sederhana tetapi umum, seperti analisis dimensi, analisis bidang fase, dasar-dasar teori titik tetap, dan eksplorasi numerik. Jika memungkinkan, keterkaitan antarsistem dibangun dengan menelaah kesamaan di antara model matematika yang menggambarannya. Meskipun beberapa bagian melibatkan keacakan, sebagian besar teks ini membahas model deterministik yang didasarkan pada persamaan beda atau persamaan diferensial. Pilihan ini disengaja agar materi tersebut dapat dicakup dalam mata kuliah satu semester. Terakhir, karena pemodel perlu menjadi komunikator sains yang baik dan memahami potensi penggunaan maupun penyalahgunaan model matematika, bab pertama teks ini membahas persoalan-persoalan tersebut melalui beberapa contoh.

Banyak buku bermutu tentang sistem dinamik tersedia dalam literatur, dan beberapa di antaranya memotivasi kajian sistem nonlinear melalui model matematika. Karena itu, orang mungkin mempertanyakan kegunaan mata kuliah tersendiri tentang pemodelan matematika. Sudut pandang yang disajikan di sini ialah bahwa pemodelan matematika merupakan seni memanfaatkan pengetahuan matematika untuk menggambarkan dunia dalam bentuk matematis. Hal ini memerlukan daya nalar yang baik dan pemahaman yang kokoh tentang metode matematika, serta kemahiran bermatematika yang melampaui penguasaan persamaan diferensial ataupun pokok matematika inti lainnya. Teks ini bertujuan mengembangkan keterampilan dan cara berpikir tersebut melalui praktik pemodelan matematika dengan contoh-contoh sederhana yang dipilih secara cermat. Lampiran-lampiran disediakan untuk mengulas perangkat matematika dasar yang diperlukan guna menyusun dan menganalisis model. Antarmuka pengguna grafis MATLAB disertakan dalam bahan mata kuliah sehingga pembaca dapat mengeksplorasi peran parameter model melalui antarmuka grafis, tanpa perlu menguasai metode numerik atau paket perangkat lunak numerik tertentu.

Buku ini akan memberi pembaca bekal yang diperlukan untuk memahami artikel penelitian ilmiah yang menggunakan pemodelan matematika, misalnya artikel dalam *Science*, *Nature*, dan *PNAS*. Sejak 2005, berbagai versi catatan ini telah digunakan sebagai teks utama untuk mata kuliah integratif tingkat akhir selama satu semester di University of Arizona. Mahasiswa yang mengambil mata kuliah pemodelan matematika juga bekerja dalam tim untuk mengerjakan proyek sepanjang semester di bawah bimbingan mentor yang sedang atau telah menempuh pendidikan pascasarjana. Setiap proyek bertumpu pada upaya memahami dan mereproduksi hasil suatu artikel penelitian. Tim menulis laporan tengah semester dan laporan akhir, kemudian mempresentasikan pekerjaan mereka dalam sesi poster yang diselenggarakan di

tempat terbuka untuk umum pada akhir semester. Untuk versi daring mata kuliah tersebut, poster digantikan dengan presentasi video kelompok yang dinilai oleh anggota komunitas universitas. Sangat dianjurkan untuk menggunakan format penyelenggaraan serupa ketika mengampu mata kuliah dengan teks ini. Daftar proyek terkini beserta artikel terkait disediakan sebagai lampiran.

Saya ingin berterima kasih kepada semua rekan saya di Departemen Matematika, University of Arizona, yang sejak 2007 telah mengajar mata kuliah pemodelan matematika kami dengan teks ini. Saya juga berterima kasih kepada seluruh mentor yang sedang atau telah menempuh pendidikan pascasarjana dan yang selama hampir dua dasawarsa telah membimbing tim mahasiswa sarjana peserta mata kuliah ini dalam mengerjakan proyek pemodelan mereka. Terakhir, pengembangan awal catatan ini dapat terlaksana berkat hibah TRIF (Technology and Research Initiative Fund) dari University of Arizona; atas dukungan tersebut saya menyampaikan penghargaan yang sedalam-dalamnya.

Joceline Lega
University of Arizona
Musim Gugur 2012 & Musim Panas 2024

BAGIAN 1

Pendahuluan

0005-LEGA-V101-PT01

Dua bab pertama dalam catatan ini bertujuan memperkenalkan konsep-konsep dasar pemodelan matematika. Penekanan khusus diberikan pada proses pemodelan, yang melibatkan pengujian dan penyempurnaan model matematika secara berulang.

Bab 1 memperkenalkan model matematika dan proses pemodelan, membahas kegunaan model matematika, serta meninjau beragam keterampilan yang perlu dimiliki pemodel matematika. Bagian latihan mendorong pembaca untuk merenungkan bagaimana model sebaiknya digunakan dan bagaimana model tidak seharusnya digunakan.

Bab 2 bertujuan menyusun model matematika langkah demi langkah dengan mengikuti proses pemodelan. Kebanyakan pembaca tentu mengenal fenomena yang akan dimodelkan: gelombang manusia di sebuah stadion.

Tentang Hakikat Pemodelan Matematika

0005-LEGA-V101-CH01

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menjelaskan apa yang dimaksud dengan model matematika.
- Menjelaskan apa yang diperlukan untuk menjadi pemodel matematika yang baik.
- Menjelaskan cara membangun model matematika dengan menjalani siklus pemodelan.
- Membahas peran hipotesis dalam proses pembangunan model serta bagaimana hipotesis membatasi kemungkinan penerapan model.
- Merefleksikan penggunaan model matematika yang semestinya.

Apa itu model?

Kata *model* mengacu pada suatu representasi—sering kali disederhanakan—atasi sebuah objek atau hasil pengamatan. Karena itu, sebuah model setidaknya diharapkan dapat meniru, dan lebih baik lagi menjelaskan serta memprediksi, aspek-aspek penting dari suatu fenomena. *Model matematika* biasanya terdiri atas satu atau lebih persamaan yang menghubungkan variabel *terikat* (atau keluaran) dengan variabel *bebas* (atau masukan). Model matematika juga sering melibatkan *parameter*.

Definisi ini memunculkan pertanyaan tentang *reproduksi* dibandingkan dengan *penjelasan*. Sebagai contoh, perhatikan terbentuknya riak pada pasir pantai. Kita dapat membayangkan sebuah model yang memperhitungkan interaksi setiap butir pasir dengan butir-butir di sekitarnya, dengan udara, dan dengan butir-butir yang diam di permukaan tanah. Model semacam ini akan cukup rumit dan melibatkan banyak persamaan dinamis, tetapi dalam keadaan yang sesuai seharusnya dapat mereproduksi terbentuknya riak pasir. Pendekatan lain dapat bekerja pada tingkat yang lebih menyeluruh. Dalam pendekatan ini, model memperhatikan ketinggian pasir di atas permukaan tanah dan menunjukkan bahwa, dalam suatu rentang parameter, besaran tersebut berosilasi sebagai fungsi posisi. Kedua model itu dapat mereproduksi fenomena yang sama, tetapi memberikan jenis penjelasan yang berbeda. Perbedaan ini berasal dari sifat keduanya: model pertama bekerja pada tingkat *mikroskopis* atau partikulat, sedangkan model kedua bekerja pada tingkat *makroskopis*. Model ketiga dapat berupa semacam “kotak hitam”: masukannya adalah parameter yang relevan, seperti kecepatan angin serta massa dan ukuran butir pasir, sedangkan keluarannya berupa pola garis dengan sifat yang tepat (periode, tinggi, dan sebagainya). Model seperti ini dapat dibuat dengan melakukan eksperimen secara cermat, menyusun hasilnya dalam tabel, lalu mencari fungsi yang cocok dengan data. Model tersebut tidak menjelaskan mengapa riak pasir terbentuk, tetapi tetap dapat memiliki kemampuan prediktif.

Sejalan dengan itu, telah diketahui bahwa pegunungan, awan, pepohonan, bahkan sejumlah karya seni [menyerupai fraktal](#). Mengetahui kemiripan ini dapat membantu perancang grafis menciptakan bentang alam virtual yang meyakinkan dan indah, tetapi tidak menjelaskan bagaimana gunung atau awan terbentuk.

Dengan demikian, model yang berbeda dapat menghasilkan keluaran yang serupa, dan pemodel harus menentukan model mana yang paling sesuai dengan kebutuhannya. Penentuan ini tentu mengandung pertimbangan subjektif, tetapi hasilnya perlu didasarkan pada jawaban atas pertanyaan-pertanyaan berikut.

- *Apa yang kita inginkan dari model tersebut: mereproduksi, menjelaskan, memprediksi, atau melakukan hal lain?*
- *Apakah model yang prediktif tetapi mahal sepadan dengan upaya yang diperlukan untuk membuatnya?*

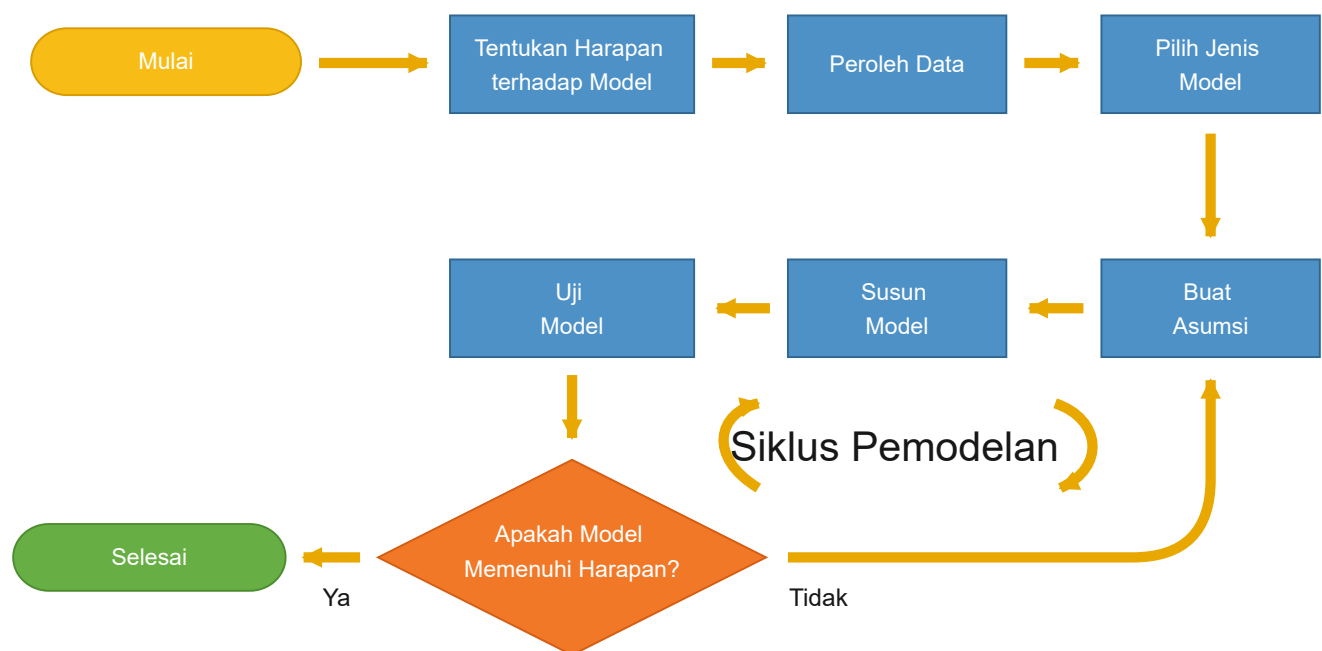
- Apa saja kriteria minimum yang harus dipenuhi model?

Persoalan terkait adalah bahwa fenomena yang berbeda dapat menghasilkan perilaku yang serupa, seperti penyakit yang berbeda dapat menimbulkan gejala yang sama. Akibatnya, model yang mereproduksi perilaku yang diinginkan belum tentu memiliki nilai penjelas atau prediktif. Demikian pula, kita tidak dapat mendiagnosis penyakit secara masuk akal hanya berdasarkan gejala yang tidak khas bagi penyakit tersebut.

Dalam buku ini, kita tidak akan membahas pendekatan pencocokan kurva (meskipun latihan-latihannya memuat penerapan metode kuadrat terkecil), melainkan memusatkan perhatian pada model yang bersifat *deskriptif dan eksplanatoris*. Model-model tersebut sering terdiri atas sekumpulan persamaan dinamis. Kita akan mempelajari cara menganalisisnya untuk menilai kemampuannya dalam mereproduksi dan memprediksi fenomena yang relevan. Pembaca diasumsikan telah menguasai dasar-dasar kalkulus, persamaan diferensial, dan aljabar linear. Tinjauan singkat atas topik-topik tersebut tersedia dalam lampiran.

Cara mengembangkan model matematika

Sekarang kita beralih ke langkah-langkah dasar dalam membuat model matematika. Kita akan mengikuti pedoman ini pada semua model yang dibahas di sini: mula-mula secara sangat eksplisit, kemudian secara lebih tersirat.



Gambar 1.1. Proses Pemodelan Matematika dan Siklus Pemodelan. [Deskripsi Gambar](#)

Tentukan apa yang hendak dimodelkan

Langkah pertama adalah menentukan apa yang harus dicapai oleh model. Dengan kata lain, kita perlu menyusun seperangkat kriteria yang harus dipenuhi oleh model yang memadai. Kriteria ini biasanya lahir dari upaya menyeimbangkan keinginan memperoleh model yang sempurna dengan keterbatasan waktu dan biaya pembuatan model.

Peroleh data

Data sering menjadi sarana terbaik untuk membangun pemahaman intuitif tentang fenomena yang diteliti. Bila relevan, kita juga perlu menguasai prinsip-prinsip dasar fisika, biologi, atau kimia yang menyebabkan perilaku yang diamati. Langkah ini dapat cukup rumit dan sering menuntut pencarian informasi dalam literatur dan/atau pembahasan data bersama para ahli.

Pilih tingkat kerumitan model

Kembali pada contoh terbentuknya riak pasir, kita perlu memutuskan apakah model mikroskopis lebih tepat daripada model makroskopis. Keputusan tersebut dapat didasarkan pada preferensi pribadi pemodel, sifat data yang tersedia, dan tingkat pemahaman terkini mengenai fenomena itu.

Buat asumsi

Kita harus menentukan fakta (atau parameter) mana yang tidak relevan sehingga dapat diabaikan dan mana yang harus diperhitungkan.

Susun model

Kita perlu mendefinisikan variabel bebas dan variabel terikat, menetapkan parameter yang relevan, serta menuliskan formulasi matematis model. Formulasi tersebut harus sesederhana mungkin, dan kita perlu memahami dengan jelas arti setiap suku dalam persamaan-persamaan penyusun model matematika itu.

Uji model

Langkah ini sangat penting untuk menentukan apakah kita puas dengan model yang dibuat. Perilaku model dapat dikaji secara analitis, secara numerik, atau dengan keduanya. Selanjutnya, kita perlu menanyakan apakah intuisi kita secara umum selaras dengan perilaku model, apakah model tersebut tepat secara kualitatif dan kuantitatif, dan apakah kasus-kasus batasnya masuk akal. Jika tidak, kita perlu menemukan penyebabnya dan memperbaiki model—dengan kata lain, kembali ke langkah-langkah sebelumnya. Jadi, pemodelan merupakan *proses iteratif*, seperti diperlihatkan pada Gambar 1.1. Dalam proses ini, model disempurnakan dengan membandingkan hasil analisis terhadap intuisi kita, data eksperimen yang tersedia, atau pemahaman yang telah diterima mengenai fenomena yang dipelajari.

Mengapa mengembangkan model matematika?

Model matematika adalah sekumpulan persamaan yang mencerminkan pemahaman kita tentang suatu fenomena. Bagi orang yang baru mengenalnya, model mungkin terlihat misterius. Namun, bagi orang yang dapat *membaca* model, model merupakan sarana komunikasi yang efisien dan ringkas. Pembuatan model membutuhkan banyak upaya, pemikiran, pengujian, dan pemahaman, tetapi pada akhirnya seluruh pekerjaan itu diringkas dalam sekumpulan persamaan atau rumusan suatu proses iteratif. Model semacam itu adalah cara ilmuwan mengungkapkan persepsinya tentang dunia.

Model juga memiliki kegunaan yang lebih praktis. Model dapat digunakan untuk menggambarkan atau menyelidiki keadaan batas yang tidak dapat dicapai dalam praktik. Secara khusus, berbagai komponen model dapat dipisahkan satu sama lain dengan menetapkan semua parameter, kecuali beberapa parameter tertentu, sama dengan nol. Model juga membantu menghemat waktu dan sumber daya. Sebagai contoh, simulasi komputer untuk tabrakan mobil lebih murah daripada eksperimen sebenarnya. Simulator penerbangan digunakan sebagai sarana pelatihan. Model dapat dijalankan sebagai bagian dari studi kelayakan atau untuk menguji hasil berbagai skenario yang mungkin terjadi.

Karena model semakin sering digunakan untuk mengambil keputusan yang berdampak pada masyarakat (lihat, misalnya, artikel berita yang dicantumkan dalam Soal 2 di akhir bab ini), kita perlu memahami keterbatasannya, mengetahui hipotesis yang mendasarinya, dan menyadari peran—yang mungkin sangat menentukan—dari hipotesis

tersebut dalam model. Artikel R. May berjudul [Uses and Abuses of Mathematics in Biology](#) membahas lebih lanjut persoalan-persoalan tersebut.

Apa yang diperlukan untuk menjadi pemodel yang baik?

Pemodelan matematika memadukan berbagai bidang matematika—misalnya persamaan diferensial, kalkulus, aljabar linear, analisis numerik, teori peluang, sistem dinamik, statistika, dan kuantifikasi ketidakpastian—dengan pengetahuan fisika, biologi, kimia, astrofisika, geologi, hidrologi, dan bidang lainnya, bergantung pada sifat model. Topik-topik ini biasanya diajarkan secara terpisah. Tujuan pembelajaran utama suatu mata kuliah pemodelan matematika adalah membahas cara memanfaatkan beragam bidang pengetahuan untuk membangun dan menganalisis model. Karena itu, pembaca yang telah terlatih dalam matematika dan disiplin ilmu lain mungkin merasa tidak ada “materi baru” dalam buku ini. Hal yang baru adalah penggunaan beragam perangkat matematika untuk mencapai satu tujuan: mengembangkan, memahami, dan menguji model matematika.

Keberhasilan dalam pemodelan matematika memerlukan daya akal, sebab pemodel harus mampu “memikirkan” perangkat atau metode yang tepat untuk digunakan. Pemodel juga memerlukan rasa ingin tahu, imajinasi, dan kesabaran; kemampuan memahami masalah yang tidak sepenuhnya bersifat matematis; kemampuan menyederhanakan masalah untuk menentukan hal yang relevan dan tidak relevan; kemampuan mengubah konsep menjadi persamaan; kemampuan menilai apakah model memadai atau tidak; serta kemampuan membahas masalah bersama orang lain, khususnya mereka yang memiliki bidang keahlian berbeda.

Ringkasan

Frasa *pemodelan matematika* dapat dipahami dengan berbagai cara. Dalam buku ini, hanya model yang bersifat eksplanatoris dan prediktif serta memiliki formulasi matematis yang disebut model matematika. Secara khusus, teknik pencocokan kurva atau model statistik tidak dibahas.

Proses pemodelan melibatkan serangkaian langkah yang perlu ditempuh pemodel secara sistematis. Langkah-langkah tersebut mencakup mengetahui apa yang hendak dimodelkan, memperoleh data, menentukan jenis model yang akan dikembangkan, membuat asumsi, menyusun model, menguji dan memperbaikinya, lalu menggunakan model tersebut. Asumsi penyederhanaan yang dibuat selama pengembangan model harus dipahami dengan jelas, terutama jika hasil model digunakan untuk kebijakan atau pengambilan keputusan.

Pemodelan matematika merupakan kegiatan lintas disiplin yang menuntut penghargaan terhadap kekuatan analisis matematika, minat pada disiplin terapan, landasan matematika dan komputasi yang kuat, serta keterampilan komunikasi yang baik.

Deskripsi Gambar

Gambar 1.1: Bagan alir “Siklus Pemodelan” yang menunjukkan proses iteratif dengan delapan langkah. Proses dimulai dari “Mulai” dan “Tentukan Harapan terhadap Model”, lalu bergerak melalui pengumpulan data, pemilihan model, asumsi model, penyusunan model, dan pengujian model, kemudian berakhir pada belah ketupat keputusan “Apakah Model Memenuhi Harapan?”. Jika jawabannya “Tidak”, alur kembali ke “Buat Asumsi”. Jika jawabannya “Ya”, proses berakhir di “Selesai”. [[Kembali ke Gambar 1.1](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Bacalah artikel R. May berjudul [Uses and Abuses of Mathematics in Biology](#). Bagaimana artikel tersebut menggambarkan bahaya mempercayai model secara membabi buta? Apakah menurut Anda argumennya meyakinkan?

Soal 2

Bacalah sekurang-kurangnya tiga artikel berita berikut.

- [*Rapid Response Could Have Curbed Foot-and-Mouth Epidemic*](#) oleh Martin Enserink
- [*Disease control: Virtual plaques get real*](#) oleh V. Gewin
- [*African swine fever outbreak alarms wildlife biologists and veterinarians*](#) oleh Erik Stokstad
- [*U.K. expands kill zone for badgers in fight against bovine TB, sparking controversy*](#) oleh Erik Stokstad
- [*Italy's olive crisis intensifies as deadly tree disease spreads*](#) oleh Alison Abbott
- [*Why computer simulations should replace animal testing for heart drugs*](#), oleh Elisa Passini, Blanca Rodriguez, dan Patricia Benito
- [*Could computer models be the key to better COVID vaccines?*](#) oleh Elie Dolgin
- [*OFF THE GRID: Computer models that forecast overloaded power lines are holding back U.S. solar and wind energy projects*](#), oleh Dan Charles

Kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut. Dalam argumentasi Anda, sertakan pembahasan tentang artikel yang dibaca dengan rujukan yang tepat.

- Apakah menurut Anda model matematika patut digunakan untuk mengambil keputusan yang berdampak pada manusia dan masyarakat? Mengapa?
- Menurut Anda, kriteria apa yang harus dipenuhi model semacam itu jika hendak digunakan untuk merumuskan kebijakan?

Soal 3

Andaikan Anda memegang jabatan penting dalam dunia usaha atau pemerintahan dan harus mengambil keputusan yang akan memengaruhi masa depan banyak orang. Keputusan tersebut bergantung pada simulasi suatu model matematika. Pertanyaan apa saja yang akan Anda ajukan kepada pengembang model untuk membantu pengambilan keputusan?

Soal 4

Bacalah artikel N. Goldenfeld dan L. Kadanoff berjudul [*Simple Lessons from Complexity*](#). Ringkaslah gagasan utama artikel tersebut dan tunjukkan simpulan mana dari para penulis yang menurut Anda terutama perlu diingat ketika mengembangkan model.

Soal 5

Perhatikan himpunan titik data pada bidang $D = \{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$, dan garis lurus dengan persamaan $y = ax + b$. Definisikan jarak δ antara himpunan data D dan himpunan $F = \{(X_i, f(X_i)), i = 1, \dots, n\}$ sebagai $\delta = \sum_{i=1}^n (f(X_i) - Y_i)^2$.

Tunjukkan bahwa terdapat pasangan (a, b) yang meminimumkan nilai δ . Pilihan parameter ini memberikan pencocokan linear $y = ax + b$, bagi himpunan data D . Teknik pencocokan tersebut disebut *metode kuadrat terkecil*.

Soal 6

Dengan metode kuadrat terkecil (lihat Soal 5), carilah garis lurus yang paling cocok dengan titik-titik data berikut: (1,3), (2,5), (4,13), (7,22), (8,25.5). Gambarkan garis dan titik-titik data pada grafik yang sama. Apakah hasil pencocokannya memadai? Jelaskan alasan Anda.

Soal 7

Bukalah notebook Python pendamping untuk pencocokan kurva dan pelajari antarmuka terbuka NumPy/SciPy yang digunakan di dalamnya. Buat sekumpulan titik data di sekitar grafik fungsi-fungsi berikut, lalu periksa apakah hasil pencocokan yang diberikan oleh notebook memadai. Apa simpulan Anda?

1. $f(x) = 3x + 5$.
2. $f(x) = 7x$.
3. $f(x) = \exp(3x + 7)$.
4. $f(x) = \exp(7x)$.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Pisahkan tiga lapisan: asumsi biologis, struktur matematis, dan bukti empiris. Untuk tiap lapisan, tanyakan apa yang dapat gagal dan apakah kegagalan itu terlihat oleh pembaca hasil model.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada satu jawaban ya/tidak. Jawaban tuntas harus menghubungkan sedikitnya dua risiko ke argumen atau contoh dalam artikel, lalu memberi penilaian pribadi yang dapat diperdebatkan dan didukung bukti.

Bukti yang diperlukan

1. Bahaya kepercayaan buta dijelaskan sebagai akibat asumsi, data, parameter, validasi, atau domain penerapan—bukan sekadar klaim bahwa model bisa salah.
2. Penilaian tentang daya yakinkan artikel menyertakan alasan dan setidaknya satu keterbatasan atau sanggahan.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Ketepatan membaca

Jawaban lengkap

Merangkum tesis dan contoh relevan artikel secara setia serta membedakan ucapan penulis dari tafsiran sendiri.

Jawaban sebagian

Menyebut tema umum tetapi tidak menautkannya pada bagian atau contoh tertentu.

- **Kriteria**

Analisis risiko

Jawaban lengkap

Menjelaskan sekurang-kurangnya dua mekanisme seperti asumsi biologis yang lemah, ketidakpastian parameter/data, ekstrapolasi, atau kesan presisi palsu, beserta akibatnya.

Jawaban sebagian

Hanya mengatakan model tidak sempurna tanpa menjelaskan mekanismenya.

- **Kriteria**

Evaluasi argumen

Jawaban lengkap

Memberi keputusan yang bernuansa tentang daya yakinkan artikel, dengan bukti, batas, dan kemungkinan sanggahan.

Jawaban sebagian

Memberi opini tanpa dukungan.

- **Kriteria**

Implikasi praktik

Jawaban lengkap

Menarik satu pelajaran operasional: nyatakan asumsi, uji terhadap data, laporkan ketidakpastian, dan batasi klaim pada domain yang diuji.

Jawaban sebagian

Memberi anjuran umum yang tidak dapat diperiksa.

Garis besar jawaban

1. Model merupakan argumen bersyarat: keluarannya hanya seandal asumsi, data, dan implementasinya.
2. Matematika yang cangih tidak dengan sendirinya mengubah hipotesis biologis menjadi bukti.
3. Karena itu hasil model perlu diuji, ketidakpastian dan batas penerapan perlu dinyatakan, dan keputusan tidak boleh bertumpu pada satu keluaran tanpa analisis alternatif.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Buat matriks perbandingan untuk sekurang-kurangnya tiga artikel: tujuan keputusan, data, asumsi, pihak yang menerima manfaat/risiko, ketidakpastian, dan akibat jika prediksi keliru. Gunakan matriks itu sebagai bukti bagi posisi Anda.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Posisi yang dapat dipertanggungjawabkan biasanya bersyarat: model boleh mendukung, tetapi tidak menggantikan, keputusan; kelayakannya bergantung pada transparansi, validasi, ketidakpastian, keadilan, dan mekanisme pertanggungjawaban.

Bukti yang diperlukan

1. Sedikitnya tiga artikel dibahas dan dirujuk secara dapat dilacak.
2. Jawaban menjawab kedua pertanyaan: boleh/tidaknya penggunaan model dan kriteria untuk kebijakan.
3. Kriteria diterjemahkan menjadi tindakan yang dapat diperiksa, bukan slogan.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Cakupan sumber

Jawaban lengkap

Membandingkan sedikitnya tiga artikel secara substantif dan memberi rujukan yang tepat.

Jawaban sebagian

Menyebut tiga artikel tetapi hanya satu atau dua yang benar-benar dianalisis.

- **Kriteria**

Sintesis lintas kasus

Jawaban lengkap

Menunjukkan persamaan dan perbedaan penggunaan model pada bidang yang dibaca, termasuk konsekuensi keputusan.

Jawaban sebagian

Merangkum artikel satu per satu tanpa sintesis.

- **Kriteria**

Posisi normatif

Jawaban lengkap

Mengambil posisi yang jelas dan bernuansa, menimbang manfaat, risiko, alternatif, dan siapa yang menanggung kesalahan.

Jawaban sebagian

Memilih ya atau tidak tanpa mempertimbangkan pertukaran kepentingan.

- **Kriteria**

Kriteria kebijakan

Jawaban lengkap

Mencakup mutu serta keterwakilan data, asumsi transparan, validasi luar sampel, sensitivitas dan ketidakpastian, skenario pembandingan, audit/reproduksibilitas, keadilan, komunikasi, pemantauan, serta rencana revisi.

Jawaban sebagian

Mendaftar kriteria umum tanpa cara mengujinya.

- **Kriteria**

Argumen berbukti

Jawaban lengkap

Setiap klaim utama ditopang contoh atau bukti dari artikel dan batas kesimpulannya diakui.

Jawaban sebagian

Klaim utama tidak terhubung dengan bacaan.

Garis besar jawaban

1. Model dapat memperjelas konsekuensi skenario dan menyatukan bukti, sehingga layak dipakai sebagai salah satu masukan.
2. Penggunaan itu harus bersyarat karena model menyederhanakan kenyataan dan kesalahan berdampak tidak merata pada masyarakat.
3. Keputusan akhir perlu menggabungkan hasil model, bukti empiris, pertimbangan etis, keahlian domain, konsultasi dengan pihak terdampak, serta prosedur koreksi ketika bukti berubah.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Kelompokkan pertanyaan menurut tujuan, data, asumsi, implementasi, pengujian, ketidakpastian, dampak, dan tata kelola. Untuk setiap jawaban pengembang, tanyakan bukti apa yang dapat memverifikasinya.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Daftar tuntas mencakup apa yang diprediksi, populasi/domain yang berlaku, asal dan keterbatasan data, asumsi, validasi, sensitivitas, ketidakpastian, skenario alternatif, reproduksibilitas, dampak distribusional, serta kondisi penghentian atau pembaruan model.

Bukti yang diperlukan

1. Pertanyaan tidak hanya meminta akurasi tunggal; pertanyaan juga menyelidiki mekanisme kegagalan.
2. Ada pertanyaan tentang konsekuensi bagi pihak yang berbeda dan tentang siapa yang bertanggung jawab memantau hasil.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Tujuan dan ruang lingkup

Jawaban lengkap

Menanyakan keputusan apa yang didukung, keluaran apa yang diprediksi, rentang waktu, populasi, dan keadaan tempat model tidak berlaku.

Jawaban sebagian

Hanya menanyakan tujuan secara umum.

- **Kriteria**

Data dan asumsi

Jawaban lengkap

Menanyakan sumber, mutu, keterwakilan, data hilang, asumsi penyederhanaan, dan bukti untuk setiap asumsi penting.

Jawaban sebagian

Menanyakan jumlah data tanpa mutu atau keterwakilan.

- **Kriteria**

Pengujian

Jawaban lengkap

Menanyakan perbandingan dengan data yang tidak dipakai membangun model, tolak ukur, kasus batas, verifikasi kode, dan kajian independen.

Jawaban sebagian

Menerima kecocokan pada data pelatihan sebagai satu-satunya bukti.

- **Kriteria**

Ketidakpastian dan ketahanan

Jawaban lengkap

Menanyakan interval/rentang, sensitivitas terhadap parameter dan asumsi, skenario ekstrem, serta variabel yang paling menentukan keputusan.

Jawaban sebagian

Meminta satu prediksi titik saja.

- **Kriteria**

Dampak dan tata kelola

Jawaban lengkap

Menanyakan siapa yang diuntungkan atau dirugikan, bias yang mungkin terjadi, bagaimana hasil dikomunikasikan, siapa yang dapat mengaudit, dan kapan model direvisi atau dihentikan.

Jawaban sebagian

Tidak membahas dampak distribusional atau pertanggungjawaban.

Contoh pertanyaan

1. Keputusan spesifik apa yang dapat dan tidak dapat didukung oleh model ini?
2. Data apa yang dipakai untuk membangun serta menguji model, dan siapa yang kurang terwakili?
3. Asumsi mana yang paling memengaruhi hasil dan bagaimana hasil berubah bila asumsi itu dilonggarkan?
4. Bagaimana kinerja pada data luar sampel dan dibandingkan dengan aturan dasar yang lebih sederhana?
5. Rentang hasil yang masuk akal apa, bukan hanya nilai paling mungkin?
6. Siapa yang meninjau implementasi secara independen dan dapatkah analisis direproduksi?
7. Kelompok mana yang menanggung kerugian jika model salah?
8. Bukti baru apa yang akan memicu pembaruan, penangguhan, atau penolakan model?

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Jangan sekadar membuat ringkasan berurutan. Catat tesis, contoh, dan pelajaran metodologis artikel; lalu hubungkan satu pelajaran pilihan Anda dengan langkah konkret dalam siklus pemodelan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada satu kesimpulan pilihan yang wajib. Jawaban tuntas harus setia pada artikel, membedakan ringkasan dari evaluasi, dan menerjemahkan kesimpulan pilihan menjadi praktik pemodelan yang konkret.

Bukti yang diperlukan

1. Pokok artikel disertai contoh atau bagian pendukung.
2. Kesimpulan yang diprioritaskan disebut jelas dan alasan prioritasnya terkait dengan pembangunan atau pengujian model.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Kesetiaan ringkasan

Jawaban lengkap

Menyajikan tesis, alur, dan pokok utama artikel secara proporsional tanpa mengganti pandangan penulis dengan opini sendiri.

Jawaban sebagian

Mengambil satu kutipan atau tema dan menganggapnya mewakili seluruh artikel.

- **Kriteria**

Pemakaian bukti

Jawaban lengkap

Menghubungkan tiap pokok utama dengan contoh, argumen, atau bagian yang dapat ditelusuri dalam artikel.

Jawaban sebagian

Membuat daftar klaim tanpa bukti tekstual.

- **Kriteria**

Pemahaman kompleksitas

Jawaban lengkap

Menjelaskan bagaimana interaksi, skala, pola kolektif, atau pemilihan tingkat deskripsi memengaruhi apa yang harus dimasukkan ke model.

Jawaban sebagian

Menggunakan kata kompleks hanya sebagai sinonim untuk sulit.

- **Kriteria**

Kesimpulan prioritas

Jawaban lengkap

Memilih kesimpulan yang benar-benar berasal dari artikel dan membela pilihannya dengan pertukaran kepentingan yang jelas.

Jawaban sebagian

Memilih tanpa alasan atau memberi nasihat yang tidak berasal dari artikel.

- **Kriteria**

Penerapan

Jawaban lengkap

Mengubah pelajaran menjadi tindakan, misalnya memilih skala/variabel yang relevan, menguji pola lintas skala, membandingkan model sederhana, atau memeriksa batas domain.

Jawaban sebagian

Penerapan tetap abstrak dan tidak dapat diperiksa.

Garis besar jawaban

1. Ringkasan yang baik mengidentifikasi hubungan antara aturan/interaksi pada satu tingkat dan perilaku kolektif pada tingkat lain.
2. Pelajaran metodologis perlu dikaitkan dengan pemilihan variabel, skala, dan derajat kompleksitas model.

3. Kesimpulan pilihan harus dinilai dari kemampuannya mencegah kesalahan nyata dalam pembangunan, penafsiran, atau ekstrapolasi model.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Pusatkan data dengan $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$. Untuk setiap a , minimalkan lebih dahulu terhadap b ; lalu masalah yang tersisa hanyalah meminimumkan polinom kuadrat satu variabel. Jangan lupa kasus semua X_i sama.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jika $S_{xx} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 > 0$, maka $a = S_{xy}/S_{xx}$ dan $b = \bar{Y} - a\bar{X}$, dengan $S_{xy} = \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$. Jika $S_{xx} = 0$, semua pasangan yang memenuhi $a\bar{X} + b = \bar{Y}$ merupakan peminimum.

Cek cepat

Pasangan harus memenuhi kedua persamaan normal: $a \sum X_i^2 + b \sum X_i = \sum X_i Y_i$ dan $a \sum X_i + nb = \sum Y_i$.

Pembahasan atau rubrik

Asumsi

$$n \geq 1$$

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Untuk garis $f(x) = ax + b$, tulis rata-rata $\bar{X} = n^{-1} \sum_i X_i$ dan $\bar{Y} = n^{-1} \sum_i Y_i$.

Rumus

$$\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n (aX_i + b - Y_i)^2$$

- **Penjelasan**

Pisahkan bagian terpusat dan bagian rata-rata. Suku silang hilang karena jumlah deviasi dari rata-rata sama dengan nol.

Rumus

$$\delta(a, b) = \sum_i \left[a(X_i - \bar{X}) - (Y_i - \bar{Y}) \right]^2 + n(a\bar{X} + b - \bar{Y})^2$$

- **Penjelasan**

Untuk a tetap, suku kedua minimum dan bernilai nol pada pilihan berikut.

Rumus

$$b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

- **Penjelasan**

Dengan $S_{xx} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2$, $S_{xy} = \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$, dan $S_{yy} = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$, fungsi yang tersisa adalah polinom kuadrat.

Rumus

$$\delta(a, \bar{Y} - a\bar{X}) = S_{xx}a^2 - 2S_{xy}a + S_{yy}$$

• Penjelasan

Jika $S_{xx} > 0$, lengkapi kuadrat. Koefisien kuadrat positif, sehingga titik stasioner adalah minimum global yang unik.

Rumus

$$\delta = S_{xx} \left(a - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \right)^2 + S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

• Penjelasan

Jadi peminimum unik ketika nilai X tidak semuanya sama adalah:

Rumus

$$\hat{a} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad \hat{b} = \bar{Y} - \hat{a}\bar{X}$$

• Penjelasan

Jika $S_{xx} = 0$, semua $X_i = \bar{X}$, sehingga kemiringan tidak dapat diidentifikasi. Nilai minimum tetap tercapai oleh setiap pasangan pada garis parameter berikut.

Rumus

$$a\bar{X} + b = \bar{Y}$$

Simpulan

Dengan demikian, untuk setiap himpunan data takkosong selalu ada sedikitnya satu pasangan peminimum. Keunikannya memerlukan sedikitnya dua nilai X yang berbeda.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Hitung $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_{xx} , dan S_{xy} , lalu gunakan hasil Masalah 5. Setelah menggambar, periksa residual, bukan hanya apakah garis tampak dekat.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Garis kuadrat terkecil adalah $\hat{y} = (551/175)x + 67/350 \approx 3.148571x + 0.191429$. $SSE = 1463/12250 \approx 0.119429$ dan $R^2 \approx 0.999656$. Pada skala data, kecocokan sangat rapat; penilaian akhir tetap harus mempertimbangkan ketelitian pengukuran dan tujuan model.

Toleransi

Toleransi mutlak kemiringan

1e-06

Toleransi mutlak intersep

1e-06

Toleransi mutlak SSE

1e-06

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Rata-rata koordinat adalah:

Rumus

$$\bar{x} = 4.5, \quad \bar{y} = 14.36$$

- **Penjelasan**

Jumlah kuadrat dan hasil kali terpusat adalah:

Rumus

$$S_{xx} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 35, \quad S_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 110.2$$

- **Penjelasan**

Masukkan ke rumus kuadrat terkecil.

Rumus

$$\hat{a} = \frac{110.2}{35} = \frac{551}{175}, \quad \hat{b} = 14.36 - 4.5\hat{a} = \frac{67}{350}$$

- **Penjelasan**

Maka garis yang digambar bersama lima titik adalah:

Rumus

$$\hat{y} = \frac{551}{175}x + \frac{67}{350}$$

- **Penjelasan**

Residual $\hat{y}_i - y_i$, dalam urutan data, semuanya kecil.

Rumus

$$\left(0.04, \frac{11}{175}, -\frac{3}{14}, \frac{81}{350}, -0.12 \right)$$

- **Penjelasan**

Ukuran kecocokan numeriknya adalah:

Rumus

$$SSE = \sum_i (\hat{y}_i - y_i)^2 = \frac{1463}{12250} \approx 0.119429, \quad R^2 \approx 0.999656$$

Pemeriksaan grafik

Grafik yang benar menampilkan kelima titik dan satu garis lurus; setiap titik berada sangat dekat dengan garis, tanpa pola lengkung yang jelas pada residual.

Simpulan

Kecocokan memadai untuk menggambarkan tren linear pada data ini karena simpangannya kecil relatif terhadap rentang y . Namun, lima titik saja tidak membuktikan bahwa hubungan di luar rentang $1 \leq x \leq 8$ juga linear, dan tanpa informasi galat pengukuran tidak ada ambang kememadai yang mutlak.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Gunakan seed tetap, simpan data asli, dan cocokkan tiap fungsi dengan keluarga yang tepat. Bandingkan data–kurva serta plot residual. Untuk fungsi eksponensial, noise relatif sering lebih masuk akal daripada noise aditif yang sama pada semua skala.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tanpa noise, parameter yang harus dipulihkan ialah $(a,b)=(3,5)$, $a=7$, $(a,b)=(3,7)$, dan $a=7$ untuk empat fungsi secara berurutan. Dengan noise kecil, taksiran harus dekat dengan nilai tersebut, kurva harus mengikuti data dalam domain sampel, dan residual tidak boleh menunjukkan pola sistematis yang besar.

Bukti yang diperlukan

1. Notebook pada path tercatat dapat dijalankan ulang dengan seed tetap.
2. Empat data sintetis, empat kurva hasil cocok, dan empat pemeriksaan residual tersedia.
3. Kesimpulan membedakan kecocokan numerik dari penjelasan kausal serta tidak mengekstrapolasi di luar domain sampel tanpa peringatan.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Bangun data deterministik dengan generator acak ber-seed. Gunakan noise aditif kecil untuk kasus linear dan noise relatif kecil untuk kasus eksponensial.

Rumus

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad \text{atau} \quad y_i = f(x_i)(1 + \varepsilon_i)$$

- **Penjelasan**

Definisikan empat keluarga model terbuka yang akan diteruskan kepada pengoptimal SciPy.

Rumus

$$g_1(x; a, b) = ax + b, \quad g_2(x; a) = ax, \quad g_3(x; a, b) = \exp(ax + b), \quad g_4(x; a) = \exp(ax)$$

- **Penjelasan**

Untuk tiap data, minimalkan jumlah kuadrat residual dengan keluarga yang cocok dan titik awal yang wajar.

Rumus

$$\arg \min_{\theta} \sum_i \left[g(x_i; \theta) - y_i \right]^2$$

- **Penjelasan**

Bandungkan taksiran dengan parameter pembangkit. Dalam batas noise kecil, hasil yang diharapkan mendekati nilai berikut.

Rumus

$$(\hat{a}, \hat{b}) \approx (3, 5), \quad \hat{a} \approx 7, \quad (\hat{a}, \hat{b}) \approx (3, 7), \quad \hat{a} \approx 7$$

- **Penjelasan**

Gambarkan data, kurva, dan residual $r_i = y_i - g(x_i; \hat{\theta})$. Kecocokan memadai bila simpangan sebanding dengan noise yang ditambahkan, residual tidak berpola kuat, dan parameter stabil terhadap pengulangan atau perubahan kecil yang masuk akal.

Rumus

$$r_i = y_i - g(x_i; \hat{\theta})$$

Simpulan

Keluarga fungsi yang benar biasanya memulihkan parameter dan mengikuti data sintetis yang memang dibangkitkan dari keluarga itu. Namun, kecocokan dekat pada sampel terbatas tidak membuktikan mekanisme penyebab, keunikan bentuk model, atau ketepatan ekstrapolasi. Domain x , bentuk noise, jumlah data, titik awal, dan pilihan keluarga model semuanya memengaruhi penilaian.

Pemeriksaan notebook

Jalankan seluruh sel dari kernel bersih; hasil, parameter, dan gambar harus terbangun ulang tanpa layanan eksternal atau perangkat lunak proprietari.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Langkah Awal: Memodelkan Gelombang

0005-LEGA-V101-CH02

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menerapkan proses pemodelan dengan mengembangkan sebuah model dari awal.
- Menerjemahkan pernyataan verbal menjadi formulasi matematika.
- Menguji perilaku model dengan simulasi numerik.
- Menilai apakah suatu model matematika berperilaku sesuai dengan yang diharapkan.

Kita akan memulai penjelajahan pemodelan matematika dengan sebuah masalah sederhana yang tidak memerlukan pengetahuan khusus *a priori*, tetapi memungkinkan kita menggambarkan proses pemodelan yang dibahas pada bab sebelumnya.

Perumusan masalah

Kita akan membahas masalah *gelombang manusia*, yang terjadi di stadion ketika para penonton berdiri, mengangkat tangan, lalu duduk kembali sehingga membentuk gelombang yang merambat mengelilingi tribun. Menurut Farkas *dkk.*, fenomena ini kerap disebut Gelombang Meksiko (La Ola), istilah yang pertama kali digunakan dalam siaran Piala Dunia Sepak Bola 1986 di Meksiko. Pembahasan berikut didasarkan pada dua artikel karya Farkas *dkk.* yang berjudul [Mexican waves in an excitable medium](#) dan [Human waves in stadiums](#).

Tujuan kita adalah mengembangkan model yang mereproduksi dan menjelaskan perambatan gelombang tersebut. Model ini harus bergantung pada parameter yang dapat dijelaskan dengan bahasa sehari-hari, dan perubahan perilakunya ketika parameter itu diubah harus sesuai dengan apa yang benar-benar diamati di stadion.

Memperoleh data dan memilih tingkat kerumitan model

Dua artikel Farkas *dkk.* yang disebutkan di atas memberikan informasi berdasarkan 14 rekaman video gelombang di stadion yang masing-masing memiliki lebih dari 50.000 kursi. Pengamatan mereka menunjukkan bahwa gelombang merambat dengan kecepatan rata-rata 12 m s^{-1} (atau setara dengan 22 kursi per detik), dan mempunyai lebar antara 6 dan 12 meter (atau setara dengan 11 hingga 22 kursi), dengan rata-rata sekitar 15 kursi. Selain itu, sekitar tiga dari setiap empat gelombang merambat searah jarum jam jika stadion dilihat dari atas.

Model kita akan dibuat sesederhana mungkin. Secara khusus, model ini akan berdimensi satu dan bersifat diskret. Namun, kita akan mendefinisikan asumsi secara cermat agar mengetahui bagian mana yang perlu diubah jika hendak menyertakan efek lain.

Membuat asumsi

Kita akan menggunakan syarat batas periodik karena setiap baris kursi di stadion membentuk sebuah lintasan tertutup. Kita tidak akan memperhitungkan keberadaan tangga, sehingga mengasumsikan semua kursi berjarak sama. Kita juga menganggap semua kursi terisi. Setiap penonton berada dalam salah satu dari dua keadaan: duduk atau *ikut*

membentuk gelombang. Keadaan kedua terdiri atas rangkaian gerak berdiri, melambaikan tangan, lalu duduk kembali. Setelah seseorang mulai ikut membentuk gelombang, ia tidak akan berhenti sebelum kembali duduk. Pada saat itu, orang tersebut dapat memutuskan untuk berdiri dan ikut membentuk gelombang lagi.

Menyusun model

Pertama, gelombang perlu dipicu: harus ada beberapa orang yang berdiri agar gelombang dapat dimulai. Kemudian, agar gelombang merambat, para penonton harus dipengaruhi oleh perilaku tetangganya. Karena sebagian besar gelombang merambat searah jarum jam, orang harus lebih peka terhadap apa yang terjadi di sebelah kanan daripada di sebelah kirinya.

Suasana hati para penonton jelas berperan penting: jika pertandingan terlalu membosankan, tidak seorang pun ingin bersorak. Sebaliknya, jika pertandingan terlalu seru, mungkin ada orang yang terus-menerus berdiri dan banyak gelombang dapat dipicu sekaligus. Berdasarkan gagasan ini, kita dapat menggambarkan gelombang tersebut sebagai *gelombang antusiasme*. Orang yang berdiri berada dalam keadaan *antusias*, dan perilakunya memengaruhi tingkat antusiasme para tetangga. Jika tingkat ini melampaui *ambang antusiasme* seseorang, orang tersebut akan menjadi *antusias* dan ikut membentuk gelombang.

Karena itu, kita memerlukan sebuah parameter, s_{th} , yang menggambarkan suasana hati atau ambang antusiasme setiap penonton. Nilai parameter ini kemungkinan berbeda dari satu penonton ke penonton lain; kita cukup mengasumsikannya tersebar seragam pada interval $[c - \delta, c + \delta]$. Distribusi yang lebih rumit juga dapat digunakan. Parameter c menggambarkan daya tanggap rata-rata penonton yang menyaksikan pertandingan, sedangkan $\delta/\sqrt{3}$ mengukur sebaran atau simpangan baku daya tanggap itu terhadap nilai rata-ratanya.

Kita akan mengasumsikan bahwa tingkat antusiasme seseorang berubah ketika ia ikut membentuk gelombang. Asumsi ini masuk akal karena orang yang sudah berdiri dan melambaikan tangan selayaknya dianggap lebih antusias daripada orang yang baru mulai berdiri atau sedang duduk kembali. Oleh karena itu, kita memperkenalkan fungsi $f(t)$ yang menggambarkan tingkat antusiasme seseorang yang sedang ikut membentuk gelombang sebagai fungsi waktu.

Terakhir, kita mendefinisikan fungsi asimetris w yang menggambarkan bagaimana seorang penonton dipengaruhi oleh perilaku—dalam hal ini, tingkat antusiasme—para tetangganya. Sekarang kita akan membahas cara mengubah pernyataan-pernyataan di atas menjadi persamaan.

Misalkan N menyatakan banyaknya kursi dalam satu baris stadion (ingat bahwa model ini berdimensi satu. Namun, model ini dapat dengan mudah diperluas ke dua dimensi, seperti model yang dibahas dalam artikel Farkas *dkk.*). Karena kita mengasumsikan semua kursi terisi, kita dapat mendefinisikan fungsi $x(i)$ yang menggambarkan tingkat antusiasme penonton i , untuk $i = 1 \dots N$. Variabel x bernilai 0 jika orang tersebut duduk, atau lebih besar daripada suatu ambang aktivitas $\mathcal{A}$. Jika $x(i) = 0$, penonton i hanya akan mulai ikut membentuk gelombang apabila gabungan antusiasme para tetangganya, yang dinyatakan dengan $w(i)$, melampaui $s_{th}(i)$, yaitu ambang antusiasmenya. Setelah $x(i)$ menjadi tak nol, variabel ini akan berubah terhadap waktu menurut aturan berikut:

$$x(i, t) = \begin{cases} f(t) & \text{jika } f(t) > \mathcal{A} \\ 0 & \text{jika } f(t) \leq \mathcal{A} \end{cases} \quad (2.1)$$

Fungsi $f(t)$ harus berbentuk lonceng, dengan nilai maksimum yang bersesuaian dengan saat orang tersebut telah berdiri sambil mengangkat tangannya. Banyak bentuk fungsi dapat dipilih; di sini kita cukup mengambil $f(t) = 1/\cosh(b(t - t_0))$, dengan t_0 sebagai titik pemaksimum f dan b sebagai parameter yang menentukan durasi τ gelombang, yaitu waktu yang diperlukan satu orang untuk berdiri, mengangkat tangan, lalu duduk kembali. Lebih tepatnya, karena fungsi $1/\cosh(t)$ berorde satu pada interval berpusat di titik asal dengan lebar 10, τ dapat dihampiri oleh

$$\tau \simeq \frac{10}{b}.$$

Kita akan memilih t_0 sedemikian sehingga $t_0 = t_j + \Delta\tau$, dengan t_j sebagai saat seseorang menjadi antusias, yaitu saat $w(i)$ melampaui $s_{th}(i)$, dan $\Delta\tau$ sebagai parameter yang dapat kita atur. Kita dapat memandang $\Delta\tau$ sebagai waktu reaksi, yang mengukur selang antara saat seseorang menyadari aktivitas para tetangganya dan saat ia berdiri untuk ikut membentuk gelombang.

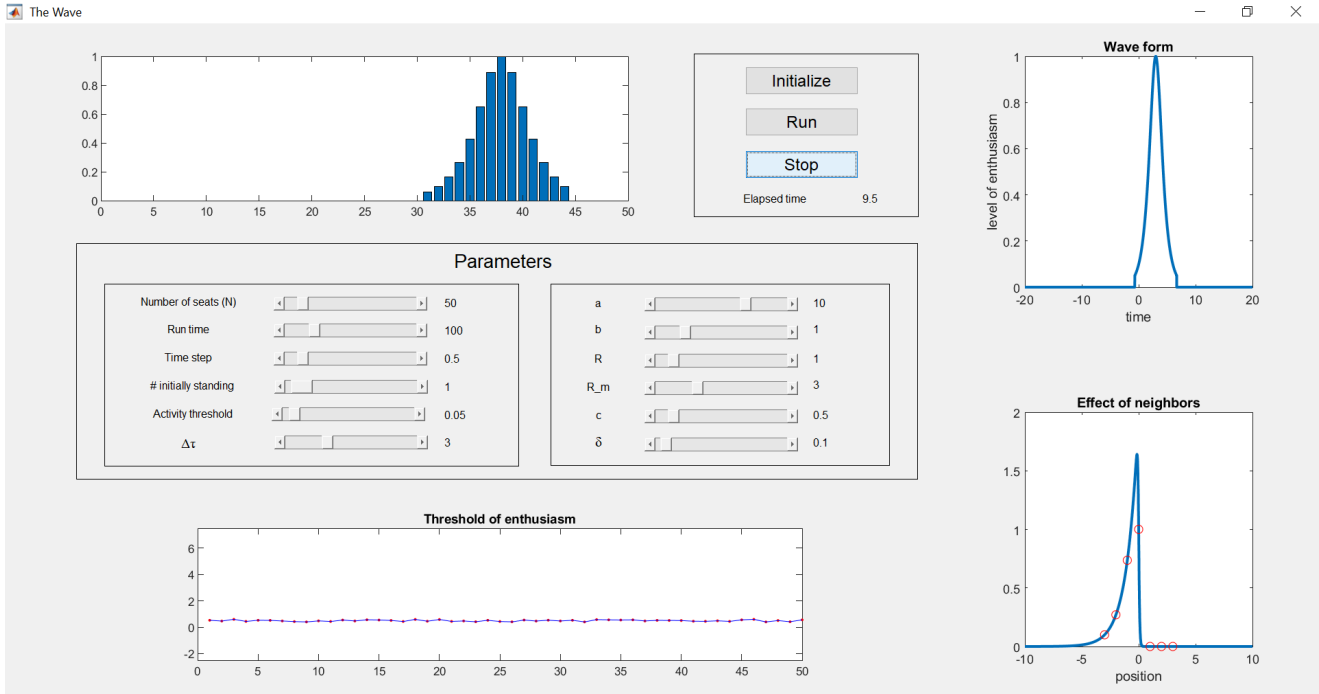
Karena pengamatan terhadap gelombang manusia menunjukkan bahwa kebanyakan gelombang merambat searah jarum jam, kita akan menggunakan fungsi asimetris untuk menggambarkan gabungan tingkat antusiasme para tetangga seseorang. Sekali lagi, ada banyak pilihan. Di sini kita menggunakan

$$w(i) = \sum_{\substack{j, |i-j| \leq R_m \\ x(j) > \mathcal{A}}} e^{-|i-j|/R} (1 - \tanh(a(j-i))),$$

dengan a , R , dan R_m sebagai parameter. Fungsi ini membuat penonton i dipengaruhi oleh tetangga yang sedang antusias dan duduk pada jarak kurang dari $R_m + 1$ kursi. Suku eksponensial menunjukkan bahwa pengaruh terbesar berasal dari tetangga terdekat, sedangkan suku tangen hiperbolik membuat tetangga di sebelah kanan penonton i lebih berpengaruh daripada tetangga di sebelah kiri (untuk nilai a yang positif). Jika baris satu dimensi itu dilihat dari pusat stadion, tetangga yang lebih berpengaruh justru duduk di sebelah kiri penonton i , sehingga gelombang merambat searah jarum jam.

Menguji model

Cara terbaik untuk menguji model ini adalah melalui simulasi numerik. Setelah memilih jumlah kursi, banyaknya orang yang mula-mula berdiri, dan ambang antusiasme setiap penonton, serta mendefinisikan fungsi f dan w , kita dapat menerapkan aturan pada Persamaan (2.1) secara berulang kepada setiap penonton. Apakah gelombang merambat atau padam akan bergantung pada parameter model, dan kita dapat menjelajahi berbagai keadaan dengan mengubah parameter-parameter tersebut.



Gambar 2.1. Antarmuka Pengguna Grafis (GUI) MATLAB untuk model Gelombang Meksiko. [Deskripsi Gambar](#)

Bab sumber merujuk pada kode MATLAB

The_Wave.m untuk menyimulasikan model di atas, tetapi berkas kode itu tidak termasuk dalam sumber buku yang diterbitkan. Gambar 2.1 mempertahankan antarmuka MATLAB sumber sebagai konteks historis. Penggeser pada antarmuka sumber digunakan untuk mengubah berbagai parameter. Saat simulasi berjalan, grafik $x(i)$ ditampilkan di jendela kiri atas dan diperbarui pada setiap langkah waktu, t_r . Jendela kiri bawah menampilkan ambang antusiasme penonton, $s_{th}(i)$, sebagai fungsi nomor kursinya i . Panel kanan atas menampilkan, sebagai fungsi t , grafik tingkat antusiasme $x(i, t)$ (lihat Persamaan (2.1)) dari seseorang yang sedang ikut membentuk gelombang. Panel kanan bawah menggambarkan bagaimana para tetangga memengaruhi perilaku seseorang. Lebih tepatnya, panel tersebut menampilkan grafik

$$e^{-|i-j|/R} (1 - \tanh(a(j-i)))$$

sebagai fungsi $j-i$; lingkaran merah menunjukkan kontribusi penonton j yang duduk dalam jarak R_m dari penonton i . Semua jendela sumber ini diperbarui ketika pengguna mengubah parameter. Nilai parameter bawaannya menghasilkan gelombang selebar sekitar 15 kursi yang merambat searah jarum jam. Catatan edisi: notebook Python

terbuka yang disertakan dalam pembaca ini mengimplementasikan ulang model secara independen, menyatakan pilihan algoritmenya secara eksplisit, dan menyediakan visualisasi statis serta eksperimen parameter yang bersesuaian. Berikut beberapa saran untuk menjelajahi model tersebut.

- Ubah jumlah kursi dan periksa bahwa ukuran gelombang tidak terpengaruh selama N lebih besar daripada lebar gelombang $\mathcal{W}$. Apa yang terjadi jika N lebih kecil daripada $\mathcal{W}$?
- Ubah ambang antusiasme para penonton dengan memodifikasi nilai rata-rata c dan rentang $[c - \delta, c + \delta]$ dari S_{th} .
- Ubah nilai R dan R_m . Apa yang Anda amati?
- Adakah hubungan antara nilai minimum c dan nilai minimum R agar gelombang dapat terbentuk? Mengapa demikian atau tidak? Apa makna hubungan tersebut?
- Berapakah kecepatan gelombang?
- Ubah langkah waktu t_r . Bagaimana perubahan ini memengaruhi ukuran gelombang? Dapatkah Anda mengubah nilai b untuk mengimbangnya? Mengapa dapat atau mengapa tidak? (Petunjuk: skala waktu apa lagi yang terdapat dalam model?) Apa yang sebenarnya ditentukan oleh t_r ? Mengapa?
- Ubah ambang aktivitas $\mathcal{A}$. Apakah Anda memahami mengapa gelombang padam ketika $\mathcal{A}$ terlalu besar? Parameter apa lagi yang dapat Anda ubah agar hal ini tidak terjadi?
- Ubah banyaknya orang yang mula-mula berdiri. Apa yang Anda amati?
- Apa yang dapat Anda ubah agar gelombang merambat ke kiri (yaitu, berlawanan arah jarum jam)?

Penjelajahan numerik di atas menunjukkan bahwa model ini memberikan representasi yang masuk akal mengenai pembentukan dan perambatan gelombang di stadion. Namun, simulasi juga dapat membantu mengenali beberapa keterbatasan model. Misalnya, tangga atau lorong dapat menghalangi perambatan gelombang. Keterbatasan lain muncul jika mula-mula ada lebih dari satu orang yang berdiri: semua penonton tersebut akan duduk kembali dengan cara yang persis sama. Hal ini terjadi karena kita menggunakan fungsi $f(t)$ yang sama bagi setiap penonton. Dalam kenyataan, orang yang berbeda ikut membentuk gelombang dengan cara yang berbeda, sehingga kita dapat mempertimbangkan fungsi f yang bergantung pada i .

Bahkan versi sederhana model yang disajikan di sini memiliki banyak parameter. Penjelajahan numerik terhadap model menunjukkan bahwa yang relevan sebenarnya bukan setiap parameter secara tersendiri, melainkan kombinasi di antara parameter-parameter itu. Sebagai contoh, kita dapat memilih untuk mengukur waktu dalam satuan langkah waktu, t_r . Dengan demikian, hanya tersisa dua parameter tak berdimensi, τ/t_r dan $\Delta\tau/t_r$. Mengidentifikasi kombinasi parameter yang relevan sangat penting untuk menjelajahi sifat model apa pun secara menyeluruh. Kita akan membahas hal ini secara mendalam pada bab berikutnya ketika memperkenalkan analisis dimensi dan penskalaan.

Ringkasan

Bab ini menggambarkan berbagai tahap dalam proses pemodelan melalui contoh gelombang manusia di stadion. Tahap-tahap tersebut meliputi merumuskan masalah, memperoleh data, menentukan tingkat kerumitan model yang diinginkan, membuat asumsi penyederhanaan, menyusun model, dan akhirnya mengujinya. Perangkat yang kita gunakan adalah unsur-unsur kalkulus untuk memilih bentuk fungsi f dan w , serta simulasi numerik. Simulasi membantu kita menguji model, tetapi juga berguna untuk membangun pemahaman intuitif tentang sifat-sifat model apa pun. Pengetahuan ini kemudian dapat digunakan untuk mengenali unsur yang menyebabkan setiap sifat tertentu pada model, dan bila perlu menyederhanakan atau memodifikasi model tersebut. Fenomena yang dibahas pada bab ini merupakan contoh perambatan gelombang dalam *medium eksitabel*.

Sebuah sistem disebut eksitabel jika gangguan dengan amplitudo yang cukup besar dapat memicu respons yang cepat dan besar, diikuti relaksasi yang lebih lambat hingga sistem kembali ke keadaan istirahat. Contoh medium eksitabel lainnya mencakup neuron (impuls saraf adalah gelombang eksitabel—disebut potensial aksi—yang merambat sepanjang akson) dan jaringan jantung (detak jantung berkaitan dengan gelombang listrik yang merambat melalui jantung sehingga menyebabkan kontraksi dan relaksasi otot jantung).

Deskripsi Gambar

Gambar 2.1: Antarmuka Pengguna Grafis MATLAB untuk “The Wave” yang memuat empat grafik data dan sebuah panel pengaturan parameter. Diagram batang utama menampilkan distribusi “antusiasme” pada 50 kursi. Penggeser memungkinkan pengguna mengubah variabel seperti “Jumlah kursi”, “Ambang aktivitas”, dan “Pengaruh tetangga”. Panel lain menampilkan bentuk gelombang, fungsi yang menggambarkan pengaruh tetangga, dan ambang antusiasme. Indikator “Waktu berlalu” menunjukkan bahwa simulasi sedang berada pada waktu 9,5 satuan. [[Kembali ke Gambar 2.1](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Temukan tiga fungsi berbeda yang *berbentuk lonceng* atau *menyerupai pulsa*. Bagaimana Anda mengatur tingginya? Bagaimana Anda mengatur lebarnya?

Soal 2

Temukan fungsi $f(x)$ yang monoton dan terdiferensialkan, terdefinisi pada seluruh garis bilangan real, serta memenuhi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -6$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$.

Gambarkan grafik fungsi yang Anda temukan dan periksa bahwa fungsi tersebut naik secara monoton dari -6 (ketika $x \rightarrow -\infty$) menuju 3 (ketika $x \rightarrow +\infty$).

Soal 3

Gambarkan grafik fungsi $f(t) = 1/\cosh(bt)$ untuk berbagai nilai b . Jelaskan dengan kata-kata peran parameter ini.

Soal 4

Gambarkan grafik fungsi $w(y) = e^{-|y|/R} (1 - \tanh(ay))$ untuk berbagai nilai parameter R dan a . Jelaskan dengan kata-kata peran masing-masing parameter.

Soal 5

Bagaimana Anda akan memodifikasi model yang dibahas dalam bab ini agar memperhitungkan keberadaan lorong atau tangga di stadion?

Soal 6

Bacalah artikel Farkas *dkk.* yang berjudul [Mexican waves in an excitable medium](#) dan [Human waves in stadiums](#).

1. Apakah menurut Anda model mereka meyakinkan?
2. Apakah semua informasi yang diperlukan benar-benar tercantum dalam artikel-artikel tersebut? Mengapa demikian atau mengapa tidak?
3. Apakah asumsi yang dibuat para penulis benar-benar diperlukan? Jelaskan.

Soal 7

Apa persamaan dan perbedaan antara model yang dibahas pada bab ini dan versi satu dimensi dari model n -keadaan terperinci karya Farkas *dkk.* dalam artikel [Mexican waves in an excitable medium](#) dan [Human waves in stadiums](#)? Berikan alasan untuk jawaban Anda.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Mulailah dari fungsi dasar yang berpuncak 1 di nol. Kalikan dengan konstanta positif untuk mengatur tinggi, geser argumennya untuk mengatur pusat, dan bagi argumen dengan parameter skala positif untuk mengatur lebar.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Salah satu pilihan yang sah ialah pulsa Gauss $G(x) = H \exp[-((x - \mu)/\sigma)^2]$, pulsa Lorentz $L(x) = H/[1 + ((x - \mu)/\gamma)^2]$, dan pulsa sekan hiperbolik $S(x) = H/\cosh((x - \mu)/\lambda)$, dengan $H, \sigma, \gamma, \lambda > 0$. Tinggi ketiganya adalah H ; lebarnya bertambah sebanding dengan σ , γ , atau λ .

Cek cepat

Lebar penuh pada setengah maksimum berturut-turut adalah $2\sigma\sqrt{\ln 2}$, 2γ , dan $2\lambda \operatorname{arcosh}(2)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Ambil parameter tinggi $H > 0$, pusat μ , dan parameter lebar yang positif. Contoh pertama adalah fungsi Gauss.

Rumus

$$G(x) = H \exp\left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \sigma > 0$$

- **Penjelasan**

Nilai maksimum Gauss adalah H pada $x = \mu$. Persamaan $G = H/2$ memberi dua titik setengah maksimum.

Rumus

$$x = \mu \pm \sigma\sqrt{\ln 2}, \quad \text{FWHM}(G) = 2\sigma\sqrt{\ln 2}$$

- **Penjelasan**

Contoh kedua adalah pulsa Lorentz. Puncaknya juga H , sedangkan parameter γ langsung menentukan setengah lebar pada setengah maksimum.

Rumus

$$L(x) = \frac{H}{1 + ((x - \mu)/\gamma)^2}, \quad \text{FWHM}(L) = 2\gamma$$

- **Penjelasan**

Contoh ketiga adalah pulsa sekan hiperbolik, bentuk yang sekeluarga dengan pulsa dalam model gelombang manusia.

Rumus

$$S(x) = \frac{H}{\cosh((x - \mu)/\lambda)}, \quad \text{FWHM}(S) = 2\lambda \operatorname{arccosh}(2)$$

- **Penjelasan**

Pada ketiga contoh, mengubah H hanya mengubah skala vertikal, mengubah μ hanya menggeser pusat, dan memperbesar parameter skala horizontal memperlebar pulsa tanpa mengubah tinggi puncak.

Rumus

$$H \uparrow \Rightarrow \text{puncak lebih tinggi}, \quad \sigma, \gamma, \lambda \uparrow \Rightarrow \text{pulsa lebih lebar}$$

Simpulan

Banyak jawaban lain juga benar. Struktur umum $H q((x - \mu)/s)$, dengan $q(0) = 1$ dan $s > 0$, memisahkan pengaturan tinggi H , pusat μ , dan lebar s .

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Gunakan fungsi dasar yang monoton naik dengan limit -1 dan 1 , misalnya $\tanh x$. Transformasi linear vertikal dapat memindahkan kedua limit itu ke -6 dan 3 .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Salah satu jawaban ialah $f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\tanh x$. Fungsi ini dapat diturunkan di seluruh $\mathbb{R}$, memiliki turunan positif $f'(x) = \frac{9}{2}\operatorname{sech}^2 x$, dan limitnya masing-masing -6 serta 3 .

Cek cepat

Grafik berbentuk sigmoid, melalui $(0, -3/2)$, selalu naik, dan mempunyai asimtot horizontal $y = -6$ serta $y = 3$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Karena $\tanh x$ bergerak dari -1 ke 1 , cari konstanta A dan B agar $A - B = -6$ dan $A + B = 3$.

Rumus

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{9}{2}$$

- **Penjelasan**

Definisikan fungsi berikut pada seluruh garis bilangan.

Rumus

$$f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\tanh x$$

- **Penjelasan**

Gunakan limit $\tanh x$ di kedua ujung garis bilangan.

Rumus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -6, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$$

- **Penjelasan**

Turunannya positif untuk setiap x berhingga, sehingga fungsi monoton naik secara ketat.

Rumus

$$f'(x) = \frac{9}{2}\operatorname{sech}^2 x > 0$$

Pemeriksaan grafik

Plot harus mendekati -6 dari atas ketika x sangat negatif, melewati nilai $-3/2$ pada $x = 0$, dan mendekati 3 dari bawah ketika x sangat positif.

Simpulan

Fungsi memenuhi semua syarat. Fungsi logistik $-6 + 9/(1 + e^{-x})$ merupakan contoh benar lainnya.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Tulis fungsi sebagai $\operatorname{sech}(bt)$. Bandingkan lokasi tempat kurva mencapai setengah puncaknya dan ingat bahwa $\cosh$ adalah fungsi genap.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $b \neq 0$, tinggi puncak tetap 1 pada $t = 0$, sedangkan lebar pulsa berbanding terbalik dengan $|b|$: $\text{FWHM} = 2\operatorname{arcosh}(2)/|b|$. Memperbesar $|b|$ mempersempit dan memperpendek pulsa. Tanda b tidak berpengaruh, dan $b = 0$ menghasilkan fungsi konstan 1.

Cek cepat

Kurva untuk b dan $-b$ harus tepat berimpit; kurva dengan $|b|$ lebih besar harus berada di bawah kurva dengan $|b|$ lebih kecil untuk setiap $t \neq 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Fungsi selalu positif dan genap terhadap t . Karena $\cosh z \geq 1$, nilai maksimumnya terjadi di pusat.

Rumus

$$f(0) = 1, \quad 0 < f(t) \leq 1$$

- **Penjelasan**

Untuk mendapatkan titik setengah maksimum, selesaikan $f(t) = 1/2$.

Rumus

$$\cosh(bt) = 2 \Rightarrow |t| = \frac{\operatorname{arcosh}(2)}{|b|}$$

- **Penjelasan**

Jarak antara kedua titik itu adalah lebar penuh pada setengah maksimum.

Rumus

$$\text{FWHM} = \frac{2\operatorname{arcosh}(2)}{|b|}$$

- **Penjelasan**

Karena $\cosh(-bt) = \cosh(bt)$, tanda b tidak mengubah grafik. Dalam pemodelan durasi, lazimnya diambil $b > 0$.

Rumus

$$f(t; b) = f(t; -b)$$

- **Penjelasan**

Kasus batas perlu dipisahkan: pada $b = 0$, tidak ada pulsa yang mereda.

Rumus

$$f(t; 0) = 1$$

Pemeriksaan grafik

Sebagai contoh, grafik untuk $b = 0.5, 1, 2$ semuanya berpuncak 1 di nol; urutan lebarnya dari terbesar ke terkecil adalah 0.5, 1, 2.

Simpulan

Parameter $|b|$ adalah skala waktu terbalik: semakin besar nilainya, semakin singkat orang berada dalam bagian aktif gelombang.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Pisahkan fungsi menjadi faktor peluruhan simetris $e^{-|y|/R}$ dan faktor arah $1 - \tanh(ay)$. Uji $a = 0$, bandingkan $w(y)$ dengan $w(-y)$, dan anggap $R > 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $R > 0$, R adalah panjang jangkauan: makin besar R , makin lambat pengaruh meluruh terhadap $|y|$. Parameter a mengatur arah dan kuatnya asimetri: $a = 0$ memberi kernel simetris, $a > 0$ mengutamakan sisi $y < 0$, $a < 0$ mengutamakan sisi $y > 0$, dan memperbesar $|a|$ menajamkan perbedaan kedua sisi.

Cek cepat

Harus berlaku $w(0) = 1$, $w(y; 0) = e^{-|y|/R}$, serta untuk $y > 0$, $w(-y)/w(y) = e^{2ay}$.

Pembahasan atau rubrik

Asumsi

$R > 0$

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Faktor pertama simetris dan menentukan seberapa cepat pengaruh tetangga menghilang terhadap jarak.

Rumus

$e^{-|y|/R}$; $R \uparrow \Rightarrow$ ekor lebih panjang

- **Penjelasan**

Jika $a = 0$, faktor hiperbolik sama dengan 1 dan tidak ada preferensi arah.

Rumus

$w(y) = e^{-|y|/R} \quad (a = 0)$

- **Penjelasan**

Untuk $y > 0$, perbandingan kedua sisi dapat dihitung tepat. Identitas hiperbolik menunjukkan besar asimetrinya.

Rumus

$\frac{w(-y)}{w(y)} = \frac{1 + \tanh(ay)}{1 - \tanh(ay)} = e^{2ay}$

- **Penjelasan**

Akibatnya, $a > 0$ memberi bobot lebih besar pada sisi negatif y ; mengubah tanda a mencerminkan grafik.

Rumus

$$w(y; -a) = w(-y; a)$$

• Penjelasan

Nilai di pusat tidak bergantung pada kedua parameter, sehingga seluruh grafik yang benar bertemu di titik yang sama.

Rumus

$$w(0) = 1$$

Pemeriksaan grafik

Dengan a tetap, kurva untuk R yang lebih besar meluruh lebih lambat. Dengan R tetap, kurva $a = 0$ simetris; pasangan a dan $-a$ merupakan pencerminan terhadap sumbu vertikal.

Simpulan

R mengatur jangkauan interaksi spasial, sedangkan tanda dan besar a mengatur arah serta kekuatan bias interaksi.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Representasikan lorong sebagai perubahan pada geometri atau hubungan antarkursi, bukan sebagai perubahan suasana seluruh penonton. Tambahkan faktor yang melemahkan atau memutus pengaruh apabila jalur dari kursi j ke kursi i melintasi penghalang.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Salah satu modifikasi yang konsisten ialah mengganti kisi kursi seragam dengan posisi kursi sebenarnya dan faktor transmisi $B_{ij} \in [0, 1]$. Ambil $B_{ij} = 0$ jika lorong sepenuhnya memutus pengaruh dan $0 < B_{ij} < 1$ jika pengaruh hanya melemah; hilangkan pula lokasi tanpa penonton. Model harus kembali ke model asli ketika semua kursi terisi, berjarak sama, dan $B_{ij} = 1$.

Bukti yang diperlukan

1. Variabel atau struktur baru untuk kursi kosong, jarak fisik, atau penghalang didefinisikan.
2. Aturan pengaruh tetangga diubah secara eksplisit.
3. Kasus batas tanpa lorong mereduksi ke model sumber.
4. Prediksi yang dapat diuji tentang gelombang yang berhenti, melemah, atau menyeberangi lorong diberikan.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

• Kriteria

Representasi geometri

Jawaban lengkap

Mendefinisikan posisi fisik kursi p_i , status hunian o_i , dan lokasi lorong/tangga; lokasi tanpa kursi tidak diperlakukan sebagai penonton.

Jawaban sebagian

Hanya menyatakan bahwa lorong harus ditambahkan tanpa mendefinisikan pengaruhnya.

- **Kriteria**

Aturan interaksi

Jawaban lengkap

Memasukkan jarak fisik dan faktor transmisi penghalang ke jumlah pengaruh, misalnya $w_i = \sum_j o_j B_{ij} e^{-|p_j - p_i|/R} [1 - \tanh(a(p_j - p_i))]$ untuk tetangga aktif.

Jawaban sebagian

Mengubah satu parameter global sehingga semua pasangan kursi terpengaruh sama.

- **Kriteria**

Makna parameter

Jawaban lengkap

Menjelaskan bahwa $B_{ij} = 0$ berarti tidak ada penularan antusiasme melintasi penghalang, sedangkan nilai di antara 0 dan 1 berarti penularan parsial; jarak ekstra juga mengurangi pengaruh.

Jawaban sebagian

Menambahkan simbol baru tanpa interpretasi atau rentang nilai.

- **Kriteria**

Konsistensi

Jawaban lengkap

Menunjukkan bahwa $o_i = 1$, jarak seragam, dan $B_{ij} = 1$ menghasilkan kembali model semula; syarat batas periodik stadion tetap ditangani dengan jelas.

Jawaban sebagian

Modifikasi tidak mempunyai hubungan yang dapat diperiksa dengan model semula.

- **Kriteria**

Pengujian

Jawaban lengkap

Mengusulkan perbandingan peluang gelombang menyeberang, amplitudo/lebar sebelum dan sesudah lorong, serta lokasi gelombang mati terhadap pengamatan stadion.

Jawaban sebagian

Tidak menyebut prediksi atau data pengujian.

Garis besar jawaban

1. Gunakan graf kursi atau koordinat fisik agar lorong muncul sebagai celah, bukan kursi biasa.
2. Kalikan bobot pengaruh antarkursi dengan faktor transmisi yang bergantung pada apakah jalurnya melintasi lorong atau tangga.
3. Uji beberapa kekuatan penghalang; model memprediksi ambang tempat gelombang masih dapat melompat atau justru berhenti.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Pisahkan tiga pertanyaan. Untuk daya yakinkan, bandingkan keluaran dengan data kecepatan, lebar, dan arah. Untuk kelengkapan, coba tulis resep replikasi dari awal sampai akhir. Untuk keesensialan hipotesis, ubah satu asumsi pada satu waktu dan prediksi apa yang seharusnya berubah.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada satu keputusan ya/tidak yang diwajibkan. Jawaban tuntas harus menilai model berdasarkan bukti empiris dan ketahanannya, mengaudit apakah persamaan, parameter, data, kondisi awal/batas, aturan pembaruan, dan prosedur pengujian cukup untuk reproduksi, serta membedakan hipotesis yang diperlukan oleh mekanisme dari pilihan penyederhanaan yang dapat diganti.

Bukti yang diperlukan

1. Kedua artikel dirujuk secara dapat ditelusuri dan kontribusinya tidak dicampuradukkan.
2. Ketiga subpertanyaan dijawab secara eksplisit.
3. Tolok ukur empiris yang relevan—kecepatan, lebar, arah, atau pemicuan gelombang—dipakai untuk menilai model.
4. Setiap klaim tentang informasi yang hilang menunjuk unsur reproduksi yang spesifik, bukan sekadar mengatakan uraian kurang lengkap.
5. Sedikitnya dua hipotesis dianalisis melalui akibat jika hipotesis itu dilonggarkan.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Evaluasi daya yakinkan

Jawaban lengkap

Menilai apakah mekanisme ambang dan pengaruh tetangga mereproduksi kecepatan, lebar, dominasi arah, serta syarat pemicuan yang diamati tanpa penyetelan rapuh; membedakan kecocokan deskriptif dari penjelasan kausal.

Jawaban sebagian

Menyebut gambar simulasi tampak realistis tanpa tolok ukur atau pembanding.

- **Kriteria**

Audit kelengkapan dan reproduksibilitas

Jawaban lengkap

Memeriksa definisi keadaan, persamaan transisi, satuan, semua nilai/distribusi parameter, kondisi awal dan batas, urutan pembaruan, langkah waktu, data, kode atau pseudokode, serta ukuran validasi; kekurangan dinyatakan hanya bila dibuktikan dari artikel.

Jawaban sebagian

Menyimpulkan lengkap atau tidak lengkap tanpa inventaris unsur yang diperlukan.

- **Kriteria**

Analisis hipotesis

Jawaban lengkap

Menguji peran asumsi seperti geometri satu/dua dimensi, batas periodik, seluruh kursi terisi, ambang individual, pengaruh lokal asimetris, atau lintasan respons yang ditentukan; menjelaskan prediksi mana yang berubah bila asumsi diganti.

Jawaban sebagian

Mendaftar asumsi tanpa menghubungkannya dengan perilaku model.

- **Kriteria**

Makna esensial

Jawaban lengkap

Membedakan hipotesis yang esensial bagi mekanisme eksitabilitas atau arah rambat dari bentuk matematis tertentu yang hanya salah satu pilihan implementasi.

Jawaban sebagian

Menganggap semua hipotesis sama penting atau menyebut semua tidak penting.

- **Kriteria**

Argumen dan batas klaim

Jawaban lengkap

Memberi putusan bernuansa, menautkan setiap klaim pada artikel, menyebut ketidakpastian, dan mengusulkan satu pengujian pembeda atau analisis sensitivitas.

Jawaban sebagian

Memberi opini final tanpa bukti atau tanpa mengakui batas.

Garis besar jawaban

1. Model dapat dianggap meyakinkan secara bersyarat bila satu perangkat parameter yang masuk akal secara serentak menghasilkan kecepatan, lebar, arah, dan ambang pemicuan yang mendekati pengamatan.

2. Kelengkapan dinilai dengan uji reproduksi; jangan menyatakan unsur hilang sebelum memeriksa kedua artikel dan bahan pendukung yang benar-benar mereka rujuk.
3. Mekanisme ambang, keadaan istirahat–aktif–pemulihan, dan pengaruh tetangga mungkin esensial bagi kelas perilaku, sedangkan fungsi bobot, distribusi ambang, atau jumlah keadaan tertentu perlu diuji sebagai pilihan model yang dapat diganti.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Buat tabel dengan baris: geometri dan syarat batas, keadaan seorang penonton, aturan eksitasi, perjalanan waktu setelah terpicu, bobot tetangga dan arah, heterogenitas ambang, parameter, serta keluaran yang dibandingkan dengan data. Bandingkan fungsi setiap unsur, bukan hanya nama simbolnya.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Persamaan minimum yang harus dikenali ialah bahwa kedua model memperlakukan gelombang sebagai rambatan eksitasi antarpelaku lokal, sedangkan perbedaan eksplisit utamanya terletak pada representasi keadaan: model bab memakai tingkat aktivitas kontinu yang mengikuti pulsa waktu setelah terpicu, sementara model rinci memakai n keadaan diskret. Jawaban penuh harus memeriksa, dari artikel, apakah geometri, syarat batas, ambang, kernel tetangga, waktu reaksi/pemulihan, dan kalibrasinya benar-benar sama atau berbeda.

Bukti yang diperlukan

1. Sedikitnya tiga persamaan dan tiga perbedaan substantif dibandingkan pada tingkat aturan atau parameter.
2. Perbedaan representasi waktu/keadaan kontinu-pulsa versus n -keadaan dijelaskan beserta akibat numeriknya.
3. Klaim tentang model Farkas dirujuk pada bagian, persamaan, gambar, atau tabel artikel.
4. Jawaban menjelaskan kapan kedua model dapat menghasilkan perilaku makroskopis yang serupa dan data apa yang dapat membedakannya.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Mekanisme bersama

Jawaban lengkap

Mengidentifikasi pelaku yang tersusun spasial, keadaan istirahat dan eksitasi, pemicuan oleh pengaruh tetangga yang melewati ambang, rangkaian respons setelah pemicuan, dan gelombang makroskopis yang muncul dari aturan lokal.

Jawaban sebagian

Hanya menyatakan bahwa keduanya memodelkan gelombang stadion.

- **Kriteria**

Representasi keadaan dan waktu

Jawaban lengkap

Membandingkan $x(i, t) = f(t)$ di atas ambang aktivitas lalu nol dalam model bab dengan perkembangan melalui n keadaan diskret pada model rinci, termasuk konsekuensi bagi resolusi waktu, durasi aktif, dan pemulihan.

Jawaban sebagian

Menyebut kontinu dan diskret tanpa menjelaskan dampaknya.

- **Kriteria**

Interaksi dan arah

Jawaban lengkap

Membandingkan radius pengaruh, peluruhan terhadap jarak, asimetri kiri–kanan, aturan penjumlahan stimulus, dan cara arah rambat dipilih; setiap klaim tentang model rinci ditopang artikel.

Jawaban sebagian

Menganggap kernel kedua model identik tanpa memeriksa rumus atau parameter.

- **Kriteria**

Heterogenitas, geometri, dan batas

Jawaban lengkap

Membandingkan distribusi ambang, kondisi hunian, syarat batas periodik, susunan satu dimensi, kondisi awal, dan penyederhanaan lain; menjelaskan mana yang benar-benar sama setelah model rinci direduksi ke satu dimensi.

Jawaban sebagian

Mencampurkan perbedaan akibat reduksi dimensi dengan perbedaan aturan model.

- **Kriteria**

Kesetaraan perilaku dan daya pembeda data

Jawaban lengkap

Menjelaskan bahwa representasi mikroskopis yang berbeda dapat menghasilkan kecepatan, lebar, dan arah gelombang yang serupa; mengusulkan data temporal individual, pola pemulihan, sensitivitas terhadap langkah waktu, atau respons terhadap dua pemicu sebagai pembeda.

Jawaban sebagian

Menganggap keluaran visual serupa membuktikan kedua model setara.

- **Kriteria**

Justifikasi sumber

Jawaban lengkap

Menggunakan rujukan spesifik dari kedua artikel dan persamaan bab; ketidakpastian atau informasi yang tidak tersedia ditandai, bukan ditebak.

Jawaban sebagian

Memberi tabel perbandingan tanpa bukti yang dapat dilacak.

Dasar perbandingan

1. Model bab: penonton diam memiliki $x(i) = 0$; setelah stimulus tetangga melampaui $s_{th}(i)$, aktivitas mengikuti pulsa $f(t)$ selama berada di atas $\mathcal{A}$.
2. Model bab: pengaruh tetangga dibatasi oleh R_m , meluruh dengan skala R , dan dibuat tidak simetris oleh a .
3. Model rinci: petunjuk soal sendiri menetapkan representasi n -keadaan; urutan, makna, dan aturan transisinya harus diambil dari artikel, bukan direkonstruksi dari nama model.
4. Kesamaan perilaku makroskopis tidak menjamin kesamaan mekanisme mikroskopis atau ketepatan yang sama pada data baru.

Simpulan

Jawaban terbaik bukan daftar permukaan, melainkan pemetaan komponen-ke-komponen yang menunjukkan unsur mana menjalankan fungsi yang sama, unsur mana sungguh berbeda, dan konsekuensi empiris apa yang mengikuti perbedaan tersebut.

BAGIAN 2

Model-Model dari Mekanika Klasik

0005-LEGA-V101-PT02

Bagian ini bertujuan membiasakan kita menggunakan persamaan diferensial sebagai model, membahas penskalaan dan analisis dimensi, serta memperkenalkan teknik bidang fase. Kita akan melakukannya melalui contoh-contoh penerapan mekanika klasik.

Dalam bab pertama bagian ini, kita akan menurunkan persamaan gerak pendulum nonlinear, memeriksa dimensi setiap suku dalam persamaan tersebut, membahas limit osilasi kecil, dan menyelidiki dinamika nonlinear pendulum dengan analisis bidang fase.

Selanjutnya, kita akan membahas masalah pemantulan batu di permukaan air serta memperkenalkan persamaan Euler untuk dinamika benda tegar. Pembahasan ini juga memberikan gambaran yang baik tentang kekuatan analisis dimensi.

Pendulum Nonlinear

0005-LEGA-V101-CH03

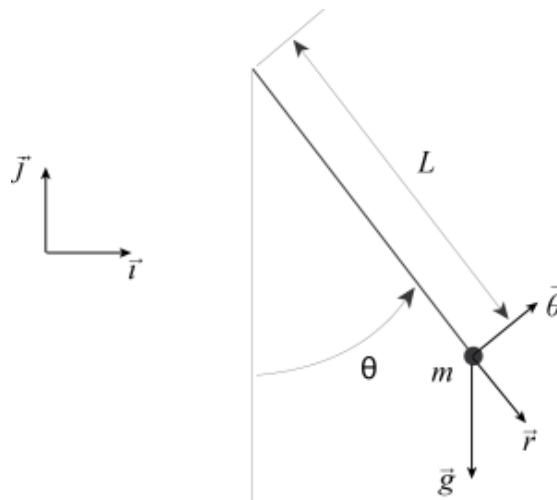
Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menerapkan proses pemodelan pada suatu sistem mekanis sederhana, yaitu pendulum nonlinear.
- Menggunakan hukum Newton untuk menurunkan persamaan diferensial bagi dinamika pendulum.
- Menggabungkan variabel dan parameter menjadi besaran tak berdimensi.
- Menilai apakah suatu model matematika benar secara dimensi.
- Menyintesis dinamika persamaan diferensial otonom orde kedua melalui metode energi atau analisis bidang fase.

Sifat masalah, asumsi, dan persamaan model

Kita meninjau gerak sebuah pendulum, yaitu suatu massa yang digantungkan pada salah satu ujung tali, sementara ujung lainnya terikat pada titik tetap (lihat Gambar 3.1). Periode pendulum diketahui bergantung pada amplitudonya. Pembaca dapat merujuk pada Gambar 4 dalam [artikel tahun 2005 karya Lima dan Arun](#) beserta rujukan di dalamnya.



Gambar 3.1. Sketsa sebuah pendulum. [Deskripsi Gambar](#)

Selanjutnya, kita akan mengasumsikan bahwa benda yang terikat pada tali merupakan suatu *massa titik*, bahwa tali tidak bermassa, serta bahwa baik massa benda maupun panjang tali tidak berubah terhadap waktu. Kita akan menganggap gerak berlangsung dalam satu bidang (perhatikan bahwa ini merupakan hampiran karena pendulum cenderung mengalami gerak precesi yang lambat). Kita akan menggunakan *hukum Newton* untuk mendeskripsikan dinamika pendulum. Gaya-gaya yang bekerja pada massa adalah gaya gravitasi $\vec{F}_g$, yang akan kita anggap konstan (lihat soal-soal untuk pembenarannya), tegangan $\vec{F}_t$ yang diberikan oleh tali, dan gaya gesek $\vec{F}_f$ yang diberikan oleh udara di sekitar massa. Kita akan mengasumsikan bahwa gaya ini berlawanan arah dan sebanding dengan kecepatan massa. Ini pun merupakan hampiran; untuk informasi lebih lanjut, lihat misalnya [Redaman Pendulum](#) karya P. Squire (1986).

Untuk merumuskan masalah ini, kita mendefinisikan basis vektor $(\vec{i}, \vec{j})$ bagi bidang tempat gerak berlangsung. Kita menyatakan panjang tali dengan l dan massa benda yang terikat pada tali dengan m . Kita mengukur posisi massa titik melalui sudut θ antara tali dan garis vertikal (lihat Gambar 3.1). Vektor posisi massa titik $\vec{x}$ diberikan oleh

$$\vec{x} = l \sin(\theta) \vec{i} - l \cos(\theta) \vec{j} \equiv l \vec{r},$$

dengan $\vec{r} = \sin(\theta) \vec{i} - \cos(\theta) \vec{j}$. Vektor satuan yang ortogonal terhadap $\vec{r}$ dan sedemikian rupa sehingga $(\vec{r}, \vec{\theta})$ membentuk basis terorientasi positif pada bidang (x, y) adalah $\vec{\theta} = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}$.

Sekarang kita dapat menggunakan informasi ini untuk menyatakan turunan pertama dan kedua vektor posisi $\vec{x}$ dalam bentuk vektor $\vec{r}$, $\vec{\theta}$, dan turunan sudut θ . Kita memperoleh

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(l \cos(\theta) \vec{i} + l \sin(\theta) \vec{j} \right) \frac{d\theta}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} &= l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\theta} + \left(-l \sin(\theta) \vec{i} + l \cos(\theta) \vec{j} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\theta} - l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{r}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Hukum Newton menyatakan bahwa hasil kali massa titik dan percepatannya sama dengan jumlah gaya yang bekerja pada massa tersebut. Dengan kata lain, kita memiliki

$$m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_g + \vec{F}_t + \vec{F}_f, \quad (3.3)$$

dengan

- $\vec{F}_g = -mg \vec{j} = mg \cos(\theta) \vec{r} - mg \sin(\theta) \vec{\theta}$ adalah gaya gravitasi,
- $\vec{F}_t = -T \vec{r}$ adalah tegangan yang diberikan oleh tali,
- $\vec{F}_f = -c \frac{d\vec{x}}{dt} = -cl \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta}$, dengan $c > 0$, adalah gaya gesek (kita menggunakan Persamaan (3.1) untuk memperoleh kesamaan terakhir).

Perhatikan bahwa kita telah menyatakan gaya-gaya dalam basis vektor $\vec{r}$ dan $\vec{\theta}$, bukan dalam $\vec{i}$ dan $\vec{j}$. Alasannya, bentuk $d^2\vec{x}/dt^2$ sederhana jika ditulis dalam $\vec{r}$ dan $\vec{\theta}$ (lihat Persamaan (3.2)). Dengan menggabungkan seluruh informasi ini, kita memperoleh

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\theta} - ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{r} = mg \cos(\theta) \vec{r} - mg \sin(\theta) \vec{\theta} - T \vec{r} - cl \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta},$$

yang, setelah diproyeksikan ke arah $\vec{r}$ dan $\vec{\theta}$, menghasilkan sistem persamaan

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos(\theta) - T \quad (3.4)$$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta) - cl \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.5)$$

Persamaan (3.4) memberikan rumus bagi tegangan T sebagai fungsi sudut θ dan turunannya, sedangkan Persamaan (3.5), yang tidak memuat T , merupakan persamaan diferensial biasa *nonlinear* bagi sudut θ . Persamaan ini mendeskripsikan gerak *pendulum nonlinear*. Persamaan tersebut biasanya dilengkapi dengan *kondisi awal*, yang memberikan sudut dan kecepatan sudut pendulum pada suatu waktu tertentu, misalnya $t = 0$. Kondisi awal itu adalah

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = \Omega_0, \quad (3.6)$$

dengan θ_0 dan Ω_0 telah diketahui.

Analisis tanpa gesekan

Jika tidak ada gesekan, Persamaan (3.5) dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) = -\omega_0^2\sin(\theta), \quad (3.7)$$

dengan mendefinisikan $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Analisis dimensi

Langkah pertama dalam menganalisis suatu model ialah melakukan *analisis dimensi* untuk memeriksa apakah berbagai suku yang muncul dalam persamaan-persamaan penyusun model memiliki dimensi yang sama. Selanjutnya, kita akan menggunakan notasi baku berikut:

- T (jangan disamakan dengan tegangan di atas) akan menyatakan besaran yang memiliki *dimensi* waktu. Perhatikan bahwa besaran semacam itu dapat dinyatakan dalam berbagai *satuan*, seperti detik, menit, hari, tahun, dan sebagainya.
- M akan menyatakan besaran yang memiliki dimensi massa. Satuan yang bersesuaian dapat berupa gram, kilogram, dan sebagainya.
- L akan menyatakan besaran yang memiliki dimensi panjang. Di sini pun, besaran semacam itu dapat memiliki berbagai satuan, seperti meter, kaki, yard, kilometer, dan sebagainya.

Karena itu, penting untuk membedakan *dimensi* dan *satuan*. Sebagai contoh, tinjau suku-suku yang muncul dalam Persamaan (3.7). Sudut θ tidak berdimensi (perhatikan bahwa ini tidak berarti sudut tersebut tidak memiliki satuan karena sudut biasanya diukur dalam radian atau derajat). Besaran yang menjadi argumen suatu fungsi (seperti θ dalam suku $\sin(\theta)$ pada Persamaan (3.7)) harus tak berdimensi. Hal ini harus selalu kita periksa setiap kali menjumpai sebuah ekspresi matematika. Selanjutnya, ruas kiri Persamaan (3.7) berdimensi kebalikan kuadrat waktu. Jadi, kita menulis (tanda kurung siku menyatakan “dimensi”)

$$\left[\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = T^{-2}.$$

Ruas kanan Persamaan (3.7) harus memiliki dimensi yang sama. Karena fungsi seperti $\sin(\theta)$ tidak berdimensi, kita menyimpulkan bahwa

$$\left[\frac{g}{l} \right] = T^{-2},$$

yang sekarang harus kita periksa. Untuk melakukannya, kita perlu mencari dimensi percepatan gravitasi g . Seperti tersirat oleh namanya, g berdimensi percepatan, yaitu $[g] = L T^{-2}$. Karena $[l] = L$, tampak bahwa memang $[g/l] = T^{-2}$. Akibatnya, $[\omega_0] = T^{-1}$, yaitu ω_0 merupakan frekuensi, sesuai dugaan. Dengan demikian, Persamaan (3.7) benar secara dimensi.

Penskalaan

Sebelum mulai menganalisis suatu persamaan diferensial, sering kali bermanfaat untuk menskalakan ulang persamaan itu, yaitu menuliskannya kembali dalam bentuk yang memiliki sesedikit mungkin parameter. Alasannya, besaran yang mengendalikan dinamika suatu masalah sering kali bukan parameter itu sendiri, melainkan kombinasinya. Sebagai contoh, Persamaan (3.7) menunjukkan bahwa kombinasi g/l merupakan besaran yang relevan untuk mendeskripsikan gerak pendulum tanpa gesekan. Akibatnya, hanya ada satu parameter yang relevan, yaitu ω_0 , bukan dua parameter (g dan l). Kita bahkan dapat melangkah lebih jauh. Karena ω_0 berdimensi kebalikan waktu, kita dapat mendefinisikan waktu karakteristik

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dan mendefinisikan variabel waktu *tak berdimensi* τ sebagai

$$\tau = \frac{t}{t_0}.$$

Dengan menyubstitusikan hubungan-hubungan ini ke dalam Persamaan (3.7) dan (3.6), kita memperoleh

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin(\theta), \quad (3.8)$$

beserta kondisi awal

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{d\tau}(0) = t_0\Omega_0. \quad (3.9)$$

Dengan kata lain, gerak pendulum nonlinear tanpa gesekan dapat dideskripsikan oleh persamaan diferensial biasa (3.8) yang tidak memiliki parameter sama sekali! Ini hasil yang sangat penting karena akan sangat menyederhanakan kajian kita terhadap pendulum nonlinear: jika kita dapat mencirikan sepenuhnya dinamika Persamaan (3.8), analisis kita terhadap Persamaan (3.7) pun selesai; kita tidak perlu memvariasikan parameter!

Osilasi kecil: osilator harmonik

Jika pendulum mengalami osilasi kecil, yaitu jika θ bernilai kecil, kita dapat menuliskan ekspansi Taylor bagi $\sin(\theta)$ dalam pangkat-pangkat θ dan memperoleh persamaan yang lebih sederhana. Secara khusus, jika hanya mempertahankan suku pertama dalam ekspansi tersebut, Persamaan (3.8) menjadi persamaan osilator harmonik. Pada orde terendah, $\sin(\theta) \simeq \theta$, dan substitusi ke dalam Persamaan (3.8) menghasilkan

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \theta = 0. \quad (3.10)$$

Solusi umum persamaan ini adalah

$$\theta(\tau) = A\cos(\tau) + B\sin(\tau) \quad (3.11)$$

atau, secara ekuivalen (lihat soal-soal),

$$\theta(\tau) = C\cos(\tau + \phi), \quad (3.12)$$

dengan A , B , C , dan ϕ sebagai konstanta. Jika sekarang kita menerapkan kondisi awal (3.9), kita memperoleh

$$\theta_0 = \theta(0) = A, \quad t_0\Omega_0 = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = B,$$

atau

$$\theta_0 = \theta(0) = C\cos(\phi), \quad t_0\Omega_0 = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = -C\sin(\phi).$$

Sistem persamaan pertama memberikan A dan B secara langsung, sedangkan sistem kedua perlu diselesaikan terhadap C dan ϕ (lihat soal-soal) untuk memperoleh rumus bagi $\theta(\tau)$. Penulisan solusi dalam bentuk (3.11) mempermudah penerapan kondisi awal, sedangkan Persamaan (3.12) mempermudah deskripsi dinamika solusi. Memang, tampak bahwa sudut θ berosilasi terhadap waktu di antara nilai $C = \sqrt{\theta_0^2 + t_0^2\Omega_0^2}$ dan $-C$, dengan periode sebesar 2π (dalam variabel terskala τ). Pendulum berosilasi tanpa henti, sesuai dugaan karena kita mengasumsikan dinamikanya tanpa gesekan.

Dinamika nonlinear

Persamaan (3.8) dapat diselesaikan secara eksplisit dengan fungsi eliptik, tetapi menuliskan rumus semacam itu belum tentu membantu kita mendeskripsikan gerak pendulum. Karena itu, kita tidak akan mencoba menyelesaikan persamaan ini, tetapi akan mendeskripsikan dinamikanya secara kualitatif dalam ruang fase yang bersesuaian. Cara ini mungkin terasa mengejutkan bagi pembaca yang belum pernah mengikuti kuliah sistem dinamik. Melalui beberapa contoh di sepanjang buku ini, saya berharap dapat meyakinkan Anda bahwa inilah cara yang sangat umum dan efisien untuk menangani persamaan diferensial nonlinear.

Tujuan kita adalah mendeskripsikan solusi (3.8) dalam *bidang fase* ($\theta, d\theta/d\tau$). Setiap kondisi awal ($\theta_0, t_0\Omega_0$) akan dikaitkan dengan sebuah kurva pada bidang ini. **Catatan:** Lihat lampiran tentang persamaan diferensial biasa untuk pembahasan keberadaan dan ketunggalan solusi masalah nilai awal, serta uraian singkat mengenai analisis bidang fase.

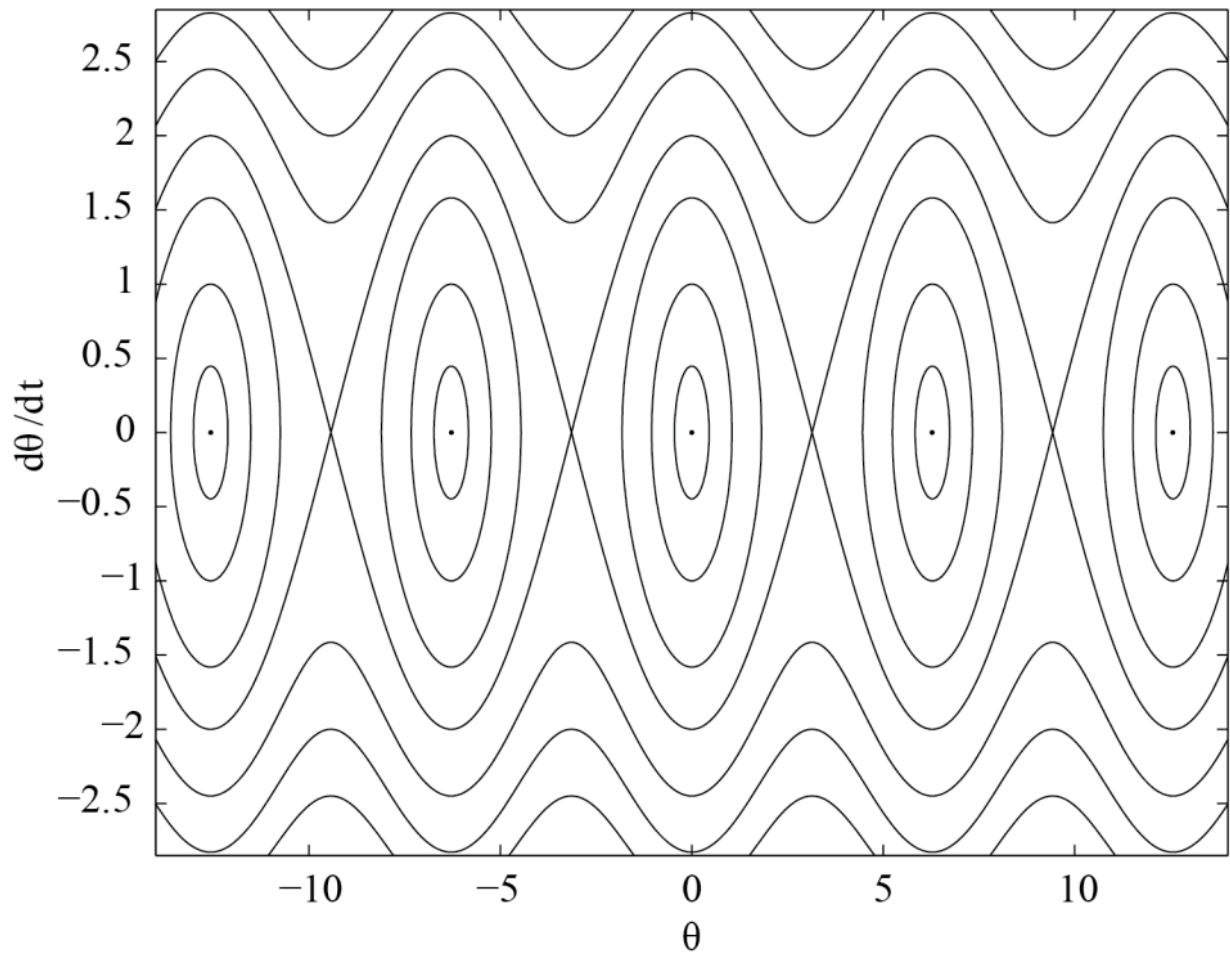
Jika mengetahui susunan kurva-kurva solusi ini, kita dapat memberikan deskripsi kualitatif yang lengkap tentang dinamika pendulum nonlinear. Rumus bagi kurva-kurva solusi dapat diperoleh sebagai berikut. Jika kita mengalikan Persamaan (3.8) dengan $d\theta/d\tau$ lalu mengintegralkannya, kita memperoleh

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = \cos(\theta) + E,$$

dengan konstanta E yang bernilai sembarang. Konstanta ini merepresentasikan energi pendulum tak berdimensi dan kekal selama dinamika berlangsung. Himpunan kurva solusi dengan demikian dideskripsikan oleh

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{2\cos(\theta) + 2E}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} \in \mathbb{R}, \quad E \in [-1, \infty). \quad (3.13)$$

Jika $E > 1$, ruas kanan Persamaan (3.13) bernilai riil untuk semua nilai θ , dan kurva solusi yang bersesuaian tidak tertutup. Sebaliknya, jika $-1 \leq E \leq 1$, $d\theta/d\tau$ bernilai riil hanya untuk nilai θ dalam interval berbentuk $[-\arccos(-E) + 2m\pi, \arccos(-E) + 2m\pi]$, $m \in \mathbb{Z}$. Untuk nilai interior interval energi tersebut, kurva solusi yang bersesuaian merupakan orbit tertutup; batas bawah memberikan titik tetap, sedangkan batas atas memberikan separatriks. Terakhir, karena tanda $\pm$ pada ruas kanan (3.13), lintasan-lintasan simetris terhadap sumbu horizontal bidang fase. Kita dapat menggunakan perangkat lunak seperti Maple atau MATLAB untuk memplot kurva-kurva ini, dengan memberi perhatian khusus pada kasus $E = -1$ dan $E = 1$. Gambar 3.2 menunjukkan beberapa lintasan tersebut. Deskripsi dinamika dilengkapi dengan menambahkan panah pada kurva untuk menunjukkan arah penelusuran setiap lintasan. Hal ini tidak sulit karena, menurut definisinya, $d\theta/d\tau$ bernilai positif jika θ meningkat sebagai fungsi τ , dan negatif jika sebaliknya. Akibatnya, panah mengarah ke kanan pada bagian atas bidang fase dan ke kiri pada bagian bawahnya.



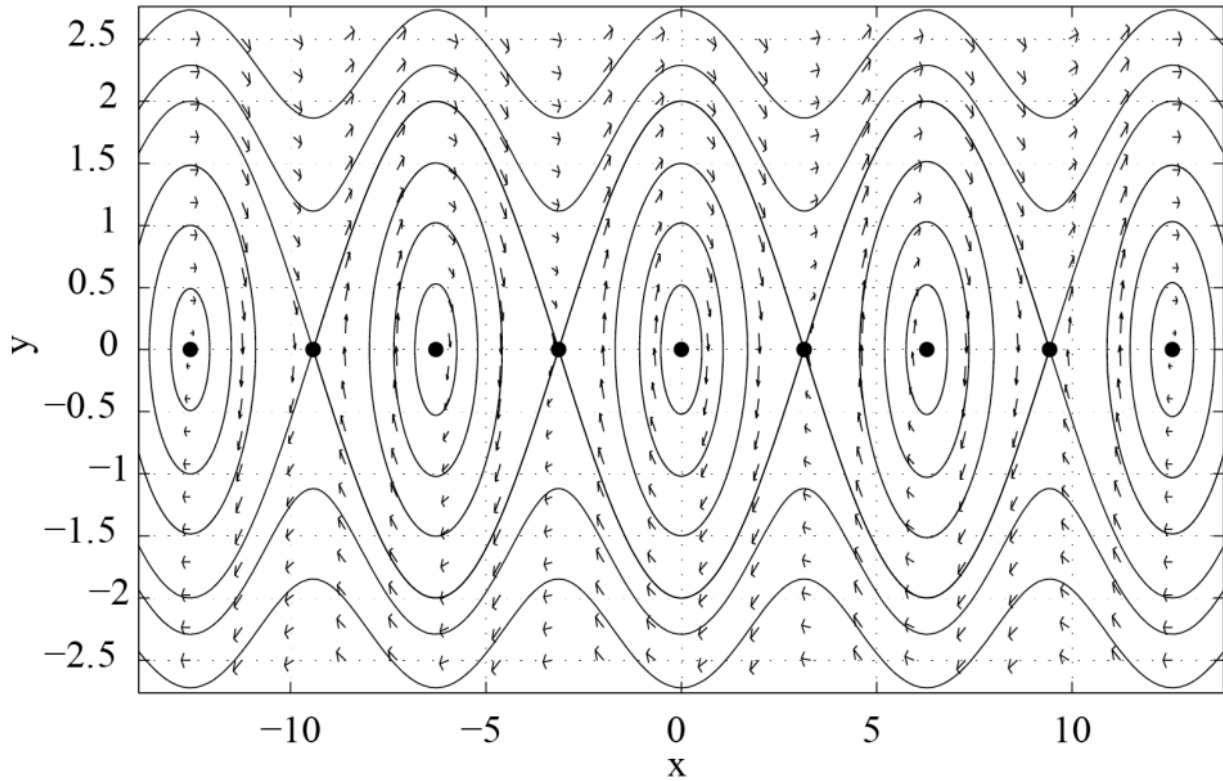
Gambar 3.2. Kurva solusi pendulum nonlinear tanpa gesekan. [Deskripsi Gambar](#)

Hasil-hasil ini dapat dikonfirmasi menggunakan perangkat lunak analisis bidang fase seperti [Aplikasi Bidang Fase](#). Program ini dapat dijalankan dalam MATLAB. Program tersebut memungkinkan pengguna memasukkan Persamaan (3.8) yang ditulis sebagai sistem orde pertama,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \Lambda, \quad \frac{d\Lambda}{d\tau} = -\sin(\theta),$$

dan memplot medan arah serta lintasan yang bersesuaian dalam bidang fase. Medan arah sistem ini diperoleh dengan memplot vektor berkomponen $(\Lambda, -\sin(\theta))$ (yaitu ruas kanan persamaan-persamaan di atas) pada titik berkoordinat (θ, Λ) dalam bidang fase. Kurva solusi (3.8) yang melalui titik (θ, Λ) menyinggung medan arah di titik tersebut. Gambar 3.3 menunjukkan bidang fase bagi Persamaan (3.8), sebagaimana diperoleh dengan PPLANE (dikembangkan oleh John C. Polking di Rice University). Sesuai dugaan, kurva solusi yang ditemukan secara numerik sangat sesuai dengan kurva pada Gambar 3.2, yang diperoleh dari Persamaan (3.13).

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\sin(x)\end{aligned}$$



Gambar 3.3. Bidang fase pendulum nonlinear tanpa gesekan, sebagaimana diperoleh menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Secara lebih umum, setiap sistem dinamik berbentuk

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0 \quad (3.14)$$

dapat dianalisis dengan cara ini. Dengan mengalikan Persamaan (3.14) dengan dx/dt lalu mengintegrasikannya sekali, kita memperoleh

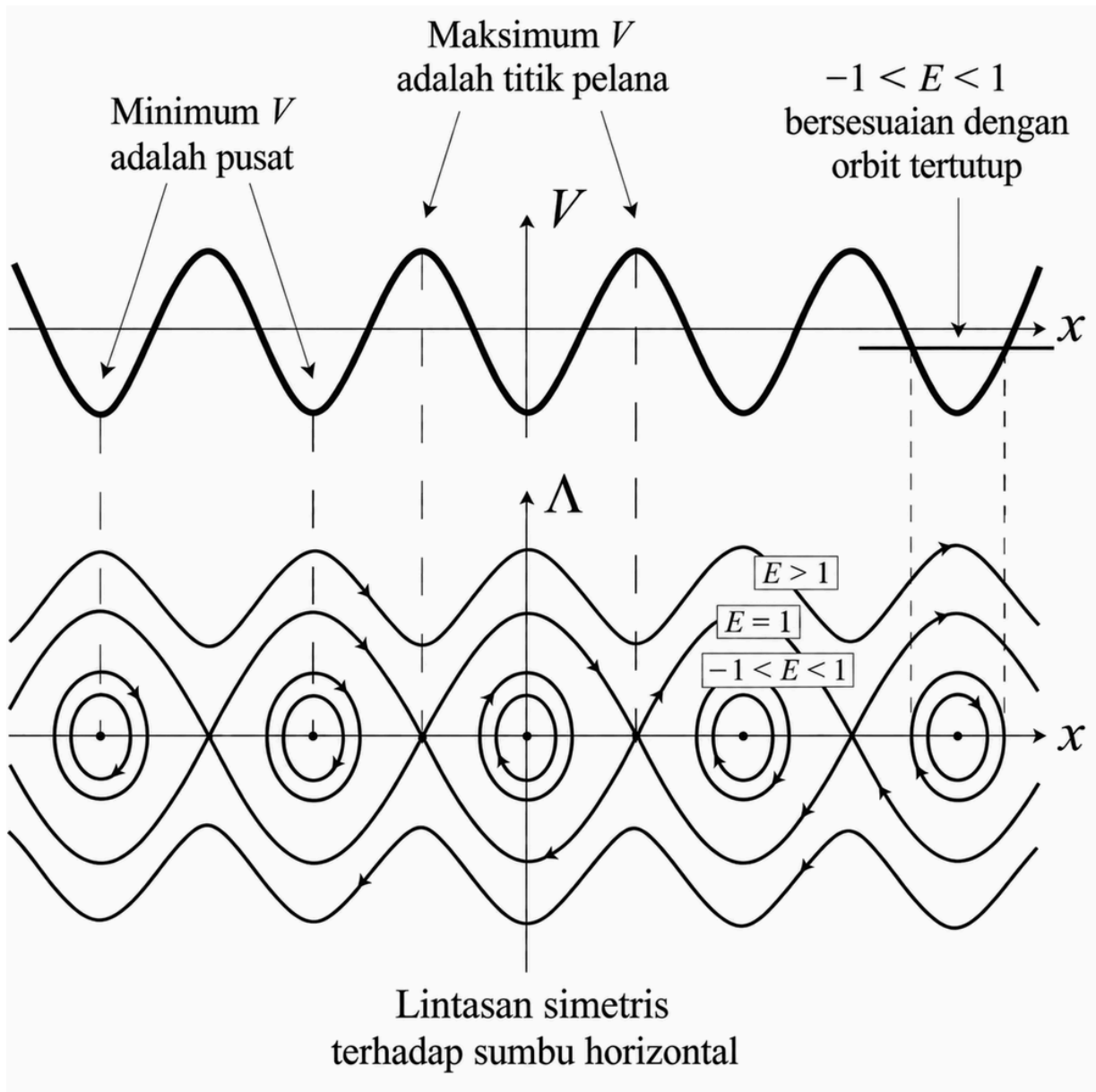
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E, \quad (3.15)$$

dengan energi E sebagai konstanta gerak. Dengan menetapkan $\frac{dx}{dt} = \Lambda$, kita memperoleh persamaan bagi kurva-kurva solusi pada bidang (x, Λ) :

$$\Lambda = \pm \sqrt{2(E - V(x))}, \quad \Lambda \in \mathbb{R}.$$

Potret fase yang bersesuaian dapat digambar dengan memperhatikan bahwa kurva solusi berenergi E hanya ada untuk nilai x yang memenuhi $E \geq V(x)$. Secara khusus, *titik tetap* dinamika, yaitu titik dengan $x(t) = x_0$ yang konstan terhadap waktu, merupakan titik kritis $V(x)$ (dari Persamaan (3.14)), dan energi yang bersesuaian diberikan oleh $E = V(x_0)$ (dari Persamaan (3.15)). Jika titik-titik kritis tersebut nondegenerat, dapat diperiksa bahwa titik minimum v bersesuaian dengan *pusat* dan titik maksimum v dengan *titik pelana* (lihat soal-soal). Selain itu, lintasan berenergi E yang memotong sumbu horizontal ($\Lambda = 0$) melakukannya pada nilai x yang memenuhi $V(x) = E$. Apabila turunan

potensial tidak nol di titik potong tersebut, lintasan-lintasan ini memiliki garis singgung vertikal di sana (lihat soal-soal). Terakhir, lintasan yang berasal dari atau menuju titik pelana menyinggung vektor eigen linearisasi (3.14) yang ditulis sebagai sistem orde pertama pada titik-titik kesetimbangan tersebut (lihat soal-soal). Gambar 3.4 memperlihatkan cara menggunakan pernyataan-pernyataan sebelumnya untuk memplot potret fase Persamaan (3.14) dengan $V(x) = -\cos(x)$. Hasilnya perlu dibandingkan dengan Gambar 3.2 dan 3.3.



Gambar 3.4. Konstruksi potret fase Persamaan (3.14), dengan $V(x) = -\cos(x)$. [Deskripsi Gambar](#)

Pada Gambar 3.4, grafik V sebagai fungsi x ditampilkan di bagian atas. Untuk setiap nilai energi E , besaran $E - V$ sebanding dengan Λ^2 . Informasi ini memungkinkan kita menyimpulkan perilaku berbagai kurva solusi pada bidang (x, Λ) . Potret fase yang dihasilkan ditampilkan di bagian bawah.

Analisis dengan adanya gesekan

Dengan adanya gesekan, persamaan gerak untuk pendulum nonlinear menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt}. \quad (3.16)$$

Seperti sebelumnya, mula-mula kita perlu memeriksa bahwa dimensi suku terakhir sudah benar. Kita memperoleh

$$\left[\frac{c}{m} \frac{d\theta}{dt} \right] = \left[\frac{1}{lm} c l \frac{d\theta}{dt} \right] = L^{-1} M^{-1} [\text{gaya}] = L^{-1} M^{-1} M L T^{-2} = T^{-2},$$

dengan menggunakan fakta bahwa

$$\vec{F}_f = -c l \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta}.$$

Sekarang kita menyederhanakan Persamaan (3.16) melalui perubahan variabel $\tau = t/t_0$. Kita memperoleh

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin(\theta) - \alpha \frac{d\theta}{d\tau}, \quad \alpha = \frac{c}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3.17)$$

dan kita dapat memeriksa bahwa parameter α tak berdimensi, karena

$$[\alpha] = [c] M^{-1} T = [\text{gaya}] L^{-1} T M^{-1} T = M L T^{-2} L^{-1} T^2 M^{-1} = 1.$$

Jika $c = 0$, maka $\alpha = 0$, dan kita kembali memperoleh Persamaan (3.8). Kondisi awal untuk Persamaan (3.17), seperti sebelumnya, diberikan oleh Persamaan (3.9). Langkah selanjutnya dalam analisis ini adalah mendeskripsikan potret fase Persamaan (3.17). Kita tidak dapat menggunakan metode yang sama seperti sebelumnya karena energi E tidak lagi kekal. Memang, kita dapat menghitung

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - \cos(\theta) \right) = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} \\ &= \left(\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) \right) \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned}$$

yang menghasilkan

$$\frac{dE}{d\tau} = -\alpha \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2.$$

Dengan demikian, karena $\alpha > 0$, energi E tidak bertambah: laju perubahannya nol pada saat $d\theta/d\tau = 0$ dan negatif ketika kecepatannya tidak nol. Energi hanya konstan sepanjang waktu pada lintasan kesetimbangan. Karena E dibatasi dari bawah oleh -1 , dapat diduga bahwa lintasan generik yang bukan kesetimbangan—sehingga $d\theta/d\tau \neq 0$ setidaknya pada sebagian waktu—dan tidak terletak pada manifold stabil titik pelana akan konvergen menuju solusi berenergi $E = -1$. Solusi seperti itu diberikan oleh $\cos(\theta) = 1$, yaitu $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; semuanya merupakan titik tetap dinamika. Secara visual, kita dapat membayangkan sebuah partikel terperangkap di salah satu lembah potensial $V(x) = -\cos(x)$, kehilangan energi ketika bergerak, sehingga konvergen menuju minimum lokal potensial tersebut.

Sekarang kita beralih ke deskripsi bidang fase untuk Persamaan (3.17). Sistem orde pertama yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \Lambda, \\ \frac{d\Lambda}{d\tau} &= -\sin(\theta) - \alpha\Lambda. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Titik tetap diperoleh dengan menetapkan ruas kiri persamaan di atas sama dengan nol, yaitu dengan menyelesaikan $\Lambda = 0$ dan $\sin(\theta) = 0$, yang bersesuaian dengan titik-titik berkoordinat $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ pada bidang (θ, Λ) . Informasi tentang dinamika lokal dapat diperoleh dengan *melinearkan* sistem (3.18) di sekitar titik-titik tetap ini. Untuk itu, kita tetapkan

$$\theta = n\pi + \mu, \quad \Lambda = 0 + \nu,$$

dengan μ dan ν bernilai kecil, lalu mensubstitusikannya ke dalam Persamaan (3.18). Kita memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\tau} &= \nu, \\ \frac{d\nu}{d\tau} &= -\sin(n\pi + \mu) - \alpha\nu \\ &= -\cos(n\pi)\mu - \alpha\nu + O(\mu^3), \end{aligned} \quad (3.19)$$

yang, jika μ kecil, dapat dihampiri oleh sistem *linear* berikut

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(n\pi) & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Matriks

$$J(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(n\pi) & -\alpha \end{pmatrix}$$

disebut *matriks Jacobi* sistem (3.18) pada titik tetap $(n\pi, 0)$. Solusi umum (3.19) dapat dituliskan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari $J(n\pi, 0)$, dan informasi ini dapat digunakan untuk menilai kestabilan linear titik tetap yang bersesuaian **Catatan:** Untuk tinjauan, lihat [bagian analisis bidang fase](#) pada lampiran tentang persamaan diferensial biasa.. Karena polinom karakteristik matriks 2×2 A diberikan oleh $\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0$, nilai-nilai eigen $J(n\pi, 0)$ memenuhi persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \cos(n\pi) = 0.$$

Jika $n = 2p$ genap, $\cos(n\pi) = 1$; hasil kali kedua nilai eigen $J(2p\pi, 0)$ atau, secara ekuivalen, determinan $J(2p\pi, 0)$, bernilai positif. Jadi, kedua nilai eigen $J(2p\pi, 0)$ bersifat riil dan bertanda sama, atau saling konjugat kompleks (ingat bahwa nilai eigen matriks berelemen riil bersifat riil atau muncul dalam pasangan konjugat kompleks). Jumlah nilai eigen $J(2p\pi, 0)$ atau, secara ekuivalen, jejak $J(2p\pi, 0)$, adalah $-\alpha$, yang bernilai negatif. Karena itu, titik-titik tetap $(2p\pi, 0)$, $p \in \mathbb{Z}$, selalu stabil. Kita dapat menentukan jenis titik-titik tetap ini dengan membandingkan kuadrat jejak $J(2p\pi, 0)$ dengan empat kali determinannya atau, secara lebih langsung, dengan menghitung nilai eigen $J(2p\pi, 0)$. Nilai-nilai tersebut diberikan oleh

$$\lambda_{(2p\pi, 0)}^{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}.$$

Karena itu, titik-titik tetap $(2p\pi, 0)$ merupakan simpul stabil (jika $\alpha^2 > 4$), simpul stabil degenerat pada kasus kritis ketika kuadrat koefisien redaman sama dengan 4, atau spiral stabil (jika $\alpha^2 < 4$). Demikian pula, jika $n = 2p + 1$ ganjil, hasil kali nilai-nilai eigen $J((2p + 1)\pi, 0)$ sama dengan $\cos((2p + 1)\pi) = -1$ sehingga keduanya riil dan berlainan tanda.

Catatan: Karena $J(n\pi, 0)$ berelemen riil, jika nilai eigennya kompleks, nilai-nilai itu harus saling konjugat kompleks dan hasil kalinya harus positif. Akibatnya, titik-titik tetap $((2p + 1)\pi, 0)$ merupakan titik pelana. Untuk kelengkapan, kita berikan nilai eigen $J((2p + 1)\pi, 0)$, yaitu

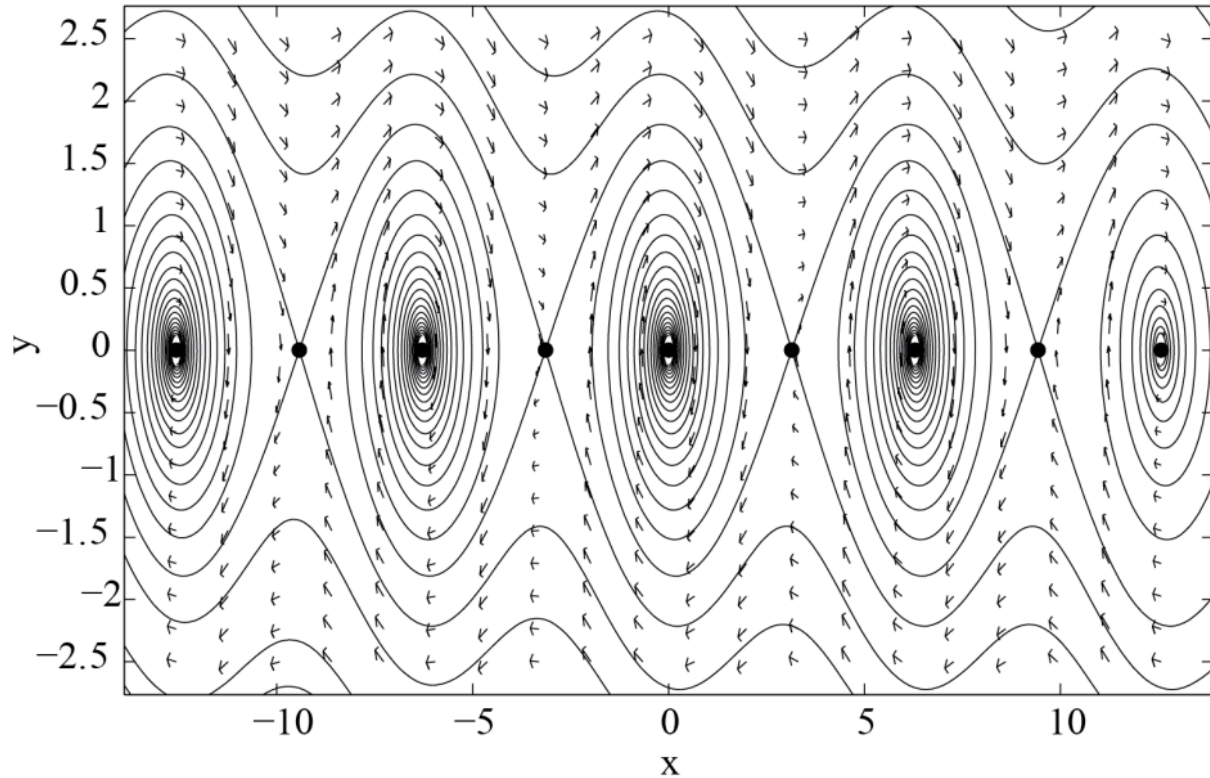
$$\lambda_{((2p + 1)\pi, 0)}^{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 1}.$$

Fakta-fakta ini dirangkum dalam potret fase pada Gambar 3.5, yang diperoleh dengan PPLANE. Kita melihat bahwa lintasan yang menyinggung vektor eigen $J((2p + 1)\pi, 0)$ pada titik $((2p + 1)\pi, 0)$ merupakan *separatriks* di bidang fase. Lintasan ini disebut *manifold stabil* dan *manifold tak stabil* dari titik pelana $((2p + 1)\pi, 0)$. Seperti diperkirakan, cabang-cabang manifold tak stabil dari $((2p + 1)\pi, 0)$ mendekati titik-titik tetap stabil $(2p\pi, 0)$ dan $((2p + 2)\pi, 0)$; kedua titik itu berada dalam penutupan manifold tersebut. Lintasan yang menghubungkan dua titik tetap berbeda disebut orbit *heteroklinik*.

$$x' = y$$

$$y' = -\sin(x) - ay$$

$$a = 0.1$$



Gambar 3.5. Bidang fase pendulum nonlinear dengan gesekan, sebagaimana diperoleh menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Ringkasan

Pendulum nonlinear memberikan ilustrasi yang baik tentang proses pemodelan. Hukum Newton, bersama sekumpulan hipotesis penyederhanaan, memungkinkan kita menurunkan model persamaan diferensial bagi sudut pendulum nonlinear, baik dengan maupun tanpa gesekan. Selanjutnya, kita meninjau cara menggunakan analisis dimensi untuk menskalakan ulang variabel terikat dan bebas sehingga diperoleh model tak berdimensi dengan jumlah parameter yang lebih sedikit. Persamaan diferensial orde kedua yang diturunkan dalam bab ini dikaji melalui analisis bidang fase. Bidang fase sistem konservatif dua dimensi dapat diperoleh dengan menggambar himpunan aras energi kekal. Kurva energi konstan dapat ditentukan secara analitis atau digambar dari grafik energi potensial. Bidang fase sistem dinamik dua dimensi nonkonservatif sering kali dapat disimpulkan dari analisis titik-titik tetap sistem dan kestabilan linearnya. Lebih tepatnya, suku-suku nonlinear tidak mengubah sifat simpul dan spiral stabil atau tak stabil, maupun titik pelana. Pembaca yang menginginkan rincian lebih lanjut dapat merujuk pada buku pengantar tentang sistem dinamik.

Deskripsi Gambar

Gambar 3.1: Diagram fisika sebuah pendulum sederhana dengan panjang L dan massa m . Diagram ini memperlihatkan pendulum yang tergantung pada sebuah titik tumpu dan menyimpang sebesar sudut θ dari arah vertikal. Vektor menunjukkan gravitasi $\vec{g}$ yang bekerja ke bawah, beserta sistem koordinat polar yang didefinisikan oleh vektor radial $\vec{r}$ dan vektor sudut $\vec{\theta}$. Kerangka koordinat Kartesius dengan vektor satuan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ ditampilkan di sebelah kiri. [[Kembali ke Gambar 3.1](#)]

Gambar 3.2: Potret fase pendulum sederhana, dengan simpangan sudut θ pada sumbu horizontal dan kecepatan sudut $d\theta/dt$ pada sumbu vertikal. Grafik ini memperlihatkan serangkaian orbit elips tertutup yang berpusat pada sumbu θ , dipisahkan oleh kurva berbentuk X (separatriks), serta lintasan horizontal bergelombang di bagian atas dan bawah bingkai. Catatan: label vertikal pada gambar sumber menggunakan $d\theta/dt$, sedangkan model tak berdimensi dalam teks menggunakan $d\theta/d\tau$. [[Kembali ke Gambar 3.2](#)]

Gambar 3.3: Potret fase sistem nonlinear $x' = y$ dan $y' = -\sin(x)$. Plot ini memperlihatkan medan vektor dan lintasan pada bidang Kartesius dengan x berkisar dari sekitar -15 hingga 15 dan y dari -2.5 hingga 2.5 . Terdapat serangkaian titik tetap di sepanjang sumbu x : pusat stabil (dikelilingi orbit tertutup) dan titik pelana tak stabil (berbentuk X). [[Kembali ke Gambar 3.3](#)]

Gambar 3.4: Diagram matematika dengan dua panel. Grafik atas memperlihatkan kurva energi potensial periodik $V(x)$ dengan minimum dan maksimum lokal. Grafik bawah memperlihatkan potret fase yang bersesuaian dengan aras energi $-1 < E < 1$ (orbit tertutup), $E = 1$ (separatriks), dan $E > 1$ (lintasan tak terbatas); pada $E = -1$, aras mereduksi menjadi titik kesetimbangan. Garis vertikal putus-putus menghubungkan minimum potensial dengan pusat dan maksimum potensial dengan titik pelana tak stabil. [[Kembali ke Gambar 3.4](#)]

Gambar 3.5: Potret fase sistem pendulum teredam yang didefinisikan oleh $x' = y$ dan $y' = -\sin(x) - ay$, dengan koefisien redaman $a = 0.1$. Plot ini memperlihatkan medan vektor dan lintasan. Berbeda dengan versi tanpa redaman, lintasan kini membentuk spiral ke dalam menuju titik-titik kesetimbangan stabil pada sumbu x , yang menunjukkan hilangnya energi seiring waktu. [[Kembali ke Gambar 3.5](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Buktikan bahwa

$$\theta(\tau) = C \cos(\tau + \phi), \text{ dengan } C, \phi \in \mathbb{R}$$

dapat ditulis sebagai

$$\theta(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau),$$

dengan $A, B \in \mathbb{R}$, jika A dan B dinyatakan dalam C dan ϕ .

Sebaliknya, jelaskan bagaimana Anda menentukan C dan ϕ jika A dan B diketahui. Apakah C dan ϕ ditentukan secara unik? Mengapa demikian atau mengapa tidak?

Soal 2

Dalam teks telah ditunjukkan bahwa terdapat solusi Persamaan (3.8) yang memperlihatkan osilasi periodik.

1. Tuliskan persamaan untuk periode T dari osilasi ini dalam bentuk integral terhadap variabel sudut θ . Jawaban Anda harus bergantung pada energi E .

2. Buktikan bahwa periode T merupakan fungsi yang meningkat terhadap energi E . Dengan kata lain, buktikan bahwa periode pendulum nonlinear meningkat seiring dengan amplitudonya.

Soal 3

Perhatikan sistem pegas–massa satu dimensi tanpa gesekan. Gaya-gaya yang bekerja pada massa m di posisi x adalah gaya gravitasi $F_g = -mg$, dengan $g > 0$ konstan, dan gaya pemulih pegas yang diberikan oleh $F_r = -k(x - x_0)$, dengan $k > 0$ dan x_0 konstan.

1. Gunakan hukum Newton untuk menuliskan persamaan bagi posisi x dari massa tersebut.
2. Skalikan ulang persamaan yang diperoleh. Berapa banyak parameter yang dapat Anda hilangkan?
3. Buktikan bahwa sistem pegas–massa tanpa gesekan ini bersifat konservatif.
4. Jelaskan dinamika sistem ini.

Soal 4

Perhatikan sistem persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

1. Syarat apa yang harus dipenuhi oleh koordinat x dan y dari suatu titik tetap sistem ini?
2. Misalkan (x_0, y_0) adalah titik tetap dari sistem di atas. Kita ingin menjelaskan dinamika sistem di sekitar titik tetap tersebut. Untuk melakukannya, tetapkan $x = x_0 + \mu$, $y = y_0 + \nu$, substitusikan kedua bentuk ini ke dalam sistem di atas, lalu uraikan ruas-ruas kanannya dalam deret Taylor menurut pangkat μ dan ν hingga orde kedua.
3. Dengan menggunakan hasil bagian (2) di atas, buktikan bahwa linearisasi sistem di sekitar titik tetap (x_0, y_0) berbentuk

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix},$$

dengan matriks Jacobi $J(x_0, y_0)$ dari sistem di titik (x_0, y_0) diberikan oleh

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Soal 5

Perhatikan sistem linear berbentuk

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dengan $a > 0$, $b < 0$.

1. Berikan solusi umum sistem ini.
2. Sketsakan bidang fase sistem ini, dengan memberikan perhatian khusus pada lintasan-lintasan istimewa. Dapatkah Anda menentukan arah penelusuran kurva solusi seiring berjalannya waktu? Jika ya, tambahkan panah pada lintasan yang Anda gambar.

Soal 6

Sketsakan bidang fase di sekitar jenis-jenis titik tetap berikut:

1. Simpul stabil.
2. Spiral tak stabil.
3. Pusat.
4. Titik pelana.

Soal 7

Jelaskan nilai-nilai eigen dari linearisasi suatu sistem berdimensi dua di sekitar titik-titik tetap berikut:

1. Simpul stabil.
2. Spiral tak stabil.
3. Pusat.
4. Titik pelana.

Soal 8

Carilah matriks berukuran 2×2 A yang semua entrinya tak nol dan sedemikian rupa sehingga sistem linear $\dot{X} = AX$ memiliki titik tetap di titik asal dengan jenis berikut:

1. Simpul stabil.
2. Spiral tak stabil.
3. Pusat.
4. Titik pelana.

Periksa jawaban Anda dengan perangkat lunak analisis bidang fase, seperti [Aplikasi Bidang Fase](#) atau perangkat lunak yang setara.

Soal 9

Jelaskan bagaimana Anda menentukan sifat (misalnya simpul atau spiral yang stabil maupun tak stabil, pusat linear, atau titik pelana) dari suatu titik tetap (x_0, y_0) pada sistem diferensial dua dimensi

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Soal 10

Sketsakan bidang fase dari sistem-sistem dinamik berikut. Jika jawabannya bergantung pada parameter masalah, pertimbangkan semua kasus. Gunakan [Aplikasi Bidang Fase](#) atau perangkat lunak yang setara untuk memeriksa hasil Anda.

1. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - cy \end{pmatrix}, \quad c > 0.$
2. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x(x+1)(x-2) \end{pmatrix}.$
3. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x(x+1)(x-2) - cy \end{pmatrix}, \quad c > 0.$
4. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(6-2y) \\ y(x-3) \end{pmatrix}.$
5. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-x-2y) \\ y(1-3x-y)/2 \end{pmatrix}.$
6. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix}.$

Soal 11

Perhatikan osilator van der Pol,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon \frac{dx}{dt}(1 - x^2), \quad \epsilon \geq 0, \quad \omega > 0.$$

1. Jelaskan dinamikanya ketika $\epsilon = 0$.
2. Apa pengaruh ruas kanan ketika $|x|$ bernilai kecil?
3. Apa pengaruh ruas kanan ketika $|x|$ jauh lebih besar daripada 1?
4. Berdasarkan jawaban Anda atas pertanyaan-pertanyaan sebelumnya, jelaskan apa yang Anda perkirakan akan terjadi ketika nilai $|x|$ berada di antara kedua keadaan tersebut.
5. Sketsakan bidang fase osilator van der Pol.
6. Periksa jawaban Anda dengan [Aplikasi Bidang Fase](#) atau perangkat lunak yang setara. Apakah hasilnya mengejutkan? Mengapa demikian atau mengapa tidak?

Soal 12

Perhatikan persamaan diferensial berikut, $\frac{dx}{dt} = \lambda x - \gamma x^3$. Untuk penskalaan real, perlakukan secara terpisah kasus ketika salah satu parameter nol; jika keduanya tidak nol, besar parameternya dapat diserap, tetapi tandanya tetap menentukan kelas dinamika.

1. Apa dimensi λ ?
2. Apa dimensi γ ? Nyatakan jawaban Anda dalam dimensi x , yang dilambangkan dengan $[x]$.
3. Misalkan t_0 adalah skala waktu karakteristik untuk masalah ini. Definisikan variabel waktu tak berdimensi $\tau = t/t_0$, lalu buktikan bahwa Anda dapat melakukan perubahan variabel dari t menjadi τ untuk menghilangkan besar parameter λ ketika parameter itu tidak nol. Jelaskan pula apa yang terjadi ketika $\lambda = 0$ dan besaran diskret apa yang masih tersisa ketika $\lambda \neq 0$.
4. Jika $\gamma \neq 0$, dapatkah Anda menemukan perubahan variabel yang juga menghilangkan besar γ ? Jelaskan peran tanda γ dan kasus $\gamma = 0$.

Soal 13

Besarnya gaya gravitasi antara dua benda bermassa m_1 dan m_2 adalah $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, dengan r adalah jarak antara pusat massa kedua benda dan G adalah konstanta gravitasi.

1. Gunakan rumus ini untuk membuktikan bahwa, bagi sebuah benda bermassa m di permukaan Bumi, gaya F dapat dihampiri dengan $F \simeq mg$, dengan percepatan gravitasi g konstan.
2. Nyatakan g dalam G , massa Bumi M , dan jari-jari Bumi R .

Soal 14

Perhatikan fungsi mulus $f(x)$ dan ekspansi Taylor-nya di sekitar $x = x_0$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!} + f^{(n+1)}(\bar{x}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3.20)$$

dengan $\bar{x} \in [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]$. Misalkan $E_n(x)$ adalah galat akibat menghampiri f dengan ekspansi Taylor-nya yang dipotong pada orde n ,

$$E_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n f^{(i)}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!}.$$

1. Gunakan Persamaan (3.20) di atas untuk menuliskan ekspansi Taylor $f(x) = \cos(x)$ di sekitar $x_0 = 0$ hingga orde $n = 5$.
2. Carilah syarat bagi $|x|$ yang menjamin bahwa $|E_5(x)| < 0.05$.

3. Gunakan kalkulator atau MATLAB untuk memeriksa jawaban Anda atas pertanyaan sebelumnya.

Soal 15

Perhatikan model berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu u + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u^3, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

1. Apa dimensi parameter α , β , dan μ ? Tuliskan $[u]$ untuk dimensi u .
2. Berapa banyak parameter yang relevan dalam model ini? Jelaskan.

Soal 16

Perhatikan persamaan diferensial orde kedua $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan $V(x)$ suatu potensial mulus.

1. Tulis ulang persamaan orde kedua ini sebagai sistem orde pertama.
2. Carilah titik-titik tetap sistem orde pertama tersebut dan buktikan bahwa titik-titik itu bersesuaian dengan titik-titik kritis ∇ .
3. Carilah sistem yang dilinearkan di sekitar sembarang titik tetap dan buktikan bahwa titik maksimum nondegenerat ∇ bersesuaian dengan titik pelana, sedangkan titik minimum nondegenerat ∇ bersesuaian dengan pusat linear.

Soal 17

Perhatikan sistem dinamik $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan $V(x)$ suatu fungsi mulus. Misalkan $(x_0, 0)$ adalah titik pelana dari sistem persamaan diferensial orde pertama yang bersesuaian.

Carilah persamaan yang menjelaskan lintasan-lintasan dalam bidang fase terkait di sekitar titik tetap $(x_0, 0)$.

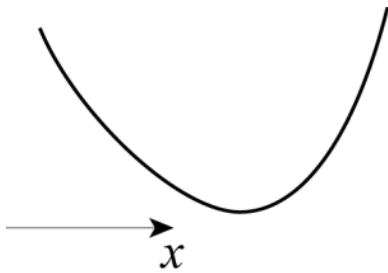
Soal 18

Perhatikan sistem dinamik $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan $V(x)$ suatu fungsi mulus.

Buktikan bahwa, dalam bidang fase berkoordinat $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, lintasan dengan energi E sedemikian sehingga $\inf V < E < \sup V$ (dengan $\inf V$ dan/atau $\sup V$ mungkin tak hingga, bergantung pada potensial V) memotong sumbu x . Selain itu, buktikan bahwa lintasan tersebut memiliki garis singgung vertikal pada titik potong yang memenuhi $\frac{dV}{dx} \neq 0$.

Soal 19

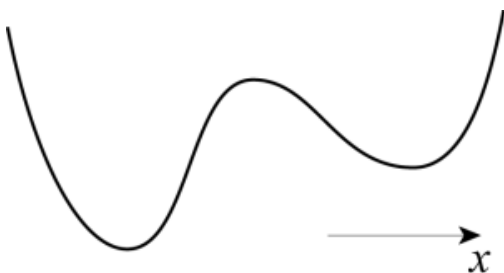
Sketsakan bidang fase yang berkaitan dengan persamaan diferensial $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan potensial $V(x)$ yang memiliki bentuk seperti yang ditunjukkan di bawah. Hanya bagian grafik $V(x)$ di sekitar titik minimumnya yang ditampilkan. Anda boleh menganggap bahwa kecenderungan yang tampak pada gambar berlanjut di luar daerah plot, yaitu bahwa $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$.



Deskripsi gambar: Grafik fungsi energi potensial yang memperlihatkan sebuah kurva mulus berbentuk U (seperti parabola yang sedikit terdeformasi) dengan titik minimum di tengah. Kurva membuka ke atas dan naik menuju tak hingga di sisi kiri maupun kanan. Sebuah panah di bawah kurva menunjukkan bahwa sumbu horizontal adalah x .

Soal 20

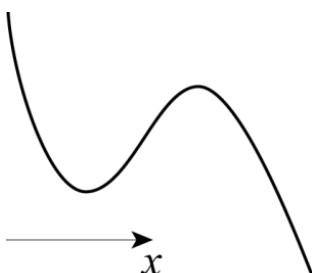
Sketsakan bidang fase yang berkaitan dengan persamaan diferensial $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan potensial $V(x)$ yang memiliki bentuk seperti yang ditunjukkan di bawah. Hanya bagian grafik $V(x)$ di sekitar titik-titik ekstremnya yang ditampilkan. Anda boleh menganggap bahwa kecenderungan yang tampak pada gambar berlanjut di luar daerah plot, yaitu bahwa $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$.



Deskripsi gambar: Grafik fungsi energi potensial dengan dua lembah yang berbeda (titik minimum lokal), yang dipisahkan oleh sebuah puncak di tengah (titik maksimum lokal). Lembah di sebelah kiri lebih dalam daripada lembah di sebelah kanan. Sebuah panah berlabel x menunjukkan sumbu horizontal. Kurva naik dengan tajam di ujung paling kiri maupun paling kanan.

Soal 21

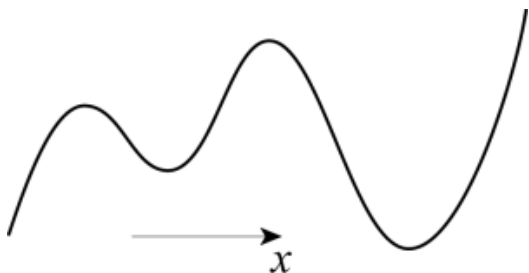
Sketsakan bidang fase yang berkaitan dengan persamaan diferensial $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan potensial $V(x)$ yang memiliki bentuk seperti yang ditunjukkan di bawah. Hanya bagian grafik $V(x)$ di sekitar titik-titik ekstremnya yang ditampilkan. Anda boleh menganggap bahwa kecenderungan yang tampak pada gambar berlanjut di luar daerah plot, yaitu bahwa $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = -\infty$.



Deskripsi gambar: Grafik fungsi energi potensial yang memperlihatkan kurva mulus dengan satu titik minimum lokal (lembah) dan satu titik maksimum lokal (puncak). Sebuah panah di bawah kurva menunjukkan bahwa sumbu horizontal adalah x . Kurva menurun dari kiri menuju lembah, naik menuju puncak, kemudian turun tajam ke arah kanan.

Soal 22

Sketsakan bidang fase yang berkaitan dengan persamaan diferensial $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0$, dengan potensial $V(x)$ yang memiliki bentuk seperti yang ditunjukkan di bawah. Hanya bagian grafik $V(x)$ di sekitar titik-titik ekstremnya yang ditampilkan. Anda boleh menganggap bahwa kecenderungan yang tampak pada gambar berlanjut di luar daerah plot, yaitu bahwa $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$.



Deskripsi gambar: Grafik fungsi energi potensial dengan dua puncak (titik maksimum lokal) dan dua lembah yang berbeda (titik minimum lokal). Kurva mula-mula naik menuju sebuah puncak kecil di sebelah kiri, turun ke lembah dangkal, naik menuju puncak tengah yang lebih tinggi, turun ke lembah yang jauh lebih dalam di sebelah kanan, lalu akhirnya naik tajam menuju tak hingga. Sebuah panah berlabel x menunjukkan sumbu horizontal.

Soal 23

Perhatikan persamaan Navier–Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{F},$$

dengan vektor $\vec{v}$ menyatakan kecepatan fluida dalam tiga dimensi spasial, ρ adalah massa jenis fluida, p adalah tekanannya, ν adalah viskositas kinematik fluida, dan $\vec{F}$ menyatakan gaya badan per satuan volume yang diterapkan pada fluida. Operator ∇ adalah gradien dalam tiga dimensi.

1. Apa dimensi kedua suku di ruas kiri persamaan? Mengapa dimensi keduanya harus sama?
2. Gunakan informasi ini untuk mencari dimensi p dan dimensi $\vec{F}$. Apakah hasilnya sesuai dengan yang Anda perkirakan berdasarkan pengetahuan Anda tentang gaya dan tekanan?
3. Carilah dimensi ν .
4. Misalkan U adalah kecepatan karakteristik dan l adalah panjang karakteristik. Definisikan variabel tak berdimensi $\vec{v}$ dan $\vec{x}$ sedemikian sehingga $\vec{v} = U\vec{v}$ dan $\vec{x} = l\vec{x}$, dengan $\vec{x}$ adalah vektor posisi. Tulis ulang persamaan Navier–Stokes dalam variabel-variabel baru ini.
5. Buktikan bahwa jika Anda kemudian menskalakan ulang waktu dan memperkenalkan versi tak berdimensi dari p dan $\vec{F}$, persamaan Navier–Stokes tak berdimensi hanya melibatkan satu parameter, $Re = Ul/\nu$. Parameter ini disebut *bilangan Reynolds*.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Kembangkan $\cos(\tau + \phi)$. Untuk arah sebaliknya, gunakan panjang vektor $(A, -B)$ dan fungsi sudut dua-argumen agar kuadran tidak hilang.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$A = C\cos\phi$ dan $B = -C\sin\phi$. Dari A, B , pilihan baku ialah $C = \sqrt{A^2 + B^2} \geq 0$ dan $\phi = \text{atan2}(-B, A) \pmod{2\pi}$. Jika $A = B = 0$, maka $C = 0$ dan ϕ sembarang; jika C boleh negatif, pasangan $(-C, \phi + \pi)$ juga setara.

Cek cepat

Harus berlaku $A^2 + B^2 = C^2$, dan substitusi pada $\tau = 0$ serta turunannya memberi $A = C\cos\phi, B = -C\sin\phi$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan rumus jumlah sudut kosinus.

Rumus

$$C\cos(\tau + \phi) = C\cos\phi\cos\tau - C\sin\phi\sin\tau$$

- **Penjelasan**

Bandingkan koefisien $\cos\tau$ dan $\sin\tau$.

Rumus

$$A = C\cos\phi, \quad B = -C\sin\phi$$

- **Penjelasan**

Kuadratkan dan jumlahkan kedua relasi untuk memperoleh amplitudo baku nonnegatif.

Rumus

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

- **Penjelasan**

Jika $C > 0$, sudut ditentukan oleh pasangan kosinus dan sinusnya; atan2 mempertahankan kuadran.

Rumus

$$\phi = \text{atan2}(-B, A) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Penjelasan**

Ketidakunikan berasal dari periodisitas fase, pilihan tanda amplitudo, dan fase bebas pada solusi nol.

Rumus

$$(C, \phi) \sim (C, \phi + 2k\pi) \sim (-C, \phi + (2k + 1)\pi)$$

Simpulan

Bentuk amplitudo–fase dan bentuk kombinasi sinus–kosinus mendeskripsikan keluarga solusi yang sama; konvensi $C \geq 0$ menghilangkan ketidakunikan tanda, tetapi fase tetap hanya unik modulo 2π .

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Pada titik balik $\theta = \pm\alpha$, kecepatan nol sehingga $E = -\cos\alpha$. Ubah integral seperempat periode dengan $\sin(\theta/2) = k\sin u$, $k = \sin(\alpha/2)$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $\alpha = \arccos(-E)$ dan $k = \sqrt{(1+E)/2}$, $T(E) = 4 \int_0^\alpha [2(\cos\theta + E)]^{-1/2} d\theta = 4K(k)$. Karena integran $(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2}$ meningkat ketat terhadap $k \in (0, 1)$, sedangkan k meningkat terhadap E , maka T meningkat ketat pada $-1 < E < 1$.

Cek cepat

Batas amplitudo kecil memberi $T \rightarrow 2\pi$ ketika $E \rightarrow -1^+$, sedangkan $T \rightarrow \infty$ ketika $E \rightarrow 1^-$.

Pembahasan atau rubrik

Asumsi

$$-1 < E < 1$$

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan integral energi dan nilai energi pada titik balik positif α .

Rumus

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \cos\theta + E, \quad E = -\cos\alpha$$

- **Penjelasan**

Simetri empat kuadran osilasi memberi periode penuh dari integral seperempat periode.

Rumus

$$T(E) = 4 \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta + E)}}$$

- **Penjelasan**

Tetapkan $k = \sin(\alpha/2) = \sqrt{(1+E)/2}$ dan substitusikan $\sin(\theta/2) = k \sin u$; integral yang muncul adalah integral eliptik lengkap jenis pertama K .

Rumus

$$T(E) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = 4K(k)$$

- **Penjelasan**

Untuk setiap $0 < u < \pi/2$, integran meningkat ketat ketika k meningkat; integrasi mempertahankan ketaksamaan ketat.

Rumus

$$\frac{\partial}{\partial k}(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = \frac{k \sin^2 u}{(1 - k^2 \sin^2 u)^{3/2}} > 0$$

- **Penjelasan**

Karena $dk/dE = 1/(4k) > 0$, periode meningkat terhadap energi dan amplitudo α .

Rumus

$$\frac{dT}{dE} > 0$$

Simpulan

Nonlinearitas membuat osilasi beramplitudo lebih besar berlangsung lebih lambat; periode mendekati periode harmonik 2π untuk amplitudo kecil dan divergen di separatriks.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Gabungkan gravitasi dan pegas dengan menggeser koordinat ke posisi setimbang $x_e = x_0 - mg/k$, lalu gunakan skala waktu $\sqrt{m/k}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Persamaan geraknya $m\ddot{x} = -mg - k(x - x_0) = -k(x - x_e)$, $x_e = x_0 - mg/k$. Dengan $q = (x - x_e)/L$ dan $\tau = \sqrt{k/m} t$, diperoleh $q_{\tau\tau} + q = 0$, tanpa parameter kontinu. Energi $H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + mgx$ kekal. Geraknya harmonik mengelilingi x_e , berperiode $2\pi\sqrt{m/k}$.

Cek cepat

Gravitasi hanya menggeser titik setimbang; frekuensi $\sqrt{k/m}$ tidak bergantung pada g .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Jumlahkan kedua gaya dalam hukum Newton.

Rumus

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - x_0)$$

• Penjelasan

Lengkapi pergeseran terhadap posisi setimbang statis.

Rumus

$$x_e = x_0 - \frac{mg}{k}, \quad m\ddot{x} = -k(x - x_e)$$

• Penjelasan

Gunakan panjang acuan taknol L dan waktu alami pegas.

Rumus

$$q = \frac{x - x_e}{L}, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad q_{\tau\tau} + q = 0$$

• Penjelasan

Kalikan persamaan gerak dengan $\dot{x}$ dan integralkan.

Rumus

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + mgx \right] = 0$$

• Penjelasan

Solusi dalam koordinat yang digeser adalah osilasi harmonik.

Rumus

$$x(t) = x_e + C \cos \left(\sqrt{k/m} t + \phi \right)$$

Simpulan

Keempat parameter sumber terserap dari persamaan tak berdimensi melalui pergeseran ruang dan penskalaan waktu; kombinasi parameter tetap diperlukan untuk mengubah kembali posisi setimbang dan periode ke satuan fisik.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Tuliskan ekspansi Taylor dua variabel untuk F dan G . Di titik tetap suku konstanta nol; linearisasi diperoleh dengan membuang semua suku berderajat dua dan lebih tinggi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetap memenuhi $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$. Dengan $z = (\mu, \nu)^T$, sistem penuh ialah $\dot{z} = J(x_0, y_0)z + \frac{1}{2}(H_F[z, z], H_G[z, z])^T + O(\|z\|^3)$; linearisasinya adalah $\dot{z} = J(x_0, y_0)z$.

Cek cepat

Setiap entri J harus merupakan turunan parsial pertama yang dievaluasi di (x_0, y_0) ; suku kuadrat tidak boleh tersisa dalam sistem linear.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Syarat keadaan tidak berubah adalah kedua komponen medan vektor sama dengan nol.

Rumus

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0$$

- **Penjelasan**

Ekspansi komponen pertama hingga suku kuadrat, dengan semua turunan dievaluasi di titik tetap, adalah:

Rumus

$$F = F_0 + F_x \mu + F_y \nu + \frac{1}{2}(F_{xx}\mu^2 + 2F_{xy}\mu\nu + F_{yy}\nu^2) + O(\|(\mu, \nu)\|^3)$$

- **Penjelasan**

Komponen kedua mempunyai bentuk sejajar.

Rumus

$$G = G_0 + G_x \mu + G_y \nu + \frac{1}{2}(G_{xx}\mu^2 + 2G_{xy}\mu\nu + G_{yy}\nu^2) + O(\|(\mu, \nu)\|^3)$$

- **Penjelasan**

Karena $F_0 = G_0 = 0$, bagian orde pertama tepat merupakan perkalian matriks Jacobi dengan simpangan.

Rumus

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} + O(\|(\mu, \nu)\|^2)$$

- **Penjelasan**

Membuang suku nonlinear menghasilkan linearisasi yang diminta.

Rumus

$$\dot{z} = J(x_0, y_0)z$$

Simpulan

Matriks Jacobi mengendalikan dinamika lokal orde pertama; bila titik tetap nonhiperbolik, suku orde lebih tinggi dapat menentukan perilaku yang tidak terlihat dari linearisasi.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Selesaikan kedua persamaan skalar secara terpisah. Sumbu koordinat adalah lintasan invarian; untuk lintasan lain, hilangkan t dari $x = C_1 e^{at}$, $y = C_2 e^{bt}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$x = C_1 e^{at}$, $y = C_2 e^{bt}$. Titik asal adalah pelana: sumbu y merupakan manifold stabil dan panah menuju asal, sedangkan sumbu x merupakan manifold tak stabil dan panah menjauhi asal. Lintasan lain memenuhi $y = K|x|^{b/a}$ pada setiap setengah-bidang dan, saat t meningkat, bergerak dari arah sumbu y menuju arah sumbu x .

Cek cepat

Karena $b/a < 0$, kurva nonaksial mendekati sumbu y saat $t \rightarrow -\infty$ dan sumbu x saat $t \rightarrow +\infty$, tanpa memotong kedua sumbu.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Kedua koordinat terpisah dan dapat diintegrasikan langsung.

Rumus

$$x(t) = C_1 e^{at}, \quad y(t) = C_2 e^{bt}$$

- **Penjelasan**

Jika $C_1 = 0$, lintasan berada pada sumbu y dan menuju asal karena $b < 0$.

Rumus

$$x = 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

- **Penjelasan**

Jika $C_2 = 0$, lintasan berada pada sumbu x dan menjauhi asal karena $a > 0$.

Rumus

$$y = 0, \quad |x(t)| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

- **Penjelasan**

Pada tiap kuadran, hilangkan waktu untuk memperoleh bentuk kurva.

Rumus

$$|y| = K|x|^{b/a}, \quad K > 0$$

Pemeriksaan grafik

Gambar harus mempunyai empat keluarga kurva hiperbolik-tergeneralisasi, dua separatriks berupa sumbu, dan panah dari dekat sumbu y ke dekat sumbu x .

Simpulan

Satu arah mengerut dan satu arah mengembang, sehingga titik asal merupakan titik pelana.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Mulailah dari arah eigen. Tanyakan apakah jarak ke titik tetap mengecil, membesar, tetap terbatas pada kurva tertutup, atau mengecil pada satu arah tetapi membesar pada arah lain.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Simpul stabil memiliki lintasan masuk tanpa berputar; spiral tak stabil memiliki lintasan berputar ke luar; pusat dikelilingi kurva tertutup tanpa tarikan atau tolakan; pelana mempunyai dua cabang manifold stabil yang masuk dan dua cabang manifold tak stabil yang keluar.

Bukti yang diperlukan

1. Setiap sketsa menandai titik tetap dan arah waktu.
2. Simpul dan pelana menunjukkan arah eigennya.
3. Spiral memperlihatkan rotasi dan pertumbuhan radius, sedangkan pusat memperlihatkan orbit tertutup.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Simpul stabil

Jawaban lengkap

Semua lintasan yang cukup dekat mengarah masuk; lintasan eigendireksi lurus dan lintasan umum akhirnya menyinggung arah eigen yang meluruh paling lambat.

Jawaban sebagian

Arah masuk benar, tetapi digambar berputar atau tanpa arah eigen.

- **Kriteria**

Spiral tak stabil

Jawaban lengkap

Lintasan berputar sambil menjauhi titik tetap; orientasi putaran dinyatakan bergantung pada matriks, bukan pada tipe spiral saja.

Jawaban sebagian

Spiral digambar tanpa panah atau justru menuju ke dalam.

- **Kriteria**

Pusat

Jawaban lengkap

Keluarga orbit tertutup mengelilingi titik tetap dan tidak mempunyai komponen radial bersih.

Jawaban sebagian

Kurva tertutup ada tetapi diberi spiral masuk/keluar.

- **Kriteria**

Titik pelana

Jawaban lengkap

Manifold stabil dan tak stabil dibedakan; ketika waktu maju, lintasan umum yang melintas dekat titik tetap memasuki lingkungannya hampir sejajar arah stabil lalu keluar hampir sejajar arah tak stabil.

Jawaban sebagian

Bentuk silang ada tetapi panah atau separatriks salah.

Simpulan

Empat tipe dibedakan oleh kombinasi rotasi, arah radial, dan jumlah arah stabil versus tak stabil.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Untuk matriks real 2×2 , nilai eigen nonreal muncul sebagai pasangan konjugat. Tanda bagian real menentukan tarikan atau tolakan; tanda determinan membedakan pelana.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Simpul stabil: dua nilai eigen real negatif. Spiral tak stabil: $\alpha \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0, \beta \neq 0$. Pusat linear: $\pm i\beta, \beta \neq 0$. Pelana: dua nilai eigen real dengan tanda berlawanan. Untuk sistem nonlinear, nilai eigen imajiner murni tidak cukup sendirian untuk membuktikan pusat.

Cek cepat

Pelana selalu mempunyai determinan negatif; simpul stabil mempunyai jejak negatif dan determinan positif; spiral tak stabil mempunyai jejak positif dan diskriminan karakteristik negatif.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Peluruhan tanpa rotasi memerlukan nilai eigen real dengan bagian real negatif.

Rumus

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$$

- **Penjelasan**

Rotasi ke luar memerlukan pasangan konjugat dengan bagian real positif.

Rumus

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha > 0, \beta \neq 0$$

- **Penjelasan**

Pusat pada sistem linear mempunyai frekuensi tanpa pertumbuhan atau peluruhan.

Rumus

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \quad \beta \neq 0$$

- **Penjelasan**

Pelana mempunyai tepat satu arah stabil dan satu arah tak stabil.

Rumus

$$\lambda_1 \lambda_2 < 0$$

Simpulan

Klasifikasi ini tegas untuk titik tetap hiperbolik; kasus nilai eigen nol atau imajiner murni pada sistem nonlinear memerlukan analisis suku nonlinear.

Dukungan untuk Soal 8

Petunjuk

Pilih matriks sederhana dengan jejak dan determinan yang mengatur tipe yang diinginkan, lalu hitung nilai eigennya. Pastikan tidak ada satu pun dari empat entri yang nol.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Contoh berturut-turut adalah $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Nilai eigennya berturut-turut $-1, -3; 1 \pm i; \pm i$; dan $\pm\sqrt{2}$.

Cek cepat

Semua 16 entri pada empat contoh tak nol, dan tanda bagian real atau hasil kali nilai eigennya cocok dengan tipe yang diminta.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Matriks simetris pertama mempunyai dua nilai eigen negatif dan dua arah eigen bebas.

Rumus

$$A_s = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A_s) = \{-1, -3\}$$

- **Penjelasan**

Matriks kedua adalah pertumbuhan seragam ditambah rotasi.

Rumus

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A_u) = \{1 \pm i\}$$

- **Penjelasan**

Matriks ketiga berjejak nol dan berdeterminan satu.

Rumus

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A_c) = \{\pm i\}$$

- **Penjelasan**

Matriks keempat mempunyai determinan negatif.

Rumus

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A_p) = \{\pm\sqrt{2}\}$$

Pemeriksaan notebook

Notebook menyediakan pola terbuka NumPy/SciPy/Matplotlib untuk nilai eigen dan bidang fase, tetapi belum memuat keempat matriks soal. Tambahkan satu sel yang mengevaluasi keempat matriks; potret hasilnya harus menunjukkan masuk tanpa rotasi, spiral keluar, orbit tertutup, dan pelana dalam urutan yang sama.

Simpulan

Contoh tidak unik; nilai eigen dan potret fase, bukan penampilan entri semata, menentukan klasifikasinya.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 8](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 9

Petunjuk

Setelah mencari akar bersama $F = G = 0$, hitung jejak s , determinan d , dan diskriminan $\Delta = s^2 - 4d$ dari matriks Jacobi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Hitung $J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$, $s = \text{tr}J$, $d = \det J$, dan $\Delta = s^2 - 4d$. Jika $d < 0$: pelana. Jika $d > 0, \Delta > 0$: simpul,

stabil untuk $s < 0$ dan tak stabil untuk $s > 0$. Jika $d > 0, \Delta = 0$: nilai eigen real berulang $s/2$ memberi simpul stabil untuk $s < 0$ dan simpul tak stabil untuk $s > 0$; bentuk Jordan hanya menentukan apakah simpulnya proper atau tak proper. Jika $d > 0, \Delta < 0$: spiral dengan stabilitas ditentukan tanda s ; bila $s = 0$, linearisasinya pusat tetapi klasifikasi nonlinear belum diputuskan. Kasus $d = 0$ atau bagian real nilai eigen nol memerlukan pemeriksaan tambahan.

Cek cepat

Setiap klasifikasi harus didahului verifikasi $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$; linearisasi hanya menjamin tipe topologis secara langsung pada titik hiperbolik.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Cari semua titik tetap sebagai akar bersama medan vektor.

Rumus

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0$$

- **Penjelasan**

Evaluasi matriks Jacobi dan polinom karakteristiknya.

Rumus

$$p(\lambda) = \lambda^2 - s\lambda + d, \quad s = \text{tr}J, \quad d = \det J$$

- **Penjelasan**

Determinan negatif berarti nilai eigen real berlainan tanda.

Rumus

$$d < 0 \Rightarrow \text{pelana}$$

- **Penjelasan**

Untuk determinan positif dan diskriminan positif, nilai eigen real bertanda sama; jejak menentukan tandanya.

Rumus

$$d > 0, \Delta > 0: \quad s < 0 \Rightarrow \text{simpul stabil}, \quad s > 0 \Rightarrow \text{simpul tak stabil}$$

- **Penjelasan**

Untuk diskriminan negatif, bagian real pasangan konjugat adalah $s/2$.

Rumus

$d > 0, \Delta < 0: s < 0 \Rightarrow$ spiral stabil, $s > 0 \Rightarrow$ spiral tak stabil

- **Penjelasan**

Akar real berulang yang tidak nol masih hiperbolik dan memberi simpul; bentuk Jordan membedakan simpul proper dari simpul tak proper.

Rumus

$d > 0, \Delta = 0, s \neq 0 \Rightarrow$ simpul stabil atau tak stabil

- **Penjelasan**

Jika terdapat nilai eigen nol atau pasangan imajiner murni, periksa suku nonlinear, fungsi Lyapunov, atau integral pertama.

Rumus

$d = 0$ atau $s = 0, \Delta < 0 \Rightarrow$ linearisasi mungkin tidak konklusif untuk sistem nonlinear

Simpulan

Jejak–determinan memberi klasifikasi cepat dan lengkap bagi titik hiperbolik, tetapi tidak boleh dipakai untuk mengklaim pusat nonlinear hanya dari nilai eigen imajiner murni.

Dukungan untuk Soal 10

Petunjuk

Untuk setiap sistem: cari semua titik tetap, hitung matriks Jacobi dan nilai eigen, lalu cari energi atau integral pertama bila ada. Untuk sistem teredam, turunkan laju perubahan energi; jangan melewatkan nilai redaman kritis.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

(1) Asal stabil: spiral untuk $0 < c < 2$, simpul degenerat kritis untuk $c = 2$, simpul stabil untuk $c > 2$. (2) $(-1, 0)$ dan $(2, 0)$ pelana, $(0, 0)$ pusat. (3) Kedua titik luar tetap pelana; asal spiral stabil untuk $0 < c < \sqrt{8}$, simpul kritis untuk $c = \sqrt{8}$, dan simpul stabil untuk $c > \sqrt{8}$. (4) $(0, 0)$ pelana dan $(3, 3)$ pusat dengan orbit tertutup di kuadran positif. (5) $(0, 0)$ simpul tak stabil, $(1, 0)$ dan $(0, 1)$ simpul stabil, serta $(1/5, 2/5)$ pelana pemisah basin. (6) $(0, 0)$ pelana, $(\pm 1, 0)$ pusat, dengan separatriks berbentuk angka delapan pada energi nol.

Bukti yang diperlukan

1. Semua titik tetap dan nilai eigen atau jejak–determinan dicatat.
2. Kasus kritis $c = 2$ dan $c = \sqrt{8}$ dipisahkan dari rezim lain.
3. Sistem konservatif memakai kurva tingkat energi; sistem teredam menunjukkan energi menurun.
4. Arah panah, separatriks, sumbu invarian, dan basin yang relevan tampak pada sketsa atau notebook.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Sistem (1) mempunyai polinom karakteristik $\lambda^2 + c\lambda + 1$. Pada redaman kritis, solusi bukan dua eksponensial bebas.

Rumus

$$\lambda_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}; \quad c = 2: x = (A + Bt)e^{-t}, y = (B - A - Bt)e^{-t}$$

- **Penjelasan**

Pada sistem (2), tulis $f(x) = x(x+1)(x-2)$. Jacobi di $(x^*, 0)$ mempunyai $\lambda^2 = f'(x^*)$; energi memakai $V' = -f$.

Rumus

$$f'(-1) = 3, f'(0) = -2, f'(2) = 6; \quad V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2$$

- **Penjelasan**

Pada sistem (3), redaman tidak mengubah titik tetap. Di asal, $\lambda^2 + c\lambda + 2 = 0$; pada titik luar determinan negatif. Energi turun kecuali saat $y = 0$.

Rumus

$$\lambda_{\pm}(0) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 8}}{2}, \quad \dot{H} = -cy^2 \leq 0$$

- **Penjelasan**

Sistem (4) memiliki sumbu invarian. Di kuadran positif terdapat integral pertama yang minimum di $(3, 3)$, sehingga level-levelnya tertutup.

Rumus

$$H(x, y) = x - 3\ln x + 2y - 6\ln y, \quad x > 0, y > 0$$

- **Penjelasan**

Sistem (5) mempunyai empat titik tetap. Evaluasi Jacobi memberi klasifikasi dan manifold stabil pelana membagi basin menuju dua keadaan batas.

Rumus

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1/5, 2/5); \quad \det J(1/5, 2/5) = -1/5 < 0$$

- **Penjelasan**

Sistem (6) konservatif dengan potensial sumur ganda; level energi menentukan dua keluarga orbit dalam dan satu keluarga luar.

Rumus

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4; \quad H = 0 \text{ adalah separatriks angka delapan}$$

Pemeriksaan grafik

Gunakan pola integrasi dan medan vektor terbuka dalam notebook sebagai kerangka, lalu definisikan sendiri enam ruas kanan soal; notebook belum memuat keenam kasus tersebut. Hasil tambahan harus menampilkan titik tetap, arah waktu, separatriks, dan transisi pada nilai redaman kritis yang konsisten dengan klasifikasi analitik.

Simpulan

Linearisasi menentukan struktur lokal pada titik hiperbolik, sedangkan energi, integral pertama, dan separatriks diperlukan untuk menyusun potret global.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 10](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 11

Petunjuk

Gunakan energi osilator harmonik $H = (y^2 + \omega^2 x^2)/2$, dengan $y = \dot{x}$, lalu hitung $\dot{H}$. Tanda $1 - x^2$ menjelaskan mekanisme pemilihan amplitudo.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan asumsi $\omega > 0$: untuk $\epsilon = 0$, orbit adalah elips tertutup berperiode $2\pi/\omega$. Untuk $\epsilon > 0$, $\dot{H} = \epsilon y^2(1 - x^2)$: energi bertambah ketika $|x| < 1$ dan berkurang ketika $|x| > 1$. Karena itu titik asal menjadi tak stabil dan lintasan nontrivial menuju satu siklus batas stabil, berarah searah jarum jam pada bidang (x, y) .

Cek cepat

Pada sumbu $x > 0, y = 0, \dot{y} = -\omega^2 x < 0$, sehingga orientasi harus ke bawah dan kemudian searah jarum jam.

Pembahasan atau rubrik

Asumsi

Diasumsikan $\omega > 0$; kasus $\omega = 0$ bersifat degenerat dan tidak mempunyai osilator harmonik yang dinyatakan dalam soal.

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tetapkan $y = \dot{x}$ untuk memperoleh sistem bidang fase.

Rumus

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x + \epsilon y(1 - x^2)$$

- **Penjelasan**

Jika $\epsilon = 0$, energi harmonik kekal dan levelnya berupa elips.

Rumus

$$H = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2), \quad \dot{H} = 0$$

- **Penjelasan**

Untuk $\epsilon > 0$, turunan energi mempunyai tanda yang berubah menurut amplitudo posisi.

Rumus

$$\dot{H} = y(y + \omega^2 x) = \epsilon y^2(1 - x^2)$$

• Penjelasan

Di bagian dalam, mekanisme bertindak sebagai redaman negatif; di bagian luar, sebagai redaman positif. Keseimbangan rata-rata kedua efek memilih orbit periodik stabil.

Rumus

$$|x| < 1 \Rightarrow \dot{H} \geq 0, \quad |x| > 1 \Rightarrow \dot{H} \leq 0$$

• Penjelasan

Linearisasi titik asal mempunyai bagian real positif untuk $\epsilon > 0$, sehingga titik asal menolak lintasan.

Rumus

$$\lambda^2 - \epsilon\lambda + \omega^2 = 0$$

Pemeriksaan notebook

Adaptasikan pola `solve_ivp` dalam notebook dengan menambahkan ruas kanan van der Pol; kasus ini belum tersedia sebagai sel siap-jalan. Untuk beberapa kondisi awal nonnol dan $\epsilon > 0$, integrasi tambahan harus mendekati kurva periodik yang sama setelah transien; lintasan awal di dalam membesar dan lintasan awal di luar mengecil.

Simpulan

Siklus batas tidak mengejutkan: penguatan amplitudo kecil dan peredaman amplitudo besar menyediakan umpan balik yang menstabilkan amplitudo menengah.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 11](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 12

Petunjuk

Samakan dimensi setiap suku dengan $[x]T^{-1}$. Untuk $\lambda\gamma \neq 0$, gunakan $t_0 = 1/|\lambda|$ dan skala amplitudo $x_0 = \sqrt{|\lambda|/|\gamma|}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$[\lambda] = T^{-1}$ dan $[\gamma] = [x]^{-2}T^{-1}$. Dengan $\tau = |\lambda|t$, persamaan menjadi $dx/d\tau = \text{sgn}(\lambda)x - (\gamma/|\lambda|)x^3$. Jika $\gamma \neq 0$, tetapkan $x = \sqrt{|\lambda|/|\gamma|}X$, sehingga $dX/d\tau = \text{sgn}(\lambda)X - \text{sgn}(\gamma)X^3$. Untuk $\lambda, \gamma > 0$, bentuknya $X' = X - X^3$. Tanda dan kasus parameter nol tidak dapat dihilangkan oleh penskalaan real biasa.

Cek cepat

Setiap suku persamaan tak berdimensi harus bebas satuan; transformasi amplitudo hanya sah bila $\lambda\gamma \neq 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Turunan waktu memiliki dimensi besaran dibagi waktu.

Rumus

$$[\dot{x}] = [x]T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Samakan dimensi suku linear dan kubik dengan ruas kiri.

Rumus

$$[\lambda] = T^{-1}, \quad [\gamma] = [x]^{-2}T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Untuk $\lambda \neq 0$, gunakan waktu tak berdimensi yang tidak membalik orientasi waktu.

Rumus

$$\tau = |\lambda|t, \quad \frac{dx}{d\tau} = \text{sgn}(\lambda)x - \frac{\gamma}{|\lambda|^2}x^3$$

- **Penjelasan**

Untuk $\gamma \neq 0$, serap besar koefisien kubik ke skala amplitudo.

Rumus

$$x = \sqrt{\frac{|\lambda|}{|\gamma|}}X, \quad \frac{dX}{d\tau} = \text{sgn}(\lambda)X - \text{sgn}(\gamma)X^3$$

- **Penjelasan**

Jika parameter positif seperti lazim pada bentuk normal bifurkasi superkritis, kedua besar parameter hilang sepenuhnya.

Rumus

$$\lambda > 0, \gamma > 0: \quad X' = X - X^3$$

Simpulan

Penskalaan menghilangkan besar kedua parameter nonnol, tetapi menyisakan kelas dinamik diskret yang ditentukan oleh tanda; kasus $\lambda = 0$ atau $\gamma = 0$ adalah rezim berbeda.

Dukungan untuk Soal 13

Petunjuk

Ambil kedua massa sebagai m dan M , lalu tulis jarak pusatnya $r = R + h$. Untuk $|h| \ll R$, faktor $(1 + h/R)^{-2}$ hampir satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$F = GMm/(R+h)^2 = m[GM/R^2](1+h/R)^{-2}$. Di dekat permukaan, $|h| \ll R$, sehingga $F \simeq mg$ dengan $g = GM/R^2$.

Cek cepat

Dimensi GM/R^2 harus LT^{-2} , dan galat relatif orde pertama dari mengganti $R+h$ dengan R adalah sekitar $2|h|/R$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Masukkan massa benda dan Bumi ke hukum gravitasi.

Rumus

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

- **Penjelasan**

Pada ketinggian h dari permukaan, jarak antarpusat adalah $R+h$.

Rumus

$$F = m \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

- **Penjelasan**

Jika $|h|/R$ kecil, faktor koreksi mendekati satu.

Rumus

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{h}{R} + O((h/R)^2)$$

- **Penjelasan**

Definisikan percepatan gravitasi permukaan sebagai koefisien gaya per massa.

Rumus

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad F \simeq mg$$

Simpulan

Anggapan g konstan adalah hampiran lokal yang sah ketika perubahan ketinggian jauh lebih kecil daripada jari-jari Bumi.

Dukungan untuk Soal 14

Petunjuk

Koefisien pangkat ganjil kosinus nol. Dalam sisa Lagrange orde lima, turunan keenam adalah $-\cos x$, yang nilai mutlaknya paling besar satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + E_5(x)$, dengan $E_5(x) = -\cos(\bar{x})x^6/720$. Karena $|E_5(x)| \leq |x|^6/720$, syarat cukup ialah $|x| < 36^{1/6} \approx 1,817120593$.

Cek cepat

Pada setiap nilai uji dalam interval tersebut, galat aktual $|\cos x - (1 - x^2/2 + x^4/24)|$ harus kurang dari 0,05; batas ini cukup, tidak diklaim perlu.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Evaluasi turunan kosinus di nol hingga orde lima.

Rumus

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

- **Penjelasan**

Sisa Lagrange memakai turunan keenam di suatu titik antara nol dan x .

Rumus

$$E_5(x) = \frac{f^{(6)}(\bar{x})x^6}{6!} = -\frac{\cos(\bar{x})x^6}{720}$$

- **Penjelasan**

Batasi kosinus dengan satu.

Rumus

$$|E_5(x)| \leq \frac{|x|^6}{720}$$

- **Penjelasan**

Paksa batas atas itu lebih kecil daripada toleransi yang diminta.

Rumus

$$\frac{|x|^6}{720} < 0.05 \Leftrightarrow |x| < 36^{1/6} \approx 1.817120593$$

Simpulan

Pemeriksaan numerik memvalidasi ketaksamaan pada titik sampel, sedangkan bukti sisa Taylor menjaminkannya pada seluruh interval yang dinyatakan.

Dukungan untuk Soal 15

Petunjuk

Samakan dimensi semua suku dengan $[u]T^{-1}$. Untuk $\mu \neq 0$, coba $t = |\mu|^{-1}\tau$, $x = \sqrt{\alpha/|\mu|}X$, dan $u = \sqrt{|\mu|/\beta}U$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$[\mu] = T^{-1}$, $[\alpha] = L^2T^{-1}$, dan $[\beta] = [u]^{-2}T^{-1}$. Untuk $\mu \neq 0$, penskalaan $t = \tau/|\mu|$, $x = \sqrt{\alpha/|\mu|}X$, $u = \sqrt{|\mu|/\beta}U$ memberi $U_\tau = \text{sgn}(\mu)U + U_{XX} - U^3$. Jadi tidak ada parameter kontinu relevan, tetapi tanda μ dan rezim $\mu = 0$ tetap membedakan kelas dinamika.

Cek cepat

Untuk $\mu > 0$, bentuk bakunya $U_\tau = U + U_{XX} - U^3$; koefisien ketiga suku pada ruas kanan semuanya satu dalam besar.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Turunan waktu menetapkan dimensi acuan setiap suku.

Rumus

$$[u_t] = [u]T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Samakan masing-masing suku linear, difusif, dan kubik dengan dimensi acuan.

Rumus

$$[\mu] = T^{-1}, \quad [\alpha] = L^2T^{-1}, \quad [\beta] = [u]^{-2}T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Untuk $\mu \neq 0$, gunakan tiga skala yang tersedia untuk menyerap besar ketiga parameter.

Rumus

$$t = \frac{\tau}{|\mu|}, \quad x = \sqrt{\frac{\alpha}{|\mu|}}X, \quad u = \sqrt{\frac{|\mu|}{\beta}}U$$

- **Penjelasan**

Substitusi dan pembagian oleh skala bersama menghasilkan bentuk tanpa parameter kontinu.

Rumus

$$U_\tau = \text{sgn}(\mu)U + U_{XX} - U^3$$

- **Penjelasan**

Penskalaan positif tidak dapat mengubah tanda μ , dan skala berbasis $|\mu|$ tidak berlaku saat $\mu = 0$.

Rumus

$\mu > 0$, $\mu < 0$, $\mu = 0$ adalah tiga rezim diskret

Simpulan

Model memiliki nol kelompok parameter kontinu tak berdimensi dalam setiap rezim $\mu \neq 0$; tanda dan degenerasi nol adalah informasi kualitatif yang tidak boleh disebut telah ‘dihilangkan’.

Dukungan untuk Soal 16

Petunjuk

Tetapkan $y = \dot{x}$. Pada titik tetap $(x_*, 0)$, persamaan karakteristik linearisasi sangat sederhana: $\lambda^2 + V''(x_*) = 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Sistem orde pertamanya $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -V'(x)$. Titik tetap adalah $(x_*, 0)$ dengan $V'(x_*) = 0$. Matriks linearnya $J_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_*) & 0 \end{pmatrix}$, sehingga $\lambda^2 = -V''(x_*)$. Jika $V''(x_*) < 0$, nilai eigen real berlainan tanda dan titik itu pelana; jika $V''(x_*) > 0$, nilai eigen $\pm i \sqrt{V''(x_*)}$ dan linearisasinya pusat.

Cek cepat

Kasus $V''(x_*) = 0$ harus dinyatakan tidak konklusif, bukan dipaksa menjadi pusat atau pelana.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Perkenalkan kecepatan sebagai variabel kedua.

Rumus

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -V'(x)$$

- **Penjelasan**

Kedua turunan waktu harus nol pada titik tetap.

Rumus

$$y_* = 0, \quad V'(x_*) = 0$$

- **Penjelasan**

Linearisasi dalam $\xi = x - x_*$, $\eta = y$ adalah:

Rumus

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_*) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Polinom karakteristik langsung menghubungkan kelengkungan potensial dengan tipe titik.

Rumus

$$\lambda^2 + V''(x_*) = 0$$

- **Penjelasan**

Maksimum nondegenerat mempunyai kelengkungan negatif; minimum nondegenerat mempunyai kelengkungan positif.

Rumus

$$V'' < 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-V''}; \quad V'' > 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{V''}$$

Simpulan

Maksimum potensial tidak stabil dalam satu arah waktu dan stabil dalam arah lain, sedangkan minimum menopang osilasi kecil; degenerasi memerlukan suku potensial berorde lebih tinggi.

Dukungan untuk Soal 17

Petunjuk

Gunakan kekekalan $H = y^2/2 + V(x)$. Separatriks yang melalui pelana mempunyai energi tepat $V(x_0)$; kemudian kembangkan V hingga orde dua.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $y = \dot{x}$, lintasan energi memenuhi $y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$. Separatriks melalui pelana memakai $E = V(x_0)$: $y = \pm \sqrt{2[V(x_0) - V(x)]}$. Jika pelana nondegenerat, $V''(x_0) < 0$ dan garis singgungnya $y = \pm \sqrt{-V''(x_0)}(x - x_0)$.

Cek cepat

Kemiringan kedua garis singgung harus sama dengan dua nilai eigen $\lambda = \pm \sqrt{-V''(x_0)}$ karena vektor eigennya berbentuk $(1, \lambda)$.

Pembahasan atau rubrik

Asumsi

Titik pelana nondegenerat, sehingga $V'(x_0)=0$ dan $V''(x_0)<0$.

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Kalikan persamaan oleh $\dot{x}$ untuk memperoleh integral energi.

Rumus

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E$$

- **Penjelasan**

Lintasan yang melalui $(x_0, 0)$ mempunyai energi pelana.

Rumus

$$E_s = V(x_0), \quad y = \pm \sqrt{2[V(x_0) - V(x)]}$$

- **Penjelasan**

Kembangkan potensial di sekitar titik kritis.

Rumus

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

- **Penjelasan**

Substitusi memberi dua cabang yang menyinggung arah eigen stabil dan tak stabil.

Rumus

$$y^2 = -V''(x_0)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

Simpulan

Separatriks adalah kurva energi pelana; secara lokal kedua cabangnya menyinggung garis eigen dengan kemiringan $\pm \sqrt{-V''(x_0)}$.

Dukungan untuk Soal 18

Petunjuk

Tulis kurva energi sebagai $y^2 = 2(E - V(x))$. Perpotongan sumbu memenuhi $y = 0$; untuk kemiringan, lebih aman memandang x sebagai fungsi y di dekat titik potong.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Karena V kontinu dan $\inf V < E < \sup V$, teorema nilai antara memberi sedikitnya satu x_* dengan $V(x_*) = E$; pada kurva energi ini berarti $y = 0$, jadi lintasan memotong sumbu x . Dari $y^2 = 2(E - V(x))$, diperoleh $dx/dy = -y/V'(x)$; jika $V'(x_*) \neq 0$, maka $dx/dy = 0$ di perpotongan, sehingga garis singgungnya vertikal.

Cek cepat

Rumus $dy/dx = -V'(x)/y$ harus divergen di titik potong biasa; jika $V'(x_*) = 0$, argumen vertikal tidak berlaku dan titik itu dapat berupa kesetimbangan atau separatriks.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Energi mekanis kekal pada setiap lintasan.

Rumus

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E, \quad y = \dot{x}$$

• Penjelasan

Nilai energi yang terletak ketat di dalam rentang kontinu V dicapai pada sedikitnya satu posisi.

Rumus

$$\exists x_*: V(x_*) = E$$

• Penjelasan

Pada posisi tersebut, persamaan energi memaksa kecepatan nol.

Rumus

$$y^2 = 2(E - V(x_*)) = 0$$

• Penjelasan

Turunkan implisit kurva energi terhadap y dan evaluasi pada perpotongan biasa.

Rumus

$$2y = -2V'(x) \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{V'(x)} \rightarrow 0$$

Simpulan

Titik balik biasa adalah perpotongan sumbu dengan garis singgung vertikal; syarat $V' \neq 0$ tepat mengecualikan titik kritis potensial.

Dukungan untuk Soal 19

Petunjuk

Untuk setiap energi, gambar $y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$ hanya pada posisi dengan $V(x) \leq E$. Titik minimum potensial menjadi pusat.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jika minimum tunggal berada di x_m dengan energi $E_m = V(x_m)$, maka $(x_m, 0)$ adalah pusat. Untuk setiap $E > E_m$, persamaan $V(x) = E$ mempunyai dua titik balik dan level $y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$ membentuk satu oval tertutup yang mengelilingi pusat. Semua gerak berenergi hingga terikat dan periodik.

Bukti yang diperlukan

1. Pusat di minimum potensial ditandai.
2. Setiap oval simetris terhadap sumbu x dan memotongnya vertikal pada dua titik balik.
3. Panah menunjukkan bagian atas bergerak ke kanan dan bagian bawah ke kiri.

4. Oval energi yang lebih tinggi mengelilingi oval energi yang lebih rendah.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan energi untuk menentukan seluruh kurva fase.

Rumus

$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}, \quad V(x) \leq E$$

- **Penjelasan**

Pada energi minimum, satu-satunya titik adalah kesetimbangan pusat.

Rumus

$$E = E_m: (x, y) = (x_m, 0)$$

- **Penjelasan**

Karena potensial naik ke takhingga di kedua ujung, setiap $E > E_m$ mempunyai dua titik balik yang membatasi interval gerak.

Rumus

$$V(x_-(E)) = V(x_+(E)) = E$$

- **Penjelasan**

Cabang positif dan negatif bertemu di kedua titik balik, membentuk oval tertutup.

Rumus

$$x_-(E) \leq x \leq x_+(E)$$

Pemeriksaan notebook

Notebook memperagakan cara membentuk potret fase dari potensial pendulum. Gunakan pola terbuka itu dengan menambahkan potensial satu-sumur representatif; hasil tambahan harus memperlihatkan oval tertutup bersarang tanpa separatriks atau lintasan tak terbatas.

Simpulan

Konfinemen potensial pada kedua arah membuat semua level energi di atas minimum berupa osilasi periodik.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 19](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 20

Petunjuk

Namai energi minimum kiri E_L , minimum kanan E_R , dan puncak tengah E_s , dengan $E_L < E_R < E_s$. Topologi level berubah setiap kali energi melewati salah satu nilai kritis.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Kedua minimum memberi pusat dan maksimum tengah memberi pelana. Untuk $E_L < E < E_R$, hanya ada oval di sumur kiri. Untuk $E_R < E < E_s$, ada dua keluarga oval terpisah, masing-masing mengelilingi satu pusat. Pada $E = E_s$, separatriks melalui pelana membentuk dua lobus yang memisahkan kedua sumur. Untuk $E > E_s$, satu oval luar mengelilingi kedua sumur. Karena $V \rightarrow +\infty$ di kedua arah, semua level reguler tetap terikat.

Bukti yang diperlukan

1. Dua pusat dan satu pelana ditempatkan pada absis titik kritis potensial.
2. Tidak ada orbit di sumur kanan pada energi di bawah minimum kanannya.
3. Separatriks energi puncak dan perubahan dua oval menjadi satu oval ditampilkan.
4. Arah panah dan simetri terhadap sumbu x benar.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Titik minimum nondegenerat menghasilkan pusat dan maksimum menghasilkan pelana.

Rumus

$$V''(x_L) > 0, \quad V''(x_R) > 0, \quad V''(x_s) < 0$$

- **Penjelasan**

Di bawah minimum kanan, himpunan $V \leq E$ hanya berada di sumur kiri.

Rumus

$$E_L < E < E_R: \quad \text{satu komponen terikat}$$

- **Penjelasan**

Di antara minimum kanan dan puncak, daerah yang diizinkan terpecah menjadi dua interval.

Rumus

$$E_R < E < E_s: \quad \text{dua oval terpisah}$$

- **Penjelasan**

Pada energi pelana, kedua lobus bertemu di titik pelana dan menjadi separatriks.

Rumus

$$E = E_s = V(x_s)$$

- **Penjelasan**

Di atas penghalang, satu interval posisi menghubungkan kedua sumur.

Rumus

$E > E_s$: satu oval luar

Pemeriksaan notebook

Adaptasikan konstruksi kurva energi pada notebook dengan potensial dua-sumur taksimetris yang mempertahankan urutan energi kritis gambar; sel tambahan harus menunjukkan satu oval, dua oval, separatriks dua lobus, lalu satu oval luar.

Simpulan

Energi puncak adalah ambang perpindahan antar-sumur; kedalaman yang berbeda menentukan kapan keluarga orbit di tiap sumur pertama kali muncul.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 20](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 21

Petunjuk

Namai energi minimum E_m dan maksimum E_s . Karena potensial turun tanpa batas ke kanan, selalu periksa komponen lintasan terbuka di samping orbit yang mungkin terperangkap dekat minimum.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Minimum lokal memberi pusat dan maksimum lokal di kanannya memberi pelana. Untuk $E_m < E < E_s$, terdapat oval tertutup di sekitar pusat serta komponen lintasan terbuka di sisi kanan. Pada $E = E_s$, sebuah separatriks homoklinik mengelilingi pusat dan dua cabang separatriks lain melalui pelana menuju sisi kanan tak terbatas. Untuk $E > E_s$, penghalang terlampaui dan level reguler menjadi lintasan terbuka dari titik balik kiri menuju $x \rightarrow +\infty$. Untuk $E < E_m$, hanya komponen terbuka di kanan yang ada.

Bukti yang diperlukan

1. Satu pusat dan satu pelana ditempatkan pada titik kritis yang benar.
2. Orbit tertutup dan lintasan terbuka yang hidup pada energi sama tidak dicampuradukkan.
3. Separatriks pada energi maksimum serta perubahan topologi di kedua energi kritis ditampilkan.
4. Daerah terlarang $V(x) > E$ ditinggalkan kosong.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Kurva fase selalu diperoleh dari himpunan posisi yang memenuhi $V(x) \leq E$.

Rumus

$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$$

- **Penjelasan**

Di antara dua energi kritis, himpunan posisi yang diizinkan mempunyai satu interval terbatas dekat sumur dan satu interval tak terbatas di kanan.

Rumus

$$E_m < E < E_s: \text{ satu oval + satu komponen terbuka}$$

- **Penjelasan**

Pada energi maksimum, pelana menghubungkan batas perangkap lokal dengan saluran lepas ke kanan.

Rumus

$$E = E_s = V(x_s)$$

- **Penjelasan**

Di atas penghalang, hanya satu titik balik kiri tersisa dan lintasan melaju tanpa batas ke kanan.

Rumus

$$E > E_s: x \rightarrow +\infty, |y| \rightarrow \infty$$

Pemeriksaan notebook

Adaptasikan konstruksi kurva energi pada notebook dengan potensial yang memiliki asimtot dan dua titik kritis seperti gambar; sel tambahan harus memperlihatkan keberadaan bersama oval dan lintasan terbuka untuk energi antara minimum dan maksimum.

Simpulan

Sumur lokal dapat menahan sebagian keadaan awal meskipun potensial global terbuka ke kanan; separatriks pelana membatasi keadaan terperangkap.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 21](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 22

Petunjuk

Beri nama energi pada keempat titik kritis menurut tinggi aktual gambar, lalu naikkan E melewati nilai-nilai itu satu per satu. Selalu ada saluran terbuka ke kiri karena $V \rightarrow -\infty$ di sana.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Kedua minimum adalah pusat dan kedua maksimum adalah pelana. Dengan urutan tinggi pada gambar $E_{m2} < E_{m1} < E_{s1} < E_{s2}$: di bawah E_{m2} hanya ada lintasan terbuka ke kiri; saat melewati tiap minimum, keluarga oval di sumur itu muncul; pada E_{s1} , separatriks pelana pertama menggabungkan sumur dangkal dengan saluran kiri; untuk $E_{s1} < E < E_{s2}$, lintasan kiri terbuka hadir bersama oval di sumur kanan; pada E_{s2} , separatriks kedua membuka sumur kanan; di atasnya hanya tersisa keluarga lintasan terbuka global dengan satu titik balik kanan.

Bukti yang diperlukan

1. Dua pusat, dua pelana, dan urutan energi kritis dari gambar ditandai.
2. Komponen terbuka ke kiri hadir pada setiap energi.
3. Keluarga oval muncul atau hilang tepat ketika energi melewati minimum atau maksimum yang sesuai.
4. Kedua separatriks dan daerah $V(x) > E$ digambar konsisten dengan kurva potensial.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan satu rumus level energi untuk semua rezim dan hitung komponen interval $V \leq E$.

Rumus

$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$$

- **Penjelasan**

Minimum yang lebih dalam di kanan melahirkan oval pertama; minimum dangkal melahirkan oval kedua ketika energinya tercapai.

Rumus

$$E_{m2} < E_{m1}: \quad E_{m2} < E < E_{m1} \Rightarrow \text{oval kanan saja, selain komponen terbuka kiri}$$

- **Penjelasan**

Di antara energi minimum dangkal dan maksimum pertama, kedua sumur mempunyai oval terpisah, di samping komponen terbuka kiri.

Rumus

$$E_{m1} < E < E_{s1}: \quad \text{dua oval} + \text{satu komponen terbuka}$$

- **Penjelasan**

Melewati pelana pertama menghubungkan sumur dangkal dengan wilayah lepas; sumur kanan tetap terkurung hingga pelana kedua.

Rumus

$$E_{s1} < E < E_{s2}: \quad \text{komponen terbuka kiri} + \text{oval kanan}$$

- **Penjelasan**

Di atas puncak tertinggi, himpunan posisi yang diizinkan tersambung dari $-\infty$ hingga satu titik balik kanan.

Rumus

$$E > E_{s2}: \quad \text{satu komponen terbuka global}$$

Pemeriksaan notebook

Adaptasikan konstruksi kurva energi pada notebook dengan potensial contoh yang benar-benar mempertahankan urutan dua puncak dan dua lembah pada gambar; jangan menyimpulkan topologi dari polinom contoh yang urutan energinya berbeda.

Simpulan

Potret lengkap diperoleh dengan melacak perubahan komponen kurva tingkat pada empat energi kritis; asimtot kiri menjamin saluran lepas pada setiap energi.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 22](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 23

Petunjuk

Gunakan $[\vec{v}] = LT^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$, dan $[\nabla] = L^{-1}$. Skala adveksi alami memberi $t = (l/U)\tau$, $p = \rho U^2 P$, serta $\vec{F} = (\rho U^2/l)\vec{f}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Kedua suku kiri berdimensi LT^{-2} . Dimensi tekanan $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, rapat gaya badan $[\vec{F}] = ML^{-2}T^{-2}$, dan viskositas kinematik $[\nu] = L^2T^{-1}$. Dengan $\vec{x} = l\vec{X}$, $\vec{v} = U\vec{V}$, $t = (l/U)\tau$, $p = \rho U^2 P$, dan $\vec{F} = (\rho U^2/l)\vec{f}$, persamaan menjadi $\vec{V}_\tau + (\vec{V} \cdot \nabla_X)\vec{V} = -\nabla_X P + \text{Re}^{-1} \nabla_X^2 \vec{V} + \vec{f}$, dengan $\text{Re} = Ul/\nu$.

Cek cepat

Koefisien suku tak tunak, adveksi, tekanan, dan gaya harus satu; koefisien viskositas harus tepat $1/\text{Re}$, bukan Re .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Turunan waktu kecepatan dan percepatan advektif mempunyai dimensi yang sama, sebagaimana wajib agar dapat dijumlahkan.

Rumus

$$[\partial_t \vec{v}] = LT^{-2}, \quad [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = (LT^{-1})(L^{-1})(LT^{-1}) = LT^{-2}$$

- **Penjelasan**

Samakan suku gradien tekanan dan gaya badan per massa dengan percepatan.

Rumus

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [\vec{F}] = ML^{-2}T^{-2}$$

- **Penjelasan**

Samakan suku viskositas dengan percepatan.

Rumus

$$[\nu](L^{-2})(L^{-1}) = LT^{-2} \Rightarrow [\nu] = L^2T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Masukkan skala karakteristik ruang, kecepatan, dan waktu adveksi.

Rumus

$$\vec{x} = l\vec{X}, \quad \vec{v} = U\vec{V}, \quad t = \frac{l}{U}\tau$$

- **Penjelasan**

Pilih skala tekanan dinamik dan rapat gaya agar kedua suku berskala seperti U^2/l .

Rumus

$$p = \rho U^2 P, \quad \vec{F} = \frac{\rho U^2}{l} \vec{f}$$

- **Penjelasan**

Bagi seluruh persamaan dengan U^2/l ; hanya perbandingan inersia dan viskositas yang tersisa.

Rumus

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla_X) \vec{V} = -\nabla_X P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla_X^2 \vec{V} + \vec{f}, \quad \text{Re} = \frac{Ul}{\nu}$$

Simpulan

Bilangan Reynolds adalah satu-satunya parameter kontinu dalam bentuk tak berdimensi yang diberikan; ia membandingkan pengangkutan inersial dengan difusi momentum viskos.

Pemantulan Batu di Permukaan Air

0005-LEGA-V101-CH04

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Memahami pemantulan batu di permukaan air sebagai pergantian antara fase terbang bebas dan fase tumbukan.
- Menerapkan konsep-konsep mekanika klasik untuk mendeskripsikan dinamika batu selama setiap fase.
- Menjelaskan alasan penggunaan aproksimasi untuk menyederhanakan persamaan gerak.
- Merumuskan kondisi awal untuk setiap fase berdasarkan hasil fase sebelumnya.
- Menganalisis dinamika setiap fase.
- Mengevaluasi prediksi teoretis dengan membandingkannya terhadap pengamatan eksperimen.

Sekarang kita akan membahas masalah pemodelan pemantulan batu di permukaan air. Tujuannya ialah memahami bagaimana batu meluncur sambil memantul di permukaan air dan seberapa jauh batu itu bergerak. Dengan informasi ini, kita diharapkan dapat menyarankan cara melempar batu yang optimal untuk meningkatkan jumlah pantulan. Salah satu perbedaan utama dari masalah bandul yang telah dibahas sebelumnya ialah bahwa batu tidak dapat dianggap sebagai massa titik. Oleh karena itu, kita akan menggunakan dua perangkat persamaan model: hukum kekekalan momentum untuk mendeskripsikan gerak pusat massa (sebuah titik), dan persamaan gerak benda tegar untuk mendeskripsikan rotasi batu terhadap pusat massanya.

Data eksperimen

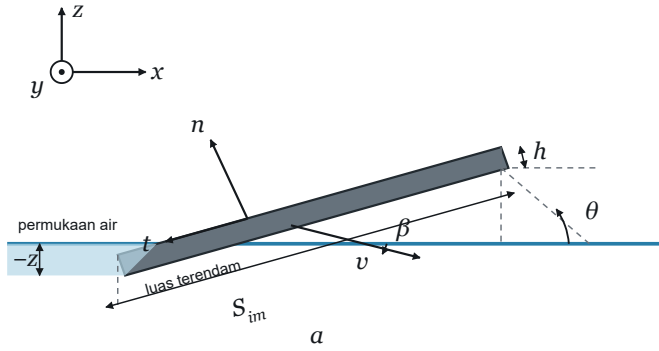
Kita mungkin pernah mencoba memantulkan batu di permukaan air, dan secara intuitif mengetahui bahwa agar batu dapat memantul berkali-kali, batu sebaiknya cukup pipih serta dilempar dengan sudut datang yang kecil dan dengan putaran. Kita juga tahu bahwa jika batu tidak dilempar dengan benar, batu mungkin memantul sekali, tetapi kemudian mulai terguling-guling di udara lalu tenggelam. Menariknya, tersedia data eksperimen terkendali untuk masalah ini. Sebuah artikel tahun 2004 **Catatan:** C. Clanet, F. Hersen, and L. Bocquet, [Secrets of successful stone-skipping](#), *Nature* **427**, 29 (2004). karya C. Clanet, F. Hersen, dan L. Bocquet melaporkan pengukuran laboratorium yang memberikan kecepatan awal minimum batu, sudut antara vektor kecepatan batu dan permukaan air, serta waktu tumbukan, sebagai fungsi sudut antara batu dan permukaan air.

Asumsi dan persamaan model

Pembahasan berikut didasarkan pada artikel tahun 2003 **Catatan:** L. Bocquet, [The physics of stone skipping](#), *Am. J. Phys.* **71**, 150-155 (2003). karya L. Bocquet yang berjudul *The physics of stone skipping*. Kita menggunakan notasi yang sama agar pembahasan lebih mudah diikuti.

Kita akan mengasumsikan bahwa gerak batu berganti-ganti antara terbang bebas, ketika batu berada di udara, dan bertumbukan dengan permukaan air. Setiap tahap ini dapat dideskripsikan secara terpisah dengan menggunakan persamaan mekanika klasik. Sebagai contoh, kondisi awal suatu fase terbang bebas adalah posisi dan kecepatan batu ketika batu lepas dari air pada akhir fase tumbukan sebelumnya, dan demikian pula sebaliknya. Kita akan mulai dengan mendeskripsikan proses tumbukan, kemudian membahas bagian gerak yang berupa terbang bebas.

Fase tumbukan



Gambar 4.1. Penampang batu pipih selama proses tumbukan (diadaptasi dari artikel L. Bocquet tahun 2003). [Deskripsi Gambar](#)

Perhatikan sebuah batu tipis, pipih, homogen, dan simetris (misalnya berbentuk persegi atau lingkaran) dengan massa total M , dan asumsikan bahwa selama proses tumbukan batu tidak berputar pada sumbu normalnya ataupun terguling-guling, sehingga orientasinya tetap sejajar dengan orientasi semula. **Catatan:** Apakah asumsi ini masuk akal? Mengapa atau mengapa tidak? Oleh karena itu, masalah ini dapat disederhanakan dengan meninjau penampang batu yang melalui pusat massanya dan sejajar dengan bidang yang ditentukan oleh arah vertikal dan vektor kecepatan batu (lihat Gambar 4.1). Dengan demikian, semua titik pada penampang ini (dan sebenarnya pada seluruh batu) bergerak dengan vektor kecepatan yang sama.

Parameter masalah ini adalah ukuran batu a (a adalah panjang sisi batu persegi atau diameter batu berbentuk lingkaran), ketebalannya $h \ll a$, vektor kecepatannya $\vec{v}(t)$, dan sudut θ (yang dianggap konstan selama setiap fase tumbukan) antara batu dan permukaan air. Kita akan menyebut $\beta(t)$ sebagai sudut antara $\vec{v}(t)$ dan arah horizontal, serta mendefinisikan dua basis ortonormal: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dan $(\vec{n}, \vec{y}, \vec{t})$, sedemikian sehingga $\vec{y}$ tegak lurus terhadap bidang penampang, $\vec{z}$ mengarah ke atas, $\vec{n}$ normal terhadap permukaan batu, dan $\vec{t}$ menyinggung permukaan batu. Lihat Gambar 4.1 untuk ilustrasinya.

Karena kita telah membuat asumsi bahwa batu tidak berotasi selama proses tumbukan, gerakannya dapat direduksi menjadi gerak pusat massanya dan sepenuhnya dideskripsikan oleh hukum Newton. Gaya-gaya yang bekerja pada batu ialah gaya gravitasi, $-Mg\vec{z}$, dan gaya $\vec{F} = F_x\vec{x} + F_z\vec{z}$ yang dikerahkan air pada batu. Jika kita tuliskan $\vec{v} = v_x\vec{x} + v_z\vec{z}$, kita memperoleh

$$M \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad M \frac{dv_z}{dt} = -Mg + F_z. \quad (4.1)$$

Tentu saja, sekarang kita memerlukan model untuk gaya $\vec{F}$. Pertama, gaya ini dapat dianggap sebagai jumlah gaya angkat yang sejajar dengan $\vec{n}$ dan gaya gesek yang sejajar dengan $\vec{t}$. Kedua, mari kita tinjau dinamika air selama proses tumbukan. Fluida bergerak menurut persamaan Navier-Stokes,

$$\rho_w \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f},$$

di mana ρ_w adalah massa jenis air, $\vec{v}$ adalah vektor kecepatan sebuah partikel fluida, p adalah tekanan, μ adalah viskositas dinamis air, dan $\vec{f}$ menyatakan gaya-gaya volume (seperti gravitasi) yang bekerja pada air. Pada antarmuka antara air dan batu, tekanan p diberikan oleh

$$p \simeq \frac{\|\vec{F}\|}{S_{im}},$$

di mana S_{im} adalah luas permukaan bagian batu yang terendam (lihat Gambar 4.1). Sekarang kita akan melakukan analisis dimensi untuk membandingkan suku inersia dan suku difusi dalam persamaan ini. Kita mempunyai

$$\frac{\left[\frac{\rho_w (\vec{V} \cdot \vec{V})}{\mu} \vec{V} \right]}{\left[\frac{\rho_w \|\vec{V}\| L}{\mu} \right]} = \left[\frac{\rho_w \|\vec{V}\| L}{\mu} \right] = \left[\frac{\|\vec{V}\| L}{\nu_w} \right] \equiv Re,$$

di mana L adalah panjang karakteristik, $\nu_w = \mu/\rho_w$ adalah viskositas kinematik air, dan Re disebut bilangan Reynolds. Jika kita mengasumsikan bahwa $\|\vec{V}\|$ berorde beberapa meter per detik, bahwa L berorde ukuran batu—misalnya beberapa sentimeter—dan karena untuk air $\nu_w = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, kita memperoleh

$$Re = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}} = 10^5 \gg 1.$$

Akibatnya, suku-suku viskos dapat diabaikan, dan kita dapat menyeimbangkan suku-suku inersia dengan suku-suku tekanan. Hal ini memberikan

$$\left[\frac{p}{L} \right] \simeq \left[\rho_w (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right] = \left[\frac{\rho_w \|\vec{V}\|^2}{L} \right],$$

yang bersama dengan $p \simeq \|\vec{F}\|/S_{im}$ menghasilkan

$$\|\vec{F}\| \propto \rho_w S_{im} \|\vec{V}\|^2.$$

Karena $\|\vec{V}\|$ dan $\|\vec{v}\|$ sebanding, kita akan menganggap bahwa besar gaya $\vec{F}$ sebanding dengan massa jenis air ρ_w , luas permukaan yang terendam S_{im} , dan kuadrat besar vektor kecepatan batu, $\|\vec{v}\|^2$. Dengan demikian, kita dapat menuliskan

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{2} C_l \vec{n} + \frac{1}{2} C_f \vec{t} \right) \rho_w S_{im} (v_x^2 + v_z^2),$$

di mana koefisien tak berdimensi C_l dan C_f mendeskripsikan bagaimana komponen normal (angkat) dan tangensial (gesek) dari $\vec{F}$ berubah terhadap $\rho_w S_{im} \|\vec{v}\|^2$. Kita akan mengasumsikan bahwa koefisien-koefisien ini konstan.

Sekarang kita dapat menyubstitusikan ekspresi ini ke dalam Persamaan (4.1). Karena $\vec{n} = -\sin(\theta) \vec{x} + \cos(\theta) \vec{z}$ dan $\vec{t} = -\cos(\theta) \vec{x} - \sin(\theta) \vec{z}$, kita memperoleh

$$\begin{aligned} M \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho_w S_{im}(z) (v_x^2 + v_z^2) (C_l \sin(\theta) + C_f \cos(\theta)), \\ M \frac{dv_z}{dt} &= -Mg + \frac{1}{2} \rho_w S_{im}(z) (v_x^2 + v_z^2) (C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Persamaan-persamaan ini nonlinear terhadap v_x dan v_z . Selain itu, kita telah menyatakan secara eksplisit kebergantungan S_{im} pada koordinat vertikal z dari bagian batu yang berada paling dalam di bawah air (lihat Gambar 4.1). Persamaan (4.2) berlaku selama batu belum terendam seluruhnya. Jika batu terendam seluruhnya, gaya angkat yang dikerahkan air pada batu akan diberikan oleh hukum Archimedes, dan batu akan tenggelam. Pada awal fase tumbukan, $v_z < 0$. Agar batu memantul di permukaan air, kita harus mempunyai $dv_z/dt > 0$, sehingga v_z bernilai positif pada akhir fase tumbukan. Kita melihat bahwa sudut θ harus kecil agar hal ini terjadi, sebab $C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)$ harus bernilai positif jika kita ingin

$$\frac{1}{2} \rho_w S_{im}(z) (v_x^2 + v_z^2) (C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta))$$

mengimbangi $-Mg$.

Fase terbang bebas

Selama fase terbang bebas, gerak pusat massa batu dideskripsikan oleh persamaan Newton dengan gravitasi sebagai satu-satunya gaya:

$$M \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad M \frac{dv_z}{dt} = -Mg. \quad (4.3)$$

Jika kita menyatakan koordinat batu dengan x dan z , kita mempunyai

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t \quad z(t) = v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4.4)$$

di mana $t = 0$ ditetapkan pada awal fase terbang bebas. Posisi awal ($X(0), Z(0) = 0$) dan kecepatan awal ($v_x(0), v_z(0)$) batu diberikan oleh posisi dan kecepatan akhir pada fase tumbukan sebelumnya, kecuali, tentu saja, jika ini merupakan fase terbang bebas yang pertama.

Gerak rotasi batu sebagai benda tegar terhadap pusat massanya diberikan oleh persamaan Euler,

$$\begin{aligned} I_{-y} \frac{d\omega_{-y}}{dt} - \omega_n \omega_p (I_n - I_p) &= N_{-y} \\ I_n \frac{d\omega_n}{dt} - \omega_p \omega_{-y} (I_p - I_{-y}) &= N_n \\ I_p \frac{d\omega_p}{dt} - \omega_{-y} \omega_n (I_{-y} - I_n) &= N_p, \end{aligned} \quad (4.5)$$

di mana I_α , ω_α , dan N_α masing-masing adalah momen inersia, kecepatan sudut, dan momen gaya terhadap sumbu utama benda yang sejajar dengan $\vec{\alpha}$. Di sini, $-\vec{y}$ dan $\vec{p}$ adalah vektor satuan yang menyinggung permukaan batu dan sejajar dengan dua sumbu utamanya. Kerangka ortonormal $(-\vec{y}, \vec{n}, \vec{p})$ melekat pada pusat massa batu dan berotasi bersamanya. Dalam penampang pada Gambar 4.1, arah $\vec{p}$ berimpit dengan arah tangensial $\vec{t}$. Perangkat persamaan serupa dapat dituliskan untuk fase tumbukan jika kita ingin memperhitungkan kemungkinan batu berputar pada sumbu normalnya dan terguling-guling saat bertumbukan dengan air.

Karena batu berbentuk persegi atau lingkaran, berlaku $I_{-y} = I_p \equiv J_1$, dan kita akan menggunakan notasi $I_n \equiv J_0$. Selain itu, satu-satunya gaya yang bekerja pada batu, $-Mg\vec{z}$, bekerja di pusat massanya, sehingga semua momen gaya bernilai nol. Persamaan (4.5) kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_{-y}}{dt} - \omega_n \omega_p (J_0 - J_1) &= 0 \\ J_0 \frac{d\omega_n}{dt} &= 0 \\ J_1 \frac{d\omega_p}{dt} - \omega_{-y} \omega_n (J_1 - J_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analisis

Kita akan mulai dengan menganalisis persamaan untuk fase terbang bebas, lalu kembali membahas proses tumbukan.

Fase terbang bebas

Dari Persamaan (4.6), kita melihat bahwa ω_n bersifat kekal sehingga nilainya sama dengan kecepatan sudut putar awal batu, Ω_0 , terhadap sumbu yang melalui pusat massanya dan tegak lurus terhadap permukaannya. Dengan demikian, tersisa dua persamaan linear,

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_{-y}}{dt} - \Omega_0 \omega_p (J_0 - J_1) &= 0 \\ J_1 \frac{d\omega_p}{dt} - \omega_{-y} \Omega_0 (J_1 - J_0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

yang dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_{-y} \\ \omega_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-y} \\ \omega_p \end{pmatrix}$ dengan $\delta = \frac{\Omega_0(J_0 - J_1)}{J_1}$. Jika tidak ada putaran awal, yaitu jika $\Omega_0 = 0$, kita memperoleh

$$\omega_{-y} = \omega_{-y}(0) \quad \omega_p = \omega_p(0),$$

yang, karena $\omega_{-y} = d\theta/dt$, menyiratkan

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega_{-y}(0) t.$$

Dengan kata lain, jika selama fase tumbukan batu memperoleh sedikit saja rotasi terhadap sumbu $-\vec{y}$, yaitu jika $\omega_{-y}(0)$ tidak nol, batu akan mulai berjungkir selama fase terbang bebas. Pada tumbukan berikutnya, batu kemungkinan besar menghantam air dengan sudut datang θ yang besar, lalu tenggelam.

Karena itu, Ω_0 harus tidak nol. Dalam keadaan ini, ω_{-y} dan ω_p sama-sama berosilasi terhadap waktu dengan frekuensi $|\delta|$ dan diberikan oleh

$$\begin{aligned} \omega_{-y}(t) &= \omega_{-y}(0) \cos(\delta t) + \omega_p(0) \sin(\delta t) \\ \omega_p(t) &= \omega_p(0) \cos(\delta t) - \omega_{-y}(0) \sin(\delta t). \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{\omega - \gamma(0)}{\delta} \sin(\delta t) + \frac{\omega p(0)}{\delta} [1 - \cos(\delta t)]$$

dan nilainya akan tetap dekat dengan $\theta(0)$ jika koefisien-koefisien dalam persamaan di atas kecil. Jadi, putaran terhadap arah $\vec{n}$ menstabilkan batu dan mencegahnya berjungkir. Gejala ini disebut *efek giroskopik*.

Sekarang kita beralih ke gerak pusat massa batu selama fase terbang bebas. Persamaan (4.4) menunjukkan bahwa durasi τ_f setiap fase terbang bebas memenuhi $Z(\tau_f) = 0$, yaitu

$$\tau_f = \frac{2v_z(0)}{g}, \quad v_z(0) > 0,$$

dan panjang setiap lompatan, yakni jarak yang ditempuh batu sepanjang arah $\vec{x}$, adalah

$$\lambda = v_x(0)\tau_f = v_x(0)\frac{2v_z(0)}{g}.$$

Dari Persamaan (4.2), jelas bahwa ketika θ kecil, v_x berkurang selama setiap fase tumbukan. Karena itu, nilai $v_x(0)$ —yakni nilai v_x pada awal setiap fase terbang bebas—akan berkurang dari satu fase terbang bebas ke fase berikutnya. Karena kita tidak mengharapkan v_z meningkat di antara dua fase terbang bebas, panjang setiap lompatan akan berkurang dari satu lompatan ke lompatan berikutnya, sebagaimana yang kita harapkan.

Fase tumbukan

Analisis kita terhadap Persamaan (4.2) pertama-tama harus menunjukkan dalam kondisi apa batu akan muncul kembali dan lepas dari air pada akhir fase tumbukan. Perhatikan persamaan untuk v_z ,

$$M \frac{dv_z}{dt} = -Mg + \frac{1}{2}\rho_w S_{im}(z) (v_x^2 + v_z^2) (C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)). \quad (4.10)$$

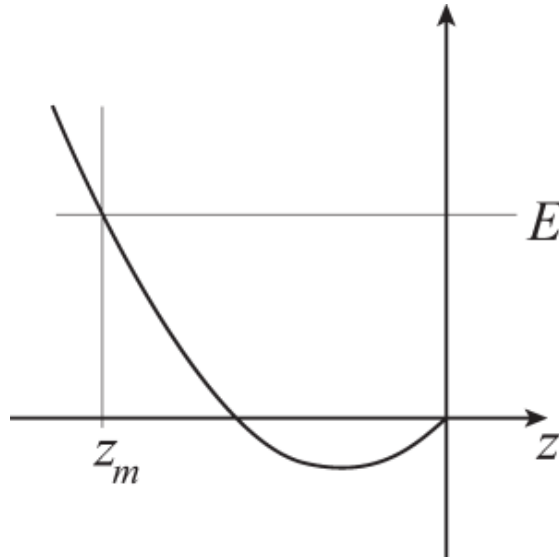
Kita dapat memahami informasi yang terkandung dalam persamaan ini dengan menggunakan pendekatan $v_x \gg v_z$, yang cukup masuk akal, dan juga mengasumsikan bahwa $v_x^2 + v_z^2 = v^2 \equiv v_0^2$ konstan selama fase tumbukan. Pernyataan terakhir ini tidak sepenuhnya benar karena gesekan dengan air memperlambat batu. Namun, jika batu memantul sekitar 20 kali, kehilangan relatif $(v^2(0) - v^2(\tau_c))/v^2(0)$ selama setiap tumbukan kecil, setidaknya untuk sebagian besar tumbukan. Di sini, τ_c menyatakan durasi tumbukan. Dengan syarat-syarat ini, Persamaan (4.10) menjadi

$$M \frac{dv_z}{dt} = -Mg + \frac{1}{2}\rho_w S_{im}(z) v_0^2 (C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)) \equiv -\mathcal{F}(z). \quad (4.11)$$

Ruas kanan, $-\mathcal{F}(z)$, hanya merupakan fungsi dari z (ingat bahwa sejak awal kita mengasumsikan θ konstan selama setiap fase tumbukan). Karena $v_z = dz/dt$, kita dapat mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan v_z dan mengintegalkannya terhadap t untuk memperoleh

$$\frac{M}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \int -\mathcal{F}(z) \frac{dz}{dt} dt = \int -\mathcal{F}(z) dz \equiv -\mathcal{U}(z) + E, \quad (4.12)$$

di mana $\mathcal{U}(z) = \int_0^z \mathcal{F}(s) ds$, dan konstanta E bersifat sembarang. Ketika $z = 0$, $S_{im}(z) = 0$; selain itu, $S_{im}(z)$ bertambah ketika z menjadi semakin negatif. Oleh karena itu, potensial $\mathcal{U}(z)$ berbentuk seperti yang digambarkan pada Gambar 4.2 untuk nilai z negatif, asalkan θ cukup kecil.



Gambar 4.2. Bentuk potensial $U(z)$ sebagai fungsi z untuk $z < 0$. [Deskripsi Gambar](#)

Dari bentuk U , kita dapat melihat bahwa lintasan batu sedemikian rupa sehingga z memiliki titik balik pada $z = z_m$. Pada akhir fase tumbukan, batu akan muncul kembali dengan kecepatan vertikal $v_z(\tau_c) = -v_z(0)$, berlawanan dengan kecepatan vertikalnya pada awal fase tumbukan. Hal ini hanya terjadi jika energi E memungkinkan batu belum terbenam seluruhnya ketika $z = z_m$. Jika E dipertahankan tetap, keadaan ini memberlakukan syarat pada v_0^2 karena semakin besar v_0^2 , semakin kecil $|z_m|$. Jadi, batu tidak akan tenggelam selama fase tumbukan apabila $v_0^2 > v_c^2$, dengan kecepatan kritis v_c yang bergantung pada parameter-parameter masalah. Karena $v_x \gg v_z$, syarat pada v_0 juga dapat ditulis kembali sebagai syarat pada kecepatan awal batu dalam arah $\vec{x}$, yaitu $v_x(0) > v_c$. Sebagaimana ditunjukkan dalam artikel L. Bocquet tahun 2003 dan dalam latihan pada akhir bab ini, kita dapat menghitung $S_{im}(z)$ untuk batu dengan bentuk tertentu, menyelesaikan Persamaan (4.11) secara eksplisit, dan memperoleh ekspresi untuk v_c .

Seperti disebutkan di atas, kita mengasumsikan bahwa dinamika sistem bersifat konservatif (yaitu $v^2 = v_0^2$ dianggap konstan). Hal ini jelas tidak sepenuhnya benar karena batu tidak terus memantul tanpa henti. Energi hilang selama proses tumbukan akibat gesekan batu dengan permukaan air. Semua yang telah kita nyatakan sebelumnya tetap benar secara kualitatif—khususnya, batu akan muncul kembali dengan kecepatan vertikal yang hanya sedikit lebih kecil daripada $|v_z(0)|$ —selama kehilangan energi relatif dalam satu fase tumbukan kecil. Kondisi ini tentu terpenuhi pada pantulan-pantulan awal, tetapi tidak lagi berlaku pada pantulan-pantulan terakhir. Karena kehilangan energi inilah penyebab utama batu melambat, sekarang kita akan mencoba memperkirakan besarannya. Perubahan energi selama tumbukan, yang dinyatakan dengan $\mathcal{W}$, sama dengan usaha yang dilakukan oleh gaya gesek air pada batu dan bernilai negatif untuk disipasi. Secara kasar, nilainya dapat diperkirakan sebagai

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\simeq \left[\text{gaya sepanjang } \vec{x} \right] \cdot \left[\text{jarak yang ditempuh batu sepanjang } \vec{x} \right] \\ &\simeq \vec{F} \cdot \vec{x} l, \end{aligned}$$

di mana $l = v_x(0) \tau_c$. Dari Persamaan (4.11), kita melihat bahwa

$$\left[\frac{\rho_w}{M} v_0^2 \right] = L^{-1} T^{-2},$$

sehingga kita dapat memperkirakan

$$\tau_c \propto \sqrt{\frac{M}{a \rho_w v_0^2}} \simeq \sqrt{\frac{M}{a \rho_w}} \frac{1}{v_x(0)},$$

di mana a adalah ukuran batu (panjang sisi atau diameter). Oleh karena itu, pada orde terendah, $l = v_x(0) \tau_c$ tidak bergantung pada $v_x(0)$. Selama tumbukan, ruas kanan Persamaan (4.10) bernilai kecil, sehingga kita dapat menulis

$$Mg \simeq \vec{F} \cdot \vec{z}.$$

Selain itu, karena

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{x}}{\vec{F} \cdot \vec{z}} = -\frac{C_t \sin(\theta) + C_f \cos(\theta)}{C_t \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)} \equiv -\mu,$$

(rasio μ tidak boleh tertukar dengan viskositas dinamis air), kita memperoleh

$$\vec{F} \cdot \vec{x} \simeq -Mg\mu,$$

dan

$$\mathcal{W} \simeq -Mg\mu l.$$

Jadi, karena selisih energi kinetik antara awal dan akhir fase tumbukan sama dengan $\mathcal{W}$, kita memperoleh

$$\frac{1}{2}Mv_x^2(\tau_c) - \frac{1}{2}Mv_x^2(0) = \mathcal{W} = -Mg\mu l,$$

dan kecepatan awal $v_x(0)$ harus memenuhi

$$v_x(0) > \sqrt{2g\mu l} \equiv V_c.$$

Dengan menggabungkan seluruh hasil tersebut, kecepatan dalam arah $\vec{x}$ pada awal fase tumbukan harus memenuhi

$$v_x(0) > \max(v_c, V_c),$$

di mana v_c diperoleh dengan menetapkan bahwa batu tidak boleh terbenam seluruhnya selama tumbukan, sedangkan V_c memastikan batu bergerak cukup cepat untuk mengimbangi kehilangan energi akibat gaya gesek. Pembahasan kita tentang fase terbang bebas menunjukkan bahwa panjang setiap lompatan sebanding dengan kecepatan horizontal v_x . Kita tahu bahwa v_x bersifat kekal selama fase terbang bebas (lihat Persamaan (4.3)) dan bahwa v_x^2 berkurang sebesar $2g\mu l$ selama setiap fase tumbukan. Karena $|v_z|$ sama pada awal dan akhir setiap fase terbang bebas, dan karena v_z hanya berubah sedikit selama fase tumbukan, panjang lompatan setelah N fase tumbukan diberikan oleh

$$\begin{aligned} \lambda_N &= \frac{2|v_z(0)|}{g} \sqrt{v_{x,0}^2 - 2Ng\mu l} = \frac{2|v_z(0)|v_{x,0}}{g} \sqrt{1 - \frac{2Ng\mu l}{v_{x,0}^2}} \\ &= \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{N}{N_c}}, \quad \lambda_0 = \frac{2|v_z(0)|v_{x,0}}{g}, \quad N_c = \frac{v_{x,0}^2}{2g\mu l}, \end{aligned}$$

di mana $v_{x,0}$ adalah kecepatan batu dalam arah $\vec{x}$ ketika mula-mula dilempar. Jadi, panjang setiap lompatan berkurang ketika N membesar dan berskala seperti $\sqrt{1 - N/N_c}$.

Ringkasan

Model ini menjelaskan adanya kecepatan minimum untuk melempar batu; menjelaskan mengapa batu perlu diberi putaran; dan menggambarkan bagaimana panjang setiap lompatan berkurang ketika jumlah pantulan bertambah. Model ini juga menunjukkan bahwa sudut θ antara batu dan permukaan air harus kecil. Eksperimen yang diuraikan dalam artikel C. Clanet *et al.* **Catatan:** Gambar 1.b dan 1.c dalam artikel C. Clanet *et al.* tahun 2004 menunjukkan daerah keberhasilan pemantulan batu pada bidang $(\theta, |v|)$ dan (θ, β) ; Gambar 1.d menunjukkan waktu tumbukan sebagai fungsi θ untuk berbagai nilai β (lihat Gambar 4.1 untuk definisi parameter-parameter tersebut). menunjukkan bahwa $\theta = 20^\circ$ merupakan nilai optimal. Nilai θ ini meminimumkan waktu tumbukan; ini juga merupakan sudut datang yang memungkinkan pemantulan batu berhasil dengan laju awal paling kecil. Untuk menjelaskan pengamatan ini, misalnya, kita perlu memperhitungkan ketergantungan C_t dan C_f pada θ , lalu mencari nilai θ yang meminimumkan kehilangan energi $\mathcal{W}$.

Deskripsi Gambar

Gambar 4.1: Diagram teknis fisika yang memperlihatkan penampang batu pipih (digambarkan berwarna abu-abu) ketika menghantam permukaan air pada suatu sudut. Diagram ini mencakup sistem koordinat Kartesius (x, y, z) , vektor satuan normal ($\vec{n}$) dan tangensial ($\vec{t}$) yang terkait dengan batu, serta sudut kemiringan batu (θ), vektor kecepatan batu ($\vec{v}$), dan sudut datang (β). [[Kembali ke Gambar 4.1](#)]

Gambar 4.2: Grafik yang menunjukkan kurva energi potensial sebagai fungsi kedalaman z . Garis horizontal E menyatakan energi mekanik total sistem. Perpotongan garis E dengan kurva pada z_m mendefinisikan sebuah “titik balik”, yaitu kedalaman maksimum yang dapat dicapai benda sebelum gaya apung atau gaya hidrodinamik mendorongnya kembali ke atas. [[Kembali ke Gambar 4.2](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Perhatikan Persamaan (4.5).

1. Gunakan persamaan-persamaan tersebut untuk menentukan dimensi ω_α , dengan α masing-masing bernilai $-y$, n , dan p .
2. Hubungkan dimensi I_α dengan dimensi N_α .
3. Diketahui bahwa torsi berbentuk $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f}$, dengan $\vec{r}$ sebagai vektor posisi dan $\vec{f}$ sebagai gaya. Tentukan dimensi N_α .
4. Gunakan hasil-hasil di atas untuk menentukan dimensi I_α . Apakah hasil ini sesuai dengan definisi $I_\alpha \equiv \int ||\vec{r}||^2 \rho dV$, dengan ρ sebagai massa jenis dan dV sebagai elemen volume?

Soal 2

Soal ini didasarkan pada artikel L. Bocquet tahun 2003.

Perhatikan Persamaan (4.11) dan anggap bahwa batu berbentuk persegi. Ambil $t = 0$ pada awal tumbukan, dengan kondisi awal $z(0) = 0$ dan $\dot{z}(0) = v_z(0) < 0$. Rumus luas terendam pada soal ini berlaku selama perendaman parsial, yaitu $-a \sin(\theta) \leq z \leq 0$.

1. Buktikan bahwa $S_{im} = a|z|/\sin(\theta)$.
2. Dengan menggunakan bentuk S_{im} tersebut, buktikan bahwa Persamaan (4.11) menjadi persamaan diferensial linear untuk z .
3. Carilah solusi umum persamaan diferensial biasa ini.
4. Terapkan syarat batas dan buktikan bahwa $z(t)$ diberikan oleh

$$z(t) = \frac{-g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_z(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

$$\text{dengan} \quad \omega_0^2 = \frac{(C_i \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)) \rho_w v_x(0)^2 a}{2M \sin(\theta)}.$$

Soal 3

Soal ini didasarkan pada artikel L. Bocquet tahun 2003.

Dinamika sisi batu persegi yang terendam selama fase tumbukan dideskripsikan oleh (lihat Soal 2). Untuk bagian-bagian berikut, abaikan ketebalan h , tetapkan $C \equiv C_i \cos(\theta) - C_f \sin(\theta) > 0$, gunakan $v_z(0) = -v_x(0) \tan(\beta)$, dan asumsikan ruas dalam tanda kurung siku pada hasil akhir positif. Dengan konvensi $z < 0$ di bawah permukaan, batu mulai terendam seluruhnya ketika $|z| \geq a \sin(\theta)$.

$$z(t) = \frac{-g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_z(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

dengan

$$\omega_0^2 = \frac{(C_i \cos(\theta) - C_f \sin(\theta)) \rho_w v_x(0)^2 a}{2M \sin(\theta)}.$$

- Gunakan bentuk ini untuk membuktikan bahwa sisi batu mencapai kedalaman $|z_m|$, dengan

$$z_m = -\frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_z(0)^2}{g^2}} \right].$$

- Syarat apa yang harus dipenuhi z agar batu terendam seluruhnya?
- Buktikan bahwa batu tidak akan terendam seluruhnya selama fase tumbukan jika

$$v_x(0)^2 > \frac{4Mg}{C\rho_w a^2} \left[1 - \frac{2\tan^2\beta M}{a^2 C\rho_w \sin(\theta)} \right]^{-1}, \quad C = C_l \cos(\theta) - C_f \sin(\theta).$$

Soal 4

Soal ini didasarkan pada artikel L. Bocquet tahun 2003.

Dengan menggunakan persamaan gerak Euler (4.5) bersama bentuk gaya angkat yang sesuai pada batu selama fase tumbukan, turunkan Persamaan (20) dalam artikel L. Bocquet tahun 2003,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu^2 (\theta - \theta(0)) = \frac{\mathcal{M}_\theta}{J_1},$$

dengan $\nu = (J_0 - J_1)/J_1 \Omega_0$, sedangkan $\mathcal{M}_\theta \equiv N_{-y}$ adalah komponen torsi yang diberikan air pada batu dalam arah peningkatan sudut kemiringan (sumbu $-y$). Bentuk ini mempertahankan kuadrat frekuensi ν^2 pada Persamaan (20) artikel sumber.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Sudut tidak mempunyai dimensi fisik, sehingga setiap komponen kecepatan sudut berdimensi waktu invers. Setelah itu, samakan dimensi semua suku pada satu persamaan Euler dan gunakan $[\vec{f}] = MLT^{-2}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $\alpha \in \{-y, n, p\}$, berlaku $[\omega_\alpha] = T^{-1}$. Persamaan Euler memberi $[N_\alpha] = [I_\alpha]T^{-2}$. Karena $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f}$, maka $[N_\alpha] = L(MLT^{-2}) = ML^2T^{-2}$, sehingga $[I_\alpha] = ML^2$. Definisi $I_\alpha = \int ||\vec{r}'||^2 \rho dV$ menghasilkan dimensi yang sama: $L^2(ML^{-3})(L^3) = ML^2$.

Cek cepat

Suku $I_\alpha \dot{\omega}_\alpha$, suku $I\omega\omega$, dan N_α semuanya harus berdimensi ML^2T^{-2} .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Kecepatan sudut adalah laju perubahan sudut; radian merupakan besaran tak berdimensi.

Rumus

$$[\omega_{-y}] = [\omega_n] = [\omega_p] = T^{-1}, \quad [\dot{\omega}_\alpha] = T^{-2}$$

• Penjelasan

Dalam setiap persamaan Euler, suku turunan dan suku kopling harus memiliki dimensi yang sama.

Rumus

$$[I_\alpha \dot{\omega}_\alpha] = [I\omega\omega] = [I_\alpha]T^{-2} = [N_\alpha]$$

• Penjelasan

Torsi adalah hasil kali silang lengan posisi dan gaya. Hasil kali silang mengubah arah, tetapi tidak mengubah perkalian dimensinya.

Rumus

$$[N_\alpha] = [\vec{r}][\vec{f}] = L(MLT^{-2}) = ML^2T^{-2}$$

• Penjelasan

Gabungkan dua relasi sebelumnya untuk memperoleh dimensi momen inersia.

Rumus

$$[I_\alpha] = [N_\alpha]T^2 = ML^2$$

• Penjelasan

Periksa secara independen melalui definisi kontinu, dengan massa jenis berdimensi massa per volume.

Rumus

$$\left[\int ||\vec{r}||^2 \rho dV \right] = L^2(ML^{-3})L^3 = ML^2$$

Simpulan

Analisis persamaan gerak dan definisi integral memberikan hasil yang identik. Tanda pada nama sumbu $-y$ hanya menyatakan orientasi dan tidak memengaruhi dimensi.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Selama perendaman parsial, panjang bagian sisi batu yang berada di bawah permukaan air adalah $|z|/\sin\theta$. Karena $z < 0$, gunakan $|z| = -z$, tetapkan $C = C_l \cos\theta - C_f \sin\theta$, dan kumpulkan koefisien z sebagai ω_0^2 .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Luas terendam ialah $S_{im} = a|z|/\sin\theta$. Dengan pendekatan $v_0^2 \approx v_x(0)^2$, $C = C_l \cos\theta - C_f \sin\theta > 0$, dan $z < 0$, Persamaan (4.11) menjadi $\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g$, dengan $\omega_0^2 = C\rho_w v_x(0)^2 a / (2M \sin\theta)$. Solusi umumnya $z = -g/\omega_0^2 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Kondisi $z(0) = 0$ dan $\dot{z}(0) = v_z(0)$ memberi $A = g/\omega_0^2$, $B = v_z(0)/\omega_0$,

sehingga diperoleh rumus yang diminta.

Cek cepat

Substitusi $t = 0$ harus memberi $z(0) = 0$, sedangkan diferensiasi lalu substitusi $t = 0$ harus memberi $\dot{z}(0) = v_z(0)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Penampang batu membentuk sudut θ terhadap air. Kedalaman vertikal $|z|$ bersesuaian dengan panjang terendam $|z|/\sin\theta$ sepanjang batu; kalikan dengan lebar persegi a .

Rumus

$$S_{im} = a \frac{|z|}{\sin\theta}$$

- **Penjelasan**

Selama fase masuk, $z < 0$, jadi $|z| = -z$. Masukkan luas tersebut ke persamaan gaya vertikal dengan besar kecepatan dianggap tetap dan didominasi oleh komponen horizontal.

Rumus

$$M\ddot{z} = -Mg - \frac{C\rho_w v_x(0)^2 a}{2\sin\theta} z, \quad C = C_l \cos\theta - C_f \sin\theta$$

- **Penjelasan**

Untuk $C > 0$, definisikan frekuensi karakteristik real dan bagi persamaan dengan massa.

Rumus

$$\omega_0^2 = \frac{C\rho_w v_x(0)^2 a}{2M\sin\theta}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = -g$$

- **Penjelasan**

Jumlahkan satu solusi partikular konstan dengan solusi homogen osilator harmonik.

Rumus

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

- **Penjelasan**

Gunakan kedua kondisi awal pada saat sisi batu pertama kali menyentuh air.

Rumus

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}, \quad B = \frac{v_z(0)}{\omega_0}$$

- **Penjelasan**

Masukkan konstanta untuk memperoleh lintasan selama asumsi perendaman parsial masih berlaku.

Rumus

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_z(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Simpulan

Solusi ini hanya berlaku sebelum batu terendam seluruhnya, untuk sudut tetap, koefisien gaya tetap, dan perubahan besar kecepatan yang dapat diabaikan selama satu tumbukan.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Tulis bagian berosilasi dari $z(t) + g/\omega_0^2$ sebagai satu sinusoid; amplitudonya langsung memberi nilai minimum. Setelah menetapkan $|z_m| < a \sin \theta$, kuadratkan hanya sesudah memastikan kedua ruas yang relevan positif.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $v_z(0) < 0$, kedalaman maksimum ialah $z_m = -\frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \omega_0^2 v_z(0)^2 / g^2} \right]$. Batu persegi terendam seluruhnya ketika $|z| \geq a \sin \theta$, sehingga pantulan parsial memerlukan $|z_m| < a \sin \theta$. Dengan $C = C_l \cos \theta - C_f \sin \theta > 0$, $v_z(0) = -v_x(0) \tan \beta$, dan $D = 1 - 2M \tan^2 \beta / (a^3 C \rho_w \sin \theta) > 0$, syarat akhirnya adalah $v_x(0)^2 > \frac{4Mg}{C \rho_w a^2} D^{-1}$. Jika $D \leq 0$, tidak ada kecepatan horizontal berhingga yang memenuhi syarat tersebut dalam model dengan β tetap.

Cek cepat

Faktor $4Mg/(C \rho_w a^2)$ berdimensi kecepatan kuadrat, sedangkan D tak berdimensi; batas untuk $\beta = 0$ mereduksi menjadi $v_x(0)^2 > 4Mg/(C \rho_w a^2)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Bagian sinus dan kosinus mempunyai amplitudo resultan yang diperoleh dari jumlah kuadrat koefisiennya.

Rumus

$$R = \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{v_z(0)}{\omega_0}\right)^2} = \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_z(0)^2}{g^2}}$$

- **Penjelasan**

Nilai minimum lintasan adalah pergeseran konstan dikurangi amplitudo tersebut.

Rumus

$$z_m = -\frac{g}{\omega_0^2} - R = -\frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_z(0)^2}{g^2}} \right]$$

- **Penjelasan**

Jika sisi terendah berada pada $z < 0$, sisi tertinggi berada pada $z + a \sin \theta$. Seluruh batu berada di bawah air tepat ketika sisi tertinggi tidak lagi positif.

Rumus

$$z + a \sin \theta \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| \geq a \sin \theta$$

• Penjelasan

Minta agar titik balik terjadi sebelum batas perendaman penuh. Setelah mengisolasi akar dan menguadratkan kedua ruas positif, syarat ini menyederhana menjadi batas pada ω_0^2 .

Rumus

$$|z_m| < a \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0^2 > \frac{v_x(0)^2}{a^2 \sin^2 \theta} + \frac{2g}{a \sin \theta}$$

• Penjelasan

Gunakan hubungan geometris kecepatan datang dan ekspresi frekuensi dari model gaya angkat.

Rumus

$$v_z(0) = -v_x(0) \tan \beta, \quad \omega_0^2 = \frac{C \rho_w v_x(0)^2 a}{2M \sin \theta}, \quad C > 0$$

• Penjelasan

Kumpulkan semua suku yang mengandung $v_x(0)^2$ pada satu ruas. Pembagian mempertahankan arah pertidaksamaan hanya bila faktor dalam kurung positif.

Rumus

$$v_x(0)^2 > \frac{4Mg}{C \rho_w a^2} \left[1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{a^3 C \rho_w \sin \theta} \right]^{-1}$$

Simpulan

Batas ini merupakan syarat dalam model ideal: batu masih harus terendam sebagian, $C > 0$, sudut dan koefisien gaya dianggap tetap, $v_x \gg |v_z|$, dan faktor penyebut harus positif.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Pilih sumbu utama $(1, 2, 3) = (-y, n, p)$ dengan $I_1 = I_3 = J_1$, $I_2 = J_0$, dan $\omega_1 = \dot{\theta}$. Ambil $N_1 = \mathcal{M}_\theta$, $N_2 = N_3 = 0$, lalu integralkan persamaan ketiga setelah persamaan kedua memberi $\omega_2 = \Omega_0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $I_1 = I_3 = J_1$, $I_2 = J_0$, $\omega_1 = \dot{\theta}$, hanya torsi angkat $N_1 = \mathcal{M}_\theta$, serta $N_2 = N_3 = 0$, persamaan Euler kedua memberi $\omega_2 = \Omega_0$. Jika $\omega_3(0) = 0$, persamaan ketiga memberi $\omega_3 = ((J_1 - J_0)/J_1)\Omega_0(\theta - \theta_0)$. Substitusi ke persamaan pertama menghasilkan $\ddot{\theta} + [(J_0 - J_1)\Omega_0/J_1]^2(\theta - \theta_0) = \mathcal{M}_\theta/J_1$, yaitu $\ddot{\theta} + v^2(\theta - \theta_0) = \mathcal{M}_\theta/J_1$.

Cek cepat

v berdimensi T^{-1} , sehingga $v^2(\theta - \theta_0)$ dan $\mathcal{M}_\theta/J_1$ sama-sama berdimensi T^{-2} . Koefisien tanpa Ω_0^2 dan tanpa kuadrat rasio inersia tidak lolos pemeriksaan ini.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan sumbu 1 untuk perubahan kemiringan, sumbu 2 untuk normal batu, dan sumbu 3 untuk arah tangensial pada bidang batu. Simetri batu pipih memberi dua momen inersia yang sama.

Rumus

$$(1, 2, 3) = (-y, n, p), \quad I_1 = I_3 = J_1, \quad I_2 = J_0, \quad \omega_1 = \dot{\theta}$$

- **Penjelasan**

Abaikan torsi gesek rotasional dan pertahankan hanya torsi akibat gaya angkat pada sumbu kemiringan. Jika gaya angkat bekerja pada pusat daerah terendam P , torsinya adalah proyeksi hasil kali silang terhadap sumbu tersebut.

Rumus

$$N_1 = \mathcal{M}_\theta = (\overrightarrow{OP} \times \vec{F}_l) \cdot \vec{e}_1, \quad N_2 = N_3 = 0$$

- **Penjelasan**

Persamaan Euler kedua, bersama $I_1 = I_3$, menyatakan bahwa putaran terhadap normal batu tetap.

Rumus

$$J_0 \dot{\omega}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \Omega_0$$

- **Penjelasan**

Persamaan Euler ketiga menghubungkan kecepatan sudut tangensial dengan laju perubahan kemiringan.

Rumus

$$J_1 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_0) \Omega_0 \dot{\theta}$$

- **Penjelasan**

Integralkan dengan $\theta_0 = \theta(0)$ dan asumsi $\omega_3(0) = 0$, yakni tidak ada komponen sudut tangensial awal yang terpisah.

Rumus

$$\omega_3 = \frac{J_1 - J_0}{J_1} \Omega_0 (\theta - \theta_0)$$

- **Penjelasan**

Masukkan hasil tersebut ke persamaan Euler pertama dan bagi dengan J_1 . Dua faktor selisih inersia menghasilkan kuadrat positif.

Rumus

$$\ddot{\theta} + \frac{(J_0 - J_1)^2}{J_1^2} \Omega_0^2 (\theta - \theta_0) = \frac{\mathcal{M}_\theta}{J_1}$$

- **Penjelasan**

Definisikan frekuensi giroskopik untuk memperoleh bentuk Persamaan (20) yang ringkas.

Rumus

$$v = \frac{J_0 - J_1}{J_1} \Omega_0, \quad \ddot{\theta} + v^2(\theta - \theta_0) = \frac{\mathcal{M}_\theta}{J_1}$$

Simpulan

Bentuk ini mengasumsikan batu simetris, putaran normal Ω_0 konstan, hanya torsi angkat pada sumbu kemiringan yang dipertahankan, dan $\omega_3(0) = 0$. Jika komponen tangensial awal tidak nol, integrasi menghasilkan suku pemaksa konstan tambahan. Rumus yang tercetak di bab sumber tanpa Ω_0^2 dan tanpa kuadrat rasio inersia bukan Persamaan (20) berdimensi konsisten dari artikel Bocquet.

BAGIAN 3

Dinamika Populasi dan Epidemiologi

0005-LEGA-V101-PT03

Kini kita beralih ke model dinamika populasi dan epidemi. Model-model ini biasanya melibatkan persamaan beda atau persamaan diferensial. Kita akan memulai dengan model diskret satu spesies, membahas munculnya *kekacauan*, dan meninjau populasi yang terdiri atas kelompok umur berbeda. Selanjutnya, kita akan beralih ke model kontinu yang melibatkan satu atau dua spesies. Model-model terakhir ini berdimensi terlalu rendah untuk memperlihatkan perilaku kacau, sehingga perhatian kita akan tertuju pada kemunculan dinamika osilatori.

Berbeda dengan mekanika klasik, kita masih berupaya memahami hukum-hukum evolusi biologis. Belakangan ini, biologi matematis menjadi bidang yang menarik perhatian luas. Kini diterima secara umum bahwa kemajuan dalam memahami dinamika populasi, penyakit, epidemi, dan sebagainya hanya dapat dicapai melalui kerja lintas disiplin yang melibatkan matematikawan dan ilmuwan hayati. Seorang pemodel harus memahami arti setiap suku dalam persamaan modelnya dan mampu menilai, dengan menelaah hasil eksperimen, apakah suku tersebut relevan bagi masalah yang sedang dikaji. Karena itu, pemodelan yang berhasil menuntut proses bolak-balik antara model, simulasi dan/atau analisisnya, serta hasil eksperimen.

Data biologis yang andal sulit diperoleh karena berbagai alasan. Pertama, dalam dinamika populasi, data harus dikumpulkan selama rentang waktu yang jauh lebih panjang daripada umur satu individu. Pada skala manusia, proses ini memakan waktu berabad-abad. Untungnya, sistem lain, misalnya sistem bakteri, memiliki skala waktu intrinsik yang jauh lebih singkat. Kedua, penelitian yang berbeda biasanya dilakukan dalam kondisi yang berbeda pula, dan hasilnya dapat dipengaruhi oleh variabel perancu yang tidak diketahui. Penelitian berskala sangat besar yang melibatkan primata, terutama subjek manusia, juga sangat jarang dijumpai. Akibatnya, suatu kecenderungan mungkin baru menjadi signifikan secara statistik setelah berbagai penelitian digabungkan. Terakhir, banyak penelitian biomedis dilakukan pada mencit atau monyet, dan tidak selalu jelas sejauh mana hasilnya dapat diterapkan pada manusia. Karena itu, semakin penting bagi seorang pemodel untuk memahami sifat dan keterbatasan data yang tersedia, serta sifat dan keterbatasan modelnya.

Contoh-contoh yang dibahas dalam bagian ini cukup sederhana, tetapi semestinya memadai untuk membantu pembaca membangun intuisi tentang pemodelan generik dasar dinamika populasi dan epidemi dengan persamaan beda atau persamaan diferensial biasa.

Model Populasi Satu Spesies

0005-LEGA-V101-CH05

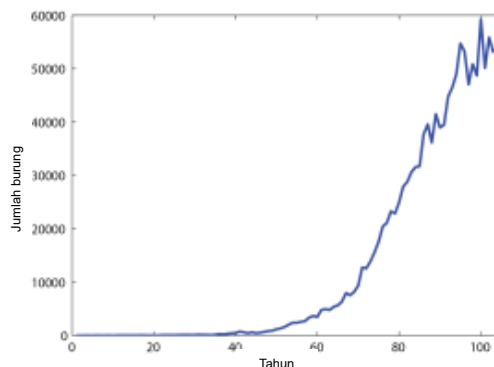
Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menyusun model waktu diskret untuk kelompok individu yang terisolasi atau saling berinteraksi, termasuk model dengan kelompok umur.
- Menyelesaikan model waktu diskret linear secara eksak.
- Menganalisis dinamika persamaan beda nonlinear orde pertama dengan menilai kestabilan titik tetap dan siklus periodik.
- Menjelaskan jalur menuju kekacauan pada peta logistik.
- Mengenali model waktu kontinu sebagai limit model waktu diskret.

Populasi Elang Ekor-Merah di Amerika Serikat

Kita mulai dengan menganalisis data yang dikumpulkan oleh Audubon Society melalui kegiatan [Pencacahan Burung Natal](#). Data pencacahan saat ini tersedia untuk setiap tahun sejak 1900. Informasi ini bersifat diskret (kita diberi jumlah burung yang dicacah pada akhir setiap tahun), tidak presisi (karena tidak semua burung tercacah dan orang yang berpartisipasi dalam upaya pencacahan berbeda-beda setiap tahun), serta niscaya mencerminkan gabungan banyak faktor (khususnya, bukan sekadar pertumbuhan atau penurunan akibat kelahiran dan kematian). Kita akan berfokus pada data elang ekor-merah, burung migran jarak pendek.



Gambar 5.1. Jumlah elang ekor-merah yang dicacah di Amerika Serikat, dari 1900 (tahun ke-1) hingga 2004 (tahun ke-105), berdasarkan data yang dikumpulkan oleh Audubon Society. [Deskripsi Gambar](#)

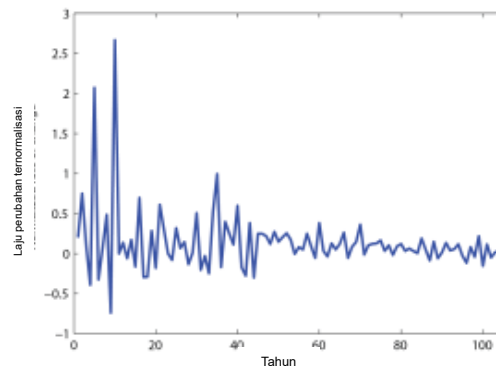
Gambar 5.1 menunjukkan jumlah elang ekor-merah yang dicacah di Amerika Serikat dari 1900 (tahun ke-1) hingga 2004 (tahun ke-105). Kita dapat melihat bahwa populasinya bertambah selama sebagian besar abad lalu dan tampaknya mulai mendekati kejenuhan pada akhir 1990-an. Untuk memahami data ini, kita dapat mencoba memplot laju perubahan populasi, yang didefinisikan sebagai

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t},$$

dengan t menyatakan waktu dalam tahun, $N(t)$ jumlah burung yang dicacah pada waktu t , dan dalam kasus ini $\Delta t = 1$ tahun. Grafik tersebut menunjukkan bahwa besaran $\Delta N / \Delta t$ berfluktuasi dan besar fluktuasinya meningkat seiring waktu. Karena jumlah elang ekor-merah juga meningkat sebagai fungsi waktu, sebagai gantinya kita dapat melihat laju

perubahan yang dinormalisasi terhadap jumlah individu, yang kita lambangkan dengan $R(t)$. Dengan demikian, kita mendefinisikan *laju perubahan per kapita* populasi elang ekor-merah sebagai

$$R(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t}.$$

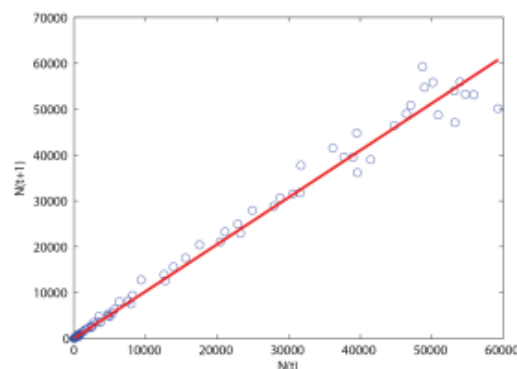


Gambar 5.2. Plot besaran $R(t)$ untuk hasil pencacahan elang ekor-merah, berdasarkan data yang dikumpulkan oleh Audubon Society.

[Deskripsi Gambar](#)

Gambar 5.2 menunjukkan $R(t)$ sebagai fungsi t . Fluktuasi tentu saja masih ada, tetapi kini sangat besar hanya ketika $N(t)$ relatif kecil. Selain itu, data tampak berfluktuasi di sekitar suatu nilai rata-rata yang positif (meskipun cukup kecil). Pada tahun-tahun terakhir, kecenderungan ini tidak lagi berlaku, dan sejak 1995, $R(t)$ tampak berosilasi di sekitar nilai yang lebih dekat ke nol.

Oleh karena itu, masuk akal untuk mengharapkan $N(t + \Delta t)$ berperilaku seperti fungsi linear dari $N(t)$, dengan sejumlah fluktuasi, dan memperlihatkan kejenuhan pada tahun-tahun terakhir. Hal ini didukung oleh plot pada Gambar 5.3, yang menunjukkan $N(t + \Delta t) = N(t + 1)$ sebagai fungsi $N(t)$. Kita melihat bahwa $N(t + 1)$ sangat dekat dengan $1.025 N(t)$. Kemiringan ini diperoleh melalui pencocokan kuadrat terkecil antara data dan garis lurus yang melalui titik asal (ditampilkan dengan warna merah). Seperti terlihat pada Gambar 5.3, kesesuaiannya cukup baik. Nilai 1.025 dekat dengan, tetapi sedikit lebih kecil dan berada di luar, interval kepercayaan 95% [1.026, 1.029] untuk laju pertumbuhan tahunan elang ekor-merah di Amerika Utara, yang ditemukan dalam artikel tahun 2016 oleh C.S. Soykan *et al.* **Catatan:** Candan U. Soykan, John Sauer, Justin G. Schuetz, Geoffrey S. LeBaron, Kathy Dale, Gary M. Langham, [Kecenderungan populasi burung musim dingin Amerika Utara berdasarkan model hierarkis](#), *Ecosphere* 7, e01351 (2016); Tabel S3, baris 206., yang menggunakan analisis statistik untuk memperkirakan kecenderungan populasi dari data pencacahan burung.



Gambar 5.3. Peta balik pertama, yang menunjukkan $N(t + \Delta t)$ sebagai fungsi $N(t)$, untuk hasil pencacahan elang ekor-merah oleh Audubon Society. Garis lurus memiliki kemiringan 1.025. [Deskripsi Gambar](#)

Namun, perhatikan bahwa kita tidak mengharapkan—dan memang tidak terdapat—kesesuaian yang baik pada nilai-nilai kecil N . Akan tetapi, skala Gambar 5.3 menyebabkan sebaran titik-titik di dekat titik asal tidak tampak untuk $N(t) < 5,000$, yang berkaitan dengan waktu $t \leq 50$ (lihat Gambar 5.1). Ringkasnya, meskipun datanya bising dan tidak

presisi, suatu model sederhana untuk populasi elang ekor-merah di Amerika Serikat, katakanlah dari 1950 hingga 1995, tampaknya berbentuk

$$N(t + 1) = \kappa N(t),$$

dengan κ suatu konstanta yang dekat dengan 1.025. Kita dapat memahami hubungan linear tersebut sebagai berikut. Jika migrasi masuk dan keluar Amerika Serikat kita abaikan—ingat bahwa elang ekor-merah merupakan burung migran jarak pendek—kita dapat menulis

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \text{jumlah kelahiran} - \text{jumlah kematian}.$$

Sebagai pendekatan pertama, masuk akal untuk mengasumsikan bahwa jumlah kematian maupun jumlah kelahiran dapat ditulis sebagai hasil kali N dengan suatu fungsi dari N dan t . Pendekatan semacam ini berlaku untuk sebagian besar model dinamika populasi dalam sistem tertutup. Dengan demikian, kita mendefinisikan *laju kelahiran per kapita* b , dan *laju kematian per kapita* d sebagai

$$b = \frac{\text{jumlah kelahiran per } \Delta t}{N(t)\Delta t}, \quad d = \frac{\text{jumlah kematian per } \Delta t}{N(t)\Delta t}.$$

Maka,

$$N(t + \Delta t) = N(t) (1 + b\Delta t - d\Delta t) = \kappa N(t),$$

$$R(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = b - d.$$

Pada fase perkembangan, yaitu ketika jumlah individu jauh lebih rendah daripada populasi maksimum yang dapat ditopang lingkungan, kita dapat mengasumsikan bahwa b dan d konstan, sehingga diperoleh

$$N(t + 1) = \kappa N(t), \quad \kappa = \text{konstan}. \quad (5.1)$$

Untuk elang ekor-merah, pembahasan di atas menyiratkan bahwa $\kappa \simeq 1.025$, yaitu $b - d = 0.025 \text{ tahun}^{-1}$. Tentu saja, fluktuasi selalu ada dalam praktik, tetapi model sederhana ini, yang dikenal sebagai *persamaan Malthus dalam waktu diskret*, sudah cukup untuk menjelaskan pertumbuhan eksponensial (atau Malthusian) populasi. Memang, Persamaan (5.1) menyiratkan bahwa

$$N(t_0 + m\Delta t) = \kappa^m N(t_0).$$

Jika $\kappa > 1$, yaitu jika kelahiran melebihi kematian, $N(t)$ bertumbuh secara eksponensial. Sebaliknya, jika $0 < \kappa < 1$, $N(t)$ menyusut secara eksponensial dan spesies tersebut terdorong menuju kepunahan. Kita telah mengasumsikan bahwa $\kappa \geq 0$. Jika tidak, $N(t)$ akan bergantian antara nilai positif dan negatif, dan model dinamika populasi kita jelas cacat.

Ketika jumlah individu mendekati daya dukung lingkungan, efek nonlinear tidak lagi dapat diabaikan, dan laju pertumbuhan populasi berubah bersama jumlah individu $N(t)$. Misalnya, pertumbuhan logistik berkaitan dengan

$$N(t + \Delta t) = \left(1 + \kappa(N_\infty - N(t))\right) \cdot N(t) \quad \kappa = \text{konstan},$$

yang memiliki faktor pengali pertumbuhan yang bergantung pada N untuk setiap langkah Δt , yaitu $\left(1 + \kappa(N_\infty - N(t))\right)$. Laju pertumbuhan fraksional per langkahnya adalah $\kappa(N_\infty - N(t))$. Parameter N_∞ menyatakan daya dukung lingkungan. Simbol κ di sini berbeda dari pengali tak berdimensi pada Persamaan (5.1): parameter ini berdimensi invers populasi, $[\kappa] = [\text{populasi}]^{-1}$. Agar model populasi tetap bermakna, parameter dan rentang keadaan harus dipilih sehingga $1 + \kappa(N_\infty - N(t)) \geq 0$.

Persamaan Beda Orde Pertama

Contoh yang dibahas di atas menunjukkan bahwa model populasi diskret berbentuk $N(t + \Delta t) = f(N(t))$, atau secara ekuivalen,

$$N_{k+1} = f(N_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

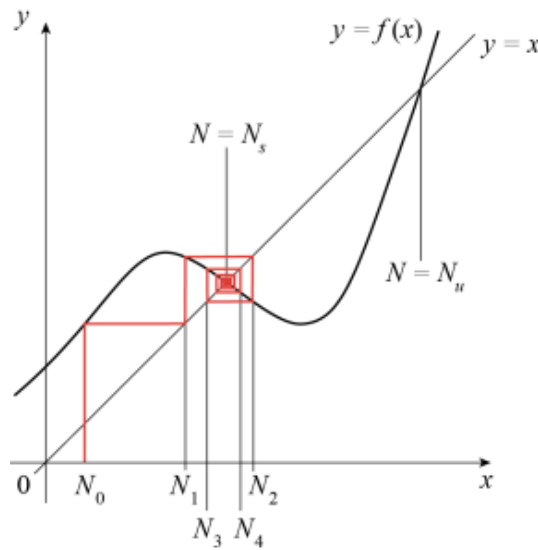
dengan $N_k = N(k\Delta t)$. Persamaan (5.2) disebut *persamaan beda orde pertama*. Persamaan ini *linear* jika $f(x)$ linear terhadap x , dan memiliki *koefisien konstan* jika f tidak bergantung pada k . Dalam konteks dinamika populasi, model seperti Persamaan (5.2) kadang-kadang disebut *model berinterval*. Persamaan (5.1), yang dapat ditulis sebagai

$$N_{k+1} = \kappa N_k,$$

oleh karena itu merupakan persamaan beda linear orde pertama dengan koefisien konstan. Seperti disebutkan di atas, solusinya adalah

$$N_k = \kappa^k N_0,$$

dengan N_0 sebagai kondisi awal.



Gambar 5.4. Representasi grafis iterasi berurutan peta $N_{k+1} = f(N_k)$. Empat iterasi pertama N_1 hingga N_4 dari fungsi f , yang dimulai pada $N = N_0$, juga ditunjukkan. Simbol N_s dan N_u masing-masing merujuk pada titik tetap stabil dan tak stabil. [Deskripsi Gambar](#)

Secara lebih umum, kita dapat menulis

$$N_k = f^k(N_0),$$

dengan f^k merupakan iterasi ke- k dari f . Bahkan jika grafik f rumit, dinamika N_k dapat divisualisasikan dengan mengiterasikan f secara grafis, seperti ditunjukkan pada Gambar 5.4. Dimulai dari nilai awal N_0 untuk N , pertama-tama kita mencari $f(N_0)$ sebagai koordinat y dari perpotongan grafik f dengan garis $x = N_0$. Kemudian, kita menandai nilai $N_1 = f(N_0)$ pada sumbu x dengan menggambar garis vertikal melalui perpotongan garis $x = y$ dan garis $y = f(N_0)$. Terakhir, proses ini kita ulang untuk memperoleh iterasi-iterasi f berikutnya. Dalam contoh pada Gambar 5.4, iterasi yang dimulai pada $N = N_0$ konvergen menuju suatu *titik tetap* $N = N_s$.

Titik Tetap dan Kestabilan Linearnya

Titik tetap N_c dari peta (5.2) memenuhi $N_c = f(N_c)$, dan diperoleh dengan mencari perpotongan garis berpersamaan $y = x$ dengan kurva $y = f(x)$. Dalam contoh pada Gambar 5.4, fungsi f memiliki dua titik tetap, $N = N_s$ dan $N = N_u$. Kita dapat mempelajari *kestabilan linear* keduanya sebagai berikut. Misalkan $N = N_c + u$, dengan u suatu gangguan kecil. Maka,

$$f(N) = f(N_c + u) = f(N_c) + uf'(N_c) + O(u^2),$$

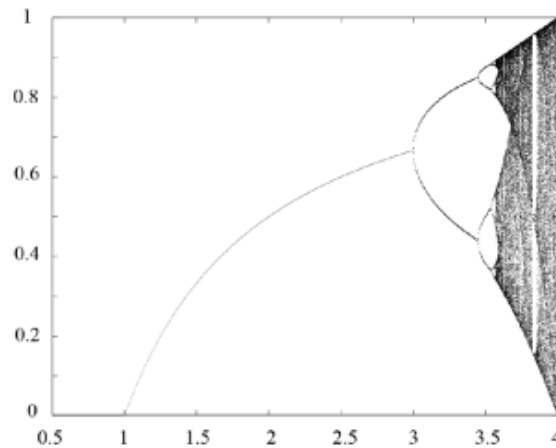
dan

$$f(N) - N_c = f(N) - f(N_c) = uf'(N_c) + O(u^2) \approx uf'(N_c),$$

dengan pendekatan terakhir sesuai jika u cukup kecil. Peta linear $u_{k+1} = f'(N_c)u_k$ memiliki iterasi yang konvergen menuju nol jika $|f'(N_c)| < 1$, dan divergen jika $|f'(N_c)| > 1$. Karena itu, titik tetap $N = N_c$ disebut *stabil secara linear* jika $|f'(N_c)| < 1$, dan *tak stabil* jika $|f'(N_c)| > 1$. Jika $|f'(N_c)| = 1$, linearisasi tidak menentukan kestabilan titik $N = N_c$; titik tersebut *nonhiperbolik* dan suku nonlinear harus diperiksa.

Peta Logistik

Sebagai contoh, tinjau peta logistik yang didefinisikan oleh Persamaan (5.2), dengan $f(x) = ax(1-x)$, dan a merupakan parameter yang memenuhi $0 < a < 4$. Jika $a \leq 1$, maka $x = 0$ adalah satu-satunya titik tetap nonnegatif. Titik ini stabil untuk $a < 1$. Jika $a = 1$, titik tersebut nonhiperbolik: pada ruang keadaan fisik $x \in [0, 1]$ ia menarik dari kanan, sedangkan pada garis real ia hanya menarik dari satu sisi. Untuk $a > 1$, terdapat dua titik tetap, $x = 0$ dan $x = 1 - 1/a$. Analisis kestabilan linear menunjukkan bahwa $x = 0$ kini tak stabil karena $a > 1$, dan bahwa $x = 1 - 1/a$ stabil secara linear jika $a < 3$ serta tak stabil jika $a > 3$ (lihat latihan). Eksplorasi numerik dinamika persamaan beda $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ mengungkap adanya atraktor yang kian kompleks saat a diperbesar, seperti siklus periode dua (misalnya pada $a = 3.2$), siklus periode empat (misalnya pada $a = 3.5$), dan siklus periode delapan (misalnya pada $a = 3.55$). Bahkan, terjadi kaskade *penggandaan periode* ketika a diperbesar, dan dinamikanya memasuki keadaan kacau di sekitar $a = 3.57$.

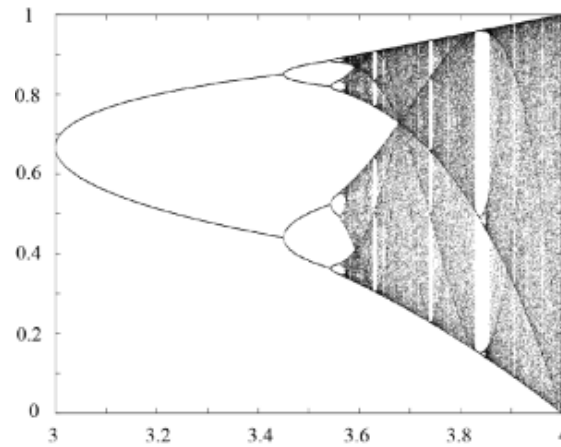


Gambar 5.5. Diagram bifurkasi peta logistik. [Deskripsi Gambar](#)

Gambar 5.5 menunjukkan *diagram bifurkasi* peta logistik. Seperti disebutkan di atas, untuk nilai a tertentu, iterasi f secara berurutan konvergen menuju suatu atraktor, misalnya titik tetap, siklus periode dua, atau struktur yang jauh lebih rumit. Diagram bifurkasi f merepresentasikan atraktor ini sebagai fungsi a . Diagram tersebut diperoleh secara numerik dengan memplot himpunan titik

$$\{x_k, k_{\min} < k < k_{\max}\},$$

untuk nilai-nilai a yang berbeda. Di sini, kondisi awalnya adalah suatu titik $x_0 \in (0, 1)$, misalnya $x_0 = 1/2$; $k_{\min}$ cukup besar agar dinamika sudah cukup dekat dengan atraktornya setelah $k_{\min}$ iterasi; dan $k_{\max}$ bergantung pada daya komputasi yang tersedia. Diagram bifurkasi pada Gambar 5.5 dihitung dengan $k_{\min} = 1500$ dan $k_{\max} = 1700$.



Gambar 5.6. Diagram bifurkasi peta logistik, untuk $3 \leq a \leq 4$. [Deskripsi Gambar](#)

Pembesaran untuk $3 \leq a \leq 4$ ditunjukkan pada Gambar 5.6. Siklus berperiode 2, 4, dan 8 tampak jelas. Jendela periode 3 dan 6 untuk nilai a yang lebih besar juga mudah dikenali.

Siklus periode- n dapat dianalisis dengan melihat titik-titik tetap f^n . Tentu saja, ketika n meningkat, pencarian titik-titik tetap tersebut dengan cepat menjadi sulit. Namun, dapat ditunjukkan bahwa semua bifurkasi penggandaan periode terjadi dengan cara serupa yang bersifat universal (lihat artikel P. Couillet & C. Tresser, 1978 **Catatan:** P. Couillet dan C. Tresser, *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation* J. Phys. Colloques **39**, C5: 25-28 (1978) dan M. Feigenbaum, 1980 **Catatan:** Mitchell J. Feigenbaum, *Universal Behavior in Nonlinear Systems*, Los Alamos Science **Summer 1980**, 4-27 (1980)). Untuk uraian sederhana tentang berbagai jenis ketidakstabilan yang terjadi dalam peta logistik dan peta teriterasi lainnya, pembaca dirujuk ke artikel Robert May tahun 1976 berjudul *Simple mathematical models with very complicated dynamics* serta latihan di akhir bab ini.

Pendekatan Kontinu untuk Model Diskret Satu Spesies

Model diskret yang dibahas pada bagian pertama memenuhi

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N(t)R(t).$$

Ketika $\Delta t \rightarrow 0$, hasil bagi beda pada ruas kiri dapat didekati dengan dN/dt , sehingga kita memperoleh pendekatan kontinu berikut

$$\frac{dN}{dt} = R(t)N(t). \quad (5.3)$$

Pendekatan semacam ini bermakna hanya jika N dapat dipandang sebagai fungsi yang dapat didiferensialkan terhadap t . Secara khusus, N harus kontinu. Karena itu, Persamaan (5.3) hanya menjadi model populasi yang masuk akal jika N besar. Dalam kasus model fenomenologis, jika efek stokastik dapat diabaikan dan N mendekati jumlah individu yang sebenarnya, jumlah tersebut seharusnya dekat dengan bilangan bulat $\text{round}(N(t))$ yang paling dekat dengan $N(t)$. Kemungkinan lain ialah mendefinisikan $N(t)$ sebagai kepadatan, misalnya jumlah rata-rata individu per satuan luas permukaan. Atau, $N(t)$ dapat dipandang sebagai nilai harapan dari populasi yang besar. Dalam konteks tersebut, berguna untuk memandang $R(t)\delta t + O(\delta t^2)$ sebagai perubahan bersih per kapita yang diharapkan; besaran ini bukan peluang jika laju bersihnya negatif, sehingga perubahan harapan pada N selama selang waktu kecil antara t dan $t + \delta t$ adalah $R(t)N(t)\delta t + O(\delta t^2)$. Dalam bagian selanjutnya dari catatan ini, kita terutama menggunakan model kontinu sehingga secara implisit mengasumsikan bahwa besaran-besaran yang relevan terdeskripsi secara memadai oleh variabel kontinu.

Model Linear

Jika $R(t) = b - d \equiv r$ dengan b dan d konstan, Persamaan (5.3) berbentuk

$$\frac{dN}{dt} = r N(t) \quad (5.4)$$

dan solusinya adalah $N(t) = \exp(rt)N_0$, dengan N_0 populasi pada $t = 0$. Jika $r > 0$, populasi bertumbuh secara eksponensial; jika $r < 0$, $N(t)$ menyusut menuju nol dan spesies tersebut punah. Dengan demikian, terdapat analogi langsung antara kedua model linear yang diberikan oleh Persamaan (5.1) dan (5.4), yang ditelaah lebih lanjut dalam latihan. Persamaan (5.4) dikenal sebagai *persamaan Malthus dalam waktu kontinu*.

Model Logistik

Sekarang tinjau model logistik, yang diberikan oleh

$$\frac{dN}{dt} = aN(N_c - N),$$

dengan N_c dan a sebagai parameter. Persamaan ini, yang dikenal sebagai *persamaan Verhulst*, dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M(1 - M) \quad (5.5)$$

dengan melakukan perubahan variabel $M = \frac{N}{N_c}$ dan $\lambda = aN_c$. Perhatikan bahwa M tak berdimensi dan $[\lambda] = 1/T$. Kita sebenarnya dapat mengubah skala variabel waktu dan memperoleh model tanpa parameter, tetapi hal itu belum akan kita lakukan sekarang. Solusi Persamaan (5.5) dengan kondisi awal $M(0) = M_0$ dan $M_0 > 0$ adalah

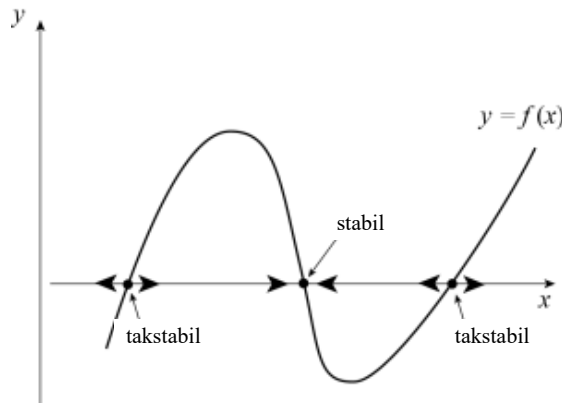
$M(t) = \left[1 + \frac{1-M_0}{M_0} \exp(-\lambda t)\right]^{-1}$, untuk semua nilai parameter λ pada selang keberadaan solusi. Ketika $t \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 1$ jika $\lambda > 0$ untuk semua nilai positif M_0 . Kasus $M_0 = 0$ merupakan kesetimbangan tersendiri dan solusinya tetap nol. Dalam variabel asal, kita memiliki $N \rightarrow N_c$. Besaran N_c disebut *daya dukung* lingkungan. Besaran ini berkaitan dengan keadaan kesetimbangan tempat jumlah kematian mengimbangi jumlah kelahiran sehingga populasi dapat dipertahankan di tengah sumber daya yang terbatas. Jika $\lambda < 0$, maka $M \rightarrow 0$ jika $M_0 < 1$, dan $M \rightarrow \infty$ ketika $t \rightarrow t^*$, dengan $t^* = \frac{1}{-\lambda} \ln\left(\frac{M_0}{M_0-1}\right)$, jika $M_0 > 1$. Dalam kasus ini, solusi tersebut divergen dalam waktu berhingga. Dinamika M bersifat monoton untuk semua nilai λ , sehingga sama sekali berbeda dari dinamika peta logistik diskret, yang dapat memperlihatkan kekacauan.

Model Otonom Umum

Secara lebih umum, tinjau persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad (5.6)$$

dengan f sebagai fungsi nonlinear dari N . Dalam konteks dinamika populasi, $f(N)$ disebut *laju pertumbuhan bersih populasi*. Besaran ini sering ditulis sebagai $f(N) = NR(N)$, dengan $R(N)$ sebagai *laju pertumbuhan bersih per kapita populasi*. Karena ruas kanan Persamaan (5.6) tidak bergantung pada t , persamaan diferensial ini disebut *otonom*.



Gambar 5.7. Titik-titik tetap Persamaan (5.6) adalah nilai N tempat grafik $f(N)$ memotong sumbu x . Kestabilan titik tetap N_c dapat disimpulkan dari perilaku $f(N)$ di dekat $N = N_c$. [Deskripsi Gambar](#)

Titik tetap N_c dari (5.6) diberikan oleh $f(N_c) = 0$, dan dapat diperoleh secara grafis dengan melihat tempat grafik f memotong sumbu horizontal. Kestabilan *nonlinear* titik-titik tetap ini juga dapat dinilai secara grafis. Periksalah tanda $f(N)$ pada kedua sisi $N = N_c$; nol bermultiplikitas genap tidak harus disertai perubahan tanda. Kita mengetahui bahwa jika $f(N) > 0$ untuk $N < N_c$, maka N akan bertumbuh menuju N_c , sedangkan jika $f(N) < 0$ untuk $N > N_c$, maka N akan menjauh dari N_c . Karena itu, kestabilan setiap titik tetap N_c dari f dapat disimpulkan dengan menambahkan panah pada sumbu horizontal: panah mengarah ke kiri ketika f negatif dan ke kanan ketika f positif. Titik tetap stabil N_c memiliki panah yang mengarah kepadanya dari kedua sisi, sedangkan titik tetap tak stabil dikaitkan dengan panah yang menjauh darinya. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 5.7.

Model Diskret dengan Distribusi Umur

Model dengan distribusi umur menjelaskan jumlah individu dalam setiap kelompok umur suatu populasi dan memungkinkan perbedaan laju kelahiran dan kematian antarsubkelompok diperhitungkan. Sebagai contoh, perhatikan model tiga kelompok, dengan $N_1(t)$ menyatakan jumlah anak-anak pada waktu t ; $N_2(t)$ menyatakan jumlah orang dewasa usia subur, dan $N_3(t)$ menyatakan jumlah orang dewasa yang lebih tua. Sistem persamaan beda sederhana yang menggambarkan dinamika populasi tersebut adalah sebagai berikut,

$$N_1(t + \Delta t) = N_1(t) + b_2 N_2(t) \Delta t - d_1 N_1(t) \Delta t - g_1 N_1(t) \Delta t$$

$$N_2(t + \Delta t) = N_2(t) + g_1 N_1(t) \Delta t - d_2 N_2(t) \Delta t - g_2 N_2(t) \Delta t$$

$$N_3(t + \Delta t) = N_3(t) + g_2 N_2(t) \Delta t - d_3 N_3(t) \Delta t,$$

di mana d_i adalah laju kematian per kapita kelompok i , g_i adalah laju perpindahan individu yang bertahan hidup dari kelompok i (atau, $g_i \Delta t$ menyatakan peluang bahwa seorang individu dalam kelompok i akan berpindah ke kelompok $i + 1$ selama Δt), dan b_2 adalah laju kelahiran per kapita pada kelompok 2. Selang waktu Δt dapat berupa satu tahun atau lima tahun untuk populasi manusia. Selang tersebut harus lebih pendek daripada skala waktu khas sistem yang dimodelkan, misalnya waktu yang diperlukan seorang anak untuk menjadi dewasa atau waktu yang diperlukan seorang dewasa muda untuk berpindah ke kelompok 3.

Sistem di atas bersifat linear sehingga dapat ditulis kembali dengan mudah sebagai persamaan beda bagi vektor $\vec{C} = (N_1, N_2, N_3)^T$, yaitu

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}(t + \Delta t) = A \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}(t), \quad (5.7)$$

dengan $A = \begin{pmatrix} 1 - (d_1 + g_1)\Delta t & b_2\Delta t & 0 \\ g_1\Delta t & 1 - (d_2 + g_2)\Delta t & 0 \\ 0 & g_2\Delta t & 1 - d_3\Delta t \end{pmatrix}$. Matriks A memiliki entri konstan dan taknegatif jika laju-lajunya taknegatif

serta $(d_1 + g_1)\Delta t \leq 1$, $(d_2 + g_2)\Delta t \leq 1$, dan $d_3\Delta t \leq 1$. Karena matriks ini memuat retensi pada diagonal dan kelas tahap, bentuknya lebih tepat disebut *matriks proyeksi kelas tahap bertipe Lefkovich* daripada matriks Leslie klasik. Kita dapat mencari solusi Persamaan (5.7) dalam bentuk $\vec{C}(t_0 + m\Delta t) = r^m \vec{C}(t_0)$, dengan t_0 sebagai suatu waktu awal.

Substitusi bentuk ini ke dalam Persamaan (5.7) menghasilkan $A\vec{C}(t_0) = r\vec{C}(t_0)$, yakni $\vec{C}(t_0)$ merupakan vektor eigen A dengan nilai eigen r . Jika matriks A dapat didiagonalkan, solusi umum Persamaan (5.7) dapat ditulis sebagai

$$\vec{C}(m\Delta t) = a_1 r_1^m \vec{C}_1 + a_2 r_2^m \vec{C}_2 + a_3 r_3^m \vec{C}_3,$$

di mana $\vec{C}_i$ adalah tiga vektor eigen A yang bebas linear, dengan nilai eigen terkait r_i , sedangkan a_i adalah koefisien yang ditentukan oleh kondisi awal $\vec{C}(0) = \vec{C}_0$, dengan $\vec{C}_0$ diketahui. Perhatikan bahwa karena A memiliki entri riil, semua nilai eigennya riil atau terdiri atas satu nilai eigen riil dan sepasang nilai eigen kompleks konjugat. Dalam kasus terakhir, dua dari $\vec{C}_i$, misalnya $\vec{C}_2$ dan $\vec{C}_3$, juga saling konjugat kompleks, dan kondisi awal riil menghasilkan $a_3 = a_2^*$, dengan tanda bintang menyatakan konjugasi kompleks. Dinamika Persamaan (5.7) bergantung pada letak nilai-nilai eigen A di bidang kompleks relatif terhadap lingkaran satuan. Memang, jika $|r_i| > 1$, pertumbuhan eksponensial akan teramati pada arah $\vec{C}_i$, dengan pertumbuhan tercepat—dan karena itu dominan—sepanjang arah eigen yang terkait dengan nilai eigen utama A . Sebaliknya, jika semua nilai eigen A bermodulus kurang dari 1, maka $\vec{C}(m\Delta t)$ akan menuju nol. Perilaku yang lebih kompleks, termasuk kekacauan, dapat teramati jika efek nonlinear diperhitungkan.

Model LPA

Bergantung pada jenis spesies yang populasinya dimodelkan, mungkin perlu dipertimbangkan efek lain selain kelahiran dan kematian. Sebagai ilustrasi, kini kita membahas model yang dikembangkan oleh R.F. Costantino dan rekan-rekannya **Catatan:** R.F. Costantino, J.M. Cushing, B. Dennis, and R.A. Desharnais, [Experimentally induced transitions in the dynamics behaviour of insect populations](#), Nature **375**, 227-230 (1995). **Catatan:** R.F. Costantino, R.A. Desharnais, J.M. Cushing, and B. Dennis, [Chaotic dynamics in an insect population](#), Science **275**, 389-391 (1997). **Catatan:** J.M. Cushing, R.F. Costantino, B. Dennis, R.A. Desharnais, and S.M. Henson, [Nonlinear population dynamics: models, experiments and data](#), J. Theor. Biol. **194**, 1-9 (1998). untuk populasi kumbang tepung, yang individunya diketahui memakan keturunannya sendiri. Tahap-tahap perkembangan kumbang adalah larva, pupa, dan dewasa. Jika Δt dipilih (sekitar 2 minggu untuk kumbang tepung) agar sama dengan waktu rata-rata yang diperlukan larva untuk menjadi pupa dan pupa untuk menjadi dewasa reproduktif, maka, dengan mengukur waktu dalam satuan Δt dan tanpa kanibalisme, diperoleh

$$\begin{cases} L(t+1) = bA(t), \\ P(t+1) = L(t) - d_l L(t), \\ A(t+1) = A(t) - d_a A(t) + P(t), \end{cases}$$

di mana konstanta positif d_l dan d_a adalah peluang kematian larva dan dewasa selama selang Δt ($= 1$), parameter $b > 0$ adalah banyaknya rata-rata telur per individu dewasa yang menetas selama Δt , dan kematian pada tahap pupa diabaikan.

Kanibalisme telur oleh kumbang dewasa dan larva masing-masing dimodelkan melalui faktor perkalian berbentuk $\exp(-c_{ea}A(t))$ dan $\exp(-c_{el}L(t))$, sedangkan kanibalisme pupa oleh kumbang dewasa dinyatakan dengan $\exp(-c_{pa}A(t))$ (lihat artikel Costantino et al. dan Cushing et al. yang disebutkan di atas). Di sini, konstanta c_{ea} , c_{el} , dan c_{pa} semuanya positif. Suku-suku eksponensial menyatakan proporsi telur atau pupa yang bertahan hidup hingga tahap perkembangan berikutnya dan dapat dipahami sebagai berikut. Kumbang pada tahap merayap (larva dan dewasa) bergerak di dalam tepung dan dapat berjumpa dengan individu pada tahap tak bergerak, seperti telur dan pupa. Ketika hal itu terjadi, larva atau kumbang dewasa yang bergerak akan menggigit telur atau pupa tersebut sehingga membunuhnya. Kita mengasumsikan bahwa larva hanya membunuh telur karena pupa lebih besar daripada larva. Misalkan peluang seekor kumbang dewasa menjumpai satu telur selama selang waktu Δt diberikan oleh $p\Delta t$, dengan p

konstan. Maka, peluang telur tersebut belum dimakan oleh kumbang dewasa ini pada akhir Δt adalah $1 - p\Delta t$, dan peluang telur ini (atau telur lainnya) menjadi larva adalah $(1 - p\Delta t)^{A(t)}$ karena terdapat $A(t)$ kumbang dewasa. Jadi, jika telur hanya dimakan oleh kumbang dewasa, kita akan menuliskan

$$\begin{aligned} L(t + \Delta t) &= bA(t)(1 - p\Delta t)^{A(t)} \\ &= bA(t)\exp(A(t)\ln(1 - p\Delta t)) = bA(t)\exp(-c_{ea}A(t)), \end{aligned}$$

di mana $c_{ea} = -\ln(1 - p\Delta t)$. Dengan penalaran serupa, fakta bahwa telur juga dimakan oleh larva diperhitungkan dengan mengalikan ruas kanan persamaan di atas dengan $\exp(-c_{el}L(t))$. Dengan demikian, *model LPA deterministik* (LPA menyingkat istilah Inggris Larva, Pupa, Adult, yakni larva, pupa, dan dewasa), yang mencakup kanibalisme pupa dan telur oleh kumbang dewasa serta kanibalisme telur oleh larva, dituliskan sebagai

$$\begin{cases} L(t + 1) = bA(t)\exp(-c_{ea}A(t) - c_{el}L(t)), \\ P(t + 1) = L(t) - d_l L(t), \\ A(t + 1) = A(t) - d_a A(t) + P(t)\exp(-c_{pa}A(t)). \end{cases}$$

Ulasan mengenai sifat-sifat dinamik model LPA dapat ditemukan dalam artikel Jim Cushing *et al.* tahun 1998 yang berjudul [Nonlinear population dynamics: models, experiments and data](#). Secara khusus, dapat ditunjukkan bahwa lintasan model LPA yang bermula di oktan taknegatif akan tetap taknegatif. Selain itu, ketika suku stokastik ditambahkan ke persamaan-persamaan di atas, prediksi model yang dihasilkan—termasuk perilaku yang konsisten dengan dinamika kacau—menunjukkan kesesuaian yang sangat baik dengan eksperimen.

Ringkasan

Bab ini membahas model diskret dan kontinu untuk dinamika satu spesies. Pertama-tama, kita memperkenalkan pertumbuhan eksponensial dalam konteks pencacahan elang ekor-merah di Amerika Serikat oleh Audubon Society dan menambahkan saturasi nonlinear ke model terkait. Selanjutnya, kita membahas titik tetap dan siklus periodik pada pemetaan nonlinear satu dimensi serta melihat bahwa persamaan beda nonlinear sederhana, seperti peta logistik, dapat memiliki dinamika yang sangat kompleks dan memperlihatkan kekacauan. Kita juga mendeskripsikan model populasi linear dan nonlinear dengan kelompok umur. Salah satu contoh model nonlinear tersebut adalah model LPA, yang versi stokastiknya memberikan representasi akurat atas hasil pengamatan eksperimen. Terakhir, kita memperkenalkan model kontinu sebagai hampiran model diskret, membahas kestabilan global titik-titik tetapnya, dan menunjukkan bahwa persamaan diferensial biasa otonom reguler satu dimensi dan aliran otonom planar dua dimensi dengan solusi unik memiliki dinamika yang jauh lebih terbatas. Secara khusus, sistem-sistem tersebut tidak dapat memperlihatkan atraktor kacau.

Metode dan teknik yang diperkenalkan dalam bab ini dapat diperumum ke situasi yang lebih kompleks. Latihan-latihan berikut membahas model dengan distribusi umur kontinu, tundaan dan pemanenan, serta perkembangan populasi Amerika Serikat.

Deskripsi Gambar

Gambar 5.1: Grafik garis yang menunjukkan "Jumlah burung" selama rentang "Tahun". Populasi tampak tetap mendekati nol selama 40 tahun pertama, lalu mengalami pertumbuhan cepat menyerupai pertumbuhan eksponensial dan mencapai puncak sekitar 60.000 burung pada tahun ke-100. Garisnya "berisik" (bergerigi), yang menunjukkan fluktuasi dari tahun ke tahun sembari mempertahankan kecenderungan naik yang jelas. [[Kembali ke Gambar 5.1](#)]

Gambar 5.2: Grafik garis yang menunjukkan "Laju perubahan ternormalisasi" dengan sumbu horizontal berlabel "Tahun" yang membentang sedikit lebih dari 100 tahun. Grafik memperlihatkan volatilitas tinggi dan lonjakan besar selama 45 tahun pertama, diikuti oleh fluktuasi yang jauh lebih kecil dan stabil seiring berjalannya waktu. [[Kembali ke Gambar 5.2](#)]

Gambar 5.3: Diagram pencar dengan garis regresi linear yang menunjukkan hubungan antara $N(t)$ pada sumbu horizontal dan $N(t + 1)$ pada sumbu vertikal. Titik-titik data (lingkaran biru) berkelompok rapat di dekat titik asal (0,0) dan makin tersebar ketika populasi bertambah. Titik-titik tersebut mengikuti kecenderungan linear naik yang kuat dan

berada dekat dengan garis merah tak terputus yang melalui titik asal. Besar fluktuasi di sekitar garis kecenderungan meningkat seiring dengan $N(t)$. [[Kembali ke Gambar 5.3](#)]

Gambar 5.4: Diagram jaring laba-laba yang menunjukkan fungsi $y = f(x)$ dan garis identitas $y = x$. Garis bertangga merah (jaring laba-laba) bermula di N_0 dan berpilin ke dalam menuju titik tetap stabil N_s . Titik tetap tak stabil N_u juga ditampilkan pada perpotongan yang lebih tinggi. [[Kembali ke Gambar 5.4](#)]

Gambar 5.5: Diagram bifurkasi yang menampilkan parameter a pada sumbu horizontal (dari 0.5 hingga 4) dan keadaan jangka panjang suatu sistem pada sumbu vertikal (dari 0 hingga 1). Satu kurva muncul pada $a = 1$, naik dengan mulus, lalu mulai membentuk serangkaian cabang penggandaan periode pada $a = 3$ sebelum memasuki kawasan kacau yang rapat di ujung kanan. [[Kembali ke Gambar 5.5](#)]

Gambar 5.6: Diagram bifurkasi yang menampilkan parameter a pada sumbu horizontal (dari 3 hingga 4) dan keadaan jangka panjang suatu sistem pada sumbu vertikal (dari 0 hingga 1). Diagram menunjukkan dua cabang di sebelah kiri yang bersesuaian dengan titik periode dua. Ketika a meningkat, setiap cabang terpecah menjadi dua cabang (penggandaan periode), dan masing-masing cabang kemudian terpecah lagi menjadi dua cabang baru untuk nilai a yang sedikit lebih tinggi. Proses ini berulang hingga grafik menampilkan kawasan gelap dan rapat yang mewakili perilaku kacau, dengan "jendela-jendela" kestabilan yang berselang-seling. [[Kembali ke Gambar 5.6](#)]

Gambar 5.7: Diagram kestabilan untuk sistem satu dimensi yang menunjukkan fungsi $f(x)$ memotong sumbu x di tiga titik tetap. Titik tengah merupakan kesetimbangan stabil, yang ditandai dengan kemiringan negatif dan panah-panah pada sumbu yang mengarah kepadanya. Kedua titik luar merupakan kesetimbangan tak stabil, yang ditandai dengan kemiringan positif dan panah-panah yang menjauhinya. [[Kembali ke Gambar 5.7](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Asumsikan bahwa suatu populasi tumbuh mengikuti $N(t+1) = \kappa N(t)$, $\kappa > 1$.

1. Berapa lama waktu yang diperlukan agar jumlah individu menjadi dua kali lipat?
2. Perkirakan nilai κ dari Gambar 5.1 pada selang pencocokan 1950–1995, yang menunjukkan jumlah elang ekor-merah di Amerika Serikat sebagai fungsi waktu.
3. Apakah perkiraan Anda untuk κ cukup selaras dengan nilai $\kappa = 1.025$ yang diperoleh dari Gambar 5.3?

Soal 2

Perhatikan model kontinu $\frac{dN}{dt} = rN$, $r > 0$.

1. Berapa lama waktu yang diperlukan agar N menjadi dua kali lipat?
2. Jika model ini merupakan hampiran persamaan beda berbentuk $N(t + \Delta t) = \kappa N(t)$, apa hubungan antara κ dan r ?
3. Berapa lama waktu yang diperlukan sistem yang dideskripsikan oleh model diskret untuk menggandakan populasinya?
4. Apakah model diskret lebih cepat atau lebih lambat daripada hampiran kontinunya? Bedakan korespondensi beda-maju dari pencuplikan eksak, dan gunakan korespondensi beda-maju untuk perbandingan cepat atau lambat.

Soal 3

Perhatikan model kontinu $\frac{dN}{dt} = r(N)N$, dengan $r(N)$ merupakan fungsi linear dari N : $r(N) = aN + b$.

1. Bagaimana seharusnya tanda a dan b jika kita menginginkan populasi bertumbuh untuk nilai N yang kecil dan mencapai saturasi untuk nilai N yang besar?
 2. Perubahan variabel apa yang harus dilakukan untuk mengubah model ini menjadi Persamaan (5.5)?
-

Soal 4

Tentukan titik tetap taktrivial dari peta logistik

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \equiv f(x_n), 0 < a < 4.$$

1. Tunjukkan bahwa titik tetap ini menjadi tak stabil ketika $a > 3$.
 2. Tunjukkan bahwa begitu titik tetap ini menjadi tak stabil, siklus periode dua pada pemetaan mulai muncul. Petunjuk: carilah titik tetap f^2 .
 3. Tentukan nilai a ketika siklus periode dua ini menjadi tak stabil.
 4. Periksa jawaban Anda dengan membandingkannya terhadap diagram bifurkasi pada Gambar 5.6.
-

Soal 5

Selesaikan persamaan beda $x(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x(t)$, dengan $X(t)$ memiliki dua komponen: $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Asumsikan kondisi awalnya adalah $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0$.

Soal 6

Perhatikan persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)$.

1. Apa saja titik tetap dinamikanya?
 2. Apakah titik-titik tersebut stabil atau tak stabil?
-

Soal 7

Perhatikan persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = x^2(x-1)$.

1. Apa saja titik tetap dinamikanya?
 2. Apakah titik-titik tersebut stabil atau tak stabil?
-

Soal 8

Tinjau persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = a + x^2(x-1) \equiv f(x), a \in \mathbb{R}$.

1. Buatlah plot $f(x)$ sebagai fungsi x . Apa yang terjadi ketika a berubah?
 2. Tanpa melakukan perhitungan, sketsakan perilaku titik-titik tetap sebagai fungsi a .
 3. Tunjukkan kestabilan setiap titik tetap pada diagram bifurkasi dalam pertanyaan (2).
 4. Tetapkan nilai +1 untuk setiap titik tetap stabil dan nilai -1 untuk setiap titik tetap tak stabil. Untuk setiap nilai a , definisikan fungsi $g(a)$ sebagai jumlah indeks yang berkaitan dengan titik-titik tetap yang ada untuk nilai a tersebut. Sketsakan grafik g sebagai fungsi a . Apa yang Anda amati? Pada nilai kritis $a = 0$ dan $a = 4/27$, klasifikasikan titik tetap ganda sebagai nonhiperbolik, bukan memaksanya ke dalam pilihan stabil atau tak stabil.
-

Soal 9

Tinjau model populasi dengan umur a sebagai variabel bebas kontinu. Definisikan distribusi umur $M(a, t)$ sedemikian sehingga jumlah individu yang berumur antara a_1 dan a_2 pada waktu t diberikan oleh

$$\int_{a_1}^{a_2} M(a, t) da.$$

Tunjukkan bahwa dinamika M dideskripsikan oleh persamaan diferensial parsial berikut, yang dikenal sebagai persamaan diferensial parsial *McKendrick* atau *von Foerster*,

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial a} = -d(a)M,$$

dengan fungsi mortalitas $d(a)$ menyatakan laju kematian per kapita individu berumur a .

Soal 10

Gunakan metode karakteristik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial McKendrick yang diturunkan dalam Soal 9. Nyatakan solusi dalam bentuk data awal $M(a, 0) = M_0(a)$ dan syarat batas kelahiran $M(0, t) = B(t)$.

Soal 11

Tinjau model LPA yang dijelaskan dalam bab ini. Apa saja dimensi parameter ($b, c_{ea}, c_{el}, c_{pa}, d_a, d_l$) yang muncul dalam model tersebut?

Soal 12

Tulislah model yang menggambarkan situasi serupa dengan situasi pada model LPA (dengan kanibalisme), tetapi waktu yang dibutuhkan pupa untuk menjadi dewasa dua kali lebih lama daripada waktu yang dibutuhkan larva untuk menjadi pupa.

Soal 13

Tulislah model yang menggambarkan populasi dengan dua subkelompok, individu juvenil dan dewasa, dengan individu dewasa memakan sebagian telurnya sendiri. Anda dapat menggunakan suku eksponensial yang serupa dengan suku dalam model LPA untuk menggambarkan kanibalisme.

Soal 14

Tinjau model berikut,

$$\begin{cases} J(t + \Delta t) = bA(t)\exp(-cA(t)), \\ A(t + \Delta t) = (1 - d_J)J(t) + (1 - d_A)A(t), \end{cases}$$

dengan $b > 0$, $c > 0$, dan $0 \leq d_J, d_A \leq 1$ sebagai parameter.

1. Jelaskan dengan kata-kata suatu situasi yang dimodelkan oleh persamaan-persamaan di atas.
 2. Dalam kondisi apa model ini memiliki titik tetap nontrivial? Apa makna biologis kondisi tersebut?
 3. Bahas kestabilan titik-titik tetap model ini.
-

Soal 15

Bacalah artikel R. May berjudul [Simple mathematical models with complicated dynamics](#), kemudian bahas (yaitu jelaskan, beri pembedaan, uraikan rinciannya, atau buktikan) pernyataan-pernyataan berikut yang terdapat dalam artikel tersebut.

1. Halaman 460, kolom kiri, di atas Persamaan (3): "Dengan menuliskan $X = bN/a$, persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk kanonis $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$."
2. Halaman 460, kolom kiri, bagian bawah: "Jika X pernah melampaui satu, iterasi-iterasi berikutnya divergen menuju $-\infty$."
3. Halaman 460, kolom kanan, di bawah Persamaan (6): "Selama kemiringan ini berada di antara 45° dan -45° ... titik kesetimbangan X^* setidaknya akan stabil secara lokal."
4. Halaman 461, kolom kiri, di bawah Persamaan (9): "Jelas bahwa titik kesetimbangan X^* dari Persamaan (5) merupakan solusi Persamaan (9)."
5. Persamaan (10): $\lambda^{(2)}(X^*) = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2$.
6. Halaman 461, kolom kiri, bagian bawah: "Ketika hal ini terjadi, kurva $F^{(2)}(X)$ harus membentuk sebuah 'gelung', dan muncul dua titik tetap baru berperiode 2."
7. Halaman 461, kolom kiri, bagian bawah: "Kemiringan ini mudah ditunjukkan bernilai sama di kedua titik dan, secara lebih umum, bernilai sama di semua k titik pada siklus periode k ."
8. Bagian bawah halaman 461 dan awal halaman 462: "... hingga akhirnya muncul siklus tiga titik (pada $a = 3.8284...$ untuk persamaan (3))."
9. Halaman 462, kolom kanan, bagian bawah: "Siklus periode 3 ini tidak pernah stabil."
10. Halaman 462, kolom kanan, bagian bawah: "Ketika $F(X)$ terus menjadi semakin curam, kemiringan $\lambda^{(3)}$ untuk siklus tiga titik yang mula-mula stabil ini menurun melewati -1; siklus tersebut menjadi tak stabil dan, melalui proses bifurkasi, menghasilkan ... siklus-siklus stabil berperiode 6, 12, 24, ..., 3×2^n ."
11. Gambarkan ilustrasi konsep bifurkasi tangen dan bifurkasi garpu rumpit (lihat halaman 463, bagian atas kolom kiri).
12. Halaman 464, kolom kanan, bagian atas: "... kemiringan peta yang diiterasikan k kali, $F^{(k)}$, di setiap titik pada siklus periode k sama dengan hasil kali kemiringan $F(X)$ di setiap titik X_k^* pada siklus ini."
13. Halaman 465, kolom kiri, bagian bawah: "... ketika setiap pasangan siklus baru lahir melalui bifurkasi tangen (lihat Gbr. 5), salah satunya mula-mula stabil karena bukit dan lembah yang membulat halus memotong garis 45° dengan cara tersebut."
14. Halaman 466, kolom kanan, bagian bawah: "... dalam sistem kontinu dua dimensi ... lintasan dinamis tidak dapat saling berpotongan."

Soal 16

Tujuan soal ini adalah mengeksplorasi perubahan menyeluruh pada populasi Amerika Serikat. [Biro Sensus Amerika Serikat](#) menyimpan berkas ([popclockest.txt](#)) yang memuat perkiraan populasi nasional antara 1900 dan 1999. Gunakan salinan lokal terverifikasi dari himpunan data ini dalam buku catatan Python terbuka pendamping. Kemudian, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Buatlah plot populasi Amerika Serikat sebagai fungsi waktu. Apa kesimpulan Anda?
2. Dapatkah pertumbuhan populasi Amerika Serikat dimodelkan dengan persamaan evolusi sederhana berbentuk $N(t+1) = (1+R)N(t)$, dengan t dalam tahun? Mengapa atau mengapa tidak? Jika dapat, perkirakan R .
3. Perkiraan populasi pascasensus diperoleh sebagaimana dijelaskan pada [halaman metodologi Biro Sensus Amerika Serikat](#) (lihat, misalnya, [berkas metodologi untuk edisi 2021](#)). Jelaskan rumus utama yang diberikan pada bagian Ikhtisar artikel tersebut.
4. Berdasarkan perkiraan berikut **Catatan:** Diunduh pada 2005 dari halaman web Biro Sensus Amerika Serikat yang kini sudah dinonaktifkan (<https://www.census.gov/popest/datasets.html>), tentukan populasi Amerika Serikat pada 2004:

1. Populasi pada 2001: 285,102,075.
2. Kelahiran, kematian, dan imigrasi internasional neto:
 - 2001-2002: 4,006,985; 2,429,999; 1,262,159.
 - 2002-2003: 4,055,469; 2,432,874; 1,225,161.
 - 2003-2004: 4,099,399; 2,453,984; 1,221,013.

Soal 17

Tujuan bagian ini adalah mengeksplorasi evolusi populasi Amerika Serikat menggunakan kelompok umur yang berbeda. Perkiraan populasi menurut kelompok umur lima tahunan dari 2010 hingga 2019 dapat diperoleh dari [situs web Biro Sensus Amerika Serikat](#) (setiap tahun memiliki tabel tersendiri).

1. Gunakan informasi ini untuk memplot distribusi umur populasi Amerika Serikat pada tahun-tahun yang berbeda.
 1. Apakah terjadi perubahan besar selama empat tahun terakhir dalam himpunan data ini?
 2. Himpunan data tersebut memiliki 18 kelompok umur. Gunakan distribusi umur yang baru saja Anda plot untuk mendefinisikan kelompok umur yang lebih luas, yang dapat digunakan dalam model sederhana.
2. Dengan menggunakan perkiraan terkini atas laju [kelahiran](#) dan [kematian](#), sebagaimana diterbitkan oleh Pusat Pengendalian dan Pencegahan Penyakit, buatlah model untuk memprediksi populasi dalam kelompok umur yang Anda definisikan, dengan data 2010 sebagai kondisi awal. Anda mungkin ingin memulai dengan Gambar 2 dan 3 dalam dokumen kelahiran dan kematian tersebut. Tabel-tabel di bagian akhir juga mungkin berguna. (Catatan: jangan mencoba mencetak berkas-berkas ini; panjangnya lebih dari 50 halaman!)
 1. Bagaimana perbandingan model Anda dengan perkiraan Biro Sensus untuk 2019?
 2. Gunakan model Anda untuk memprediksi populasi setiap kelompok umur pada 2050. Apa kesimpulan Anda?
 3. Bahas keterbatasan model Anda.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Iterasikan persamaan terlebih dahulu. Untuk perkiraan grafik, pilih dua titik (t_1, N_1) dan (t_2, N_2) pada satu rentang yang tampak mendekati pertumbuhan eksponensial—bukan pada bagian awal yang nyaris nol atau bagian yang sudah jenuh—lalu selesaikan $N_2/N_1 = \kappa^{t_2 - t_1}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi model ialah $N(t) = \kappa^t N(0)$ untuk langkah tahunan. Waktu penggandaan real adalah $t_2 = \ln 2 / \ln \kappa$; waktu lintasan pertama pada kisi waktu bilangan bulat adalah $\lceil \ln 2 / \ln \kappa \rceil$ tahun. Dua pembacaan grafik memberi $\hat{\kappa} = (N_2/N_1)^{1/(t_2 - t_1)}$. Untuk $\kappa = 1,025$, waktu penggandaan real sekitar 28,07 tahun dan lintasan diskret pertama terjadi pada tahun ke-29.

Cek cepat

Perkiraan dari gambar tidak mempunyai satu angka eksak. Jawaban harus menyebut t_1, t_2, N_1, N_2 , memakai rasio geometrik—bukan selisih aritmetis—dan membahas ketidakpastian pembacaan serta perubahan rezim pertumbuhan.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Iterasi berulang menghasilkan deret geometri.

Rumus

$$N(t) = \kappa^t N(0)$$

- **Penjelasan**

Samakan populasi dengan dua kali kondisi awal dan ambil logaritma.

Rumus

$$2N(0) = \kappa^{t_2} N(0) \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{\ln \kappa}$$

- **Penjelasan**

Karena model hanya diamati pada waktu bulat, penggandaan pertama yang benar-benar teramati menggunakan fungsi plafon.

Rumus

$$m_{\text{dua}} = \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln \kappa} \right\rceil$$

- **Penjelasan**

Perkiraan grafik dari dua titik harus menormalkan pertumbuhan terhadap panjang selang waktu.

Rumus

$$\hat{\kappa} = \exp\left(\frac{\ln N_2 - \ln N_1}{t_2 - t_1}\right)$$

Simpulan

Bagian grafik dinilai dari prosedur yang dapat direproduksi, bukan dari kecocokan dengan satu angka yang dipaksakan. Nilai 1,025 bahkan sedikit berada di bawah selang [1,026, 1,029] yang dikutip bab, sehingga perbandingan harus disebut dekat tetapi tidak berada di dalam selang itu.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Selesaikan ODE dengan eksponensial. Untuk hubungan yang dimaksud soal, ganti dN/dt dengan $[N(t + \Delta t) - N(t)]/\Delta t$. Ketika membandingkan waktu, gunakan $\ln(1 + x) < x$ untuk $x > 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Model kontinu memberi $N(t) = N_0 e^{rt}$ dan $T_c = \ln 2/r$. Hampiran beda-maju memberi $\kappa = 1 + r\Delta t$. Waktu penggandaan diskret yang belum dibulatkan ialah $T_d = \Delta t \ln 2 / \ln(1 + r\Delta t)$, sedangkan waktu langkah pertamanya ialah $\Delta t \lceil \ln 2 / \ln(1 + r\Delta t) \rceil$. Karena $\ln(1 + r\Delta t) < r\Delta t$, berlaku $T_d > T_c$: skema diskret beda-maju lebih lambat. Jika model diskret didefinisikan sebagai pencuplikan eksak ODE, $\kappa = e^{r\Delta t}$ dan kedua waktu penggandaan sama.

Cek cepat

Hubungan $\kappa = 1 + r\Delta t$ dan $\kappa = e^{r\Delta t}$ tidak boleh dicampur; yang pertama adalah langkah Euler/bentuk hampiran bab, yang kedua adalah aliran eksak.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Pisahkan variabel pada model kontinu.

Rumus

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad T_c = \frac{\ln 2}{r}$$

- **Penjelasan**

Hampiran beda-maju terhadap turunan menghasilkan pengali satu langkah.

Rumus

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t) \Rightarrow N(t + \Delta t) = (1 + r\Delta t)N(t)$$

- **Penjelasan**

Setelah m langkah, populasi dikalikan $(1 + r\Delta t)^m$.

Rumus

$$m_* = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r\Delta t)}, \quad T_d = m_* \Delta t$$

- **Penjelasan**

Ketaksamaan logaritma menentukan urutan waktu penggandaan.

Rumus

$$\ln(1 + r\Delta t) < r\Delta t \Rightarrow T_d > \frac{\ln 2}{r} = T_c$$

Simpulan

Pertanyaan cepat/lambat mempunyai jawaban hanya setelah hubungan diskret–kontinu ditetapkan. Dalam tafsiran beda-maju yang dimaksud bab, model diskret lebih lambat; dalam pencuplikan eksak, keduanya setara.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Pertumbuhan dekat $N = 0$ ditentukan oleh $r(0) = b$. Kapasitas dukung positif adalah akar nonnol $aN + b = 0$. Gunakan akar itu sebagai skala populasi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Diperlukan $b > 0$ dan $a < 0$. Tetapkan $K = -b/a > 0$, $M = N/K$, dan $\lambda = b$. Karena $aK = -b$, diperoleh $\dot{M} = bM(1 - M) = \lambda M(1 - M)$. Kapasitas dukung dalam variabel asal ialah $N = K$.

Cek cepat

Ketika $0 < N < K$, ruas kanan harus positif; ketika $N > K$, ruas kanan harus negatif.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Agar populasi kecil bertumbuh, laju per kapita pada nol harus positif.

Rumus

$$r(0) = b > 0$$

- **Penjelasan**

Saturasi memerlukan laju per kapita menurun dan mempunyai akar positif.

Rumus

$$a < 0, \quad K = -\frac{b}{a} > 0$$

- **Penjelasan**

Skalikan populasi dengan kapasitas dukung.

Rumus

$$N = KM, \quad K\dot{M} = (aK^2M^2 + bKM)$$

- **Penjelasan**

Gunakan $aK = -b$ dan bagi dengan K .

Rumus

$$\dot{M} = bM(1 - M), \quad \lambda = b$$

Simpulan

Perubahan variabel memisahkan skala populasi K dari skala waktu $1/b$.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Gunakan $f'(x) = a(1 - 2x)$. Setelah memfaktorkan $f^2(x) - x$, buang faktor yang hanya menghasilkan dua titik tetap f ; faktor kuadrat sisanya memberi dua titik siklus. Kestabilan siklus ditentukan oleh hasil kali turunan pada kedua titik.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetap nontrivial ialah $x^* = 1 - 1/a$ dan pengalinya $f'(x^*) = 2 - a$, sehingga stabil untuk $1 < a < 3$ dan takstabil untuk $a > 3$. Dua titik periode dua ialah $x_{\pm} = [a + 1 \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}]/(2a)$, yang menjadi siklus sejati untuk $a > 3$. Pengali satu siklus adalah $f'(x_+)f'(x_-) = -a^2 + 2a + 4$; siklus stabil untuk $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ dan kehilangan kestabilan pada $a = 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949$.

Cek cepat

Pada $a = 3$, $x_+ = x_- = 2/3 = x^*$; pada $a = 1 + \sqrt{6}$, pengali siklus harus tepat -1 .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Pecahkan $f(x) = x$.

Rumus

$$x = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{a}$$

- **Penjelasan**

Uji pengali titik tetap nontrivial.

Rumus

$$f'(x^*) = a(1 - 2x^*) = 2 - a, \quad |2 - a| < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 3$$

- **Penjelasan**

Faktor baru dalam $f^2(x) - x$ menghasilkan pasangan periode dua.

Rumus

$$x_{\pm} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

- **Penjelasan**

Turunan iterasi kedua adalah hasil kali turunan sepanjang siklus.

Rumus

$$(f^2)'(x_{\pm}) = f'(x_+)f'(x_-) = -a^2 + 2a + 4$$

- **Penjelasan**

Selesaikan syarat modulus kurang dari satu pada rentang $a > 3$.

Rumus

$$|-a^2 + 2a + 4| < 1 \Leftrightarrow 3 < a < 1 + \sqrt{6}$$

Simpulan

Hasil ini menjelaskan cabang periode dua pertama pada diagram bifurkasi dan ambang penggandaan periode berikutnya.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Diagonal-kan matriks. Nilai eigennya bilangan bulat kecil; uraikan $(1, 0)^T$ dalam basis vektor eigen sebelum menaikkan matriks ke pangkat t .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Nilai eigen matriks adalah 1 dan 4, dengan vektor eigen yang dapat dipilih $(-2, 1)^T$ dan $(1, 1)^T$. Karena $(1, 0)^T = -\frac{1}{3}(-2, 1)^T + \frac{1}{3}(1, 1)^T$, maka $X(t) = \frac{1}{3}(2 + 4^t, 4^t - 1)^T$.

Cek cepat

Pada $t = 0$, rumus harus memberi $(1, 0)^T$; pada $t = 1$, rumus harus memberi $(2, 1)^T = A(1, 0)^T$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Hitung polinom karakteristik.

Rumus

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

- **Penjelasan**

Pilih satu vektor eigen untuk setiap nilai eigen.

Rumus

$$v_1 = (-2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Uraikan kondisi awal.

Rumus

$$X(0) = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_4$$

- **Penjelasan**

Kalikan setiap komponen eigen dengan pangkat nilai eigennya.

Rumus

$$X(t) = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{4^t}{3}v_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^t \\ 4^t-1 \end{pmatrix}$$

Simpulan

Komponen pada eigendireksi $\lambda = 4$ mendominasi pertumbuhan jangka panjang.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Akar ruas kanan adalah titik tetap. Untuk akar sederhana x_c , tanda $f'(x_c)$ menentukan kestabilan: negatif stabil, positif takstabil.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetapnya $x = 0, 1, 2$. Dengan $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, diperoleh $f'(0) = 2$, $f'(1) = -1$, dan $f'(2) = 2$. Jadi $x = 1$ stabil asimtotik, sedangkan $x = 0$ dan $x = 2$ takstabil.

Cek cepat

Diagram tanda harus berurutan: $f < 0$ pada $(-\infty, 0)$, $f > 0$ pada $(0, 1)$, $f < 0$ pada $(1, 2)$, dan $f > 0$ pada $(2, \infty)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Titik tetap adalah akar polinom.

Rumus

$$x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_c \in \{0, 1, 2\}$$

- **Penjelasan**

Diferensialkan medan vektor.

Rumus

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

- **Penjelasan**

Evaluasi turunan pada tiap akar sederhana.

Rumus

$$f'(0) = 2 > 0, \quad f'(1) = -1 < 0, \quad f'(2) = 2 > 0$$

Simpulan

Panah fase menjauh dari 0 dan 2 serta menuju 1 dari kedua sisi.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Uji turunan bekerja langsung pada akar sederhana $x = 1$, tetapi tidak memutuskan akar ganda $x = 0$. Untuk nol, periksa tanda $x^2(x - 1)$ di kiri dan kanan secara terpisah.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetapnya $x = 0$ dan $x = 1$. Titik $x = 1$ takstabil karena $f'(1) = 1 > 0$. Di sekitar $x = 0$, $f(x) < 0$ pada kedua sisi: lintasan dari kanan bergerak menuju 0, sedangkan lintasan dari kiri bergerak menjauh ke kiri. Jadi $x = 0$ semistabil—menarik dari kanan dan menolak dari kiri—dan tidak stabil dalam pengertian Lyapunov pada seluruh garis real.

Cek cepat

Jawaban yang hanya memakai $f'(0) = 0$ belum selesai; nilai turunan nol membuat uji linear tidak konklusif.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Faktorisasi langsung memberi satu akar ganda dan satu akar sederhana.

Rumus

$$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

- **Penjelasan**

Akar sederhana diuji melalui turunan.

Rumus

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f'(1) = 1 > 0$$

- **Penjelasan**

Untuk $x < 0$ maupun $0 < x < 1$, faktor x^2 positif dan $x - 1$ negatif.

Rumus

$$f(x) < 0 \text{ pada } (-\infty, 0) \text{ dan } (0, 1)$$

Simpulan

Contoh ini menunjukkan mengapa titik nonhiperbolik tidak boleh otomatis disebut stabil marginal hanya karena $|f'|$ berada pada batas uji linear.

Dukungan untuk Soal 8

Petunjuk

Tulis $f(x) = x^3 - x^2 + a$. Titik balik grafik terhadap x tidak bergantung pada a : selesaikan $f_x = x(3x - 2) = 0$, lalu lihat kapan nilai maksimum di $x = 0$ dan minimum di $x = 2/3$ menyentuh sumbu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Bifurkasi terjadi pada $a = 0$ dan $a = 4/27$. Untuk $a < 0$ ada satu titik tetap takstabil; untuk $0 < a < 4/27$ ada tiga titik tetap dengan urutan takstabil–stabil–takstabil dari kiri ke kanan; untuk $a > 4/27$ kembali ada satu titik takstabil. Karena itu $g(a) = -1$ pada semua rentang hiperbolik. Pada $a = 0$, $x = 0$ adalah akar ganda semistabil; pada $a = 4/27$, $x = 2/3$ adalah akar ganda semistabil. Aturan $+1/-1$ dalam soal tidak mendefinisikan g tepat pada dua nilai tersebut kecuali konvensi tambahan diberikan.

Cek cepat

Nilai ekstrem adalah $f(0) = a$ dan $f(2/3) = a - 4/27$. Cabang stabil harus mempunyai $f_x < 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Cari titik stasioner grafik kubik.

Rumus

$$f_x = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2/3$$

- **Penjelasan**

Grafik menyinggung sumbu saat nilai ekstremnya nol.

Rumus

$$f(0) = a = 0, \quad f(2/3) = a - 4/27 = 0$$

- **Penjelasan**

Pada rentang tengah, tiga akar melintasi cabang dengan turunan bertanda positif, negatif, positif.

Rumus

$$0 < a < 4/27: \quad (-1) + (+1) + (-1) = -1$$

- **Penjelasan**

Di luar rentang tengah hanya ada satu akar pada cabang dengan turunan positif.

Rumus

$$a < 0 \text{ atau } a > 4/27: \quad g(a) = -1$$

Simpulan

Jumlah indeks buatan tetap -1 selama semua titik tetap hiperbolik; pasangan stabil–takstabil lahir atau musnah bersama pada bifurkasi pelana-simpul.

Dukungan untuk Soal 9

Petunjuk

Ikuti satu kohort selama selang kecil h : individu yang berumur a pada waktu t berumur $a + h$ pada waktu $t + h$. Samakan perubahan orde pertama distribusi dengan kehilangan mortalitas $d(a)h$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Keseimbangan kohort lokal adalah $M(a + h, t + h) = M(a, t)[1 - d(a)h] + O(h^2)$. Ekspansi Taylor ruas kiri memberi $M + h(M_t + M_a) + O(h^2)$. Setelah mengurangi M , membagi dengan h , dan mengambil $h \rightarrow 0$, diperoleh $M_t + M_a = -d(a)M$. Persamaan ini belum menentukan solusi unik tanpa distribusi awal dan syarat batas kelahiran pada $a = 0$.

Cek cepat

Integrasi terhadap semua umur harus memberi perubahan jumlah total sama dengan kelahiran pada batas umur nol dikurangi integral kematian.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Dalam waktu h , kohort bergeser sejauh h pada sumbu umur dan sebagian kecil meninggal.

Rumus

$$M(a + h, t + h) = M(a, t)(1 - d(a)h) + O(h^2)$$

- **Penjelasan**

Ekspansi Taylor mengikuti arah karakteristik $(da/dt) = 1$.

Rumus

$$M(a + h, t + h) = M(a, t) + hM_t + hM_a + O(h^2)$$

- **Penjelasan**

Samakan suku orde pertama.

Rumus

$$M_t + M_a = -d(a)M$$

- **Penjelasan**

Periksa keseimbangan total untuk $P(t) = \int_0^\infty M(a, t) da$.

Rumus

$$P'(t) = M(0, t) - \int_0^\infty d(a)M(a, t) da$$

Simpulan

Suku transportasi menyatakan penuaan deterministik, sedangkan ruas kanan menyatakan kehilangan karena mortalitas. Kelahiran memasuki model melalui batas $M(0, t)$, bukan melalui ruas kanan interior.

Dukungan untuk Soal 10

Petunjuk

Karakteristik memenuhi $a - t = \text{konstan}$. Telusuri karakteristik dari (a, t) ke belakang: bila $a \geq t$, ia mengenai garis awal $t = 0$; bila $a < t$, ia mengenai batas kelahiran $a = 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $M_0(a) = M(a, 0)$ dan $B(t) = M(0, t)$, solusi ialah $M(a, t) = M_0(a - t)\exp[-\int_{a-t}^a d(s)ds]$ untuk $a \geq t$, dan $M(a, t) = B(t - a)\exp[-\int_0^a d(s)ds]$ untuk $0 \leq a < t$. Diperlukan kompatibilitas $B(0) = M_0(0)$. Tanpa M_0 dan B , perintah sumber tidak mempunyai satu solusi unik.

Cek cepat

Untuk mortalitas konstan $d(a) = d_0$, faktor kelangsungan hidup harus mereduksi menjadi $e^{-d_0 t}$ pada cabang awal dan $e^{-d_0 a}$ pada cabang batas.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Parametrisasikan karakteristik dengan $da/ds = 1$ dan $dt/ds = 1$.

Rumus

$$a - t = \xi$$

- **Penjelasan**

Sepanjang karakteristik, PDE menjadi ODE peluruhan.

Rumus

$$\frac{dM}{ds} = -d(a(s))M$$

- **Penjelasan**

Jika karakteristik mengenai garis awal pada umur $a - t$, integralkan mortalitas selama waktu t .

Rumus

$$a \geq t: \quad M(a, t) = M_0(a - t) \exp \left[- \int_{a-t}^a d(s) ds \right]$$

• Penjelasan

Jika karakteristik lahir pada waktu $t - a$, integralkan mortalitas dari umur nol hingga a .

Rumus

$$0 \leq a < t: \quad M(a, t) = B(t - a) \exp \left[- \int_0^a d(s) ds \right]$$

Simpulan

Dua cabang solusi dipisahkan oleh karakteristik $a = t$; data awal mengatur kohort yang sudah hidup pada $t = 0$, sedangkan data batas mengatur kohort yang lahir sesudahnya.

Dukungan untuk Soal 11

Petunjuk

Argumen fungsi eksponensial harus tak berdimensi. Faktor $1 - d_a$ dan $1 - d_l$ adalah peluang bertahan satu langkah. Bandingkan pula dimensi $L(t + 1)$ dengan $bA(t)$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jika simbol I menyatakan satuan jumlah individu, maka $[c_{ea}] = [c_{el}] = [c_{pa}] = I^{-1}$. Parameter d_a dan d_l adalah peluang kematian per langkah dan tak berdimensi, dengan nilai fisik antara 0 dan 1. Parameter b adalah jumlah larva menetas per dewasa per langkah; secara dimensional rasio jumlah terhadap jumlah, jadi tak berdimensi setelah satu langkah dijadikan satuan waktu. Jika waktu fisik dipertahankan, pelabelannya adalah individu per dewasa per Δt .

Cek cepat

Semua eksponen $-cA$ atau $-cL$ harus tak berdimensi, dan setiap ruas persamaan harus kembali berdimensi jumlah individu.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Eksponen tidak boleh membawa satuan.

Rumus

$$[c_{ea}A] = [c_{el}L] = [c_{pa}A] = 1$$

• Penjelasan

Karena semua variabel keadaan adalah hitungan individu, koefisien kanibalisme berdimensi kebalikan hitungan.

Rumus

$$[c_{ea}] = [c_{el}] = [c_{pa}] = I^{-1}$$

- **Penjelasan**

Koefisien kematian muncul di dalam faktor kelangsungan hidup satu langkah.

Rumus

$$[d_a] = [d_l] = 1, \quad 0 \leq d_a, d_l \leq 1$$

- **Penjelasan**

Koefisien fekunditas mengubah hitungan dewasa menjadi hitungan larva pada langkah berikutnya.

Rumus

$$[b] = I/I = 1 \quad \text{per langkah waktu}$$

Simpulan

Sebutan tak berdimensi tidak menghapus makna biologis per langkah; selalu catat panjang fisik Δt yang diwakili satu iterasi.

Dukungan untuk Soal 12

Petunjuk

Jangan memperlambat semua transisi dengan satu koefisien saja. Pecah pupa menjadi dua kelas berurutan, P_1 dan P_2 , sehingga individu harus melewati dua pembaruan sebelum masuk kelas dewasa.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Salah satu jawaban sah memakai keadaan (L, P_1, P_2, A) : $L_{t+1} = bA_t e^{-c_{ea}A_t - c_{el}L_t}$, $P_{1,t+1} = (1 - d_l)L_t$, $P_{2,t+1} = s_{p1}P_{1,t}e^{-c_{pa}A_t}$, dan $A_{t+1} = (1 - d_a)A_t + s_{p2}P_{2,t}e^{-c_{pa}A_t}$. Dengan $s_{p1} = s_{p2} = 1$ bila kematian pupa diabaikan, pupa baru memerlukan dua perpindahan kelas sebelum menjadi dewasa. Model lain dapat diterima bila penundaan dua langkah, konservasi arus individu, dan lokasi kanibalisme dinyatakan jelas.

Bukti yang diperlukan

1. Dua tahap pupa atau satu penundaan eksplisit mencegah pupa menjadi dewasa setelah hanya satu langkah.
2. Semua aliran masuk dan keluar kelas ditulis tanpa mengandaskan individu.
3. Peluang bertahan dan suku kanibalisme mempunyai rentang serta makna biologis.
4. Dalam batas tanpa kanibalisme/kematian pupa, satu kohort dapat ditelusuri dari larva hingga dewasa dalam jumlah langkah yang benar.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Representasi penundaan

Jawaban lengkap

Memakai dua kelas pupa atau variabel tertunda yang secara pasti memberi masa pupa dua langkah.

Jawaban sebagian

Hanya mengurangi laju transisi tetapi sebagian pupa masih langsung menjadi dewasa pada satu langkah.

- **Kriteria**

Keseimbangan kohort

Jawaban lengkap

Setiap kelas mempunyai asal dan tujuan tunggal yang dapat ditelusuri; tidak ada kohort yang hilang atau dihitung dua kali tanpa proses kematian eksplisit.

Jawaban sebagian

Persamaan menghasilkan individu baru dari lebih dari satu jalur tanpa penjelasan.

- **Kriteria**

Kanibalisme dan mortalitas

Jawaban lengkap

Menempatkan faktor kanibalisme pada telur/pupa yang relevan dan mendefinisikan semua peluang bertahan.

Jawaban sebagian

Menyalin faktor eksponensial tanpa menjelaskan kelas yang dilindungi atau dimangsa.

- **Kriteria**

Pemeriksaan batas

Jawaban lengkap

Menelusuri satu kohort pada kasus sederhana dan menunjukkan bahwa waktu pupa tepat dua kali waktu larva-ke-pupa.

Jawaban sebagian

Tidak memeriksa arti waktu model.

Garis besar jawaban

1. Definisikan pupa tahun/ langkah pertama dan kedua secara terpisah.
2. Masukkan larva baru hanya ke kelas pupa pertama.
3. Masukkan dewasa baru hanya dari kelas pupa kedua.
4. Nyatakan apakah kanibalisme dan kematian terjadi pada satu atau kedua tahap pupa.

Dukungan untuk Soal 13

Petunjuk

Mulailah dari jumlah telur bA_t . Jika peluang telur lolos dari tiap dewasa bersifat independen, gunakan e^{-cA_t} . Persamaan dewasa harus memuat dewasa yang bertahan dan juvenil yang matang.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Contoh minimal yang konsisten adalah $J_{t+1} = bA_t e^{-cA_t}$ dan $A_{t+1} = s_J J_t + s_A A_t$, dengan $b, c > 0$, $0 \leq s_J, s_A \leq 1$. Di sini e^{-cA_t} adalah fraksi telur yang lolos dari kanibalisme, s_J fraksi juvenil yang bertahan dan matang, serta s_A fraksi dewasa yang bertahan. Penambahan retensi juvenil dapat diterima bila kelas juvenil berlangsung lebih dari satu langkah dan arusnya didefinisikan.

Bukti yang diperlukan

1. Faktor kanibalisme menurun ketika jumlah dewasa meningkat.
2. Dewasa yang menghasilkan telur tidak otomatis hilang dari kelas dewasa.
3. Transisi juvenil-ke-dewasa dan kelangsungan hidup dewasa diberi rentang probabilitas.
4. Semua parameter mempunyai interpretasi dan satuan per langkah.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Produksi dan kelangsungan hidup telur

Jawaban lengkap

Menghasilkan bA_t telur dan mengalikannya dengan fungsi kelangsungan hidup seperti e^{-cA_t} yang berada dalam $(0, 1]$.

Jawaban sebagian

Kanibalisme ditambahkan sebagai pengurangan linear yang dapat menghasilkan jumlah negatif tanpa batas parameter.

- **Kriteria**

Dinamika kelas

Jawaban lengkap

Membedakan juvenil baru, pematangan juvenil, dan kelangsungan hidup dewasa tanpa penghitungan ganda.

Jawaban sebagian

Tidak jelas kapan juvenil menjadi dewasa atau apakah dewasa bertahan.

- **Kriteria**

Konsistensi biologis

Jawaban lengkap

Menjamin keadaan nonnegatif untuk keadaan awal nonnegatif dan parameter dalam rentang yang dinyatakan.

Jawaban sebagian

Parameter tidak dibatasi sehingga populasi dapat menjadi negatif.

• Kriteria

Kasus batas

Jawaban lengkap

Menunjukkan bahwa $c = 0$ menghapus kanibalisme dan $A_t = 0$ menghasilkan nol telur baru.

Jawaban sebagian

Tidak menguji perilaku dasar model.

Garis besar jawaban

1. Gunakan dua variabel keadaan J_t dan A_t .
2. Modelkan telur yang selamat sebagai $bA_t e^{-cA_t}$.
3. Gabungkan juvenil yang matang dengan dewasa yang bertahan pada pembaruan A .

Dukungan untuk Soal 14

Petunjuk

Tulis $s_J = 1 - d_J$, $s_A = 1 - d_A$, dan $\mathcal{R}_0 = bs_J/d_A$. Pada titik tetap positif, persamaan kedua memberi $J^* = d_A A^*/s_J$. Untuk kestabilan diskret, gunakan kriteria Jury pada polinom karakteristik matriks Jacobi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Model menggambarkan dewasa yang menghasilkan juvenil dengan kelangsungan hidup telur e^{-cA} , juvenil yang bertahan/matang dengan peluang $1 - d_J$, dan dewasa yang bertahan dengan peluang $1 - d_A$. Untuk $b, c > 0$, $0 < d_A \leq 1$, dan $0 \leq d_J < 1$, tetapkan $\mathcal{R}_0 = b(1 - d_J)/d_A$. Titik nol stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$, nonhiperbolik pada $\mathcal{R}_0 = 1$, dan takstabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik positif ada tepat ketika $\mathcal{R}_0 > 1$, dengan $A^* = c^{-1} \ln \mathcal{R}_0$ dan $J^* = d_A A^*/(1 - d_J)$. Titik positif stabil jika $0 < \ln \mathcal{R}_0 < 1 + 1/d_A$. Pada kesamaan, determinan matriks Jacobi bernilai 1 dan sepasang nilai eigen kompleks mencapai lingkaran satuan; untuk nilai lebih besar titik itu takstabil. Penyebutan bifurkasi Neimark–Sacker memerlukan syarat nondegenerasi tambahan.

Cek cepat

Substitusi titik positif harus memberi $b(1 - d_J)e^{-cA^*} = d_A$. Syarat kestabilan tidak boleh diterapkan sebagai uji ODE; ini pemetaan diskret dan memerlukan semua nilai eigen di dalam lingkaran satuan.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan peluang bertahan satu langkah untuk menyingkat notasi.

Rumus

$$s_J = 1 - d_J, \quad s_A = 1 - d_A, \quad \mathcal{R}_0 = \frac{bs_J}{d_A}$$

- **Penjelasan**

Pada titik tetap positif, persamaan dewasa menghubungkan kedua kelas.

Rumus

$$d_A A^* = s_J J^* \Rightarrow J^* = \frac{d_A}{s_J} A^*$$

- **Penjelasan**

Masukkan relasi itu ke persamaan juvenil dan batalkan $A^* > 0$.

Rumus

$$bs_J e^{-cA^*} = d_A \Rightarrow A^* = \frac{1}{c} \ln \mathcal{R}_0$$

- **Penjelasan**

matriks Jacobi di titik nol mempunyai polinom karakteristik yang lulus kriteria Jury tepat di bawah ambang reproduksi.

Rumus

$$p_0(\lambda) = \lambda^2 - s_A \lambda - bs_J, \quad \rho(DF(0, 0)) < 1 \Leftrightarrow bs_J < d_A$$

- **Penjelasan**

Di titik positif, turunan produksi juvenil adalah $(d_A/s_J)(1 - cA^*)$.

Rumus

$$p_*(\lambda) = \lambda^2 - s_A \lambda - d_A(1 - \ln \mathcal{R}_0)$$

- **Penjelasan**

Tiga ketaksamaan Jury menyisakan satu batas nontrivial.

Rumus

$$\rho(DF(J^*, A^*)) < 1 \Leftrightarrow 0 < \ln \mathcal{R}_0 < 1 + \frac{1}{d_A}$$

Simpulan

$\mathcal{R}_0 = 1$ adalah ambang penggantian populasi. Kanibalisme tidak menentukan apakah cabang positif pertama kali ada, tetapi menentukan besar kesetimbangannya dan, bersama mortalitas dewasa, ambang pasangan nilai eigen kompleks mencapai lingkaran satuan pada reproduksi tinggi.

Dukungan untuk Soal 15

Petunjuk

Kelompokkan pernyataan menjadi empat alat: substitusi aljabar; kriteria $|F'| < 1$; aturan rantai untuk $(F^k)'$; dan keunikan solusi ODE. Untuk pernyataan periode tiga, jangan menganggap dua pemakaian kata “siklus ini” menunjuk cabang yang sama—identifikasi orbit stabil dan takstabil yang lahir berpasangan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada satu paragraf jawaban tunggal. Jawaban tuntas harus membahas keempat belas butir dengan turunan atau gambar yang sesuai. Fakta pemeriksa utama ialah: penskalaan menghasilkan pemetaan logistik; kestabilan lokal setara dengan $|F'(X^*)| < 1$; turunan iterasi adalah hasil kali turunan sepanjang orbit; ambang kelahiran siklus periode tiga adalah $a = 1 + \sqrt{8} \approx 3,828427$; dan lintasan ODE otonom dengan medan yang menjamin keunikan tidak dapat berpotongan pada bidang fase. Butir 9–10 harus dibaca dengan membedakan dua cabang siklus periode tiga, bukan sebagai klaim bahwa satu orbit sekaligus tidak pernah stabil dan mula-mula stabil.

Bukti yang diperlukan

1. Substitusi $X = bN/a$ ditunjukkan langkah demi langkah dari persamaan asal artikel.
2. Sudut kemiringan antara -45° dan 45° diterjemahkan menjadi $|F'| < 1$, dengan kasus batas disebut nonhiperbolik.
3. Butir tentang F^2 dan F^k dibuktikan memakai aturan rantai, bukan hanya dikutip.
4. Gambar bifurkasi membedakan pelana-simpul/tangen dari flip/penggandaan periode; istilah garpu rumput dijelaskan bila dipakai secara visual.
5. Pembahasan periode tiga mengidentifikasi cabang stabil dan takstabil serta konteks anteseden kata “ini”.
6. Pernyataan lintasan tidak berpotongan diberi syarat ODE otonom dan keunikan solusi; proyeksi waktu atau sistem nonunik tidak dicampur.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Penskalaan dan domain

Jawaban lengkap

Menurunkan bentuk kanonis, melacak domain parameter/keadaan, dan menguji klaim divergensi setelah $X > 1$ pada domain parameter yang dimaksud artikel.

Jawaban sebagian

Menyalin substitusi tanpa memasukkannya ke persamaan atau mengabaikan domain.

- **Kriteria**

Kestabilan dan iterasi

Jawaban lengkap

Menghubungkan kemiringan dengan pengali, membuktikan $(F^2)'(X^*) = [F'(X^*)]^2$, serta memberi rumus produk pengali untuk siklus periode k .

Jawaban sebagian

Menyatakan syarat modulus tanpa aturan rantai.

- **Kriteria**

Bifurkasi periode dua

Jawaban lengkap

Menjelaskan bagaimana titik tetap baru F^2 yang bukan titik tetap F membentuk satu siklus periode dua dan bagaimana pengalinya menentukan kestabilan.

Jawaban sebagian

Menganggap setiap titik tetap F^2 otomatis berperiode tepat dua.

- **Kriteria**

Jendela periode tiga

Jawaban lengkap

Menjelaskan ambang $1 + \sqrt{8}$, pasangan orbit yang lahir melalui bifurkasi tangen, cabang yang mula-mula stabil, dan rangkaian penggandaan periode berikutnya; ambiguitas butir 9–10 diselesaikan melalui konteks artikel.

Jawaban sebagian

Mengulang kedua kutipan yang tampak bertentangan tanpa membedakan orbit.

- **Kriteria**

Gambar bifurkasi

Jawaban lengkap

Menggambar bifurkasi tangen dan flip/garpu-rumput dengan cabang stabil/takstabil, sumbu parameter, dan arah perubahan parameter.

Jawaban sebagian

Gambar tanpa label kestabilan atau tanpa parameter.

- **Kriteria**

Sistem kontinu dua dimensi

Jawaban lengkap

Menggunakan teorema keunikan: dua lintasan yang bertemu pada keadaan dan waktu yang sama harus merupakan solusi yang sama; menyatakan syarat regularitas dan keotonomian yang relevan.

Jawaban sebagian

Hanya menyatakan lintasan tidak berpotongan tanpa alasan atau syarat.

- **Kriteria**

Ketepatan terhadap artikel

Jawaban lengkap

Membedakan kutipan May, pembuktian sendiri, dan koreksi/penjelasan kontekstual; menyertakan nomor halaman/butir secara dapat dilacak.

Jawaban sebagian

Mengatribusikan tafsiran sendiri kepada penulis tanpa bukti.

Garis besar jawaban

1. Butir 1–3: lakukan penskalaan dan terjemahkan kemiringan geometris menjadi pengali.
2. Butir 4–7 dan 12: gunakan komposisi serta aturan rantai untuk titik tetap dan siklus.
3. Butir 8–10 dan 13: jelaskan kelahiran berpasangan orbit periode tiga dan kehilangan kestabilannya.
4. Butir 11: bedakan bifurkasi tangen dari flip/penggandaan periode.
5. Butir 14: gunakan keunikan solusi ODE, dengan syarat yang disebutkan.

Dukungan untuk Soal 16

Petunjuk

Untuk bagian data, simpan berkas resmi sebagai masukan lokal beserta URL, tanggal pengambilan, byte, dan SHA-256; jangan mengunduh ketika notebook dijalankan. Estimasi R dari $\log N$ dan periksa residu serta kestabilan parameter pada beberapa rentang. Bagian 2004 dapat dihitung sepenuhnya dari angka yang tercetak dengan identitas $P_{t+1} = P_t + B - D + I$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tanpa salinan lokal berhash dari `popclockest.txt`, tidak ada nilai R atau kesimpulan grafik yang boleh diklaim sebagai hasil data resmi; gunakan paket sintesis hanya untuk mendemonstrasikan metode dan tandai demikian. Untuk berkas resmi, jawaban harus memplot N_t , mengestimasi R melalui $\log N_t = \alpha + t \log(1 + R)$, memeriksa residu/holdout, dan menjelaskan mengapa satu R mungkin tidak tetap sepanjang satu abad. Persamaan keseimbangan nasional ialah $P_{t+1} = P_t + B_t - D_t + I_t$. Dari angka tercetak: 2002 = 287.941.220; 2003 = 290.788.976; dan populasi 2004 = 293.655.404.

Cek cepat

Kenaikan tahunan berturut-turut harus 2.839.145, 2.847.756, dan 2.866.428; jumlah akhir harus 293.655.404. Hasil berbasis data eksternal harus menyebut identitas berkas, bukan sekadar ‘dari Census’.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Provenans data

Jawaban lengkap

Menggunakan salinan lokal berhash dari berkas resmi dan mencatat URL/vintage; atau memakai data sintetis yang dinyatakan terang-terangan tanpa klaim empiris.

Jawaban sebagian

Menyebut situs Census tetapi tidak dapat menunjukkan berkas atau memakai pengunduhan langsung yang tidak dapat direproduksi.

- **Kriteria**

Eksplorasi grafik

Jawaban lengkap

Memplot jumlah dan/atau log jumlah terhadap waktu, menandai perubahan rezim, dan tidak menyimpulkan pertumbuhan eksponensial hanya dari bentuk kurva naik.

Jawaban sebagian

Menyajikan satu grafik tanpa skala, label, atau pembahasan.

- **Kriteria**

Uji model laju tetap

Jawaban lengkap

Mengestimasi R , memeriksa residu dan holdout atau membandingkan beberapa rentang waktu, lalu membatasi klaim pada rentang yang didukung.

Jawaban sebagian

Melaporkan satu R tanpa diagnostik.

- **Kriteria**

Metodologi demografis

Jawaban lengkap

Menjelaskan populasi awal ditambah kelahiran, dikurangi kematian, ditambah migrasi neto; membedakan estimasi pascasensus dari penghitungan sensus langsung.

Jawaban sebagian

Menyebut komponen tanpa tanda atau hubungan matematis.

- **Kriteria**

Hitungan 2004

Jawaban lengkap

Menunjukkan tiga pembaruan tahunan dan memperoleh 293.655.404.

Jawaban sebagian

Angka akhir benar tanpa jejak hitung, atau satu komponen migrasi diberi tanda salah.

- **Kriteria**

Perangkat terbuka

Jawaban lengkap

Analisis berjalan secara offline dengan Python terbuka dari masukan lokal; tidak memerlukan MATLAB atau Excel.

Jawaban sebagian

Prosedur masih bergantung pada perangkat proprieter atau koneksi langsung.

Garis besar jawaban

1. Bekukan dan identifikasi data sebelum analisis; bila tidak tersedia, gunakan paket sintetis hanya sebagai latihan metode.
2. Estimasi laju pada skala log dan uji apakah residu mendukung satu laju tetap.
3. Jelaskan persamaan keseimbangan demografis secara terpisah dari pemodelan eksponensial.
4. Hitung 2004 dengan menambahkan kelahiran dan migrasi neto serta mengurangi kematian untuk tiap tahun.

Dukungan untuk Soal 17

Petunjuk

Mulailah dari vektor 18 kelompok umur dan tampilkan jumlah serta proporsinya. Gabungkan kelompok hanya setelah menetapkan alasan biologis atau kebijakan. Bentuk matriks proyeksi dengan fekunditas pada baris pertama, kelangsungan hidup/transisi pada subdiagonal, dan kelas umur terakhir yang terbuka; tahan data 2019 untuk validasi, bukan untuk penyetelan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada satu jawaban numerik yang sah tanpa tabel Census dan tabel laju yang dibekukan beserta vintage, satuan, serta hash. Jawaban lengkap harus: memplot jumlah dan proporsi umur untuk tahun yang tersedia; mendefinisikan agregasi kelompok dan matriks proyeksi $n_{t+1} = A n_t$; mengestimasi transisi/fekunditas tanpa kebocoran data 2019; membandingkan prediksi 2019 dengan observasi memakai residu atau galat relatif per kelompok; menghasilkan proyeksi 2050 sebagai skenario dengan analisis sensitivitas; dan membahas asumsi laju tetap, migrasi, agregasi, kelas umur terbuka, kejutan demografis, serta ketidakpastian data. Dengan paket sintetis, hanya perilaku metode yang boleh dilaporkan.

Bukti yang diperlukan

1. Manifest masukan mencatat sumber, vintage, satuan, byte, dan SHA-256 atau menyatakan data sintetis secara eksplisit.
2. Plot membedakan jumlah absolut dari proporsi dan menyatakan secara tepat tahun yang dimaksud oleh ‘empat tahun terakhir’.
3. Aturan agregasi 18 kelompok dapat direproduksi dan tidak dipilih setelah melihat hasil 2050.

4. Matriks menjamin keadaan nonnegatif serta menangani kelas umur tertua yang terbuka.
5. Validasi 2019 memakai data yang tidak digunakan untuk kalibrasi dan melaporkan galat per kelompok.
6. Proyeksi 2050 disajikan sebagai beberapa skenario atau selang sensitivitas, bukan ramalan pasti.
7. Keterbatasan mencakup sedikitnya laju yang berubah, migrasi, agregasi, dan kejutan struktural.

Pembahasan atau rubrik

Dimensi penilaian

- **Kriteria**

Data dan keterlacakan

Jawaban lengkap

Membekukan tabel Census/CDC yang tepat dengan metadata dan hash, menyelaraskan definisi umur/tahun, serta memisahkan data kalibrasi dari validasi.

Jawaban sebagian

Menggabungkan tabel dari vintage atau satuan berbeda tanpa dokumentasi.

- **Kriteria**

Analisis distribusi umur

Jawaban lengkap

Menyajikan jumlah dan proporsi, membandingkan tahun secara konsisten, serta menjelaskan perubahan dengan ukuran yang dapat diperiksa.

Jawaban sebagian

Hanya menampilkan grafik tanpa normalisasi atau ukuran perubahan.

- **Kriteria**

Agregasi kelompok

Jawaban lengkap

Mendefinisikan pemetaan 18 kelompok ke kelompok model dengan alasan yang berkaitan dengan fekunditas, transisi umur, atau tujuan analisis.

Jawaban sebagian

Memilih kelompok arbitrer tanpa aturan reproduktif.

- **Kriteria**

Struktur model

Jawaban lengkap

Membangun matriks nonnegatif dengan fekunditas, kelangsungan hidup, perpindahan kelompok, kelas terminal, dan—bila dimasukkan—migrasi sebagai komponen terpisah.

Jawaban sebagian

Matriks tidak sesuai dimensi atau kehilangan populasi tanpa mekanisme.

- **Kriteria**

Validasi 2019

Jawaban lengkap

Membandingkan prediksi yang benar-benar di luar sampel dengan data 2019 dan melaporkan pola residu serta ukuran galat per kelompok.

Jawaban sebagian

Menyetel model ke 2019 lalu menyebut kecocokan itu validasi.

- **Kriteria**

Skenario 2050

Jawaban lengkap

Menjalankan beberapa asumsi laju/migrasi, melaporkan sensitivitas dan perubahan struktur umur, serta menghindari presisi palsu.

Jawaban sebagian

Memberi satu angka 2050 tanpa skenario atau ketidakpastian.

- **Kriteria**

Kritik model

Jawaban lengkap

Membahas laju periodik versus kohort, perubahan fertilitas/mortalitas, migrasi, agregasi, kejadian luar biasa, dan keterbatasan ekstrapolasi tiga dekade.

Jawaban sebagian

Hanya menyatakan bahwa model sederhana.

- **Kriteria**

Pelaksanaan terbuka dan offline

Jawaban lengkap

Notebook Python berjalan tanpa jaringan dari paket lokal atau sintetis yang ditandai dan menghasilkan ulang seluruh tabel/grafik.

Jawaban sebagian

Hasil bergantung pada klik manual, perangkat proprieter, atau URL langsung.

Garis besar jawaban

1. Audit dan bekukan data sebelum memilih kelompok umur.
2. Gunakan 2010–2018 untuk penyusunan/kalibrasi dan tahan 2019 sebagai uji.
3. Bangun model proyeksi nonnegatif serta dokumentasikan semua laju dan satuan.

4. Bandingkan prediksi 2019 dengan observasi sebelum memperpanjang ke 2050.
5. Laporkan 2050 sebagai skenario sensitif terhadap fertilitas, mortalitas, dan migrasi.

Model Populasi Dua Spesies

0005-LEGA-V101-CH06

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menyusun model persamaan diferensial terkopel untuk sistem pemangsa–mangsa dan sistem spesies yang bersaing.
- Merumuskan bentuk tak berdimensi dari model dua dimensi dan menilai dinamikanya melalui analisis bidang fase.
- Menerjemahkan hasil analisis model ke dalam istilah biologis dan membahas arti pentingnya dalam konteks tersebut.

Model pemangsa–mangsa: persamaan Lotka–Volterra

Perhatikan suatu sistem tertutup yang melibatkan populasi pemangsa (misalnya hiu) dan mangsa (misalnya ikan kecil). Misalkan F menyatakan kepadatan populasi mangsa dan S menyatakan kepadatan populasi pemangsa. Jelas bahwa ketika mangsa berlimpah, pemangsa akan berkembang biak. Akibatnya, lebih banyak mangsa akan dimakan dan F akan berkurang; namun S juga akan berkurang karena makanan bagi pemangsa semakin sedikit. Akan tetapi, jika S berkurang, F berkesempatan tumbuh kembali karena mangsa tidak lagi dimakan sebanyak sebelumnya. Penalaran ini mengisyaratkan bahwa mungkin terdapat nilai-nilai parameter yang membuat F dan S berosilasi terhadap waktu.

Catatan: A.J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925; Dover, New York, 1956. **Catatan:** V. Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931..

Jika migrasi diabaikan dan kita mengasumsikan bahwa F dan S adalah satu-satunya variabel terikat—khususnya, kita mengasumsikan bahwa tersedia pasokan nutrisi yang memadai (tetapi tidak tak terbatas) bagi mangsa—kita dapat menuliskan

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = F(\alpha - \beta F - \gamma S) \equiv g(F, S), \\ \frac{dS}{dt} = S(-\kappa + \delta F) \equiv h(F, S), \end{cases} \quad (6.1)$$

dengan parameter konstan $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$, dan δ yang semuanya taknegatif. Model ini menyatakan bahwa ketika $S = 0$, populasi mangsa berkembang menurut model logistik, sedangkan ketika $S \neq 0$, mangsa dimakan dengan laju yang sebanding dengan kelimpahan mangsa itu sendiri (F) maupun kelimpahan pemangsa (S). Pemangsa memiliki laju pertumbuhan (kelahiran dikurangi kematian) sebesar $-\kappa$ ketika $F = 0$. Karena κ positif, tanpa mangsa populasi pemangsa akan terdorong menuju kepunahan. Selanjutnya, laju pertumbuhan S memuat suku interaksi bilinear $\delta F S$; dalam laju pertumbuhan per kapita pemangsa, kontribusi interaksi ini linear terhadap kelimpahan mangsa F .

Jika $\beta = 0$, model ini disebut sistem Lotka–Volterra (lihat catatan kaki 1 dan 2 sebagai rujukan) dan merupakan model kontinu paling sederhana yang mencakup faktor-faktor dasar dalam interaksi antara pemangsa dan mangsanya. Model ini sebaiknya dipandang sebagai titik awal untuk model yang lebih rumit dan lebih realistis. Sisa bagian ini dikhususkan untuk menganalisis Persamaan (6.1).

Penskalaan

Persamaan (6.1) melibatkan tiga variabel, F , S , dan t , serta lima parameter, yang kita asumsikan positif (kecuali mungkin β). Dengan menskalakan semua variabel, kita semestinya dapat mereduksi sistem ini menjadi masalah dengan dua parameter (yakni lima dikurangi tiga). Nilai khas untuk F diberikan oleh $F_0 = \kappa/\delta$ (lihat persamaan kedua pada (6.1)), dan dengan cara serupa nilai khas untuk S dapat dipilih sebagai $S_0 = \alpha/\gamma$. Sebagai skala waktu karakteristik, kita dapat memilih $t_0 = 1/\kappa$. Selanjutnya, jika kita mendefinisikan $f = \frac{F}{F_0}$, $s = \frac{S}{S_0}$, dan $\tau = \kappa t$, kita memperoleh model kanonik tak berdimensi berikut:

$$\begin{cases} \frac{df}{d\tau} = af(1 - bf - s), \\ \frac{ds}{d\tau} = s(-1 + f), \end{cases} \quad (6.2)$$

Di sini, parameter a dan b berhubungan dengan parameter semula melalui $a = \frac{\alpha}{\kappa}$, $b = \frac{\beta\kappa}{\alpha\delta}$, sehingga $a > 0$ dan $b \geq 0$.

Analisis bidang fase

Deskripsi bidang fase yang berkaitan dengan sistem (6.2) memberi kita pemahaman kualitatif tentang persamaan pemangsa–mangsa. Dengan informasi ini, kita dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan seperti di bawah ini, meskipun tidak memiliki bentuk eksplisit untuk semua solusi (6.2).

- Mungkinkah populasi hiu atau ikan kecil mengalami kepunahan?
- Apakah model ini masuk akal secara biologis?
- Dapatkah osilasi diamati?

Sebelum melangkah lebih jauh, penting untuk memeriksa bahwa model ini “dirumuskan dengan baik secara biologis”, yaitu bahwa jika s dan f pada awalnya taknegatif, keduanya akan tetap taknegatif. Misalkan, sebagai contoh, $s = 0$. Persamaan kedua pada (6.2) menunjukkan bahwa s akan tetap nol. Oleh karena itu, lintasan pada bidang (f, s) terletak di sepanjang sumbu f atau menjauhinya, tetapi tidak melintasi sumbu tersebut. Demikian pula, persamaan pertama pada (6.2) menunjukkan bahwa lintasan tidak melintasi sumbu s .

Sekarang kita beralih untuk mendeskripsikan potret fase sistem (6.2). Titik-titik tetap sistem ini diberikan di bawah ini menurut koordinatnya pada bidang (f, s) , yaitu

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = \left(\frac{1}{b}, 0\right), \quad P_2 = (1, 1 - b),$$

dan semuanya terletak di kuadran pertama asalkan $0 < b \leq 1$; selanjutnya kita akan mengasumsikan syarat ini terpenuhi. Analisis kestabilan linear dapat digunakan untuk mendeskripsikan dinamika lokal (6.2) di sekitar titik-titik tetap tersebut. Matriks Jacobi (6.2) diberikan oleh

$$J(f, s) = \begin{pmatrix} a(1 - 2bf - s) & -af \\ s & -1 + f \end{pmatrix}.$$

Analisis di sekitar titik asal, P_0

Untuk P_0 , $s = f = 0$ dan matriks Jacobi $J(0, 0)$ berbentuk diagonal. Nilai-nilai eigennya adalah a dan -1 , dengan vektor eigen terkait berturut-turut $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dengan demikian, titik asal merupakan titik pelana.

Analisis di sekitar P_1

Untuk P_1 , $f = 1/b$ dan $s = 0$. Matriks Jacobi $J(1/b, 0)$ berbentuk segitiga atas sehingga nilai-nilai eigennya merupakan entri-entri diagonalnya, yaitu $-a$ dan $-1 + 1/b$. Untuk $0 < b < 1$, titik tetap ini juga merupakan titik pelana. Jika $b = 1$, maka $P_1 = P_2 = (1, 0)$ dan titik tetap yang berimpit ini bersifat nonhiperbolik karena memiliki satu nilai eigen nol. Ruang eigen yang terkait dengan $-a$ direntang oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sedangkan ruang eigen yang terkait dengan $-1 + 1/b$ direntang oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ (-ab + b - 1)/a \end{pmatrix}$.

Analisis di sekitar P_2

Untuk P_2 , $f = 1$ dan $s = 1 - b$. Matriks Jacobi $J(1, 1 - b)$ adalah

$$J(1, 1 - b) = \begin{pmatrix} -ab & -a \\ 1 - b & 0 \end{pmatrix},$$

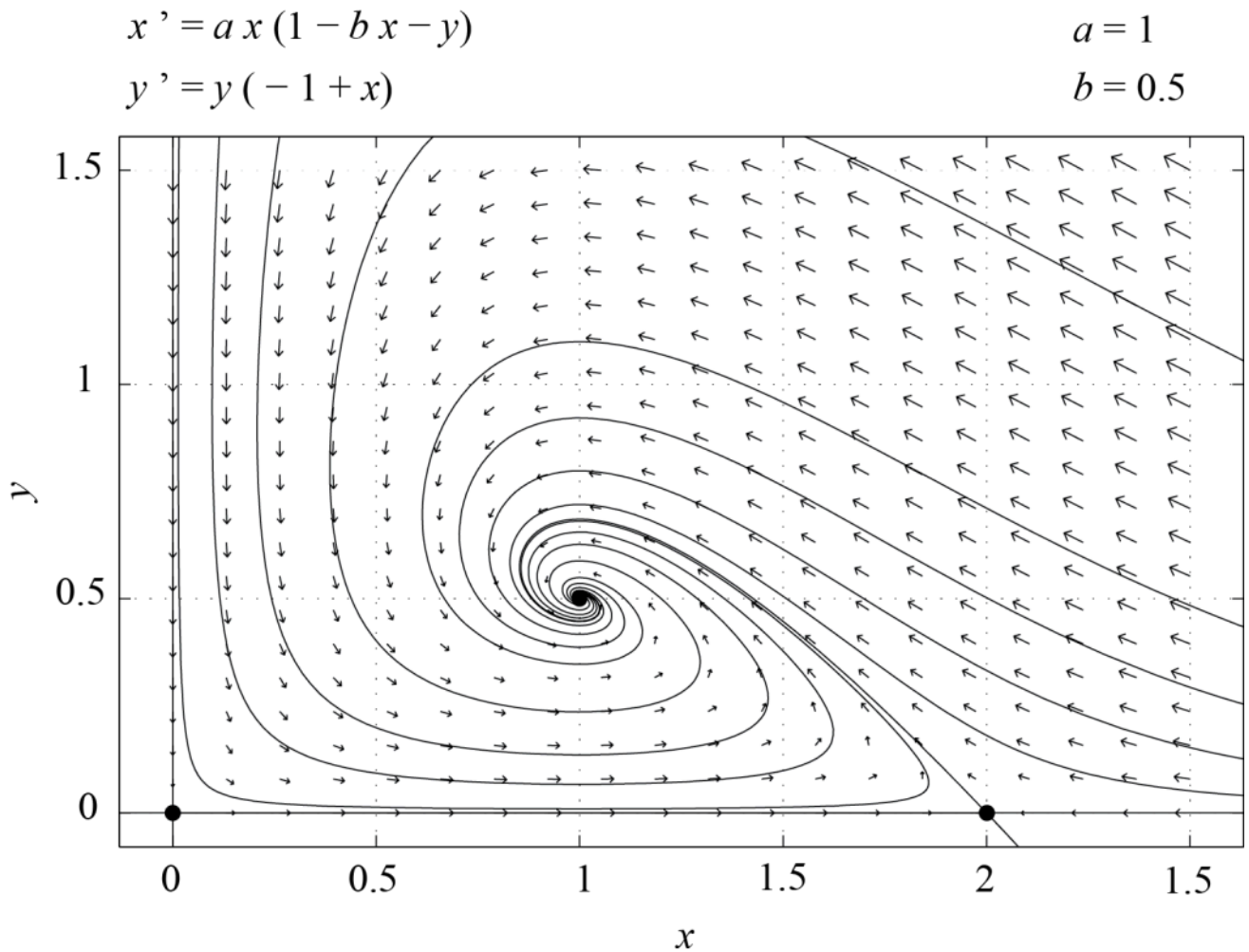
dan nilai-nilai eigennya, λ_1 dan λ_2 , memenuhi

$$\det(J) = \lambda_1 \lambda_2 = \det[J(1, 1 - b)] = a(1 - b) > 0,$$

serta

$$\text{Tr}(J) = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}[J(1, 1 - b)] = -ab < 0.$$

Karena itu, untuk $0 < b < 1$, P_2 merupakan simpul stabil atau spiral stabil.

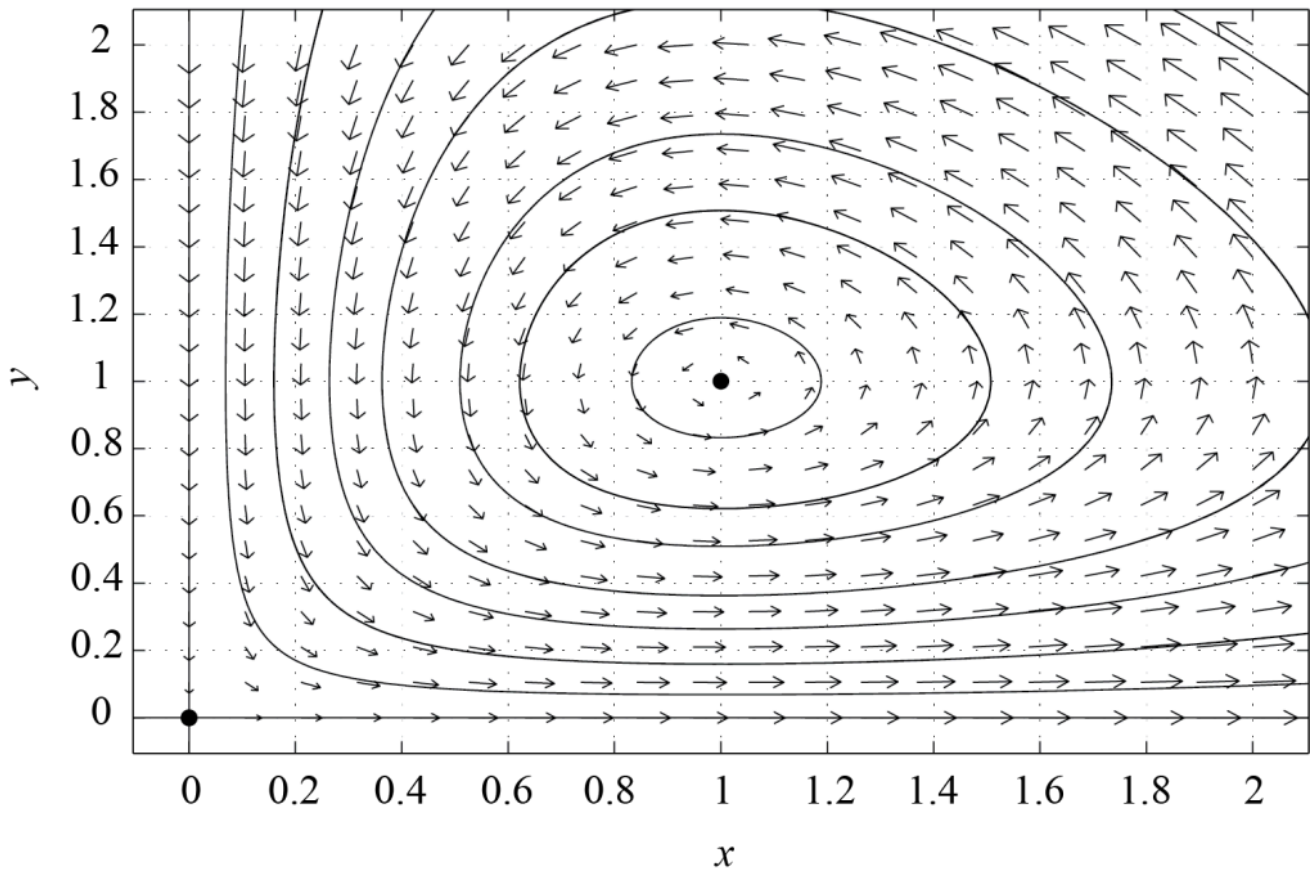


Gambar 6.1. Potret fase model (6.2) dengan $a = 1$ dan $b = 0.5$, diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Analisis kestabilan linear di atas hanya membuktikan sifat lokal. Namun, dalam rentang parameter tersebut, suatu argumen global tambahan—yang memakai keterbatasan solusi, pengecualian orbit periodik, dan analisis himpunan batas—menunjukkan bahwa jika nilai awal f dan s positif, dinamika akan konvergen menuju titik tetap P_2 ; pada titik ini, kepadatan populasi hiu maupun ikan bernilai berhingga. Dengan kata lain, tidak teramati osilasi periodik. Gambar 6.1 menunjukkan potret fase sistem (6.2) untuk $a = 1$ dan $b = 0.5$, yang diperoleh dengan PPLANE. Dalam kasus ini, titik tetap P_2 merupakan spiral stabil.

Sebagai latihan, pembaca diminta mengerjakan kasus $b > 1$, ketika hanya dua titik tetap yang berada di kuadran pertama. Dalam kasus itu, P_1 merupakan simpul stabil dan semua kondisi awal dengan $f > 0$ dan $s > 0$ konvergen menuju P_1 . Dalam situasi ini, hiu punah dan ikan telah mencapai daya dukung lingkungan tempat mereka hidup.

$$\begin{aligned}x' &= x(1 - y) \\ y' &= y(-1 + x)\end{aligned}$$



Gambar 6.2. Potret fase model Lotka–Volterra (6.2) dengan $a = 1$ dan $b = 0$, diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Osilasi dapat diamati asalkan kita menetapkan $b = 0$. Ini memang syarat yang diperlukan agar P_2 menjadi pusat, karena $\text{Tr}(J(P_2)) = -ab$ dan $\det(J(P_2)) = a(1 - b)$. Menetapkan $b = 0$ membuat jejak $J(P_2)$ bernilai nol, tetapi determinannya tetap positif. Dalam kasus ini, P_1 menghilang (sebenarnya bergeser ke tak hingga ketika b mendekati nol), sehingga hanya tersisa dua titik tetap, $P_0 = (0, 0)$ dan $P_2 = (1, 1)$. Matriks Jacobi $J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ memiliki nilai eigen $\pm i\sqrt{a}$, sehingga P_2 kini merupakan pusat linear, sebagaimana diperkirakan. Gambar 6.2 menunjukkan potret fase yang bersesuaian, dengan lintasan-lintasan tertutup di sekitar P_2 . Kita dapat membuktikan keberadaan lintasan tertutup sebagai berikut. Setiap lintasan pada bidang fase memenuhi

$$\frac{df}{ds} = \frac{af(1 - bf - s)}{s(-1 + f)}.$$

Ketika $b = 0$, solusi implisit persamaan ini adalah

$$(f \exp(-f)) (s \exp(-s))^a = \zeta,$$

dengan ζ sebagai konstanta positif untuk lintasan interior. Nilai nol hanya menghasilkan himpunan batas yang degenerat, bukan orbit tertutup interior. Mudah dilihat bahwa terdapat nilai-nilai ζ yang membuat persamaan ini mendefinisikan kurva tertutup di sekitar P_2 . Memang, fungsi $x \exp(-x)$ bernilai nol di titik asal, mencapai maksimum sebesar $1/e$ pada $x = 1$, dan menuju nol ketika $x \rightarrow \infty$. Akibatnya, untuk nilai s dan a tertentu, dapat ditemukan suatu rentang nilai ζ sehingga persamaan $f \exp(-f) = \frac{\zeta}{(s \exp(-s))^a}$ memiliki dua solusi, satu di setiap sisi $f = 1$. Penalaran serupa berlaku untuk penampang yang sejajar dengan sumbu s . Lintasan-lintasan tertutup ini ditelusuri berlawanan arah jarum jam di kuadran pertama bidang (f, s) karena

$$\frac{df}{dt} = af(1-s) > 0 \Leftrightarrow s < 1 \text{ dan } \frac{ds}{dt} = s(-1+f) > 0 \Leftrightarrow f > 1.$$

Dengan demikian, model Lotka–Volterra memprediksi osilasi periodik populasi pemangsa dan mangsa.

Gagasan yang dikembangkan dalam bagian ini dapat digeneralisasi ke sistem yang lebih kompleks. Sebagai contoh, sebuah artikel tahun 2000 karya G.F. Fussmann *et al.* berjudul [Melintasi Bifurkasi Hopf dalam Sistem Pemangsa–Mangsa Hidup](#) menunjukkan bahwa prediksi model pemangsa–mangsa yang melibatkan faktor lingkungan serta fraksi reproduktif dan nonreproduktif suatu populasi sangat sesuai dengan hasil eksperimen.

Dua spesies yang bersaing

Kini kita beralih ke masalah dua spesies yang bersaing memperebutkan sumber daya yang sama. Kita akan mengasumsikan bahwa tanpa kehadiran spesies lain, setiap spesies tumbuh mengikuti hukum logistik. Persaingan untuk memperoleh makanan membuat laju pertumbuhan setiap spesies dibatasi oleh keberadaan spesies lain. Sebagai hampiran pertama, efek ini bersifat linear. Jika X dan Y menyatakan kepadatan rata-rata masing-masing spesies, kita memperoleh

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(\alpha - \beta X - \gamma Y), \\ \frac{dY}{dt} = Y(\delta - \kappa Y - \zeta X), \end{cases} \quad (6.3)$$

dengan $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$, dan ζ merupakan parameter positif. Seperti pada model Lotka–Volterra, mula-mula kita menskalakan ulang persamaan-persamaan ini untuk mengurangi jumlah parameter bebas. Kemudian kita melakukan analisis bidang fase untuk mendeskripsikan dinamika kedua spesies yang bersaing.

Penskalaan

Nilai karakteristik bagi X dan Y adalah $X_0 = \alpha/\beta$ dan $Y_0 = \delta/\kappa$. Salah satu waktu karakteristik, misalnya, adalah $t_0 = 1/\alpha$. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan besaran-besaran tak berdimensi sebagai

$$x = \frac{X}{X_0}, \quad y = \frac{Y}{Y_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0},$$

mensubstitusikan ungkapan-ungkapan ini ke dalam Persamaan (6.3), dan mencari sistem yang disederhanakan untuk variabel x dan y . Kita memperoleh

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(1 - x - ay), \\ \frac{dy}{d\tau} = cy(1 - y - bx), \end{cases} \quad (6.4)$$

dengan $a = \frac{\gamma\delta}{\alpha\kappa}$, $b = \frac{\zeta\alpha}{\beta\delta}$, dan $c = \frac{\delta}{\alpha}$. Dengan demikian, kita memiliki model dengan tiga parameter. Hal ini memang dapat diduga karena pada awalnya kita memiliki sistem nonlinear dengan enam parameter dan dapat menskalakan ulang tiga variabel, yakni t, X , dan Y . Pertanyaan apakah model ini dirumuskan dengan baik secara biologis kita serahkan sebagai latihan, lalu kita langsung beralih ke analisis titik-titik tetap Persamaan (6.4).

Analisis bidang fase

Seperti biasa, titik-titik tetap diperoleh dengan menyelesaikan $x(1 - x - ay) = 0$ dan $y(1 - y - bx) = 0$. Sistem persamaan ini memiliki empat solusi, yaitu

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab} \right).$$

Titik tetap terakhir, P_3 , terletak di kuadran pertama hanya jika $1 - a$, $1 - b$, dan $1 - ab$ semuanya bertanda sama, serta $ab \neq 1$. Selanjutnya, kita mengasumsikan bahwa syarat-syarat ini dipenuhi dan menggunakan $\epsilon = \pm 1$ untuk menyatakan tanda ketiga besaran tersebut, yaitu

$$\epsilon = \text{sign}(1 - a) = \text{sign}(1 - b) = \text{sign}(1 - ab).$$

Matriks Jacobi dari (6.4) adalah

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - ay & -ax \\ -bcy & c(1 - 2y - bx) \end{pmatrix}.$$

Sekarang kita dapat menghitung nilai-nilai eigen $J(x, y)$ yang dievaluasi pada setiap titik tetap.

Analisis di sekitar titik asal, P_0

Untuk P_0 , matriks $J(0, 0)$ berbentuk diagonal dan nilai-nilai eigennya adalah 1 dan c . Karena keduanya positif, titik asal merupakan simpul tak stabil.

Analisis di sekitar P_1

Untuk P_1 , matriks $J(1, 0)$ berbentuk segitiga atas dan nilai-nilai eigennya adalah -1 dan $c(1 - b)$. Jika $\epsilon = 1$, maka P_1 merupakan titik pelana. Jika $\epsilon = -1$, titik tersebut merupakan simpul stabil.

Analisis di sekitar P_2

Untuk P_2 , matriks $J(0, 1)$ berbentuk segitiga bawah dan nilai-nilai eigennya adalah $1 - a$ dan $-c$. Dengan demikian, P_2 merupakan titik pelana jika $\epsilon = 1$, dan simpul stabil jika $\epsilon = -1$.

Analisis di sekitar P_3

Untuk P_3 , matriks Jacobi yang bersesuaian adalah

$$J\left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab}\right) = \frac{1}{1-ab} \begin{pmatrix} a-1 & a(a-1) \\ b c(b-1) & c(b-1) \end{pmatrix}.$$

Karena jejaknya T dan determinannya D diberikan oleh

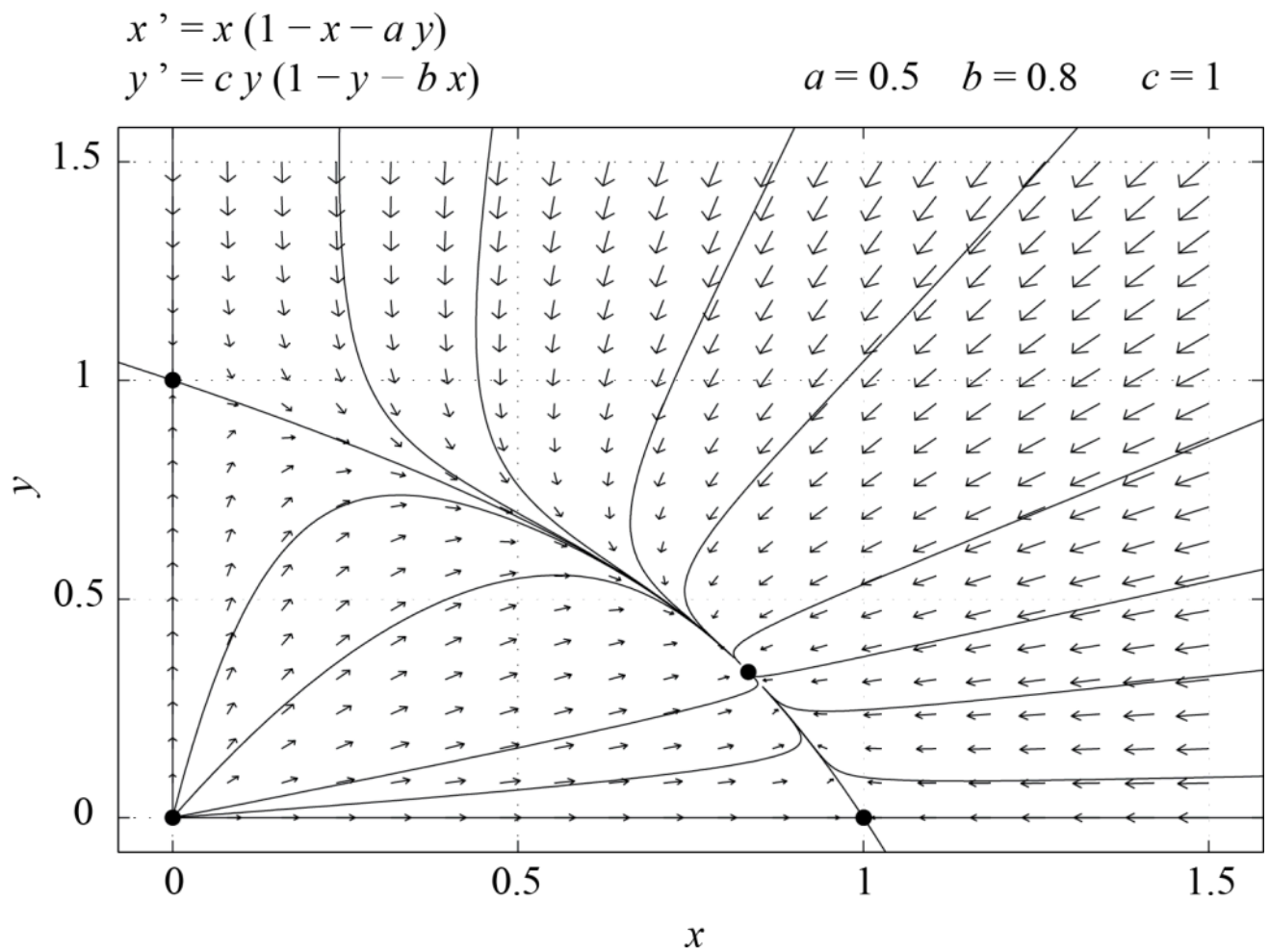
$$T = \frac{1}{1-ab} (a-1 + c(b-1)), \quad D = \frac{(a-1)c(b-1)}{1-ab},$$

kita melihat bahwa $\text{sign}(T) = -1$ dan $\text{sign}(D) = \epsilon$. Jika $\epsilon = -1$, P_3 merupakan titik pelana. Jika $\epsilon = 1$, P_3 merupakan simpul stabil. Memang, diskriminan polinom karakteristiknya adalah

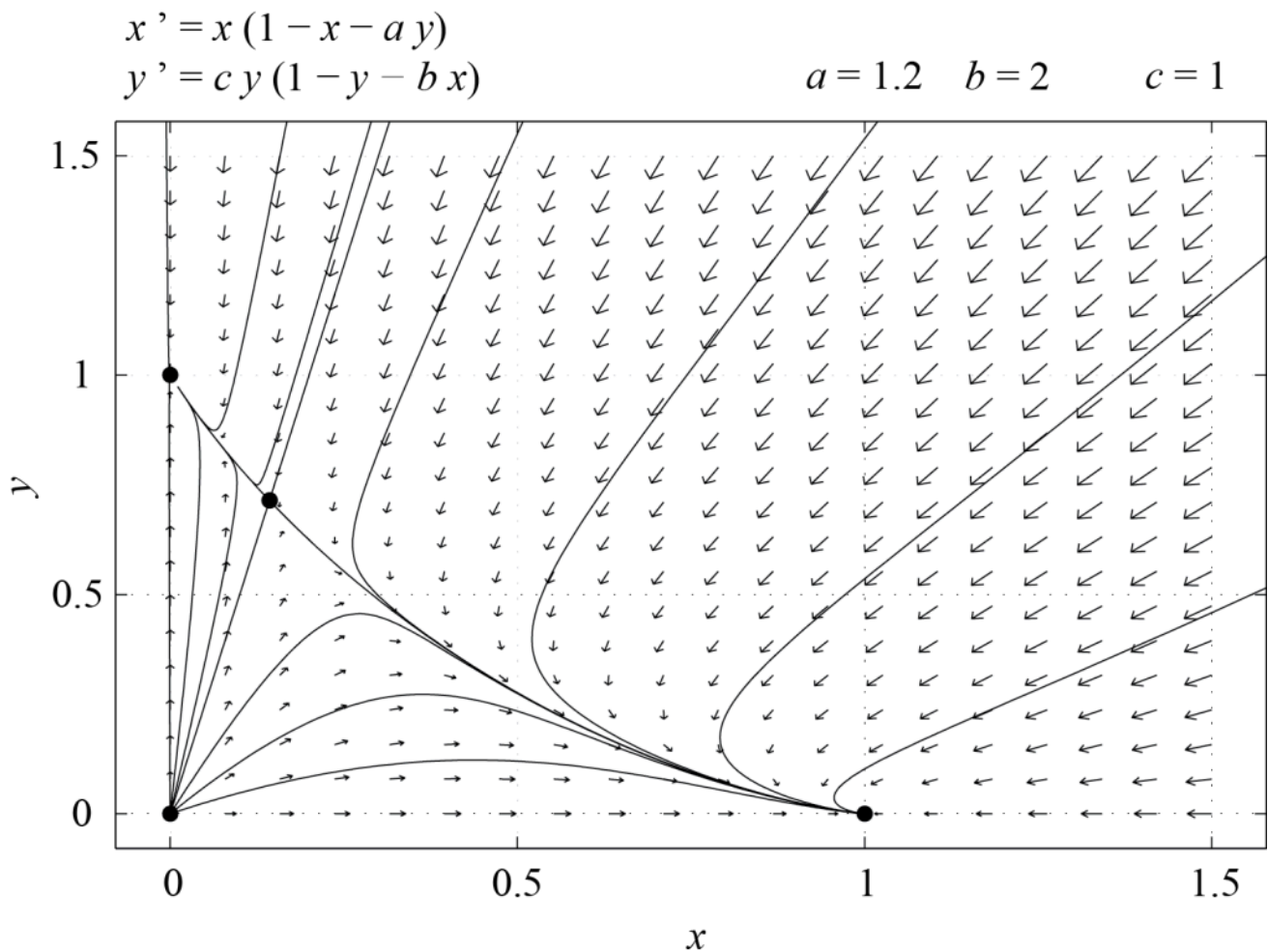
$$T^2 - 4D = \frac{[(a-1) - c(b-1)]^2 + 4abc(a-1)(b-1)}{(1-ab)^2},$$

dan karena itu positif. Dengan demikian, kedua nilai eigennya riil.

Gambar 6.3 dan 6.4 masing-masing memperlihatkan potret fase sistem (6.4) untuk $\epsilon = 1$ dan $\epsilon = -1$.



Gambar 6.3. Bidang fase sistem (6.4), dengan $a = 0.5$, $b = 0.8$, dan $c = 1$ ($\epsilon = 1$), yang digambar menggunakan perangkat lunak PPLANE.
[Deskripsi Gambar](#)



Gambar 6.4. Bidang fase sistem (6.4), dengan $a = 1.2$, $b = 2$, dan $c = 1$ ($\epsilon = -1$), yang digambar menggunakan perangkat lunak PPLANE.

[Deskripsi Gambar](#)

Dari sudut pandang ekologi, kedua spesies hidup berdampingan jika P_3 stabil, yaitu jika $\epsilon = 1$. Jika tidak, untuk kondisi awal interior generik salah satu spesies akan punah akibat spesies lain karena titik tetap yang stabil ketika $\epsilon = -1$ hanyalah P_1 dan P_2 , dan pada kedua titik tersebut salah satu populasi bernilai nol. Pengecualiannya ialah kondisi awal yang tepat berada pada manifold stabil titik pelana P_3 ; lintasan demikian menuju P_3 dan membentuk batas antara kedua daerah tarikan. Contoh sederhana ini memperlihatkan bagaimana hubungan antarparameter model dapat disimpulkan dari fakta biologis. Sebagai contoh, analisis di atas menunjukkan bahwa jika kedua spesies hidup berdampingan pada titik tetap interior positif yang stabil, maka $a < 1$ dan $b < 1$, sehingga $ab \neq 1$. Kasus $a = 1$ atau $b = 1$ berada pada batas, sehingga titik koeksistensi tidak lagi menjadi titik interior positif yang terisolasi; jika keduanya sama dengan 1 dan $ab = 1$, sistem tersebut degenerat.

Ringkasan

Dalam bab ini, kita memperkenalkan dua model klasik dinamika populasi, yaitu sistem predator-mangsa dan sistem yang mendeskripsikan dua spesies yang bersaing memperebutkan sumber daya yang sama. Alat utama yang kita gunakan untuk menganalisis kedua model dua dimensi ini adalah analisis bidang fase. Kita hanya membahas model kontinu elementer, tetapi analog diskret maupun model yang lebih kompleks tentu saja juga dapat dipertimbangkan.

Dari sudut pandang biologis, penting untuk mengingat bahwa sistem predator-mangsa dapat memperlihatkan osilasi temporal. Osilasi tersebut biasanya muncul dari bifurkasi Hopf, sebagaimana dibahas, misalnya, dalam artikel Fussmann *et al.* **Catatan:** G.F. Fussmann, S.P. Ellner, K.W. Shertzer, N.G. Hairston Jr., [Crossing the Hopf Bifurcation in a Live Predator-Prey System](#), *Science* **290**, 1358-1360 (2000). (lihat soal-soal), dan bukan berkaitan dengan adanya orbit tertutup yang jumlahnya tak hingga seperti pada sistem Lotka-Volterra dengan $a = 1$ dan $b = 0$.

Untuk spesies yang bersaing, model sederhana yang disajikan dalam bagian ini menunjukkan bahwa kedua spesies hanya dapat hidup berdampingan jika a dan b dalam sistem (6.4) keduanya kurang dari satu. Jika tidak, salah satu spesies akan menyebabkan spesies lain punah.

Deskripsi Gambar

Gambar 6.1: Potret fase yang menampilkan medan vektor dan beberapa lintasan. Ciri utamanya adalah spiral stabil pada titik kesetimbangan interior. Dua titik kesetimbangan lain tampak pada sumbu horizontal: titik pelana di titik asal (0,0) dan satu titik pelana lagi di sebelah kanannya. Semua lintasan dari bagian atas dan kanan melengkung ke dalam menuju spiral pusat tersebut. [[Kembali ke Gambar 6.1](#)]

Gambar 6.2: Potret fase yang menampilkan medan vektor dan beberapa orbit tertutup konsentris di sekitar titik kesetimbangan pusat. Orbit-orbit tersebut menunjukkan sistem periodik yang stabil netral tanpa redaman. Titik kesetimbangan kedua tampak di titik asal (0,0) dan merupakan titik pelana. [[Kembali ke Gambar 6.2](#)]

Gambar 6.3: Potret fase model persaingan yang menampilkan empat titik kesetimbangan. Titik asal (0,0) merupakan simpul tak stabil. Dua titik pada sumbu x dan y merepresentasikan kesetimbangan "spesies tunggal", yakni satu spesies punah sementara spesies lainnya berada pada daya dukungnya. Kedua titik tersebut merupakan titik pelana. Titik tetap di bagian tengah merupakan simpul stabil. Semua lintasan di bagian dalam bidang melengkung menuju titik ini. [[Kembali ke Gambar 6.3](#)]

Gambar 6.4: Potret fase sistem persaingan yang menampilkan empat titik kesetimbangan. Berbeda dari gambar sebelumnya, yang menunjukkan kedua spesies hidup berdampingan secara stabil, lintasan-lintasan generik di sini melengkung menjauhi titik pelana interior dan menuju sumbu-sumbu. Hal ini merepresentasikan skenario "pemenang menguasai semuanya", yakni satu spesies pada akhirnya menyebabkan spesies lain punah, bergantung pada ukuran populasi awal. Manifold stabil titik pelana interior menjadi batas antara kedua daerah tarikan dan merupakan pengecualian terhadap perilaku generik tersebut. [[Kembali ke Gambar 6.4](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Tulislah model waktu-kontinu yang mendeskripsikan situasi berikut. Spesies x bertahan hidup dengan memakan nutrisi n dan memiliki laju kematian per kapita sebesar d . Nutrien n dipasok ke sistem dengan laju konstan. Gunakan asumsi aksi massa paling sederhana: konsumsi nutrisi dan pertumbuhan spesies masing-masing sebanding dengan xn , dengan koefisien positif konstan yang boleh berbeda, dan tidak ada kehilangan nutrisi lain selain konsumsi. Nyatakan dengan jelas setiap parameter tambahan yang Anda gunakan.

Soal 2

Apakah model (6.4) dirumuskan dengan baik secara biologis? Mengapa atau mengapa tidak?

Soal 3

Tinjau model (6.4) dengan $a < 1$ dan $b > 1$.

1. Gunakan analisis bidang fase untuk mendeskripsikan dinamika jangka panjang sistem ini. Periksa hasil Anda dengan [notebook Python terbuka pendamping yang independen](#) [paket sumber] atau perangkat lunak terbuka yang setara.
2. Apa makna biologis temuan Anda pada bagian (1)?

Soal 4

Tinjau model berikut

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 4 - xy, \\ \frac{dy}{dt} = -xy + y + y^2, \end{cases}$$

dengan x dan y taknegatif.

1. Carilah titik-titik tetap sistem ini.
2. Linearisasikan sistem di sekitar titik-titik tetapnya dan tentukan kestabilan setiap titik tetap.
3. Gunakan informasi di atas untuk membuat sketsa bidang fase sistem ini.
4. Periksa jawaban Anda dengan [notebook Python terbuka pendamping yang independen](#) [paket sumber] atau perangkat lunak terbuka yang setara.
5. Dapatkah model ini mendeskripsikan suatu sistem biologis? Mengapa atau mengapa tidak?

Soal 5

Tinjau sistem

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\alpha X + \beta, \\ \frac{dY}{dt} = \gamma XY - \delta Y - \zeta Y^2, \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta > 0.$$

1. Apa dimensi setiap parameter?
2. Tuliskan sistem ini dalam bentuk tak berdimensi. Jelaskan bagaimana Anda memilih skala variabel-variabelnya.

Soal 6

Tinjaulah model yang dideskripsikan dalam artikel karya G.F. Fussmann *et al.* berjudul [Crossing the Hopf Bifurcation in a Live Predator-Prey System](#).

1. Spesies mana yang menjadi predator dan mana yang menjadi mangsa?
2. Apa peran N dalam model tersebut?
3. Bagaimana Anda akan memodifikasi model jika tidak ingin membedakan *Brachionus* yang bereproduksi dan yang tidak bereproduksi?

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Gunakan fluks konsumsi aksi-massa unx . Fluks yang sama mengurangi nutrisi, sedangkan pertumbuhan spesies boleh berbeda melalui hasil konversi η . Jangan menambahkan pelindian, migrasi, atau kapasitas dukung tanpa menyatakannya sebagai perluasan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan sistem tercampur sempurna, pasokan nutrisi konstan $q > 0$, konsumsi aksi-massa unx , hasil konversi konstan $\eta > 0$, kematian per kapita $d > 0$, serta tanpa pelindian nutrisi, migrasi, atau pembatasan lain, model minimal yang sah adalah $\dot{x} = \eta unx - dx = x(\eta un - d)$ dan $\dot{n} = q - unx$. Jika $x, n \geq 0$, medan pada $x = 0$ memberi $\dot{x} = 0$ dan pada $n = 0$ memberi $\dot{n} = q > 0$, sehingga kuadran nonnegatif invarian.

Cek cepat

Setiap suku dalam $\dot{x}$ harus berdimensi $[x]T^{-1}$, setiap suku dalam $\dot{n}$ harus berdimensi $[n]T^{-1}$, konsumsi harus lenyap bila $x = 0$ atau $n = 0$, dan kematian harus tetap bekerja ketika nutrisi tidak ada.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tetapkan asumsi minimal: kedua besaran adalah kerapatan rata-rata dalam wadah tercampur sempurna; satu-satunya interaksi adalah perjumpaan spesies–nutrien; pasokan tidak bergantung waktu; semua parameter konstan.

Rumus

$$x(t), n(t) \geq 0, \quad q, u, \eta, d > 0$$

- **Penjelasan**

Aksi-massa membuat jumlah perjumpaan per volume dan waktu sebanding dengan hasil kali kedua kerapatan.

Rumus

$$C(n, x) = unx$$

- **Penjelasan**

Setiap unit konsumsi mengurangi nutrisi dengan satu unit pada skala n , sedangkan η mengubah konsumsi menjadi produksi bersih spesies; kematian bersifat per kapita.

Rumus

$$\dot{x} = \eta C - dx, \quad \dot{n} = q - C$$

- **Penjelasan**

Substitusi fluks konsumsi menghasilkan sistem dua variabel tertutup.

Rumus

$$\dot{x} = x(\eta un - d), \quad \dot{n} = q - unx$$

- **Penjelasan**

Periksa arah medan pada batas biologis.

Rumus

$$\dot{x}|_{x=0} = 0, \quad \dot{n}|_{n=0} = q > 0$$

Simpulan

Model ini adalah satu jawaban minimal, bukan satu-satunya model yang mungkin. Pelindian nutrisi, pemeliharaan, saturasi konsumsi, atau kompetisi intraspesifik memerlukan parameter dan asumsi tambahan.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Pada setiap sumbu, komponen normal medan mempunyai faktor variabel yang nol. Setelah memperoleh nonnegativitas, bandingkan masing-masing komponen dengan persamaan logistik tanpa kompetitor.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Ya. Ruas kanan berupa polinom, sehingga solusi lokal unik. Pada $x = 0$, $\dot{x} = 0$; pada $y = 0$, $\dot{y} = 0$. Karena itu kedua sumbu invarian dan, oleh keunikan, lintasan yang berawal di kuadran nonnegatif tidak dapat menyeberanginya. Di dalam kuadran, $\dot{x} \leq x(1 - x)$ dan $\dot{y} \leq cy(1 - y)$, sehingga $0 \leq x(\tau) \leq \max\{x_0, 1\}$ dan $0 \leq y(\tau) \leq \max\{y_0, 1\}$. Solusi karenanya tetap nonnegatif, terbatas, dan ada untuk semua $\tau \geq 0$.

Cek cepat

Bukti lengkap harus mencakup keunikan, invariansi kedua sumbu, dan batas global; sekadar mengatakan bahwa faktor x dan y 'menjaga tanda' belum membuktikan tidak adanya ledakan waktu hingga.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Medan polinomial bersifat lokal Lipschitz, sehingga melalui setiap keadaan awal terdapat solusi lokal unik.

Rumus

$$F(x, y) = (x(1 - x - ay), cy(1 - y - bx))$$

- **Penjelasan**

Setiap sumbu adalah lintasan invarian.

Rumus

$$F_1(0, y) = 0, \quad F_2(x, 0) = 0$$

- **Penjelasan**

Jika lintasan interior mencapai sumbu lalu melintasinya, akan ada dua solusi melalui titik batas yang sama, bertentangan dengan keunikan.

Rumus

$$(x_0, y_0) \in [0, \infty)^2 \Rightarrow (x(\tau), y(\tau)) \in [0, \infty)^2$$

- **Penjelasan**

Suku kompetisi tidak positif, sehingga setiap spesies didominasi oleh persamaan logistik skalar.

Rumus

$$\dot{x} \leq x(1-x), \quad \dot{y} \leq cy(1-y)$$

- **Penjelasan**

Perbandingan logistik memberi kotak pembatas maju dan meniadakan ledakan waktu hingga.

Rumus

$$0 \leq x \leq \max\{x_0, 1\}, \quad 0 \leq y \leq \max\{y_0, 1\}$$

Simpulan

Model (6.4) terumuskan baik secara biologis pada kuadran nonnegatif untuk parameter positif.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Hitung nilai eigen pada $(0, 0)$, $(1, 0)$, dan $(0, 1)$. Untuk titik potong dua nullcline, pisahkan kasus $ab < 1$, $ab > 1$, dan $ab = 1$; dalam ketiganya tidak ada titik tetap interior nonnegatif.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetap nonnegatif adalah $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, dan $P_2 = (0, 1)$. Kandidat $P_3 = ((1-a)/(1-ab), (1-b)/(1-ab))$ berada di luar kuadran pertama jika $ab \neq 1$; jika $ab = 1$, kedua nullcline interior sejajar dan tidak berpotongan. Nilai eigen berturut-turut adalah $(1, c)$ di P_0 , $(-1, c(1-b))$ di P_1 , dan $(1-a, -c)$ di P_2 . Jadi P_0 sumber, P_1 simpul stabil, dan P_2 pelana. Semua kondisi awal interior $x_0, y_0 > 0$ menuju $(1, 0)$: spesies x bertahan pada kapasitas dukung terskalakan, sedangkan spesies y tersingkir.

Cek cepat

Hasil numerik harus menuju $(1, 0)$ dari beberapa kondisi awal interior dan tidak boleh memakai titik salah $P_2 = (0, 1)$. Klasifikasi umum: $a, b < 1$ memberi koeksistensi stabil; $a, b > 1$ memberi dua keadaan eksklusif stabil yang dipisahkan pelana interior; tanda campuran memberi dominasi satu spesies.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Pecahkan faktor pada kedua persamaan. Daftar empat kandidat yang benar memperbaiki salah cetak sumber yang menggandakan $(1, 0)$.

Rumus

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab} \right)$$

- **Penjelasan**

Karena $1 - a > 0$ dan $1 - b < 0$, salah satu koordinat P_3 negatif untuk setiap tanda $1 - ab$. Pada $ab = 1$, persamaan nullcline tidak konsisten karena $a < 1 < b$.

Rumus

$$ab < 1: y_3 < 0; \quad ab > 1: x_3 < 0; \quad ab = 1: P_3 \text{ tidak ada}$$

- **Penjelasan**

Evaluasi matriks Jacobi pada tiga titik tetap biologis.

Rumus

$$\sigma(J(P_0)) = \{1, c\}, \quad \sigma(J(P_1)) = \{-1, c(1-b)\}, \quad \sigma(J(P_2)) = \{1-a, -c\}$$

- **Penjelasan**

Keterbatasan dari Soal 2 dan kriteria Dulac meniadakan atraktor tak terbatas dan orbit periodik interior; manifold stabil P_2 berada pada sumbu y .

Rumus

$$\nabla \cdot \left(\frac{F}{xy} \right) = -\frac{1}{y} - \frac{c}{x} < 0$$

- **Penjelasan**

Dengan demikian setiap lintasan interior hanya dapat berakhir pada simpul stabil P_1 .

Rumus

$$(x(\tau), y(\tau)) \rightarrow (1, 0)$$

- **Penjelasan**

Untuk pemeriksaan umum di titik interior, diskriminan karakteristik yang benar memuat faktor $(1 - ab)$ di dalam suku determinan.

Rumus

$$\Delta = T^2 - 4D = \frac{[a-1+c(b-1)]^2 - 4c(a-1)(b-1)(1-ab)}{(1-ab)^2}$$

Simpulan

Spesies x merupakan kompetitor unggul dalam rezim ini. Rumus diskriminan pada sumber, $[(a-1)-c(b-1)]^2/(1-ab)^2$, kehilangan suku $4abc(a-1)(b-1)/(1-ab)^2$ dan tidak benar secara umum.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Nullcline pertama adalah $x = 4/(1 + y)$. Nullcline kedua adalah $y = 0$ atau $x = 1 + y$. Setelah klasifikasi lokal, perhatikan tanda suku $+y^2$ ketika y besar.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dalam kuadran nonnegatif terdapat dua titik tetap: $(4, 0)$ dan $(2, 1)$. matriks Jacobi ialah

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - y & -x \\ -y & -x + 1 + 2y \end{pmatrix}. \text{ Di } (4, 0), \text{ nilai eigennya } -1, -3, \text{ sehingga titik itu simpul stabil. Di } (2, 1),$$

nilai eigennya $(-1 - \sqrt{17})/2$ dan $(-1 + \sqrt{17})/2$, sehingga titik itu pelana. Kuadran nonnegatif invarian, tetapi model tidak terumuskan baik secara global untuk semua keadaan biologis: $x(t) \leq \max\{x_0, 4\}$, sedangkan untuk y cukup besar berlaku $\dot{y} \geq y^2/2$, sehingga beberapa solusi meledak dalam waktu hingga. Karena itu model hanya mungkin menjadi pendekatan lokal; suku $+y^2$ memerlukan mekanisme pembatas untuk model populasi global.

Cek cepat

Jejak dan determinan harus $(-4, 3)$ di $(4, 0)$ dan $(-1, -4)$ di $(2, 1)$. Pada batas $x = 0$, $\dot{x} = 4 > 0$; pada batas $y = 0$, $\dot{y} = 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Nullcline $y = 0$ memberi titik batas, sedangkan cabang $x = 1 + y$ memberi titik interior.

Rumus

$$y = 0 \Rightarrow x = 4; \quad x = 1 + y, \quad x(1 + y) = 4 \Rightarrow (x, y) = (2, 1)$$

- **Penjelasan**

Turunkan kedua komponen medan.

Rumus

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - y & -x \\ -y & -x + 1 + 2y \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Matriks di titik batas berbentuk segitiga.

Rumus

$$J(4, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1, -3$$

- **Penjelasan**

Di titik interior, determinan negatif langsung menunjukkan pelana.

Rumus

$$J(2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda - 4 = 0, \quad \lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

• Penjelasan

Nullcline $x = 4/(1 + y)$, garis $x = 1 + y$, dan manifold stabil pelana membagi lintasan yang menuju $(4, 0)$ dari lintasan dengan y meningkat tak terbatas.

Rumus

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{1+y}, \quad \dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ atau } x = 1 + y$$

• Penjelasan

Kuantifikasi cacat biologis. Karena $x \leq M = \max\{x_0, 4\}$, bila $y \geq 2(M - 1)$, pertumbuhan y mendominasi persamaan Riccati yang meledak.

Rumus

$$\dot{y} = y(1 + y - x) \geq y(y + 1 - M) \geq \frac{1}{2}y^2$$

Simpulan

Model menjaga nonnegativitas, tetapi tidak menjaga keterbatasan atau keberadaan global. Suku kuadrat positif pada y membuatnya tidak memadai sebagai model populasi global tanpa saturasi, mortalitas bergantung kerapatan, atau pembatas lain.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Biarkan $[X] = X$, $[Y] = Y$, dan $[t] = T$. Gunakan keadaan tunak persamaan pertama $X_0 = \beta/\alpha$, skala waktu $1/\alpha$, dan skala $Y_0 = \alpha/\zeta$, yang selalu positif.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $[X] = X$, $[Y] = Y$, dan $[t] = T$, dimensinya adalah $[\alpha] = T^{-1}$, $[\beta] = XT^{-1}$, $[\gamma] = X^{-1}T^{-1}$, $[\delta] = T^{-1}$, dan $[\zeta] = Y^{-1}T^{-1}$. Ambil $X_0 = \beta/\alpha$, $Y_0 = \alpha/\zeta$, $\tau = \alpha t$, $x = X/X_0$, dan $y = Y/Y_0$. Maka $dx/d\tau = 1 - x$ dan $dy/d\tau = y(\rho x - \mu - y)$, dengan dua parameter tak berdimensi $\rho = \gamma\beta/\alpha^2$ dan $\mu = \delta/\alpha$.

Cek cepat

Substitusi balik harus memulihkan kedua persamaan asli. ρ dan μ wajib tak berdimensi, dan semua skala harus positif tanpa memerlukan syarat tambahan seperti $\gamma\beta > \alpha\delta$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Samakan dimensi kedua suku pada persamaan x dengan $[\dot{x}] = XT^{-1}$.

Rumus

$$[\alpha] = T^{-1}, \quad [\beta] = XT^{-1}$$

• Penjelasan

Samakan tiga suku pada persamaan Y dengan $[\dot{Y}] = YT^{-1}$.

Rumus

$$[\gamma] = X^{-1}T^{-1}, \quad [\delta] = T^{-1}, \quad [\zeta] = Y^{-1}T^{-1}$$

• Penjelasan

Pilih skala X dari keseimbangan pasokan–peluruhan, skala waktu dari laju peluruhan X , dan skala Y agar koefisien kuadrat menjadi satu.

Rumus

$$X_0 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad t_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad Y_0 = \frac{\alpha}{\zeta}$$

• Penjelasan

Masukkan $X = X_0x$, $Y = Y_0y$, dan $\tau = t/t_0 = \alpha t$.

Rumus

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 - x$$

• Penjelasan

Kelompokkan dua kombinasi parameter yang tersisa.

Rumus

$$\frac{dy}{d\tau} = y(\rho x - \mu - y), \quad \rho = \frac{\gamma\beta}{\alpha^2}, \quad \mu = \frac{\delta}{\alpha}$$

Simpulan

Penskalaan ini selalu terdefinisi untuk parameter positif dan mengurangi lima parameter berdimensi menjadi dua kelompok tak berdimensi.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Gunakan definisi tepat pada Fussmann dkk., Science 290 (2000), hlm. 1358, Persamaan (1)–(4): bedakan R , yaitu *Brachionus* reproduktif, dari B , yaitu total *Brachionus*. Agar model tanpa pemisahan demografis tertutup dalam B , nyatakan asumsi tambahan $R = B$ sebelum menghapus persamaan R .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Menurut Fussmann dkk., Science 290 (2000), hlm. 1358, Persamaan (1)–(4), predator adalah rotifera *Brachionus calyciflorus* dan mangsa adalah alga *Chlorella vulgaris*. N adalah konsentrasi nitrogen dinamis, yakni sumber daya pembatas pertumbuhan alga; C menyatakan *Chlorella*, R *Brachionus* yang bereproduksi,

dan B total *Brachionus*. Satu reduksi tanpa pemisahan demografis menetapkan penutupan tambahan $R = B$, menghapus persamaan R serta parameter transisi λ , mempertahankan persamaan N dan C , dan mengganti persamaan predator dengan $dB/dt = F_B(C)B - (\delta + m)B$. Reduksi ini adalah asumsi penyederhanaan baru, bukan identitas yang diturunkan tanpa syarat dari model empat persamaan.

Cek cepat

Jawaban harus memuat *Brachionus calyciflorus* sebagai predator, *Chlorella vulgaris* sebagai mangsa, N sebagai konsentrasi nitrogen dinamis/sumber daya pembatas alga, serta arti C, R, B . Persamaan tereduksi wajib memakai $R = B$, menghilangkan persamaan R dan λ , mempertahankan persamaan N, C , serta menandai penutupan itu sebagai asumsi tambahan.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Artikel primer mengidentifikasi rantai trofik eksperimen dan memberi empat variabel keadaan pada hlm. 1358, Persamaan (1)–(4).

Rumus

predator = *Brachionus calyciflorus*, mangsa = *Chlorella vulgaris*

- **Penjelasan**

Notasi artikel memisahkan sumber daya lingkungan, mangsa, predator reproduktif, dan predator total.

Rumus

N = konsentrasi nitrogen dinamis, C = *Chlorella*, R = *Brachionus* reproduktif, B = *Brachionus* total

- **Penjelasan**

Nitrogen bukan sekadar parameter: N berubah menurut persamaan dinamis dan menjadi sumber daya pembatas yang memasuki pertumbuhan alga pada persamaan C .

Rumus

(N, C) tetap dipertahankan sebagai variabel keadaan

- **Penjelasan**

Menghapus perbedaan reproduktif/nonreproduktif memerlukan penutupan eksplisit yang menyamakan fraksi reproduktif dengan populasi total.

Rumus

$R = B$

- **Penjelasan**

Di bawah penutupan tersebut, hapus persamaan tersendiri untuk R dan parameter perpindahan demografis λ ; gunakan total B langsung dalam pertumbuhan predator.

Rumus

$$\frac{dB}{dt} = F_B(C)B - (\delta + m)B$$

- **Penjelasan**

Persamaan nitrogen dan Chlorella dari model primer dipertahankan, dengan setiap kemunculan predator ditafsirkan melalui variabel total B .

Rumus

(N, C, B) membentuk model tereduksi tiga variabel

Simpulan

Identifikasi organisme dan arti N, C, R, B berasal dari artikel primer Fussmann dkk., Science 290 (2000), hlm. 1358, Persamaan (1)–(4). Langkah $R = B$, penghapusan R dan λ , serta persamaan tiga-variabel yang dihasilkan adalah penutupan penyederhanaan yang ditambahkan untuk menjawab soal, sehingga harus dilaporkan sebagai asumsi model.

Epidemiologi

0005-LEGA-V101-CH07

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menyusun model kompartemen yang mendeskripsikan infeksi dan epidemi.
- Merumuskan bentuk tak berdimensi dari model dua dimensi dan menilai dinamikanya melalui analisis bidang fase.
- Menerjemahkan hasil analisis model ke dalam istilah biologis dan membahas arti pentingnya dalam konteks tersebut.

Infeksi virus

Pertama-tama, kita memodelkan dinamika infeksi virus, seperti hepatitis B atau C, untuk mendeskripsikan bagaimana virus yang bersangkutan dapat menyebar dan memperbanyak diri di dalam tubuh seseorang. Nyatakan dengan X jumlah rata-rata sel yang tidak terinfeksi dan menjadi sasaran infeksi virion; misalkan Y adalah jumlah rata-rata sel terinfeksi, dan V adalah beban virus rata-rata (atau jumlah virion bebas di dalam tubuh). Sel yang tidak terinfeksi diproduksi tubuh dengan laju konstan λ , mati dengan laju δX , dan terinfeksi dengan laju $f(X, V)X$, dengan f sebagai suatu fungsi dari X dan V . Akibatnya, sel terinfeksi Y terbentuk dengan laju $f(X, V)X$, dan kita mengasumsikan sel-sel tersebut mati dengan laju aY . Terakhir, virion bebas diproduksi dengan laju yang sebanding dengan jumlah sel terinfeksi, yaitu kY , dan disingkirkan atau dihancurkan dengan laju κV . Sebagai pendekatan pertama, jika kita menganggap f sebagai fungsi linear dari V , yaitu $f(X, V) = bV$, kita memperoleh model berikut. **Catatan:** M.A. Nowak, S. Bonhoeffer, A.M. Hill, R. Boehme, H.C. Thomas, and H. McDade, *Viral dynamics in hepatitis B virus infection*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 93, 4398-4402 (1996).

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \lambda - \delta X - bVX, \\ \frac{dY}{dt} = bVX - aY, \\ \frac{dV}{dt} = kY - \kappa V, \end{cases} \quad (7.1)$$

Model ini memiliki enam parameter dan empat variabel. Kita dapat menskalakan ulang waktu dan V , tetapi sebaiknya tidak menskalakan X dan Y secara terpisah karena keduanya menghitung sel dan suku bVX memindahkan sel dari kompartemen X ke kompartemen Y . Karena itu, kita dapat mereduksi Persamaan (7.1) menjadi model dengan tiga parameter. Secara lebih tepat, misalkan

$$\tau = \delta t, \quad x = \frac{\lambda b}{\delta^2} X, \quad y = \frac{k b}{\delta^2} Y, \quad v = \frac{b}{\delta} V.$$

Dengan demikian, bentuk terskala Persamaan (7.1) adalah

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \zeta - x - v x, \\ \frac{dy}{d\tau} = v x - \eta y, \\ \frac{dv}{d\tau} = y - \mu v, \end{cases} \quad (7.2)$$

dengan $\zeta = \frac{\lambda k b}{\delta^3}$, $\eta = \frac{a}{\delta}$, dan $\mu = \frac{\kappa}{\delta}$ sebagai parameter tak berdimensi.

Kita menskalakan waktu berdasarkan laju kematian sel yang tidak terinfeksi. Sebagai alternatif, kita dapat menskalakan waktu berdasarkan laju produksi sel yang tidak terinfeksi oleh tubuh, yaitu dengan mendefinisikan $\tau = \lambda t / X_0$, dengan $X_0 = \delta^2 / (k b)$. Kita juga dapat menggunakan gabungan kedua skala waktu tersebut. Secara umum,

variabel tak berdimensi dapat didefinisikan dengan lebih dari satu cara. Pilihan yang paling mudah digunakan sering kali adalah pilihan yang menghasilkan parameter tak berdimensi berorde satu, sejauh hal itu memungkinkan.

Pembaca kami rujuk pada artikel tahun 1998 karya A.U. Neumann *et al.* yang berjudul [Hepatitis C viral dynamics in vivo and the antiviral efficacy of interferon-alpha therapy](#) untuk melihat bagaimana estimasi parameter dalam model (7.1) dapat digunakan guna memahami peran interferon dalam terapi hepatitis C.

Pemodelan penyakit menular

Literatur mengenai pemodelan penyakit menular sangat luas (untuk sebuah tinjauan, lihat misalnya artikel tahun 2000 karya H. Hethcote yang berjudul [The Mathematics of Infectious Diseases](#)). Model dasar yang paling umum disebut model MSEIRS. Setiap huruf dalam akronim tersebut merujuk pada kelas atau kompartemen tertentu dalam populasi, dan urutan hurufnya mencerminkan perpindahan individu dari suatu kelas ke kelas di sebelah kanannya seiring perkembangan infeksi atau perubahan status kekebalan. Berbagai kelas tersebut didefinisikan sebagai berikut.

- Kelas M mencakup *bayi dengan kekebalan pasif*. Biasanya, mereka adalah bayi baru lahir yang ibunya memiliki kekebalan dan yang menerima antibodi melalui plasenta sebelum dilahirkan.
- Kelas S adalah kelas individu *rentan*, yang dapat terinfeksi penyakit. Bayi dalam kelas M memiliki kekebalan sementara dan pada akhirnya berpindah ke kelas S.
- Kelas E mencakup individu *terpapar*, yaitu individu yang telah terinfeksi tetapi masih berada dalam masa laten dan belum dapat menularkan penyakit.
- Kelas I adalah kelas individu *infeksius*, yang dapat menularkan penyakit.
- Kelas R mencakup individu yang telah *pulih* (atau meninggal) akibat penyakit, atau yang telah *dikeluarkan* dari kelompok orang yang terdampak penyakit.

Bergantung pada jenis penyakit menularnya, individu dalam kelas R mungkin telah memperoleh kekebalan permanen. Dalam kasus ini, model yang sesuai berjenis MSEIR. Namun, jika individu yang pulih dalam kelas R pada akhirnya kembali rentan, model MSEIRS perlu digunakan. Kebanyakan model realistik menghubungkan kelas-kelas yang dijelaskan di atas dengan kelompok umur. Beberapa model memperlakukan umur a seseorang sebagai variabel bebas. Kelas-kelas lain, seperti kelompok individu bergejala dan tanpa gejala, juga dapat dipertimbangkan, sedangkan jumlah kompartemen yang sesuai beserta sifatnya dipilih oleh pemodel. Penerapan model kompartemen mencakup peramalan perkembangan penyakit serta prediksi efektivitas vaksinasi atau kampanye pemberantasan penyakit. Di bawah ini, kita hanya membahas dua model sederhana, yakni model SIR klasik dan endemik.

Model SIR

Model SIR klasik tidak mencakup kelas M dan E, dan dituliskan sebagai

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha S \frac{I}{N} - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I, \end{cases} \quad (7.3)$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 > 0$, dan $R(0) \geq 0$. Di sini, S , I , dan R adalah nilai harapan jumlah individu dalam setiap kompartemen, sedangkan $N = S + I + R$ adalah total populasi. Perhatikan bahwa kelahiran dan kematian tidak disertakan dalam model. Hampiran ini biasanya sesuai untuk penyakit yang berkembang dalam jangka waktu singkat, sehingga perubahan total populasi dapat diabaikan.

Dalam model ini, I/N menyatakan fraksi individu infeksius. Hasil kali besaran ini dengan *laju kontak* $\alpha > 0$ mengukur rata-rata jumlah kontak efektif (yakni kontak yang menyebabkan penularan penyakit) per individu rentan per satuan waktu. Karena rata-rata terdapat S individu rentan, laju perubahan S adalah $-\alpha SI/N$. Jumlah individu terinfeksi bertambah melalui kontak dengan individu rentan dan berkurang akibat pemulihan dengan suku laju $-\beta I$, dengan $\beta > 0$. Dengan menjumlahkan ketiga persamaan tersebut, mudah diperiksa bahwa $dN/dt = 0$, sesuai dengan dugaan

karena kelahiran dan kematian telah diabaikan. Karena itu, sistem (7.3) dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa dua dimensi dengan menghilangkan persamaan terakhir untuk R . Dua persamaan yang tersisa dapat dituliskan dalam bentuk tak berdimensi dengan menetapkan

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad \tau = \alpha t.$$

Dengan demikian, dua persamaan pertama dari (7.3) menjadi

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\tau} = -si, \\ \frac{di}{d\tau} = si - \delta i, \end{cases} \quad (7.4)$$

dengan $\delta = \beta/\alpha > 0$. Besaran $\sigma = 1/\delta$ adalah laju kontak α dikalikan waktu karakteristik $1/\beta$ selama seseorang tetap infeksius. Besaran ini disebut *bilangan kontak* penyakit dan sama dengan *angka reproduksi dasar* R_0 ketika infeksi diperkenalkan ke dalam populasi yang seluruhnya rentan.

Karena $(1 - s - i)N = R \geq 0$, Persamaan (7.4) hanya bermakna secara biologis jika s dan i tetap taknegatif serta memenuhi $s + i \leq 1$, asalkan kondisi awalnya memenuhi persyaratan tersebut. Dengan kata lain, lintasan sistem dinamik (7.4) yang bermula di dalam segitiga

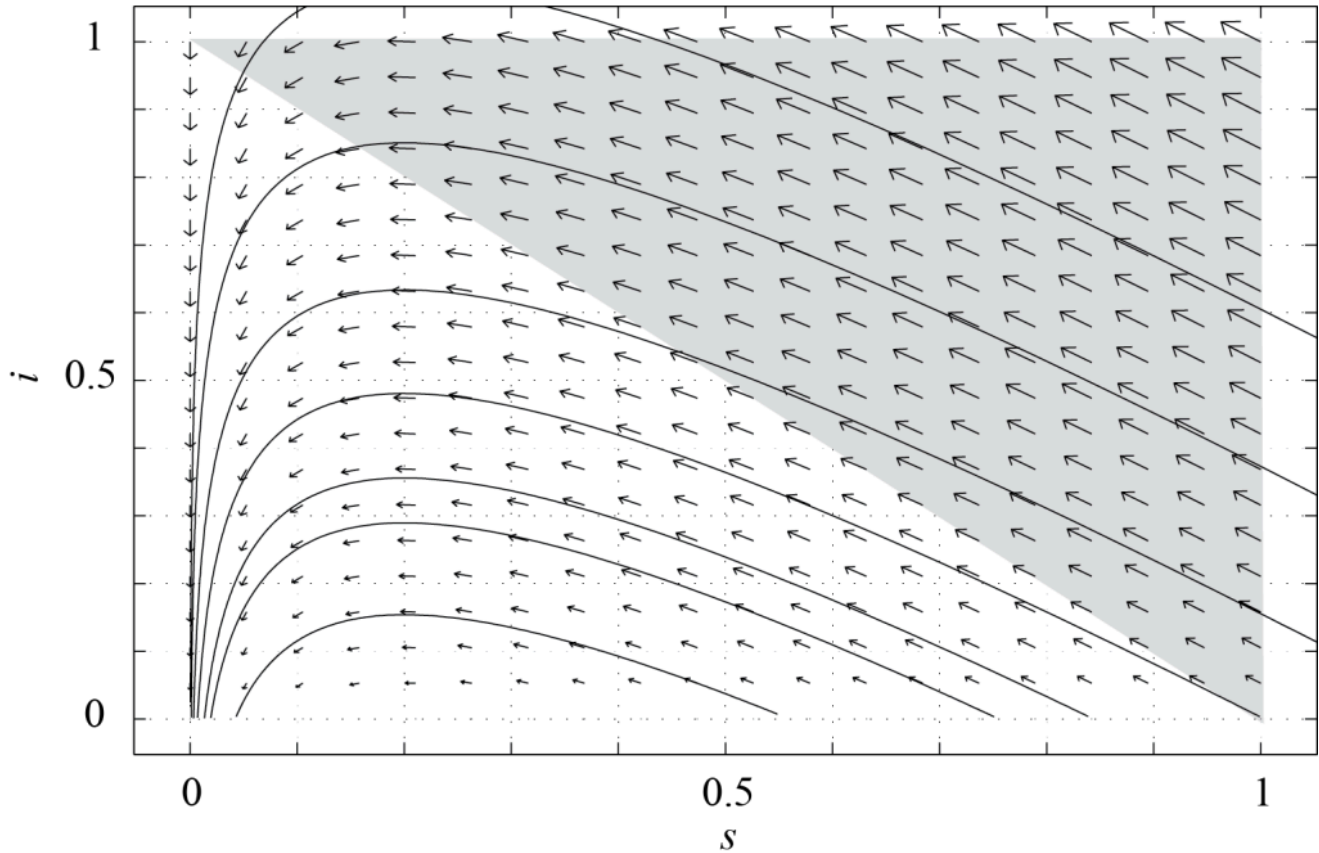
$$\mathcal{T} = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

harus tetap berada di dalam $\mathcal{T}$. Untuk memeriksanya, tinjau dinamika pada batas $\mathcal{T}$. Pertama, misalkan $s = 0$ dan $i \leq 1$. Maka $ds/d\tau = 0$, yaitu s tetap sama dengan nol, sedangkan i berkurang menuju nol tetapi tidak menjadi negatif. Demikian pula, jika $i = 0$, maka s dan i keduanya tetap konstan (apa makna biologis fakta ini?). Terakhir, jika $s + i = 1$, maka $\frac{d}{d\tau}(s + i) = -\delta i \leq 0$, sehingga $s + i$ tidak akan meningkat melewati nilai 1. Sistem (7.4) memiliki tak hingga banyaknya titik tetap di dalam $\mathcal{T}$, yaitu titik-titik dengan $i = 0$ dan s sembarang.

$$s' = -s i$$

$$i' = s i - \delta i$$

$$\delta = 0.2$$



Gambar 7.1. Bidang fase sistem (7.4), dengan $\delta = 0.2$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. Hanya dinamika di dalam $\mathcal{T}$ (tidak diarsir) yang relevan. [Deskripsi Gambar](#)

Gambar 7.1 memperlihatkan potret fase (7.4) yang diperoleh menggunakan PPLANE dengan $\delta = 0.2$. Dalam kasus ini, kita melihat bahwa semua lintasan di dalam $\mathcal{T}$ konvergen menuju salah satu titik tetap, yaitu $\lim_{t \rightarrow \infty} i = 0$. Artinya, epidemi akhirnya mereda dan hanya menyisakan individu rentan dan/atau individu yang telah pulih dari penyakit.

Model endemik klasik

Untuk penyakit endemik, kelahiran dan kematian perlu diperhitungkan sehingga model SIR menjadi

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \nu N - \mu S - \alpha S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = -\mu I + \alpha S \frac{I}{N} - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = -\mu R + \beta I, \end{cases} \quad (7.5)$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 > 0$, dan $R(0) \geq 0$. Di sini, parameter barunya adalah laju kematian per kapita μ dan laju kelahiran per kapita ν dalam populasi. Dengan mengasumsikan kedua laju tersebut positif dan memilih $\mu = \nu$, total populasi $N = S + I + R$ menjadi konstan. Dalam kasus ini, dengan menggunakan variabel tak berdimensi yang sama seperti pada model SIR klasik, kita memperoleh sistem dinamik dua dimensi berikut dalam bentuk tak berdimensi,

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \eta - \eta s - si, \\ \frac{di}{dt} = -(\eta + \delta)i + si, \end{cases} \quad (7.6)$$

dengan $\eta = v/\alpha = \mu/\alpha$.

Seperti sebelumnya, mudah diperiksa bahwa lintasan yang bermula di dalam $\mathcal{T}$ tetap berada di dalam $\mathcal{T}$ (lihat soal-soal). Titik-titik tetap (7.6) pada bidang (s, i) adalah

$$P_1 = (1, 0) \quad \text{dan} \quad P_2 = \left(\eta + \delta, \frac{\eta(1-\eta-\delta)}{\eta+\delta} \right).$$

matriks Jacobi dari (7.6) adalah

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} -\eta - i & -s \\ i & s - (\eta + \delta) \end{pmatrix}$$

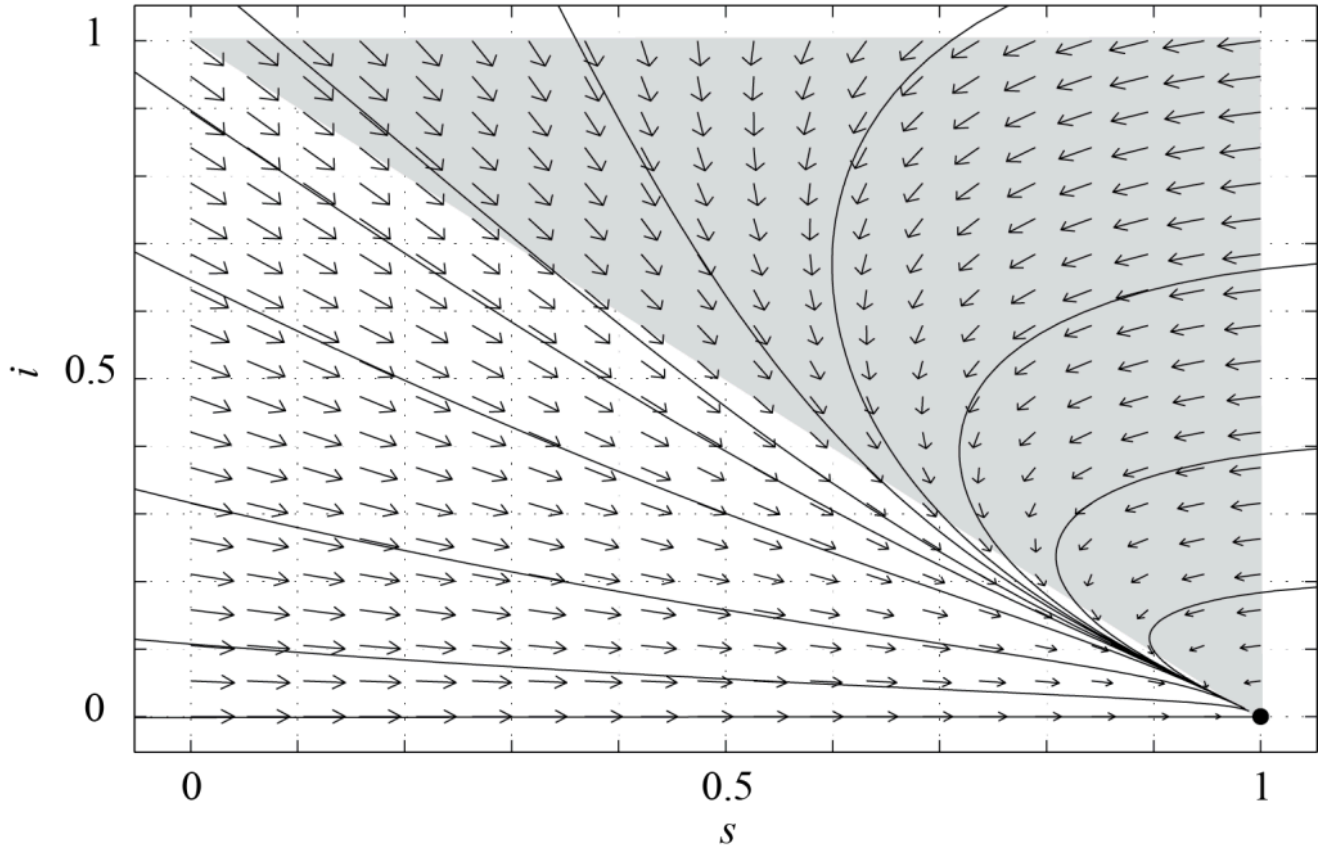
dan

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\eta & -1 \\ 0 & 1 - (\eta + \delta) \end{pmatrix}.$$

Keberadaan P_2 di dalam $\mathcal{T}$ bergantung pada parameter δ dan η . Lebih tepatnya, $P_2 \in \mathcal{T} \Leftrightarrow 0 < \eta + \delta \leq 1$. Pada batas $\eta + \delta = 1$, kedua titik tetap berimpit, $P_2 = P_1 = (1, 0)$, dan bersifat nonhiperbolik karena matriks Jacobi memiliki satu nilai eigen nol. Jika $\eta + \delta > 1$, P_1 merupakan satu-satunya titik tetap di dalam $\mathcal{T}$. Nilai-nilai eigen $J(P_1)$ adalah $-\eta$ dan $1 - (\eta + \delta)$, sehingga P_1 merupakan simpul stabil secara lokal. Simpulan global memerlukan argumen tambahan: di dalam $\mathcal{T}$, persamaan kedua memberikan $\frac{di}{dt} = i[s - (\eta + \delta)] \leq i[1 - (\eta + \delta)]$, sehingga i menuju nol, dan dinamika demografis kemudian membawa s menuju 1. Dengan demikian, semua lintasan yang bermula di dalam $\mathcal{T}$ konvergen menuju P_1 , yang berarti bahwa dalam jangka panjang populasi hanya terdiri atas individu rentan. Hal ini terjadi karena individu yang telah pulih dari penyakit pada akhirnya meninggal dan digantikan oleh bayi baru lahir yang rentan. Keadaan ini diilustrasikan pada Gambar 7.2, yang memperlihatkan potret fase (7.6) yang diperoleh menggunakan PPLANE dengan $\delta = 0.2$ dan $\eta = 1$.

$$\begin{aligned}s' &= \eta - \eta s - s i \\ i' &= -(\eta + \delta) i + s i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= 1 \\ \delta &= 0.2\end{aligned}$$



Gambar 7.2. Bidang fase sistem (7.6), dengan $\delta = 0.2$ dan $\eta = 1$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. Hanya dinamika di dalam T (tidak diarsir) yang relevan. [Deskripsi Gambar](#)

Sebaliknya, jika $\eta + \delta < 1$, maka P_1 merupakan titik pelana dan

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\eta}{\eta + \delta} & -(\eta + \delta) \\ \frac{\eta(1 - \eta - \delta)}{\eta + \delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

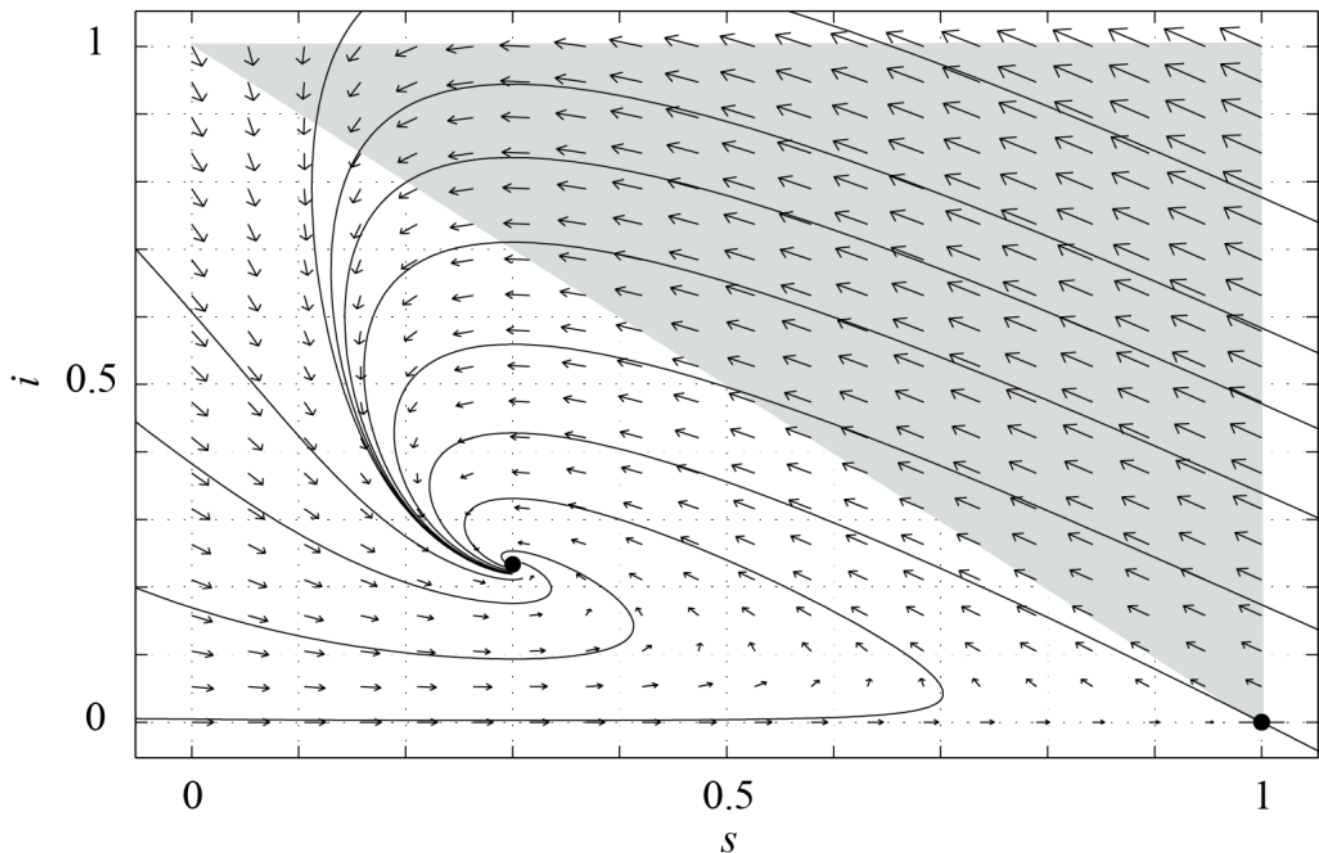
Determinan $J(P_2)$ sama dengan $\eta(1 - \eta - \delta)$ dan bernilai positif. Jejak $J(P_2)$ bernilai negatif, sehingga P_2 merupakan spiral stabil atau simpul stabil secara lokal. Klasifikasi matriks Jacobi ini hanya bersifat lokal; dengan menggunakan keinvarianan $\mathcal{T}$ dan argumen Bendixson-Dulac untuk menyingkirkan orbit periodik di bagian interior, dapat disimpulkan bahwa lintasan yang bermula di dalam $\mathcal{T}$ dengan jumlah individu terinfeksi awal yang positif konvergen menuju P_2 , yang disebut *kesetimbangan endemik*. Lintasan pada batas bebas penyakit tetap berada di batas itu dan konvergen menuju titik tetap bebas penyakit. Dalam kasus ini, penyakit selalu ada dalam populasi dan jumlah individu terinfeksi selalu tak nol. Gambar 7.3 memperlihatkan potret fase (7.6) dengan $\eta = 0.1$ dan $\delta = 0.2$.

$$s' = \eta - \eta s - s i$$

$$i' = -(\eta + \delta) i + s i$$

$$\eta = 0.1$$

$$\delta = 0.2$$



Gambar 7.3. Bidang fase sistem (7.6), dengan $\delta = 0.2$ dan $\eta = 0.1$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. Hanya dinamika di dalam T (tidak diarsir) yang relevan. [Deskripsi Gambar](#)

Ringkasan

Bab ini mengilustrasikan bagaimana konsep-konsep pemodelan yang dibahas dalam bab-bab sebelumnya dapat diterapkan untuk mendeskripsikan dinamika penyakit menular dan penyebaran epidemi dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Selain itu, bab ini memberikan pengantar dasar mengenai terminologi dan penerapan model kompartemen.

Seharusnya kini jelas bahwa model dengan tingkat kerumitan sembarang dapat dibangun dari alat-alat sederhana yang dibahas dalam buku ini. Proses pemodelannya selalu sama, betapapun rumit model tersebut. Metode analisis dalam bentuk pemetaan atau persamaan diferensial juga serupa, tetapi menjadi makin rumit ketika dimensi model meningkat. Secara khusus, sistem dinamik tiga dimensi yang terdiferensialkan secara kontinu dapat memperlihatkan kekacauan, yang pemahamannya memerlukan teknik lebih lanjut daripada yang dibahas di sini. Bagian bacaan lanjutan memuat buku-buku mengenai sistem dinamik dan kekacauan yang mungkin ingin dirujuk oleh pembaca.

Deskripsi Gambar

Gambar 7.1: Potret fase pada bidang (s, i) yang memperlihatkan medan vektor dan beberapa lintasan. Nilai s dan i sama-sama bervariasi antara 0 dan 1. Lintasan bergerak dari kanan ke kiri dan berakhir pada sumbu s . Segitiga besar berwarna abu-abu dan diarsir menutupi bagian kanan atas grafik; segitiga ini merepresentasikan daerah ruang fase

(dengan $s + i > 1$) yang tidak dapat dicapai oleh dinamika. [[Kembali ke Gambar 7.1](#)]

Gambar 7.2: Potret fase pada bidang (s, i) yang memperlihatkan medan vektor dengan semua lintasan konvergen menuju satu titik kesetimbangan stabil (simpul stabil) di sudut kanan bawah, pada koordinat $(1, 0)$. Nilai s dan i sama-sama bervariasi antara 0 dan 1. Segitiga besar berwarna abu-abu dan diarsir menutupi bagian kanan atas grafik; segitiga ini merepresentasikan daerah ruang fase (dengan $s + i > 1$) yang tidak dapat dicapai oleh dinamika. [[Kembali ke Gambar 7.2](#)]

Gambar 7.3: Potret fase pada bidang (s, i) yang memperlihatkan medan vektor dan beberapa lintasan. Nilai s dan i sama-sama bervariasi antara 0 dan 1. Segitiga besar berwarna abu-abu dan diarsir menutupi bagian kanan atas grafik; segitiga ini merepresentasikan daerah ruang fase (dengan $s + i > 1$) yang tidak dapat dicapai oleh dinamika. Sebuah titik hitam yang mencolok, yang bersesuaian dengan titik tetap stabil, terletak di bagian tengah bawah bidang fase. Titik tetap lain pada $(1, 0)$ merupakan titik pelana. [[Kembali ke Gambar 7.3](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Tuliskan model (7.1) dalam bentuk tak berdimensi dengan mendefinisikan $\tau = \lambda k b t / \delta^2$ dan variabel x, y , serta v yang sesuai. Jelaskan langkah yang Anda lakukan dan periksa bahwa τ tak berdimensi.

Soal 2

Pertimbangkan model (7.2).

1. Tentukan titik-titik tetap sistem ini.
2. Apa syarat pada parameter agar titik-titik tetap ini berada di oktan pertama? Apa makna biologis syarat-syarat tersebut?
3. Bahas kestabilan linear titik tetap dengan $y = v = 0$.

Soal 3

Pertimbangkan model (7.6). Tunjukkan bahwa lintasan yang bermula di segitiga $\mathcal{T}$ tetap berada di $\mathcal{T}$.

Soal 4

Pertimbangkan model (7.6) dengan $\eta + \delta < 1$. Adakah nilai η dan δ yang membuat P_2 menjadi simpul stabil, bukan spiral stabil?

Soal 5

Model MSEIR sesuai untuk penyakit seperti rubela atau campak karena setelah terinfeksi, seseorang menjadi kebal terhadap penyakit tersebut. Tuliskan sistem persamaan untuk model MSEIR pada populasi dengan laju kelahiran per kapita ν dan laju kematian per kapita μ , dengan $\nu \neq \mu$. Nyatakan asumsi Anda dan definisikan setiap laju transisi yang digunakan.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Pertahankan skala sel yang sama untuk X dan Y : $X_0 = Y_0 = \delta^2/(kb)$. Gunakan skala virus $V_0 = \delta/b$, lalu nyatakan laju waktu alternatif sebagai $q = \lambda/X_0 = \lambda kb/\delta^2$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Ambil $x = kbX/\delta^2$, $y = kbY/\delta^2$, $v = bV/\delta$, dan $\tau = \lambda kb t/\delta^2$. Dengan $\rho = \delta^3/(\lambda kb) = 1/\zeta$, $\eta = a/\delta$, dan $\mu = \kappa/\delta$, diperoleh $dx/d\tau = 1 - \rho x(1 + v)$, $dy/d\tau = \rho(vx - \eta y)$, dan $dv/d\tau = \rho(y - \mu v)$. Karena $[\lambda] = CT^{-1}$, $[k] = VC^{-1}T^{-1}$, $[b] = V^{-1}T^{-1}$, dan $[\delta] = T^{-1}$, maka $[\lambda kb t/\delta^2] = 1$. Bentuk ini setara dengan (7.2) melalui perubahan waktu $\tau_{\text{alt}} = \zeta \tau_{(7.2)}$.

Cek cepat

Skala X dan Y harus sama agar suku bVX berpindah antarkompartemen tanpa faktor konversi buatan. Substitusi balik wajib memulihkan ketiga persamaan (7.1), dan ρ, η, μ harus tak berdimensi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan skala sel dan virus yang sama dengan penskalaan bab, tetapi ganti skala waktu.

Rumus

$$X_0 = Y_0 = \frac{\delta^2}{kb}, \quad V_0 = \frac{\delta}{b}, \quad q = \frac{\lambda}{X_0} = \frac{\lambda kb}{\delta^2}$$

- **Penjelasan**

Definisikan variabel tak berdimensi.

Rumus

$$x = \frac{X}{X_0}, \quad y = \frac{Y}{Y_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = qt$$

- **Penjelasan**

Substitusi pada persamaan sel tak terinfeksi dan bagi dengan $qX_0 = \lambda$.

Rumus

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 - \frac{\delta}{q}x - \frac{\delta}{q}vx = 1 - \rho x(1 + v)$$

- **Penjelasan**

Gunakan skala sel yang sama pada persamaan sel terinfeksi.

Rumus

$$\frac{dy}{d\tau} = \rho(vx - \eta y)$$

- **Penjelasan**

Substitusi skala virus memberi persamaan ketiga.

Rumus

$$\frac{dv}{d\tau} = \rho(y - \mu v)$$

- **Penjelasan**

Periksa dimensi laju waktu alternatif.

Rumus

$$[\lambda kb] = T^{-3}, \quad [\delta^2] = T^{-2}, \quad \left[\frac{\lambda kb}{\delta^2} t \right] = 1$$

Simpulan

Pilihan waktu alternatif hanya mengalikan ruas kanan bentuk (7.2) dengan $1/\zeta$; lintasan ruang fase sama, tetapi parametrisasinya terhadap waktu berubah.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Dari $v' = 0$, gunakan $y = \mu v$. Persamaan $y' = 0$ lalu memfaktorkan $v(x - \eta\mu) = 0$. Pada titik bebas infeksi, matriks Jacobi mempunyai satu nilai eigen -1 dan satu blok 2×2 .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik bebas infeksi ialah $E_0 = (\zeta, 0, 0)$, selalu berada di oktan nonnegatif untuk $\zeta \geq 0$. Kandidat endemik ialah $E^* = (\eta\mu, (\zeta - \eta\mu)/\eta, (\zeta - \eta\mu)/(\eta\mu))$; ia nonnegatif bila $\zeta \geq \eta\mu$ dan benar-benar interior bila $\zeta > \eta\mu$. Definisikan $\mathcal{R}_v = \zeta/(\eta\mu) = \lambda kb/(\delta a \kappa)$. Di E_0 , nilai eigen adalah -1 dan akar $r^2 + (\eta + \mu)r + \eta\mu - \zeta = 0$. Jadi E_0 stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_v < 1$, pelana jika $\mathcal{R}_v > 1$, dan nonhiperbolik pada ambang $\mathcal{R}_v = 1$, saat kedua titik tetap berimpit.

Cek cepat

Pada $\zeta = \eta\mu$, kandidat endemik harus mereduksi tepat ke $(\zeta, 0, 0)$. Tanda suku konstan polinom eigen, $\eta\mu - \zeta$, harus membalik tepat pada ambang invasi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Persamaan ketiga pada titik tetap menghubungkan sel terinfeksi dan virus bebas.

Rumus

$$0 = y - \mu v \Rightarrow y = \mu v$$

- **Penjelasan**

Masukkan relasi tersebut ke persamaan kedua.

Rumus

$$0 = vx - \eta \mu v = v(x - \eta \mu)$$

- **Penjelasan**

Cabang $v = 0$ memberi titik bebas infeksi.

Rumus

$$v = 0 \Rightarrow y = 0, x = \zeta \Rightarrow E_0 = (\zeta, 0, 0)$$

- **Penjelasan**

Cabang $x = \eta \mu$ memberi titik endemik.

Rumus

$$v = \frac{\zeta}{\eta \mu} - 1, \quad y = \mu v = \frac{\zeta - \eta \mu}{\eta}$$

- **Penjelasan**

Evaluasi matriks Jacobi pada titik bebas infeksi dan pisahkan arah x .

Rumus

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\zeta \\ 0 & -\eta & \zeta \\ 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Blok infeksi menentukan apakah gangguan kecil tumbuh atau meluruh.

Rumus

$$(r + \eta)(r + \mu) - \zeta = 0$$

Simpulan

Rasio $\mathcal{R}_v$ membandingkan produksi infeksi baru dengan kehilangan sel terinfeksi dan virus. Nilai di bawah satu membersihkan infeksi; nilai di atas satu memungkinkan keadaan endemik positif.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Periksa tiga sisi secara terpisah. Pada sisi miring gunakan $i = 1 - s$ setelah menjumlahkan kedua persamaan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada $s = 0$, $s' = \eta > 0$, sehingga medan mengarah masuk. Pada $i = 0$, $i' = 0$, sehingga sumbu s invarian dan $s' = \eta(1 - s)$ tetap berada pada $[0, 1]$. Pada $s + i = 1$, $(s + i)' = \eta(1 - s) - i(\eta + \delta) = -\delta i \leq 0$. Karena ruas kanan polinomial menjamin keunikan, tidak ada lintasan yang dapat menyeberang keluar melalui ketiga sisi; maka $\mathcal{T}$ invarian maju.

Cek cepat

Komponen normal harus bertanda masuk atau menyinggung pada setiap sisi. Pada sudut $(0, 1)$, hasil tetap konsisten: $s' = \eta > 0$ dan $(s + i)' = -\delta < 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Medan polinomial lokal Lipschitz, sehingga solusi unik dan argumen batas dapat dipakai.

Rumus

$$F(s, i) = (\eta(1 - s) - si, i(s - \eta - \delta))$$

- **Penjelasan**

Pada sisi vertikal, komponen s menunjuk ke kanan.

Rumus

$$s = 0: \quad s' = \eta > 0$$

- **Penjelasan**

Pada sisi horizontal, komponen normal nol.

Rumus

$$i = 0: \quad i' = 0, \quad s' = \eta(1 - s)$$

- **Penjelasan**

Pada sisi miring, turunan jumlah kompartemen aktif tidak positif.

Rumus

$$s + i = 1: \quad (s + i)' = -\delta i \leq 0$$

Simpulan

Setiap sisi menahan lintasan di dalam segitiga, sehingga keadaan awal yang mewakili proporsi populasi tetap bermakna secara biologis untuk semua waktu maju.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Tetapkan $q = \eta + \delta$. Di P_2 , gunakan jejak $T = -\eta/q$, determinan $D = \eta(1 - q)$, dan uji tanda diskriminan $T^2 - 4D$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Ya. Untuk $q = \eta + \delta \in (0, 1)$, diskriminannya ialah $\Delta = \eta^2/q^2 - 4\eta(1 - q)$. Karena jejak negatif dan determinan positif, P_2 adalah simpul stabil bila $\Delta \geq 0$, yakni $\eta \geq 4q^2(1 - q)$, dan spiral stabil bila $\eta < 4q^2(1 - q)$. Contoh simpul: $\eta = 0,15$, $\delta = 0,05$, sehingga $q = 0,2$, $\Delta = 0,0825 > 0$, dan nilai eigen sekitar $-0,231386$ serta $-0,518614$.

Cek cepat

Contoh harus memenuhi $\eta > 0$, $\delta > 0$, dan $q < 1$. Pasangan $(\eta, \delta) = (0,1, 0,2)$ memberi $\Delta < 0$ dan merupakan spiral, bukan simpul.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Ringkas dua parameter melalui jumlahnya.

Rumus

$$q = \eta + \delta, \quad 0 < q < 1$$

- **Penjelasan**

Baca jejak dan determinan dari matriks Jacobi yang tercetak.

Rumus

$$T = -\frac{\eta}{q} < 0, \quad D = \eta(1 - q) > 0$$

- **Penjelasan**

Hitung diskriminan polinom karakteristik.

Rumus

$$\Delta = T^2 - 4D = \frac{\eta^2}{q^2} - 4\eta(1 - q)$$

- **Penjelasan**

Karena $\eta > 0$, sederhanakan syarat akar real.

Rumus

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \eta \geq 4q^2(1 - q)$$

- **Penjelasan**

Uji satu pasangan eksplisit di wilayah simpul.

Rumus

$$(\eta, \delta) = (0,15, 0,05): \quad T = -0,75, \quad D = 0,12, \quad \Delta = 0,0825$$

Simpulan

Wilayah simpul dan spiral sama-sama tidak kosong. Sumber juga tidak konsisten tentang Gambar 7.3: prosa memberi $(\eta, \delta) = (0, 2, 0, 1)$, sedangkan keterangannya memberi $(0, 1, 0, 2)$. Keduanya menghasilkan spiral, tetapi titik endemiknya berbeda. Selain itu, pada $\eta + \delta = 1$, $P_2 = P_1 = (1, 0)$ dan titiknya nonhiperbolik; kesetimbangan endemik dengan $i > 0$ memerlukan pertidaksamaan ketat $\eta + \delta < 1$.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Definisikan $N = M + S + E + I + R$. Gunakan ω untuk hilangnya kekebalan pasif, $\alpha SI/N$ untuk insidensi standar, σ untuk progresi $E \rightarrow I$, dan γ untuk pemulihan $I \rightarrow R$. Tempatkan kematian alami $-\mu$ pada setiap kompartemen dan jumlahkan semua persamaan sebagai pemeriksaan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Sumber tidak menentukan alokasi bayi, hilangnya kekebalan maternal, hukum insidensi, progresi laten, atau pemulihan, sehingga tidak ada satu sistem unik yang dapat diturunkan. Sebagai penutupan referensi tambahan, satu model yang sah adalah $\dot{M} = p\nu N - (\omega + \mu)M$, $\dot{S} = (1-p)\nu N + \omega M - \alpha SI/N - \mu S$, $\dot{E} = \alpha SI/N - (\sigma + \mu)E$, $\dot{I} = \sigma E - (\gamma + \mu)I$, dan $\dot{R} = \gamma I - \mu R$, dengan $0 \leq p \leq 1$ sebagai proporsi bayi yang masuk kelas kekebalan pasif. Model MSEIR dengan semua bayi mula-mula kebal pasif diperoleh dari $p = 1$. Semua fluks internal saling hapus ketika persamaan dijumlahkan, sehingga $\dot{N} = (\nu - \mu)N$ dan $N(t) = N_0 e^{(\nu - \mu)t}$. Karena $\nu \neq \mu$, penyebut insidensi standar $N(t)$ tidak boleh diperlakukan konstan.

Cek cepat

Setiap aliran internal harus muncul sekali dengan tanda minus di kompartemen asal dan sekali dengan tanda plus di kompartemen tujuan. Pada batas setiap kompartemen nol, turunannya tidak boleh negatif. Untuk MSEIR, kelas R berisi individu pulih yang masih hidup dan kebal permanen; kematian keluar dari sistem, bukan ditimbun di R .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Definisikan populasi hidup total dan asumsi kelahiran. Fraksi p masuk M ; sisanya langsung rentan.

Rumus

$$N = M + S + E + I + R, \quad p\nu N \rightarrow M, \quad (1-p)\nu N \rightarrow S$$

- **Penjelasan**

Kekebalan pasif hilang dengan laju per kapita ω .

Rumus

$$\omega M \rightarrow S$$

- **Penjelasan**

Gunakan insidensi standar agar laju kontak per rentan tidak tumbuh hanya karena ukuran populasi.

Rumus

$$\frac{\alpha I}{N} \\ S \longrightarrow E$$

- **Penjelasan**

Tambahkan progresi laten dan pemulihan dengan kekebalan permanen.

Rumus

$$\begin{matrix} \sigma & \gamma \\ E \rightarrow I & \rightarrow R \end{matrix}$$

- **Penjelasan**

Kematian alami bekerja pada setiap kelas hidup.

Rumus

$$\dot{Z} \supset -\mu Z, \quad Z \in \{M, S, E, I, R\}$$

- **Penjelasan**

Gabungkan semua aliran menjadi lima persamaan.

Rumus

$$\begin{aligned} \dot{M} &= p\nu N - (\omega + \mu)M, \\ \dot{S} &= (1-p)\nu N + \omega M - \alpha SI/N - \mu S, \\ \dot{E} &= \alpha SI/N - (\sigma + \mu)E, \\ \dot{I} &= \sigma E - (\gamma + \mu)I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R. \end{aligned}$$

- **Penjelasan**

Jumlahkan untuk memeriksa konservasi semua perpindahan internal.

Rumus

$$\dot{N} = (\nu - \mu)N$$

Simpulan

Sistem ini adalah penutupan referensi baru, bukan model unik yang diimplikasikan sumber. Soal tidak menentukan apakah semua bayi atau hanya sebagian menerima kekebalan pasif; parameter p membuat asumsi itu eksplisit. Memilih $p = 1$ memberi bentuk MSEIR paling sederhana. Model mengabaikan kematian akibat penyakit dan hilangnya kekebalan setelah pulih; keduanya dapat ditambahkan bila dinyatakan.

BAGIAN 4

Reaksi Kimia dan Efek Spasial

0005-LEGA-V101-PT04

Bab 8 berfokus pada reaksi kimia. Pertama-tama, kita memperkenalkan *hukum aksi massa* untuk memperoleh persamaan laju, lalu membahas dua model klasik untuk reaksi kimia osilatori. Kedua model ini hanya melibatkan persamaan diferensial biasa. Model-model tersebut dapat disederhanakan menjadi sistem dinamik dua dimensi dan dapat dikaji dengan jenis analisis yang digunakan dalam bab-bab sebelumnya.

Sejauh ini, kita belum membahas atau bahkan mempertimbangkan kenyataan bahwa kebanyakan model mendeskripsikan besaran yang bervariasi bukan hanya terhadap waktu, melainkan juga terhadap ruang. Sebagai contoh, jika N menyatakan kepadatan suatu populasi, wajar untuk mengasumsikan bahwa N bergantung pada bentang alam: bagi manusia, N lebih besar di kota daripada di daerah pegunungan atau gurun; bagi hewan, N bervariasi sesuai dengan keberadaan hutan, sungai, mangsa, dan sebagainya.

Untuk memasukkan efek spasial ke dalam model-model yang telah kita bahas, kita menempuh langkah-langkah berikut. Pertama, kita mengasumsikan bahwa sifat model itu sendiri tidak berubah. Misalnya, jika spesies u memakan spesies v , maka pada setiap titik berkoordinat (x, y) di bidang, $u(x, y)$ tumbuh sebanding dengan konsentrasi lokal $v(x, y)$. Kita dapat membayangkan situasi yang lebih rumit, misalnya laju pertumbuhan u bergantung pada kepadatan v yang dirata-ratakan secara spasial, tetapi kasus seperti itu berada di luar cakupan catatan ini. Dengan kata lain, kita hanya mempertimbangkan model *lokal*. Kedua, kita perlu menjelaskan bagaimana setiap spesies berperilaku ketika distribusinya tidak seragam di suatu wilayah. Secara intuitif, pergerakan semestinya berlangsung menjauhi daerah berkonsentrasi tinggi untuk mencapai distribusi yang seragam. Inilah fenomena *difusi*, yang dibahas dalam Bab 9. Jika terdapat aliran eksternal, suku-suku transpor lain harus disertakan, tetapi situasi semacam itu tidak akan kita bahas.

Penambahan difusi pada persamaan diferensial nonlinear biasanya menghasilkan persamaan *reaksi-difusi*. Model-model ini berupa sistem persamaan diferensial parsial, dan terdapat literatur yang sangat luas mengenai topik ini maupun topik-topik terkait. Meskipun pembahasan lengkap berada di luar cakupan catatan ini, kita tetap memberikan gambaran sekilas tentang jenis pemodelan yang dilakukan dengan sistem semacam itu. Bab 9 menguraikan secara singkat contoh reaksi kimia pada permukaan, yang di dalamnya difusi digandengkan dengan persamaan laju reaksi kimia yang bersesuaian. Sistem reaksi-difusi yang dihasilkan mampu mempertahankan gelombang kimia, dan kami menganjurkan pembaca untuk mempelajari artikel-artikel yang dirujuk dalam teks guna memperoleh informasi tambahan. Bab 10 membahas fenomena

umum *pembentukan pola* dalam sistem yang didorong jauh dari kesetimbangan. Di sana, kita menyelidiki dinamika model generik pembentuk pola, yakni persamaan *Swift-Hohenberg*, dan juga membahas contoh khusus model dua dimensi yang menghasilkan pola vegetasi.

Reaksi Kimia

0005-LEGA-V101-CH08

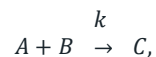
Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menyusun sistem persamaan diferensial biasa nonlinear terkopel yang mendeskripsikan evolusi konsentrasi reaktan kimia terhadap waktu.
- Memprediksi dinamika reaksi kimia dengan menerapkan metode analisis (analisis dimensi, penskalaan, titik tetap, dan stabilitas linearnya) yang dibahas dalam bab-bab sebelumnya.
- Menjelaskan mengapa reaksi kimia osilatori dapat terjadi.
- Menjelaskan bagaimana gelombang kimia dapat diamati pada sistem yang membentang dalam ruang.

Hukum aksi massa

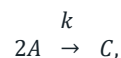
Tinjau suatu reaksi kimia



di mana A , B , dan C menyatakan zat kimia, A dan B adalah reaktan, C adalah produk, dan $k > 0$ adalah *konstanta laju* reaksi. *Hukum aksi massa* mendeskripsikan bagaimana konsentrasi A , B , dan C berubah akibat reaksi ini. Gagasannya adalah bahwa reaksi akan berlangsung jika zat kimia A dan B bertumbukan, dan jika energinya lebih tinggi daripada energi aktivasi reaksi. Jumlah tumbukan berhasil (yaitu tumbukan yang menghasilkan reaksi) antara A dan B sebanding dengan hasil kali konsentrasi A dan B . Konstanta kesebandingannya adalah konstanta k . Dengan demikian, kita menuliskan persamaan diferensial berikut untuk nilai harapan $[A]$, $[B]$, dan $[C]$ (ingat bahwa kita berada dalam keadaan dengan jumlah molekul reaktan dan produk yang besar)

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{d[B]}{dt} = -k[A][B] = -\frac{d[C]}{dt},$$

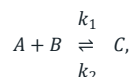
di mana $[I]$ menyatakan konsentrasi zat kimia I . Jika $A = B$, sehingga reaksi kimianya adalah



kita memerlukan dua molekul A untuk membentuk satu molekul produk C , yang menghasilkan

$$\frac{1}{2} \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2 = -\frac{d[C]}{dt}.$$

Jika suatu reaksi bersifat reversibel, misalnya jika

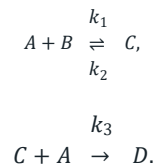


maka A dikonsumsi dengan laju relatif k_1 dan diproduksi dengan laju relatif k_2 , sehingga

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A][B] + k_2[C],$$

dan demikian pula untuk $[B]$ dan $[C]$.

Terakhir, jika suatu proses reaksi melibatkan lebih dari satu reaksi kimia, laju perubahan suatu zat kimia akibat setiap reaksi dijumlahkan untuk memperoleh laju perubahan total zat kimia tersebut. Misalnya, andaikan kita memiliki sistem yang dideskripsikan oleh



Maka konsentrasi A berevolusi menurut

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A][B] + k_2[C] - k_3[C][A],$$

dan persamaan laju untuk B , C , dan D adalah

$$\begin{aligned} \frac{d[B]}{dt} &= -k_1[A][B] + k_2[C], \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1[A][B] - k_2[C] - k_3[C][A], \\ \frac{d[D]}{dt} &= k_3[C][A]. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa reaksi bersih yang berkaitan dengan proses ini adalah $2A + B \rightarrow D$. Persamaan laju harus dituliskan untuk setiap tahap yang terlibat dalam reaksi, bukan berdasarkan reaksi bersihnya.

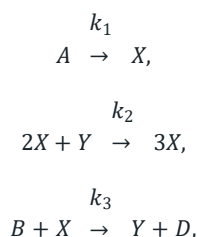
Dengan demikian, reaksi kimia dapat dideskripsikan dalam bentuk persamaan diferensial biasa nonlinear terkopel, sehingga teori sistem dinamik dapat diterapkan pada analisisnya.

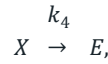
Model Brusselator dan Oregonator

Karena persamaan laju yang mendeskripsikan osilasi kimia bersifat nonlinear, reaksi yang berosilasi terhadap waktu dapat diamati, sebagaimana persamaan Lotka-Volterra dapat mendeskripsikan osilasi dalam sistem pemangsa–mangsa. Reaksi Belousov-Zhabotinsky adalah contoh klasik reaksi kimia osilatori. Ketika ahli biokimia Rusia Boris P. Belousov **Catatan:** B.P. Belousov, Sb. Ref. Radiats. Med., 1958, Megiz, Moscow, 145 (1950). melaporkan temuannya pada tahun 1951, hasilnya pada awalnya disambut dengan ketidakpercayaan. Baru setelah A.M. Zhabotinsky **Catatan:** A.M. Zhabotinsky, *Oscillatory Processes in Biological and Chemical systems*, Science Publ., Moscow, p. 149, 1967. A.N. Zaikin and A.M. Zhabotinsky, Concentration [Wave Propagation in Two-dimensional Liquid-phase Self-oscillating System](#), Nature **225**, 535-537 (1970). mereproduksi dan menyempurnakan eksperimen Belousov, keberadaan reaksi osilatori akhirnya diterima. Terdapat dua model klasik untuk reaksi osilatori, yaitu “Brusselator” (diusulkan oleh sebuah kelompok di Brussels **Catatan:** P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, Wiley Interscience, London, 1971. Page 233.) dan “Oregonator” (diusulkan oleh para kimiawan di University of Oregon **Catatan:** R.J. Field and R.M. Noyes, [Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction](#), J. Chem. Phys. **60**, 1877-1884 (1974).). Di bawah ini, kita membahas keduanya secara singkat.

Brusselator

Tinjau proses kimia hipotetis berikut (Glansdorff & Prigogine, 1971).

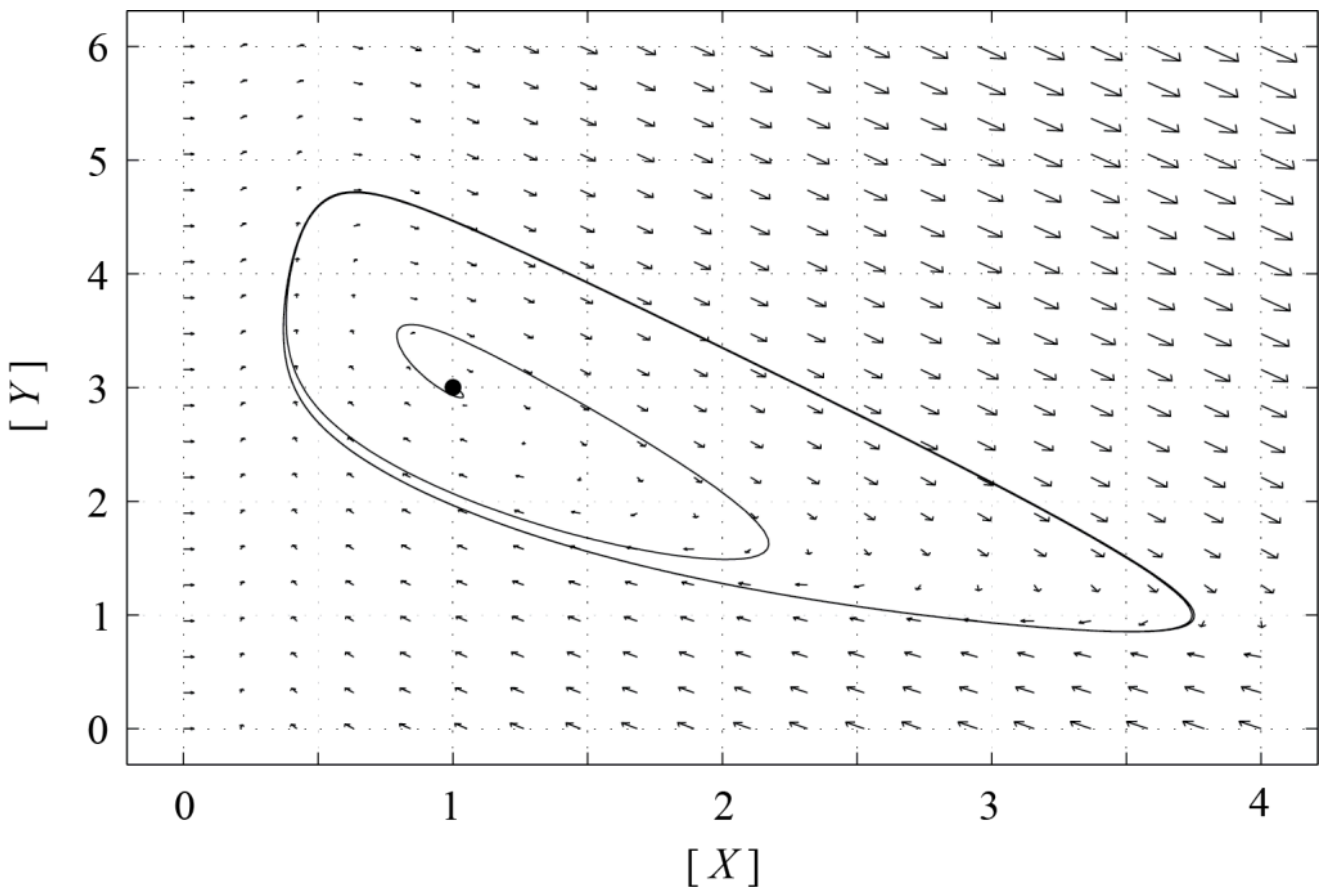




dengan semua konstanta laju k_i sama dengan 1. Persamaan laju yang bersesuaian untuk $[X]$ dan $[Y]$ membentuk model *Brusselator*, yang berbentuk

$$\begin{cases} \frac{d[X]}{dt} = [A] + [X]^2[Y] - [B][X] - [X], \\ \frac{d[Y]}{dt} = -[Y][X]^2 + [B][X], \end{cases} \quad (8.1)$$

dengan $[A]$ dan $[B]$ sebagai parameter. Model ini memiliki sebuah titik tetap tunggal P , yang diberikan oleh $[X] = [A]$ dan $[Y] = [B]/[A]$. Dari sudut pandang analisis dimensi, ungkapan-ungkapan ini mungkin tampak aneh, tetapi dimensinya tidak lagi terlacak ketika kita menetapkan semua konstanta laju reaksi (yang memiliki dimensi berbeda) sama dengan satu (lihat soal-soal).

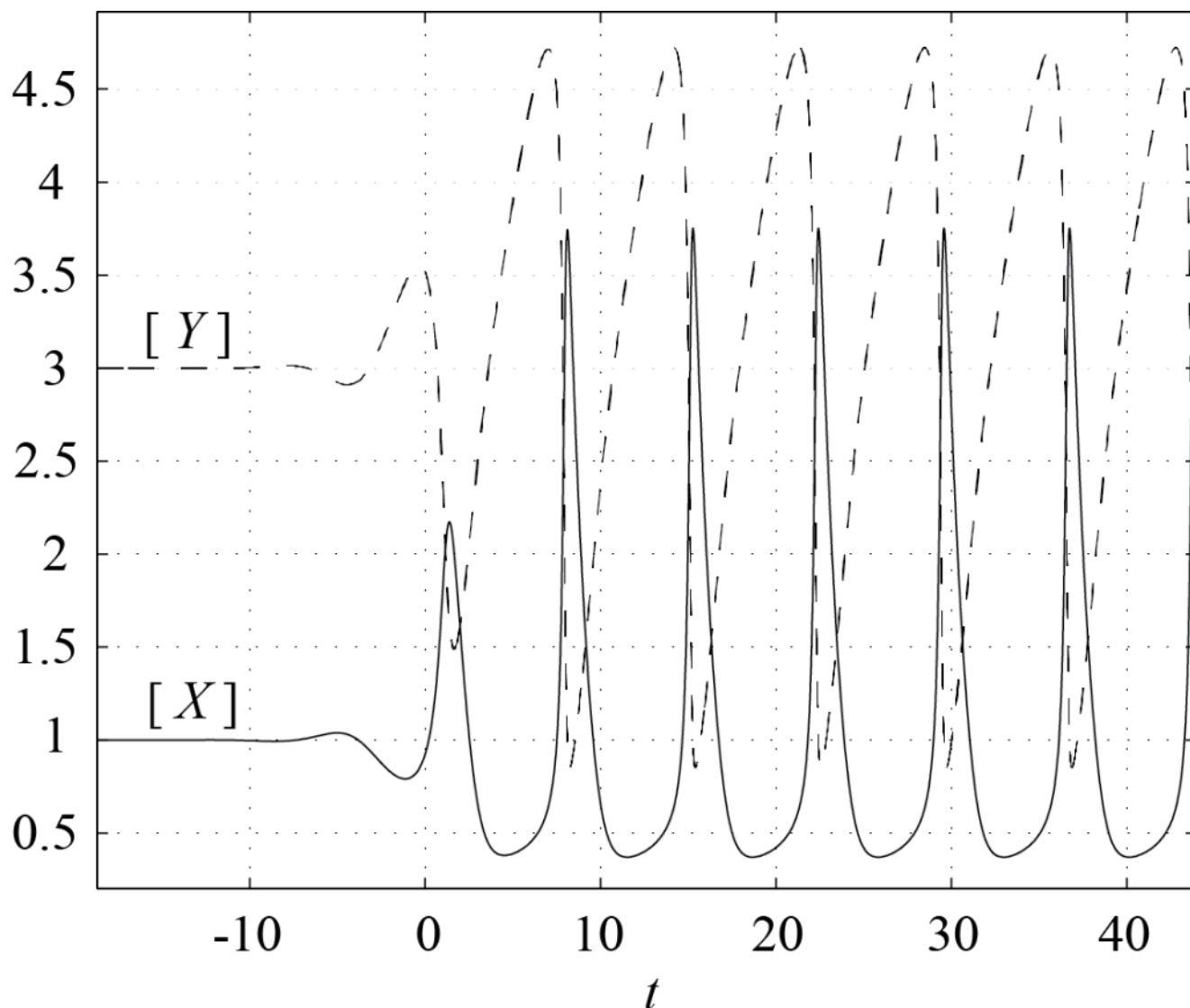


Gambar 8.1. Bidang fase sistem (8.1), dengan $[A]=1$ dan $[B]=3$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Matriks Jacobi dari (8.1) di titik tetap P adalah

$$J(P) = \begin{pmatrix} [B] - 1 & [A]^2 \\ -[B] & -[A]^2 \end{pmatrix},$$

dan determinannya sama dengan $[A]^2 > 0$. Karena itu, stabilitas titik tetap bergantung pada tanda jejak $J(P)$, yang sama dengan $T = [B] - 1 - [A]^2$. Mudah dilihat bahwa jika $[X]$ atau $[Y]$ cukup besar, maka $d[Y]/d[X] \simeq -1$, dan lintasan hampir berupa garis lurus dengan kemiringan -1. Namun, ketika $[Y]$ mendekati 0, lintasan-lintasan ini tidak dapat meninggalkan kuadran pertama karena $d[Y]/dt > 0$ jika $[Y] = 0$ dan $[X] > 0$. Karena pada saat itu kita juga memiliki $d[X]/dt < 0$ jika $[X]$ cukup besar, kita memperkirakan lintasan akan dibawa kembali menuju daerah tempat $[X]$ dan $[Y]$ sama-sama berorde satu.

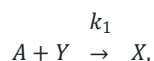


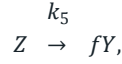
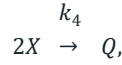
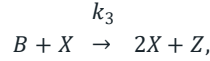
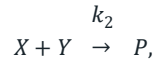
Gambar 8.2. Kebergantungan $[X]$ dan $[Y]$ terhadap waktu untuk lintasan pada Gambar 8.1, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Jika P stabil, yaitu jika $T < 0$, maka semua lintasan seharusnya berakhir di P . Namun, jika P adalah simpul tak stabil atau spiral tak stabil, lintasan tidak dapat konvergen menuju P , dan dinamika tersebut harus memiliki atraktor lain. Gambar 8.1 memperlihatkan potret fase (8.1) dengan $[A] = 1$ dan $[B] = 3$ (sehingga $T = 1 > 0$). Atraktor lain tersebut adalah suatu *siklus limit*; setiap lintasan dalam daerah tarikannya—kecuali solusi yang dimulai tepat di P —konvergen menuju siklus tersebut. Hanya satu lintasan yang diplot dalam gambar ini. Grafik $[X]$ dan $[Y]$ sebagai fungsi waktu yang bersesuaian ditampilkan pada Gambar 8.2. Terlihat bahwa pada siklus limit, $[X]$ tetap kecil hampir sepanjang waktu, lalu dengan cepat meningkat ke nilai maksimum dan kembali menuju nol secara periodik. Ketika $[X]$ meningkat, $[Y]$ turun secara mendadak, lalu perlahan meningkat kembali ke nilai maksimumnya sementara $[X]$ tetap kecil. *Osilasi relaksasi* semacam itu merupakan ciri khas banyak reaksi kimia osilatori.

Oregonator

Model *Oregonator* diusulkan oleh R.J. Field dan R.M. Noyes pada 1974. Model ini bersesuaian dengan reaksi kimia berikut





dengan $[A]$ dan $[B]$ konstan, serta f merupakan faktor stoikiometri. Persamaan laju yang bersesuaian adalah

$$\begin{cases} \frac{d[X]}{dt} = k_1[A][Y] - k_2[X][Y] + k_3[B][X] - 2k_4[X]^2, \\ \frac{d[Y]}{dt} = -k_1[A][Y] - k_2[X][Y] + k_5f[Z], \\ \frac{d[Z]}{dt} = k_3[B][X] - k_5[Z]. \end{cases}$$

Field dan Noyes (1974) mendefinisikan besaran tak berdimensi berikut

$$x = \frac{[X]}{X_0}, \quad y = \frac{[Y]}{Y_0}, \quad z = \frac{[Z]}{Z_0}, \quad \tau = \frac{t}{T_0},$$

dengan

$$X_0 = \frac{k_1}{k_2}[A], \quad Y_0 = \frac{k_3}{k_2}[B], \quad Z_0 = \frac{k_1k_3}{k_2k_5}[A][B], \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{k_1k_3[A][B]}}.$$

Dengan demikian, bentuk tak berdimensi Oregonator menjadi

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = s(y - xy + x - qx^2), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{s}(-y - xy + fz), \\ \frac{dz}{d\tau} = \omega(x - z), \end{cases} \quad (8.2)$$

dengan

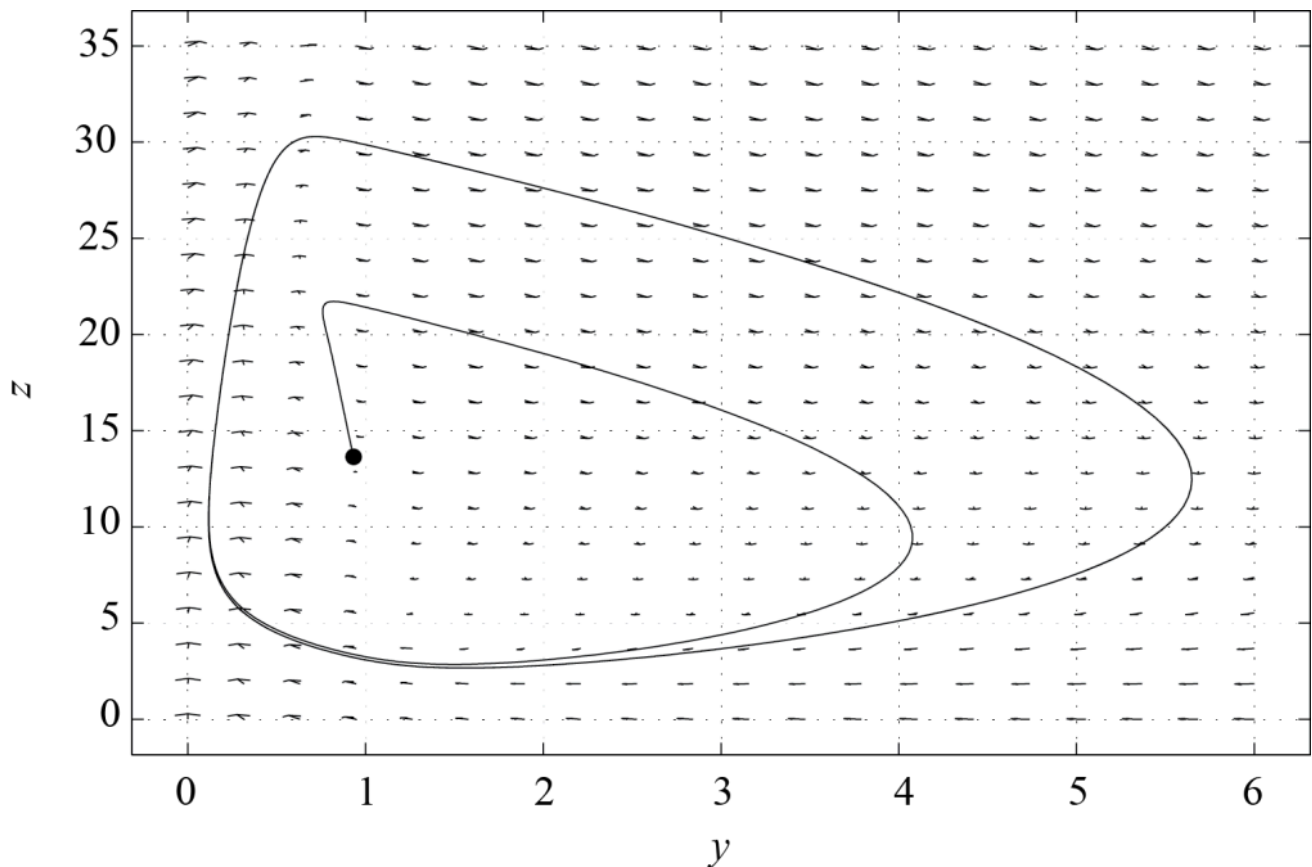
$$s = \sqrt{\frac{k_3[B]}{k_1[A]}}, \quad q = \frac{2k_1k_4[A]}{k_2k_3[B]}, \quad \omega = \frac{k_5}{\sqrt{k_1k_3[A][B]}}.$$

Dengan mengasumsikan bahwa x dengan cepat mencapai nilai keadaan tunak, Persamaan (8.2) dapat direduksi menjadi sistem dinamik dua dimensi. Memang, menetapkan $dx/d\tau = 0$ menghasilkan

$$x = \frac{1}{2q} \left(1 - y + \sqrt{(1 - y)^2 + 4qy} \right),$$

dan dengan menyubstitusikan ekspresi ini ke dalam (8.2), diperoleh

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{s} \left(-y - \frac{y}{2q} \left(1 - y + \sqrt{(1 - y)^2 + 4qy} \right) + fz \right), \\ \frac{dz}{d\tau} = \omega \left(\frac{1}{2q} \left(1 - y + \sqrt{(1 - y)^2 + 4qy} \right) - z \right). \end{cases} \quad (8.3)$$



Gambar 8.3: Bidang fase sistem (8.3), dengan $f=1$, $s=1$, $q=0.01$ dan $\omega=2$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Selanjutnya, kita menetapkan $f = 1$. Field dan Noyes (1974) memperkirakan nilai s , q , ω , serta semua variabel tak berdimensi untuk reaksi Belousov-Zhabotinsky. Rinciannya dapat ditemukan dalam artikel mereka yang berjudul [Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction](#). Mereka juga menyimpulkan bahwa model Oregonator mampu memprediksi osilasi konsentrasi zat-zat kimia yang terlibat dalam proses reaksi. Parameter yang realistis membuat masalah ini sangat kaku (yaitu, terdapat skala waktu karakteristik yang sangat pendek maupun sangat panjang, yang merupakan ciri khas sistem eksitabel), tetapi model (8.3) juga memperlihatkan osilasi dalam kasus yang cukup kaku. Gambar 8.3 menunjukkan bidang fase model (8.3) dengan parameter $s = 1$, $q = 0.01$, dan $\omega = 2$. Lintasan yang bermula di dekat titik tetap, dengan y dan z keduanya tak nol, berkonvergensi menuju siklus limit. Akibatnya, variabel y dan z berosilasi terhadap waktu, demikian pula $[X]$, $[Y]$, dan $[Z]$ dalam model Oregonator.

Gelombang kimia

Ketika reaksi kimia berlangsung dalam sistem yang membentang secara spasial, difusi perlu diperhitungkan. Akibatnya, persamaan laju yang dibahas di atas berubah menjadi persamaan diferensial parsial. Suku-suku reaksi tetap sama, tetapi konsentrasi setiap zat kimia kini berdifusi dengan koefisien difusi yang bergantung pada ukuran dan berat molekul yang bersangkutan. Jika reaksinya bersifat osilatori, muka gelombang, yang misalnya bersesuaian dengan konsentrasi tinggi suatu zat kimia, merambat di dalam sistem. Selain itu, jika reaksi dibatasi pada permukaan dua dimensi dan gelombang dipicu di suatu titik dalam ruang, muka gelombangnya berbentuk lingkaran. Sebagai contoh, artikel tahun 2001 karya C. Sachs *et al.* **Catatan:** C. Sachs, M. Hildebrand, S. Völkening, J. Wintterlin, G. Ertl, [Spatiotemporal self-organization in a surface reaction: from the atomic to the mesoscopic scale](#), Science **293**, 1635-

1638 (2001). menjelaskan bagaimana muka gelombang semacam itu diamati dalam eksperimen dan mengusulkan model reaksi-difusi yang mereproduksi perilaku ini. Para penulis juga membahas keterbatasan model reaksi-difusi ketika parameter makroskopis dipengaruhi oleh rincian interaksi mikroskopis.

Apa yang akan terjadi jika muka gelombang terputus, misalnya jika gelombang melewati wilayah tempat reaksi tidak dapat berlangsung? Jika muka gelombang tertambat pada satu titik, muka tersebut akan melengkung dan akhirnya membentuk gelombang spiral. Gelombang semacam itu sering diamati dalam eksperimen ketika reaksi Belousov-Zhabotinsky dibatasi pada permukaan dua dimensi, seperti film tipis, cakram kaca berpori, atau bahkan selebar kertas saring. Artikel karya S.C. Müller *et al.* **Catatan:** S.C. Müller, T. Plesser and B. Hess, [The structure of the core of the spiral wave in the Belousov-Zhabotinskii reaction](#), Science **230**, 661-663 (1985). membahas eksperimen yang mengungkap struktur inti gelombang spiral semacam itu.

Ringkasan

Kita memulai dengan hukum aksi massa, yang memungkinkan kita mendeskripsikan dinamika konsentrasi (rata-rata) reaktan dan produk yang terlibat dalam reaksi kimia. Secara khusus, kita meninjau dua rangkaian reaksi kimia hipotetis yang disebut Brusselator dan Oregonator. Dengan menerapkan metode analisis yang dibahas dalam bab-bab sebelumnya, kita menyimpulkan bahwa sistem kimia ini dapat memperlihatkan dinamika osilatori. Hal ini memberikan bukti konsep bagi reaksi osilatori seperti reaksi Belousov-Zhabotinsky. Dalam sistem yang membentang secara spasial, reaksi yang disebut terakhir menghasilkan gelombang kimia dan cacat spiral, yang strukturnya terdokumentasi dengan baik dalam literatur penelitian.

Deskripsi Gambar

Gambar 8.1: Potret fase yang memperlihatkan medan vektor untuk variabel $[X]$ dan $[Y]$. Ditampilkan satu lintasan yang bermula di dekat titik tetap yang terletak pada $(1, 3)$. Lintasan tersebut berkonvergensi menuju satu kurva tertutup, yang bersesuaian dengan siklus limit. Panah di dalam kurva tertutup berpilin ke luar mendekatnya, sedangkan panah di luar berpilin ke dalam mendekatnya, yang menunjukkan bahwa siklus tersebut merupakan atraktor. [[Kembali ke Gambar 8.1](#)]

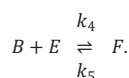
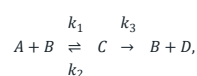
Gambar 8.2: Plot deret waktu yang memperlihatkan dua variabel, $[X]$ (garis penuh) dan $[Y]$ (garis putus-putus), terhadap waktu t . Pada awalnya, kedua variabel hampir konstan, tetapi keduanya dengan cepat beralih ke osilasi stabil yang berkelanjutan. Puncak $[X]$ dan $[Y]$ saling bergeser, yang menunjukkan pergeseran fase khas model pemangsa–mangsa atau osilator kimia. [[Kembali ke Gambar 8.2](#)]

Gambar 8.3: Potret fase pada bidang y - z yang menampilkan medan vektor dan dua solusi. Sebuah titik hitam merepresentasikan titik tetap tak stabil di sekitar $(0.9, 13.5)$. Sebuah kurva tertutup tebal berbentuk segitiga (siklus limit stabil) mengelilingi titik ini. Suatu lintasan yang bermula di dekat titik tetap berpilin menuju siklus limit. [[Kembali ke Gambar 8.3](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Pertimbangkan reaksi kimia berikut

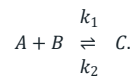


1. Tuliskan persamaan diferensial yang mendeskripsikan dinamika konsentrasi A , B , C , E , dan F .

2. Tunjukkan bahwa $[B] + [C] + [F]$ konstan. Apa makna kimiawi fakta ini?

Soal 2

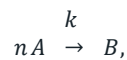
Pertimbangkan reaksi kimia



1. Jelaskan mengapa persamaan laju untuk A adalah $\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A][B] + k_2[C]$.
 2. Apa dimensi k_1 dan k_2 ?
 3. Tuliskan persamaan ini dalam bentuk tak berdimensi.
-

Soal 3

Pertimbangkan reaksi kimia



dengan n merupakan bilangan bulat positif.

1. Apa persamaan laju untuk A ?
 2. Diketahui bahwa $[A](0) = [A]_0$, tentukan solusi persamaan ini.
 3. Apakah solusi tersebut masuk akal untuk semua waktu? Jika tidak, apa yang terjadi?
-

Soal 4

Apa dimensi k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 dalam [reaksi Brusselator](#)?

Soal 5

Asumsikan bahwa konstanta laju k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 dalam [reaksi Brusselator](#) tidak sama dengan 1. Dapatkah Anda menskalakan ulang persamaan laju yang bersesuaian untuk menghilangkan parameter-parameter ini dari model tak berdimensi? Jelaskan.

Soal 6

Dengan menggunakan PPLANE, simulasikan model Brusselator [\(8.1\)](#) dengan $[A] = 1$. Jelaskan apa yang terjadi ketika parameter $[B]$ divariasikan dari 1.5 hingga 2.5.

Soal 7

Dengan menggunakan PPLANE, simulasikan model Brusselator [\(8.1\)](#) dengan $[A] = 1$.

1. Jelaskan apa yang terjadi ketika parameter $[B]$ divariasikan dari 3 hingga 5. Apa yang istimewa pada nilai $[B] = 4$?
 2. Gambarkan $[X]$ dan $[Y]$ sebagai fungsi t untuk $[B] = 6$. Jelaskan apa yang terjadi dengan kata-kata Anda sendiri.
-

Soal 8

Apa dimensi k_1, k_2, k_3, k_4 , dan k_5 dalam [reaksi Oregonator](#)?

Soal 9

Periksa bahwa x, y, z , dan τ yang didefinisikan dalam pembahasan [reaksi Oregonator](#) bersifat tak berdimensi.

Soal 10

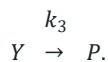
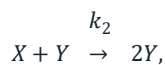
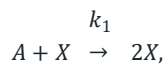
Dengan menggunakan PPLANE, simulasikan model Oregonator tereduksi ([8.3](#)) dengan $f = 1, s = 1$, dan $\omega = 2$. Jelaskan apa yang terjadi ketika parameter q divariasikan dari 0.1 hingga 0.01.

Soal 11

Tentukan titik-titik tetap model Oregonator tereduksi ([8.3](#)) dengan $f = 1$, dan analisislah kestabilannya. Anda dapat menggunakan paket komputasi simbolik, seperti MAPLE atau MATHEMATICA.

Soal 12

Pertimbangkan reaksi kimia



1. Tuliskan persamaan laju untuk $[X]$ dan $[Y]$.
 2. Tunjukkan bahwa sistem dinamik dua dimensi yang diperoleh dengan demikian merupakan kasus khusus model Lotka-Volterra.
 3. Berdasarkan informasi ini, dinamika seperti apa yang Anda harapkan?
-

Soal 13

Model Brusselator dan Oregonator memperlihatkan osilasi periodik karena adanya siklus limit. Di sisi lain, persamaan Lotka-Volterra ([6.2](#)) dengan $b = 0$ memiliki tak hingga banyak solusi periodik. Jika Anda memiliki sistem eksperimental yang memperlihatkan osilasi, bagaimana Anda membedakan keberadaan siklus limit dari keberadaan banyak orbit periodik?

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Beri satu laju aksi massa pada setiap arah panah. Untuk memeriksa kekekalan, jumlahkan tepat tiga persamaan bagi B, C, F ; semua fluks yang hanya memindahkan satu unit gugus pembawa B harus saling hapus.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $a = [A], b = [B], c = [C], e = [E], f = [F]$, sistemnya adalah $a' = -k_1ab + k_2c$, $b' = -k_1ab + (k_2 + k_3)c - k_4be + k_5f$, $c' = k_1ab - (k_2 + k_3)c$, $e' = -k_4be + k_5f$, dan $f' = k_4be - k_5f$. Karena $(b + c + f)' = 0$, maka $b(t) + c(t) + f(t) = b(0) + c(0) + f(0)$. Jumlah ini adalah inventaris total satuan kimia pembawa B : setiap reaksi hanya memindahkannya di antara bentuk bebas B , kompleks C , dan kompleks F .

Cek cepat

Suku k_3c harus muncul positif pada b' dan negatif pada c' ; suku k_4be serta k_5f harus saling hapus dalam jumlah $b' + c' + f'$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Reaksi maju pertama mengonsumsi satu A dan satu B , sedangkan reaksi balik menghasilkan keduanya.

Rumus

$$r_1 = k_1ab, \quad r_2 = k_2c$$

- **Penjelasan**

Peluruhan C menghasilkan satu B , dan pasangan reaksi terakhir memindahkan B serta E ke atau dari F .

Rumus

$$r_3 = k_3c, \quad r_4 = k_4be, \quad r_5 = k_5f$$

- **Penjelasan**

Kalikan setiap laju dengan perubahan stoikiometri spesies terkait.

Rumus

$$\begin{aligned} a' &= -r_1 + r_2, \\ b' &= -r_1 + r_2 + r_3 - r_4 + r_5, \\ c' &= r_1 - r_2 - r_3, \\ e' &= -r_4 + r_5, \\ f' &= r_4 - r_5. \end{aligned}$$

- **Penjelasan**

Jumlahkan tiga persamaan yang mengandung satu unit pembawa B .

Rumus

$$(b + c + f)' = (-r_1 + r_2 + r_3 - r_4 + r_5) + (r_1 - r_2 - r_3) + (r_4 - r_5) = 0$$

Simpulan

Hukum kekekalan ini berasal dari stoikiometri jaringan, bukan dari keadaan tunak; ia berlaku sepanjang setiap solusi selama model reaksi tertutup tersebut berlaku.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 1](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Tuliskan dimensi konsentrasi sebagai C dan waktu sebagai T . Untuk menghapus kedua konstanta dari persamaan, gunakan skala konsentrasi $C_0 = k_2/k_1$ dan waktu $T_0 = 1/k_2$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Laju maju $k_1[A][B]$ mengonsumsi A , sedangkan laju balik $k_2[C]$ menghasilkannya, sehingga tandanya masing-masing minus dan plus. Dari kesetaraan dengan dimensi CT^{-1} , diperoleh $[k_1] = C^{-1}T^{-1}$ dan $[k_2] = T^{-1}$. Untuk $k_1, k_2 > 0$, ambil $a = k_1[A]/k_2$, $b = k_1[B]/k_2$, $c = k_1[C]/k_2$, serta $\tau = k_2t$; persamaan menjadi $da/d\tau = -ab + c$.

Cek cepat

Skala k_2/k_1 harus berdimensi konsentrasi dan k_2t harus tak berdimensi. Substitusi balik ke persamaan berdimensi harus memulihkan kedua suku dengan koefisien asal.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Aksi massa memberi frekuensi tumbukan maju yang sebanding dengan kedua konsentrasi pereaksi.

Rumus

$$r_+ = k_1[A][B], \quad r_- = k_2[C]$$

- **Penjelasan**

Satu molekul A hilang pada peristiwa maju dan muncul pada peristiwa balik.

Rumus

$$\frac{d[A]}{dt} = -r_+ + r_- = -k_1[A][B] + k_2[C]$$

- **Penjelasan**

Samakan dimensi setiap laju dengan konsentrasi per waktu.

Rumus

$$[k_1]C^2 = CT^{-1}, \quad [k_2]C = CT^{-1}$$

• Penjelasan

Definisikan skala dan variabel tak berdimensi.

Rumus

$$C_0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad T_0 = \frac{1}{k_2}, \quad [A] = C_0 a, \quad [B] = C_0 b, \quad [C] = C_0 c, \quad t = T_0 \tau$$

• Penjelasan

Bagi persamaan hasil substitusi dengan $C_0/T_0 = k_2 C_0$.

Rumus

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{k_1 C_0}{k_2} ab + c = -ab + c$$

Simpulan

Penskalaan ini adalah satu pilihan yang sah; skala konsentrasi umum lain akan menyisakan kelompok tak berdimensi $k_1 C_0/k_2$.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 2](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Laju peristiwa adalah $k[A]^n$, tetapi setiap peristiwa menghabiskan n molekul A . Pisahkan kasus $n = 1$ sebelum mengintegrasikan pangkat $[A]^{-n}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jika $a = [A]$, maka $a' = -nka^n$. Untuk $a_0 = [A]_0 \geq 0$, kasus $n = 1$ memberi $a(t) = a_0 e^{-kt}$. Untuk $n > 1$ dan $a_0 > 0$, $a(t) = a_0 [1 + n(n-1)ka_0^{n-1}t]^{-1/(n-1)}$; jika $a_0 = 0$, solusinya identik nol. Semua solusi berkonsentrasi nonnegatif bermakna untuk setiap $t \geq 0$ dan mendekati nol saat $t \rightarrow \infty$. Untuk $n > 1$, $a_0 > 0$, perpanjangan matematis ke masa lalu berhenti pada $t = -1/[n(n-1)ka_0^{n-1}]$, ketika rumus menjadi singular; waktu negatif itu bukan prediksi fisik dari masalah nilai awal pada $t = 0$.

Cek cepat

Turunan awal rumus harus sama dengan $-nka_0^n$. Faktor stoikiometri n tidak boleh hilang, dan untuk $n > 1$ penyebut harus bertambah pada waktu maju.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Kalikan laju peristiwa aksi massa dengan kehilangan n unit A per peristiwa.

Rumus

$$\frac{da}{dt} = -nka^n$$

- **Penjelasan**

Untuk reaksi orde satu, integrasikan turunan logaritma.

Rumus

$$n = 1: \quad \frac{a'}{a} = -k \quad \Rightarrow \quad a = a_0 e^{-kt}$$

- **Penjelasan**

Untuk $n > 1$, pisahkan variabel dan gunakan kondisi awal.

Rumus

$$a^{1-n} = a_0^{1-n} + n(n-1)kt$$

- **Penjelasan**

Faktorkan a_0^{1-n} untuk menampilkan domain secara langsung.

Rumus

$$a(t) = a_0 \left[1 + n(n-1)ka_0^{n-1}t \right]^{-1/(n-1)}$$

- **Penjelasan**

Untuk data awal positif, faktor dalam kurung positif tepat setelah singularitas waktu balik.

Rumus

$$t > -\frac{1}{n(n-1)ka_0^{n-1}}$$

Simpulan

Model tidak menghabiskan konsentrasi hingga nol pada waktu maju yang berhingga; peluruhan eksponensial berlaku untuk $n = 1$, sedangkan ekor aljabarnya berlaku untuk $n > 1$.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 3](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Setiap laju volumetrik harus berdimensi $C T^{-1}$. Hitung jumlah faktor konsentrasi dalam hukum aksi massa untuk tiap langkah, bukan selisih stoikiometri bersihnya.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $[\text{konsentrasi}] = C$ dan $[t] = T$, diperoleh $[k_1] = T^{-1}$, $[k_2] = C^{-2}T^{-1}$, $[k_3] = C^{-1}T^{-1}$, dan $[k_4] = T^{-1}$.

Cek cepat

Produk $k_1[A]$, $k_2[X]^2[Y]$, $k_3[B][X]$, dan $k_4[X]$ semuanya harus berdimensi CT^{-1} .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Langkah pertama bersifat unimolekuler.

Rumus

$$[k_1]C = CT^{-1} \Rightarrow [k_1] = T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Langkah autokatalitik memakai tiga faktor konsentrasi dalam laju elementernya.

Rumus

$$[k_2]C^3 = CT^{-1} \Rightarrow [k_2] = C^{-2}T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Langkah ketiga bersifat bimolekuler.

Rumus

$$[k_3]C^2 = CT^{-1} \Rightarrow [k_3] = C^{-1}T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Langkah terakhir kembali unimolekuler.

Rumus

$$[k_4]C = CT^{-1} \Rightarrow [k_4] = T^{-1}$$

Simpulan

Menetapkan semua $k_i = 1$ sebelum penskalaan menyembunyikan fakta bahwa keempat angka tersebut tidak memiliki dimensi yang sama.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 4](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Mulailah dari $\dot{X} = k_1[A] + k_2X^2Y - k_3[B]X - k_4X$ dan $\dot{Y} = -k_2X^2Y + k_3[B]X$. Pilih waktu dari peluruhan k_4 , lalu samakan skala X dan Y agar koefisien suku kubik menjadi satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Ambil $\tau = k_4 t$, $X = X_0 x$, $Y = Y_0 y$, dan $X_0 = Y_0 = \sqrt{k_4/k_2}$. Definisikan $\bar{A} = k_1[A]\sqrt{k_2}/k_4^{3/2}$ serta $\bar{B} = k_3[B]/k_4$. Maka $dx/d\tau = \bar{A} + x^2 y - \bar{B}x - x$ dan $dy/d\tau = -x^2 y + \bar{B}x$. Keempat konstanta laju tidak muncul sendiri, tetapi pengaruhnya tetap tersimpan dalam dua kelompok tak berdimensi $\bar{A}, \bar{B}$.

Cek cepat

Harus berlaku $k_2 X_0^2/k_4 = 1$, $[X_0] = [Y_0] = C$, dan kedua persamaan hasil skala mempunyai bentuk persis (8.1) setelah $[A], [B]$ diganti $\bar{A}, \bar{B}$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tulis model berdimensi dari keempat langkah reaksi dengan $[A]$ dan $[B]$ dipertahankan sebagai reservoir konstan.

Rumus

$$\begin{aligned}\dot{X} &= k_1[A] + k_2 X^2 Y - k_3[B]X - k_4 X, \\ \dot{Y} &= -k_2 X^2 Y + k_3[B]X.\end{aligned}$$

- **Penjelasan**

Gunakan laju unimolekuler k_4 sebagai skala waktu.

Rumus

$$\tau = k_4 t$$

- **Penjelasan**

Pilih skala konsentrasi bersama sehingga koefisien autokatalitik menjadi satu.

Rumus

$$X_0 = Y_0 = \sqrt{\frac{k_4}{k_2}}, \quad \frac{k_2 X_0 Y_0}{k_4} = 1$$

- **Penjelasan**

Bagi persamaan pertama dengan $k_4 X_0$ dan persamaan kedua dengan $k_4 Y_0$.

Rumus

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{k_1[A]}{k_4 X_0} + x^2 y - \frac{k_3[B]}{k_4} x - x, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x^2 y + \frac{k_3[B]}{k_4} x$$

- **Penjelasan**

Namai dua kombinasi reservoir dan konstanta yang tak dapat dihapus sekaligus.

Rumus

$$\bar{A} = \frac{k_1[A]\sqrt{k_2}}{k_4^{3/2}}, \quad \bar{B} = \frac{k_3[B]}{k_4}$$

Simpulan

Penskalaan mengurangi enam besaran berdimensi yang relevan menjadi dua parameter kendali tak berdimensi tanpa mengubah struktur dinamis Brusselator.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 5](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Gunakan titik tetap $P = (A, B/A)$. Hitung jejak dan determinan matriks Jacobi di P , lalu bandingkan prediksi linearisasi dengan lintasan yang dimulai sedikit di luar titik tetap.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $A = 1$, titik tetapnya $P = (1, B)$, jejaknya $T = B - 2$, dan determinannya $D = 1$. Pada $1,5 \leq B < 2$, P adalah spiral stabil; pada $B = 2 = 1 + A^2$, nilai eigen $\pm i$ menandai ambang Hopf; dan pada $2 < B \leq 2,5$, P adalah spiral tak stabil yang dikelilingi siklus limit menarik. Jadi ambang kestabilannya adalah $B_H = 1 + A^2 = 2$.

Cek cepat

Di seluruh rentang, diskriminan $(B - 2)^2 - 4$ negatif, sehingga tipe linearnya memang spiral kecuali tepat di ambang. Integrasi harus cukup lama untuk membedakan transien yang meluruh dari osilasi menetap.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Titik tetap umum model (8.1) diperoleh dengan menjumlahkan kedua persamaan dan menyelesaikan nol klin.

Rumus

$$P = (A, B/A) \Rightarrow P = (1, B)$$

- **Penjelasan**

Evaluasi matriks Jacobi sumber pada $A = 1$.

Rumus

$$J(P) = \begin{pmatrix} B-1 & 1 \\ -B & -1 \end{pmatrix}, \quad T = B - 2, \quad D = 1$$

- **Penjelasan**

Tanda jejak menentukan kestabilan karena determinan positif.

Rumus

$$B < 2: T < 0; \quad B = 2: T = 0; \quad B > 2: T > 0$$

- **Penjelasan**

Dalam rentang yang diminta, diskriminan selalu negatif.

Rumus

$$\Delta = T^2 - 4D = (B - 2)^2 - 4 < 0 \quad (1.5 \leq B \leq 2.5)$$

• Penjelasan

Notebook mengintegrasikan beberapa kondisi awal di sekitar P dan memeriksa amplitudo setelah transien.

Rumus

$B > 2$: P menolak lintasan dekat, sedangkan amplitudo akhirnya menuju osilasi periodik yang sama

Simpulan

Perubahan pada $B = 2$ adalah bifurkasi Hopf superkritis Brusselator standar. Potret dan deret waktu notebook mendukung siklus menarik, sedangkan perhitungan jejak menetapkan ambang kestabilan lokal.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 6](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Kestabilan sudah hilang untuk semua $B > 2$. Yang berubah pada $B = 4$ adalah apakah dua nilai eigen titik tetap kompleks atau real; gunakan diskriminan, bukan hanya tanda jejak.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $A = 1$, $T = B - 2$, $D = 1$, dan $\Delta = (B - 2)^2 - 4 = B(B - 4)$. Maka $3 \leq B < 4$ memberi fokus tak stabil, $B = 4$ memberi nilai eigen ganda positif $\lambda = 1$ dengan hanya satu arah eigen (simpul tak wajar), dan $4 < B \leq 5$ memberi simpul tak stabil. Nilai $B = 4$ adalah batas fokus–simpul, bukan ambang Hopf; siklus limit menarik tetap menjadi atraktor di luar titik tetap. Untuk $B = 6$, deret waktu menunjukkan osilasi relaksasi: X lama berada pada nilai kecil lalu melonjak dan turun cepat, sedangkan Y tumbuh perlahan ketika X kecil dan jatuh tajam ketika X melonjak.

Cek cepat

Diskriminan harus nol tepat di $B = 4$, sedangkan jejak tetap positif di sana. Pada $B = 6$, puncak X dan penurunan Y harus berimpit secara temporal setelah transien.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Gunakan kembali matriks Jacobi titik tetap $P = (1, B)$.

Rumus

$$J(P) = \begin{pmatrix} B-1 & 1 \\ -B & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 - (B-2)\lambda + 1 = 0$$

- **Penjelasan**

Hitung diskriminan polinom karakteristik.

Rumus

$$\Delta = (B-2)^2 - 4 = B(B-4)$$

- **Penjelasan**

Karena $T > 0, D > 0$, tanda diskriminan hanya mengubah geometri ketidakstabilan.

Rumus

$3 \leq B < 4$: fokus tak stabil; $B > 4$: simpul tak stabil

- **Penjelasan**

Pada batas, matriks memiliki akar ganda dan satu ruang eigen berdimensi satu.

Rumus

$$B = 4: (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \text{rank}(J - I) = 1$$

- **Penjelasan**

Untuk $B = 6$, integrasi setelah membuang transien membandingkan puncak dan lembah kedua konsentrasi.

Rumus

$X \uparrow$ tajam $\Leftrightarrow Y \downarrow$ tajam; X kecil $\Leftrightarrow Y$ pulih perlahan

Simpulan

Nilai $B = 4$ memisahkan fokus dan simpul yang keduanya tak stabil. Nilai $B = 6$ menonjolkan pemisahan skala waktu yang menghasilkan bentuk denyut khas osilasi relaksasi.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 8

Petunjuk

Empat langkah pertama semuanya melibatkan dua molekul pereaksi dalam hukum aksi massa, termasuk $2X \rightarrow Q$; langkah terakhir hanya melibatkan satu Z . Koefisien hasil f menghitung jumlah relatif, bukan satuan baru.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan dimensi konsentrasi C dan waktu T , $[k_1] = [k_2] = [k_3] = [k_4] = C^{-1}T^{-1}$, $[k_5] = T^{-1}$, dan $[f] = 1$.

Cek cepat

Suku $k_1[A][Y]$, $k_2[X][Y]$, $k_3[B][X]$, $k_4[X]^2$, dan $k_5[Z]$ semuanya harus berdimensi CT^{-1} ; faktor 2 dan f tidak membawa dimensi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tiga reaksi pertama masing-masing mempunyai dua faktor konsentrasi dalam laju aksi massanya.

Rumus

$$[k_i]C^2 = CT^{-1} \Rightarrow [k_i] = C^{-1}T^{-1}, \quad i = 1, 2, 3$$

- **Penjelasan**

Reaksi $2X \rightarrow Q$ juga berorde dua terhadap konsentrasi.

Rumus

$$[k_4][X]^2 = CT^{-1} \Rightarrow [k_4] = C^{-1}T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Peluruhan Z bersifat unimolekuler.

Rumus

$$[k_5][Z] = CT^{-1} \Rightarrow [k_5] = T^{-1}$$

- **Penjelasan**

Faktor stoikiometri hanya mengalikan jumlah γ yang dihasilkan per Z .

Rumus

$$[f] = 1$$

Simpulan

Dimensi ini membuat setiap ruas kanan sistem Oregonator berdimensi konsentrasi per waktu dan menjadi dasar pemeriksaan skala pada soal berikutnya.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 8](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 9

Petunjuk

Gunakan hasil $[k_1] = \dots = [k_4] = C^{-1}T^{-1}$, $[k_5] = T^{-1}$, dan $[A] = [B] = C$. Periksa setiap skala sebelum membentuk rasionya.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dimensi skala adalah $[X_0] = [(k_1/k_2)[A]] = C$, $[Y_0] = [(k_3/k_2)[B]] = C$, $[Z_0] = [(k_1k_3/(k_2k_5))[A][B]] = C$, dan $[T_0] = [k_1k_3[A][B]]^{-1/2} = T$. Karena pembilang dan penyebut setiap rasio memiliki dimensi sama, $[x] = [y] = [z] = [\tau] = 1$.

Cek cepat

Rasio $k_1k_3/(k_2k_5)$ harus berdimensi C^{-1} , bukan tak berdimensi, sehingga setelah dikalikan $[A][B]$ hasilnya tepat C .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Rasio dua konstanta bimolekuler pertama tidak membawa dimensi.

Rumus

$$[X_0] = \frac{C^{-1}T^{-1}}{C^{-1}T^{-1}}C = C$$

- **Penjelasan**

Argumen yang sama berlaku untuk skala Y .

Rumus

$$[Y_0] = \frac{C^{-1}T^{-1}}{C^{-1}T^{-1}}C = C$$

- **Penjelasan**

Pada skala Z , rasio konstanta menyumbang satu pangkat konsentrasi invers.

Rumus

$$[Z_0] = \frac{(C^{-1}T^{-1})^2}{(C^{-1}T^{-1})(T^{-1})}C^2 = C^{-1}C^2 = C$$

- **Penjelasan**

Besaran di bawah akar pada skala waktu adalah laju kuadrat.

Rumus

$$[k_1k_3[A][B]] = (C^{-1}T^{-1})^2C^2 = T^{-2}$$

- **Penjelasan**

Bentuk rasio akhirnya tidak membawa satuan.

Rumus

$$[x] = \frac{C}{C} = [y] = [z] = 1, \quad [\tau] = \frac{T}{T} = 1$$

Simpan

Keempat definisi merupakan penskalaan yang konsisten. Sebagai pemeriksaan tambahan, kelompok s, q, ω pada (8.2) juga tak berdimensi.

Dukungan untuk Soal 10

Petunjuk

Gunakan cabang positif $h(y) = [1 - y + \sqrt{(1 - y)^2 + 4qy}]/(2q)$. Ikuti titik tetap positif sambil menghitung jejak matriks Jacobi; integrasikan dari gangguan kecil dan dari kondisi awal yang lebih jauh untuk menguji apakah amplitudo akhir sama.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada $q = 0, 1$, titik tetap positif adalah $(y_*, z_*) = (0, 8, 4)$ dan merupakan fokus stabil karena $T = -3$, $D = 12$, serta $T^2 - 4D = -39$. Saat q turun, jejak melewati nol pada $q_H = (19 - 5\sqrt{13})/18 \approx 0,0540135$. Di bawah ambang, titik tetap tidak stabil dan integrasi menunjukkan sebuah siklus limit menarik; pada $q = 0,01$, osilasinya besar dan bersifat relaksasi. Nilai ambang lokal berasal dari perhitungan matriks Jacobi, sedangkan keberadaan, daya tarik, dan bentuk siklus dalam sapuan ini adalah diagnosis numerik, bukan bukti global keberadaan atau keunikan siklus.

Cek cepat

Gunakan toleransi ketat dan horizon cukup panjang; hasil harus stabil terhadap pengecilan langkah/toleransi, penggandaan horizon, dan beberapa kondisi awal positif. Jangan menyimpulkan siklus hanya dari transien berosilasi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tuliskan sistem tereduksi dengan fungsi cabang positif.

Rumus

$$y' = -y - yh(y) + z, \quad z' = 2(h(y) - z)$$

- **Penjelasan**

Titik tetap positif memenuhi rumus aljabar dari soal berikutnya.

Rumus

$$y_* = \frac{4 + q - \sqrt{q(q+8)}}{4}, \quad x_* = z_* = \frac{y_*}{1 - y_*}$$

- **Penjelasan**

Untuk $s = 1$, $\omega = 2$, syarat jejak nol dapat ditulis hanya dalam y_* .

Rumus

$$\frac{2y_*^2 + 2y_* - 3}{3(1 - y_*)^2} - 2 = 0$$

- **Penjelasan**

Pilih akar fisik dan gunakan relasi titik tetap $qy_* = 2(1 - y_*)^2$.

Rumus

$$y_H = \frac{7 - \sqrt{13}}{4}, \quad q_H = \frac{2(1 - y_H)^2}{y_H} = \frac{19 - 5\sqrt{13}}{18}$$

- **Penjelasan**

Sapuan komputasional mencatat ekstrem setelah transien dan mengulang integrasi dari beberapa keadaan awal.

Rumus

$q > q_H$: amplitudo $\rightarrow 0$; $q < q_H$: amplitudo akhir nonnol dan berulang

Simpulan

Sapuan bergerak dari fokus stabil menuju osilasi menarik setelah kehilangan kestabilan lokal. Perhitungan analitik menentukan ambangnya; sifat siklus yang tampak harus dilaporkan bersama pemeriksaan konvergensi numerik.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 10](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 11

Petunjuk

Namai cabang positif sebagai $x = h(y)$. Dari $z' = 0$ peroleh $z = x$, dan dari $y' = 0$ untuk $f = 1$ peroleh $x(1 - y) = y$. Turunkan persamaan implisit $y - xy + x - qx^2 = 0$ untuk memperoleh $h'(y)$ tanpa mendiferensialkan akar secara langsung.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $q, s, \omega > 0$ dan cabang positif $h(y)$, satu-satunya titik tetap fisik adalah (y_*, z_*) dengan $y_* = [(4 + q) - \sqrt{q(q + 8)}]/4$ dan $x_* = z_* = y_*/(1 - y_*)$. Turunannya ialah $h'(y_*) = (x_* - 1)/(1 - y_* - 2qx_*)$. Matriks Jacobi memiliki jejak $T = (-1 - x_* - y_*h'(y_*))/s - \omega$ dan determinan $D = (\omega/s)[1 + x_* + (y_* - 1)h'(y_*)]$. Secara ekuivalen, $h'(y_*) = (1 - 2y_*)/[3(1 - y_*)^2]$, $D = 2\omega(1 + y_*)/[3s(1 - y_*)] > 0$, dan $T = [2y_*^2 + 2y_* - 3]/[3s(1 - y_*)^2] - \omega$. Jadi titik stabil bila $T < 0$, tak stabil bila $T > 0$, dan nonhiperbolik/Hopf-kandidat bila $T = 0$; untuk $D > 0$, ia fokus jika $T^2 - 4D < 0$, simpul jika $T^2 - 4D > 0$, dan berakar ganda jika sama dengan nol.

Cek cepat

Akar dengan tanda plus pada rumus kuadrat memberi $y > 1$ dan bukan titik tetap berkonsentrasi positif karena $x = y/(1 - y) < 0$. Determinan cabang fisik harus menyederhana menjadi besaran positif.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Definisikan cabang keadaan tunak cepat yang dipakai oleh model tereduksi.

Rumus

$$x = h(y) = \frac{1 - y + \sqrt{(1 - y)^2 + 4qy}}{2q}$$

- **Penjelasan**

Pada titik tetap dengan $f = 1$, persamaan kedua memberi $z = x$, lalu persamaan pertama memberi relasi positif.

Rumus

$$z_* = x_*, \quad -y_* - y_*x_* + x_* = 0 \Rightarrow x_* = \frac{y_*}{1 - y_*}$$

- **Penjelasan**

Substitusikan relasi tersebut ke persamaan implisit cabang cepat.

Rumus

$$y - xy + x - qx^2 = 0 \Rightarrow qy = 2(1 - y)^2$$

- **Penjelasan**

Selesaikan persamaan kuadrat dan pilih akar dalam $(0, 1)$.

Rumus

$$2y^2 - (4 + q)y + 2 = 0, \quad y_* = \frac{4 + q - \sqrt{q(q + 8)}}{4}$$

- **Penjelasan**

Diferensiasi implisit cabang memberi turunan yang diperlukan oleh matriks Jacobi.

Rumus

$$h'(y) = \frac{x - 1}{1 - y - 2qx}$$

- **Penjelasan**

Linearisasi sistem $y' = (-y - yh(y) + z)/s$, $z' = \omega(h(y) - z)$.

Rumus

$$J_* = \begin{pmatrix} (-1 - x_* - y_*h')/s & 1/s \\ \omega h' & -\omega \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Ambil jejak dan determinan.

Rumus

$$T = \frac{-1 - x_* - y_*h'}{s} - \omega, \quad D = \frac{\omega}{s} (1 + x_* + (y_* - 1)h')$$

- **Penjelasan**

Gunakan $qy_* = 2(1 - y_*)^2$ untuk menunjukkan determinan positif dan memperoleh bentuk jejak yang ringkas.

Rumus

$$h' = \frac{1-2y_*}{3(1-y_*)^2}, \quad D = \frac{2\omega(1+y_*)}{3s(1-y_*)} > 0, \quad T = \frac{2y_*^2 + 2y_* - 3}{3s(1-y_*)^2} - \omega$$

Simpulan

Karena determinan selalu positif pada cabang fisik, titik ini tidak pernah menjadi pelana. Tanda jejak menentukan stabilitas, sedangkan $T^2 - 4D$ membedakan fokus dari simpul; pembuktian bifurkasi Hopf penuh tetap memerlukan syarat transversalitas dan koefisien nonlinear.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 11](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 12

Petunjuk

Perlakukan $[A]$ sebagai reservoir konstan. Reaksi pertama menambah satu X , reaksi kedua mengubah satu X menjadi satu tambahan Y , dan reaksi ketiga menghilangkan satu Y .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $x = [X]$, $y = [Y]$, dan $[A] = A_0$ konstan, persamaannya adalah $x' = k_1 A_0 x - k_2 xy = x(\alpha - \beta y)$ dan $y' = k_2 xy - k_3 y = y(\delta x - \gamma)$, yaitu Lotka–Volterra dengan $\alpha = k_1 A_0$, $\beta = k_2$, $\delta = k_2$, dan $\gamma = k_3$. Titik koeksistensi $(k_3/k_2, k_1 A_0/k_2)$ adalah pusat pada model ideal; setiap keadaan awal interior nonsetimbang berada pada kurva tingkat tertutup dan menghasilkan osilasi netral, bukan siklus limit menarik.

Cek cepat

Tanda pada suku silang harus negatif di x' dan positif di y' . Integral pertama $H = k_2 x - k_3 \ln x + k_2 y - k_1 A_0 \ln y$ harus memenuhi $dH/dt = 0$ untuk $x, y > 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tentukan tiga laju aksi massa dengan reservoir A_0 dijaga tetap.

Rumus

$$r_1 = k_1 A_0 x, \quad r_2 = k_2 xy, \quad r_3 = k_3 y$$

- **Penjelasan**

Gunakan perubahan stoikiometri bersih pada X dan Y .

Rumus

$$x' = r_1 - r_2, \quad y' = r_2 - r_3$$

- **Penjelasan**

Faktorkan konsentrasi untuk mengenali bentuk mangsa–pemangsa.

Rumus

$$x' = x(k_1 A_0 - k_2 y), \quad y' = y(k_2 x - k_3)$$

• Penjelasan

Peta parameter ke notasi Lotka–Volterra standar adalah langsung.

Rumus

$$(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (k_1 A_0, k_2, k_2, k_3)$$

• Penjelasan

Titik tetap interior diperoleh dari kedua faktor dalam kurung.

Rumus

$$(x_*, y_*) = \left(\frac{k_3}{k_2}, \frac{k_1 A_0}{k_2} \right)$$

• Penjelasan

Integral pertama membuktikan bahwa orbit interior tetap pada satu kurva tingkat.

Rumus

$$H(x, y) = k_2 x - k_3 \ln x + k_2 y - k_1 A_0 \ln y, \quad \dot{H} = 0$$

Simpulan

Model memprediksi keluarga kontinu orbit periodik netral di sekitar pusat. Amplitudo ditentukan oleh keadaan awal dan tidak dipilih oleh tarikan menuju satu orbit khusus.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 12](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 13

Petunjuk

Jangan hanya mengamati bahwa osilasi bertahan. Siapkan beberapa amplitudo awal atau berikan pulsa kecil ke arah melintang orbit, lalu ukur apakah amplitudo kembali ke gelombang yang sama atau menetap pada nilai baru.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Lakukan gangguan kecil terkalibrasi ke dalam dan ke luar dari orbit pada beberapa fase, serta ulangi dari beberapa kondisi awal. Siklus limit menarik ditandai oleh kembalinya bentuk gelombang dan amplitudo ke orbit yang sama setelah transien, walaupun fasenya dapat bergeser. Jika siklus itu menarik secara hiperbolik, simpangan melintang meluruh eksponensial dan kemiringan peta balik Poincaré memenuhi $|R'(u_*)| < 1$; tarikan nonhiperbolik dapat lebih lambat dengan $|R'(u_*)| = 1$ tetapi tetap memperlihatkan pemulihan amplitudo melalui suku orde tinggi. Pada keluarga periodik netral, gangguan melintang memindahkan sistem ke orbit tetangga dengan amplitudo baru yang bertahan; terdapat kontinum titik tetap peta balik tanpa pemulihan transversal. Ulangi dua arah dan beberapa besar pulsa untuk memisahkan efek ini dari derau atau redaman kecil tak termodelkan.

Cek cepat

Pergeseran fase saja tidak membedakan kedua mekanisme. Bukti diagnostik harus memakai relaksasi amplitudo atau jarak melintang, menunjukkan hasil berulang untuk gangguan masuk dan keluar, serta melaporkan ketidakpastian dan drift eksperimen.

Pembahasan atau rubrik

Criteria

- **Kriteria**

Rancangan kondisi awal atau gangguan

Jawaban lengkap

Menggunakan beberapa keadaan awal dan pulsa kecil ke dua arah melintang orbit pada beberapa fase, dengan besar pulsa yang diketahui.

- **Kriteria**

Prediksi untuk siklus limit menarik

Jawaban lengkap

Menyatakan bahwa amplitudo/bentuk gelombang kembali ke orbit unik setelah transien, dengan fase akhir boleh berbeda; untuk siklus hiperbolik, menghubungkannya dengan pengali Floquet melintang bermodulus kurang dari satu, sambil membolehkan pemulihan orde tinggi yang lebih lambat pada kasus menarik nonhiperbolik.

- **Kriteria**

Prediksi untuk keluarga orbit netral

Jawaban lengkap

Menyatakan bahwa amplitudo baru bertahan pada orbit tetangga dan menghubungkannya dengan kontinum orbit atau pengali melintang satu.

- **Kriteria**

Pengukuran kuantitatif

Jawaban lengkap

Mengestimasi peluruhan jarak ke orbit atau peta balik Poincaré dari penampang yang sama, bukan hanya menilai osilasi secara visual.

- **Kriteria**

Kontrol eksperimen

Jawaban lengkap

Mengulang percobaan, memvariasikan arah dan besar gangguan, serta membahas derau, drift, redaman lemah, dan keterbatasan observasi sebagian keadaan.

Simpulan

Ciri pembeda adalah seleksi amplitudo secara transversal: atraksi memulihkan satu orbit, sedangkan kenetralan mempertahankan orbit baru. Respons fase saja tidak cukup karena kedua sistem dapat mengalami pergeseran fase.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 13](#) [paket sumber]

Tujuan Pembelajaran

Pada akhir bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

- Menyusun persamaan kontinuitas dengan menggunakan konsep kalkulus vektor.
- Menafsirkan persamaan reaksi-difusi sebagai kasus khusus persamaan kontinuitas.
- Menyelesaikan persamaan panas.
- Mendeskripsikan difusi pada tingkat mikroskopis.
- Membandingkan proses difusi pada tingkat mikroskopis dan makroskopis.
- Menunjukkan keberadaan solusi gelombang berjalan untuk persamaan Fisher-KPP.

Difusi pada tingkat makroskopis

Persamaan reaksi-difusi

Tinjau suatu besaran $F(x, y, z, t)$ yang bergantung pada tiga variabel ruang x , y , dan z , serta waktu t . Asumsikan bahwa F mengukur kepadatan suatu spesies, dalam jumlah individu per satuan volume. Perlakuan serupa berlaku untuk jumlah individu per satuan luas dalam model dua dimensi, atau per satuan panjang dalam model satu dimensi. Kita ingin mendeskripsikan evolusi F .

Tinjau suatu daerah tertutup Ω di dalam ruang, dan misalkan N_i menyatakan jumlah individu di dalam Ω . Dari definisi F , kita mengetahui bahwa

$$N_i = \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV,$$

di mana dV menyatakan elemen volume di dalam Ω . Mari kita hitung turunan N_i terhadap waktu. Kita akan mengasumsikan bahwa F cukup teratur untuk memungkinkan pertukaran urutan operasi turunan dan integral. Dengan demikian,

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial t} dV. \quad (9.1)$$

Di sisi lain, perubahan N_i harus mencerminkan perubahan lokal pada F , serta transpor melalui batas $\partial\Omega$ dari Ω . Dengan demikian, kita memiliki

$$\frac{dN_i}{dt} = \iiint_{\Omega} R(x, y, z, t, F) dV - \iint_{\partial\Omega} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS, \quad (9.2)$$

di mana R adalah *suku reaksi* yang mendeskripsikan perubahan lokal pada F , $\vec{r}$ adalah vektor posisi, $\vec{n}$ adalah vektor normal pada $\partial\Omega$ yang mengarah ke luar, dS adalah elemen permukaan pada $\partial\Omega$, dan $\vec{j}$ adalah vektor rapat fluks individu dalam neraca N_i . Suku terakhir dalam (9.2) adalah negatif dari fluks $\vec{j}$ melalui batas Ω . Tanda negatif muncul karena $\vec{n}$ mengarah ke luar dan individu yang meninggalkan Ω menyebabkan N_i berkurang. Dengan teorema divergensi (sekali lagi, secara tersirat kita mengasumsikan semua besaran cukup teratur), suku ini dapat ditulis ulang sebagai

$$-\iint_{\partial\Omega} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = -\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV,$$

sehingga

$$\frac{dN_i}{dt} = \iiint_{\Omega} \left[R(x, y, z, t, F) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] dV. \quad (9.3)$$

Dengan menggabungkan Persamaan (9.1) dan (9.3), kita memperoleh

$$0 = \iiint_{\Omega} \left[-\frac{\partial F}{\partial t} + R(x, y, z, t, F) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] dV.$$

Karena kesamaan ini berlaku untuk sembarang daerah tertutup Ω , kita memperoleh *persamaan kontinuitas berikut*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = R(x, y, z, t, F) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}, \quad (9.4)$$

yang merupakan hukum neraca lokal bagi F ; persamaan ini menjadi hukum konservasi ketika suku sumber bersihnya lenyap. Selanjutnya, kita perlu menghubungkan $\vec{j}$ dengan F . Sebagai pendekatan pertama, kita akan mengasumsikan bahwa *hukum Fick* berlaku, yaitu bahwa $\vec{j}$ hanya bergantung pada gradien F ,

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} F,$$

di mana *tensor difusi* D adalah matriks koefisien difusi. Entri-entri D dapat bergantung pada F ; dalam hal ini, kita memiliki *difusi nonlinear*. Bergantung pada sifat-sifat medium, D mungkin tidak diagonal atau bahkan tidak isotropik. Dalam pembahasan selanjutnya, kita membuat asumsi penyederhanaan bahwa $D = D_0 I_3$, dengan I_3 sebagai matriks identitas 3×3 dan D_0 sebagai konstanta. Dengan demikian, $\vec{j}$ sebanding dengan gradien F ,

$$\vec{j} = -D_0 \vec{\nabla} F. \quad (9.5)$$

Di sini D_0 bernilai positif, yang mendeskripsikan fakta bahwa F “bergerak menjauhi” daerah berkonsentrasi tinggi menuju daerah berkonsentrasi rendah. Dengan menggabungkan (9.4) dan (9.5), kita memperoleh *persamaan reaksi-difusi* berikut,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = R(x, y, z, t, F) + D_0 \Delta F, \quad (9.6)$$

di mana $\Delta = \vec{\nabla}^2$ menyatakan operator Laplace. Jika F dan R seragam dalam ruang, yaitu $F(x, y, z, t) = G(t)$ dan $R(x, y, z, t, F) = H(t, G)$, maka Persamaan (9.6) tereduksi menjadi persamaan diferensial biasa,

$$\frac{dG}{dt} = H(t, G),$$

di mana H dapat berupa, misalnya, model logistik $H(t, G) = G(1 - G)$. Dengan demikian, kita dapat memperluas semua model yang telah dibahas dengan mengubah sistem persamaan diferensial biasa menjadi sistem persamaan diferensial parsial, disertai suku difusi yang sesuai.

Persamaan panas

Jika tidak terdapat suku reaksi, Persamaan (9.6) menjadi *persamaan panas*,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D_0 \Delta F. \quad (9.7)$$

Persamaan ini linear dalam F . Jika syarat awal dan syarat batas yang sesuai diberikan, solusi tunggal dapat ditemukan dalam bentuk fungsi Green. Pada domain tak hingga, misalnya, solusi (9.7) dengan syarat awal $F(x, y, z, 0) = H(x, y, z)$ adalah

$$F(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{4\pi D_0 t} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{|\vec{r} - \vec{\mu}|^2}{4D_0 t} \right] H(\xi, \zeta, \eta) d\xi d\zeta d\eta,$$

di mana $\vec{\mu} = (\xi, \zeta, \eta)$ dan

$$|\vec{r} - \vec{\mu}|^2 = (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2 + (z - \eta)^2.$$

Dari sudut pandang analisis dimensi, kita mengetahui bahwa

$$[D_0] = \frac{L^2}{T}.$$

Akibatnya, kuadrat skala panjang karakteristik pada masalah ini diperkirakan sebanding dengan skala waktu karakteristik.

Difusi pada tingkat mikroskopis

Deskripsi mikroskopis difusi adalah sebagai berikut. Sebagai contoh, perhatikan sekumpulan molekul dalam fluida, seperti molekul zat warna di dalam air. Jika suhunya tidak nol, molekul-molekul ini bergerak secara acak dan mengalami apa yang disebut *gerak Brown*. Apa yang kita sebut difusi pada tingkat makroskopis merupakan akibat gerak acak pada tingkat mikroskopis. Agar gagasan ini lebih intuitif, perhatikan sebuah partikel yang melakukan gerak acak di bidang: setiap langkah mempunyai panjang tertentu l , tetapi arahnya dipilih secara acak dari distribusi seragam. Setelah N langkah, atau secara ekuivalen setelah waktu $T = N\delta t$, dengan δt menyatakan waktu yang berlalu antara dua langkah berturut-turut, partikel berada pada jarak L dari posisi awalnya, sedemikian sehingga

$$\langle L^2 \rangle = Nl^2.$$

Untuk melihatnya, nyatakan $\vec{r}_i$ sebagai vektor posisi partikel setelah i langkah. Demi kesederhanaan, anggap partikel memulai gerak acaknya dari titik asal. Karena setiap langkah panjangnya l ,

$$|\vec{r}_1|^2 = l^2, \quad \text{dan} \quad \langle |\vec{r}_1|^2 \rangle = l^2,$$

di mana rata-rata $\langle \cdot \rangle$ dihitung atas semua kemungkinan realisasi langkah pertama partikel. Akan kita buktikan dengan induksi bahwa setelah k langkah, dengan $k \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\langle |\vec{r}_k|^2 \rangle = k l^2.$$

Kita mengetahui bahwa pernyataan ini benar untuk $k = 1$. Sekarang akan kita tunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $k = n$, pernyataan itu juga benar untuk $k = n + 1$. Jadi, kita mengasumsikan bahwa

$$\langle |\vec{r}_n|^2 \rangle = n l^2,$$

dan menghitung $\langle |\vec{r}_{n+1}|^2 \rangle$. Kita mempunyai

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{n+1}|^2 &= |\vec{r}_n + (\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n)|^2 \\ &= |\vec{r}_n|^2 + 2\vec{r}_n \cdot (\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n) + |\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|^2. \end{aligned}$$

Namun,

$$\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n = l[\cos(\theta_{n+1})\vec{i} + \sin(\theta_{n+1})\vec{j}],$$

di mana $(\vec{i}, \vec{j})$ merupakan basis ortonormal bidang, sedangkan sudut θ_{n+1} berdistribusi seragam dan independen dari riwayat gerak acak sebelumnya. Oleh karena itu, dengan mengondisikan pada posisi partikel saat ini,

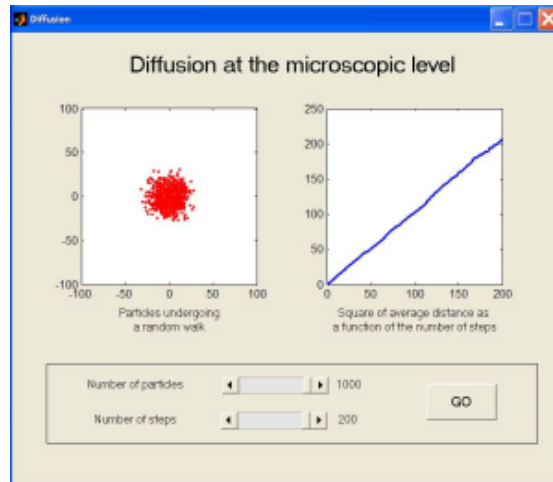
$$\begin{aligned} \left\langle \vec{r}_n \cdot (\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n) \mid \vec{r}_n \right\rangle &= l(\vec{r}_n \cdot \vec{i})(\cos(\theta_{n+1})) + l(\vec{r}_n \cdot \vec{j})(\sin(\theta_{n+1})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Dengan mengambil ekspektasi total, suku silang tersebut tetap bernilai nol, sedangkan $|\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|^2 = l^2$. Dengan demikian,

$$\langle |\vec{r}_{n+1}|^2 \rangle = \langle |\vec{r}_n|^2 \rangle + 0 + l^2 = (n+1)l^2.$$

Oleh karena itu, $\langle |\vec{r}_k|^2 \rangle = k l^2$ untuk setiap bilangan bulat positif k . Jadi, $\langle L^2 \rangle = Nl^2$ dan karena $T = N\delta t$, diperoleh $\langle L^2 \rangle \propto T$.

Perhatikan eksperimen berikut. Banyak partikel yang tidak saling berinteraksi dilepaskan secara serentak dari titik asal, dan setiap partikel melakukan gerak acak isotropik di bidang. Perhitungan di atas menunjukkan bahwa setelah selang waktu T , kita mengharapkan terbentuknya awan partikel; jika jarak L antara setiap partikel dan titik asal diukur, seharusnya diperoleh $\langle L^2 \rangle \propto T$.



Gambar 9.1. Antarmuka pengguna grafis yang menampilkan (kiri) awan partikel setelah dua ratus langkah dan (kanan) hubungan linear antara $\langle L^2 \rangle$ dan N . [Deskripsi Gambar](#)

Untuk memberikan gambaran visual tentang hasil ini, antarmuka pengguna grafis MATLAB *Diffusion* (lihat Gambar 9.1) mensimulasikan gerak acak M partikel yang tidak saling berinteraksi pada suatu kisi—setiap partikel hanya dapat bergerak ke atas, ke bawah, ke kiri, atau ke kanan dengan peluang yang sama. Semua partikel memulai gerak acaknya dari titik asal di pusat kotak. Untuk setiap partikel, jarak L antara posisinya setelah N langkah (atau secara ekuivalen setelah waktu $T = N\delta t$, dengan δt tetap) dan titik asal diukur sebagai fungsi N . Hasilnya dirata-ratakan untuk seluruh partikel, lalu diplot. Pengguna dapat memilih jumlah langkah maksimum, N_{max} , serta jumlah partikel M . Antarmuka menampilkan posisi semua partikel seiring berjalannya waktu. Pada gambar sumber yang tersedia, semua penanda partikel yang tampak berwarna merah; tidak ada satu partikel yang ditonjolkan dengan warna lain. Pada akhir simulasi, grafik rata-rata L^2 ditampilkan sebagai fungsi N .

Simulasi ini menunjukkan bahwa difusi yang dimodelkan oleh persamaan panas pada tingkat makroskopis dapat dipahami sebagai akibat gerak acak partikel-partikel yang tidak saling berinteraksi pada tingkat mikroskopis. Kedua fenomena ini memang mempunyai sifat penskalaan yang sama. Korespondensi tersebut sebenarnya dapat dirumuskan secara ketat, tetapi tidak akan kita bahas di sini. Namun, deskripsi mikroskopis difusi berguna untuk selalu diingat. Kita sering mengembangkan model makroskopis berdasarkan pemahaman tentang perilaku pada tingkat mikroskopis. Karena itu, penting untuk mengetahui dalam kondisi apa suatu fenomena tertentu dapat dimodelkan secara memadai pada tingkat makroskopis dengan suku-suku difusi.

Persamaan Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov

Sekarang kita beralih ke sebuah contoh sederhana persamaan reaksi-difusi satu dimensi, yang dikenal sebagai persamaan Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (Fisher-KPP). **Catatan:** R.A. Fisher, [The wave of advance of advantageous genes](#), *Annals of Eugenics* 7, 355–369 (1937). Pernyataan penerbit, yang juga disetujui penulis bab ini: “Tulisan para pendukung eugenika kerap sarat prasangka terhadap kelompok ras, etnis, dan penyandang disabilitas. Publikasi daring materi ini ditujukan bagi penelitian ilmiah dan bukan merupakan dukungan atau promosi terhadap pandangan yang dinyatakan dalam artikel-artikel tersebut ataupun terhadap eugenika secara umum.” **Catatan:** A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piscounoff, *Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem*, *Bulletin de l'Université d'état à Moscou, Ser. int., Section A, Vol. 1* (1937); diterjemahkan dalam P. Pelcé, *Dynamics of curved fronts*, Academic Press, San Diego, 1988. Perhatikan versi satu dimensi persamaan logistik dengan difusi,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

di mana r , K , dan D merupakan konstanta. Persamaan ini dapat dibuat tak berdimensi dengan melakukan penskalaan pada ruang, waktu, dan variabel terikat N . Untuk itu, kita definisikan

$$n = \frac{N}{K}, \quad x = X \sqrt{\frac{r}{D}}, \quad \tau = r t,$$

dan diperoleh persamaan Fisher-KPP tak berdimensi,

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = n(1-n) + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (9.8)$$

Persamaan ini telah dipelajari secara luas dalam literatur. **Catatan:** Untuk suatu tinjauan, lihat misalnya W. van Saarloos, *Front propagation into unstable states*, Physics Reports **386**, 29-222 (2003)., dan di bawah ini kita hanya membahas salah satu sifatnya, yakni adanya suatu keluarga solusi gelombang berjalan yang didefinisikan pada garis real.

Persamaan (9.8) mempunyai dua solusi seragam dan konstan, yaitu $n = 0$ dan $n = 1$. Kita dapat mencari solusi gelombang berjalan yang menghubungkan kedua solusi tersebut. Untuk itu, kita tetapkan $n(x, \tau) = v(\xi)$, dengan $\xi = x - c\tau$ dan c sebagai parameter laju rambat, lalu menyubstitusikannya ke dalam (9.8). Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -c \frac{dv}{d\xi}, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dv}{d\xi},$$

sehingga v memenuhi persamaan diferensial biasa

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + c \frac{dv}{d\xi} + v(1-v) = 0. \quad (9.9)$$

Dinamika persamaan ini dapat dideskripsikan secara kualitatif dengan meninjau bidang fase yang bersesuaian.

Misalkan $\frac{dv}{d\xi} = w$. Maka,

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{d^2 v}{d\xi^2} = -cw - v(1-v),$$

dan (9.9) ekuivalen dengan sistem dinamik berikut

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -cw - v(1-v) \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Titik tetapnya pada bidang (v, w) adalah $P_0 = (0, 0)$ dan $P_1 = (1, 0)$. Matriks Jacobi sistem ini adalah

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2v & -c \end{pmatrix},$$

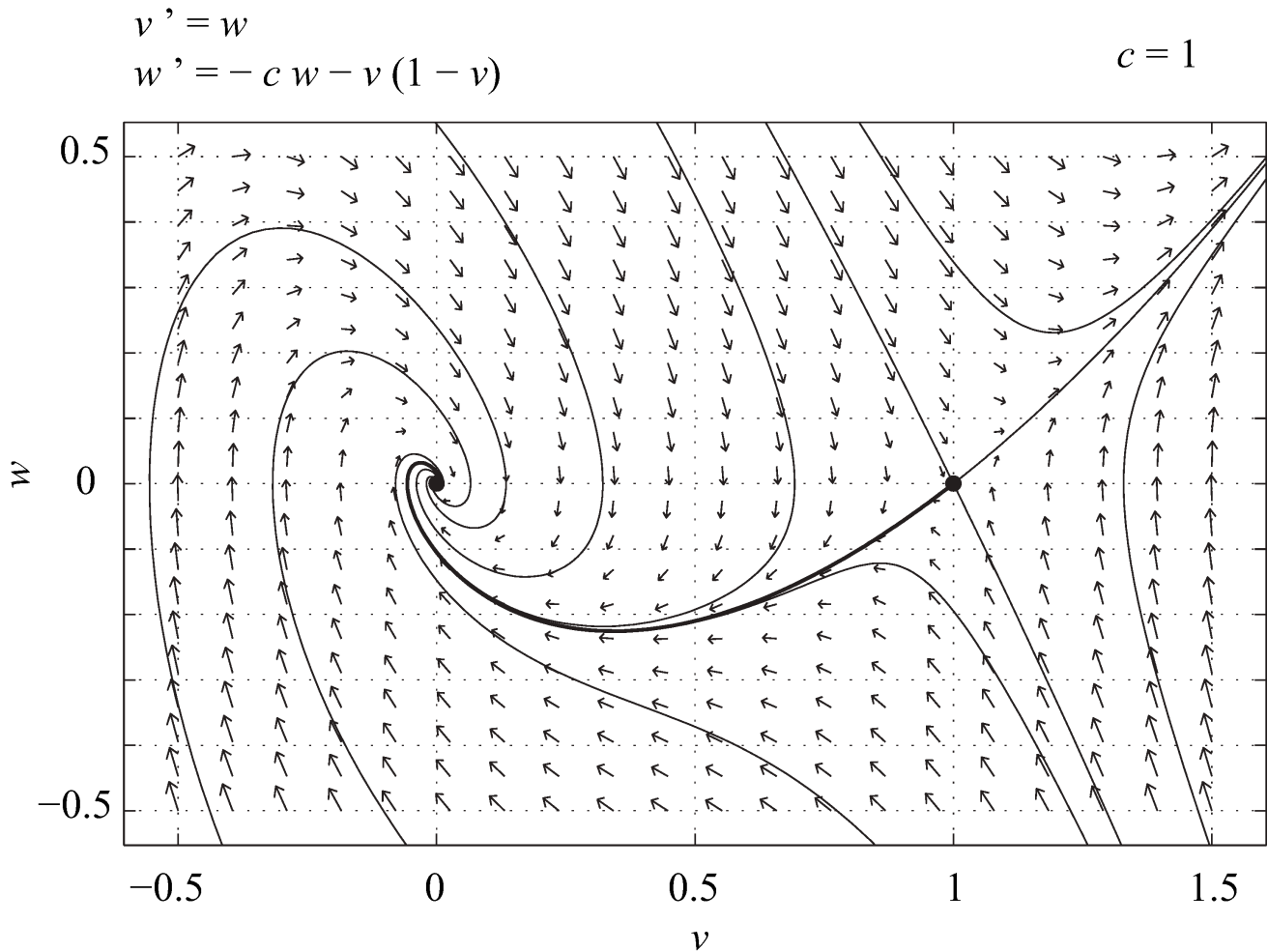
dan

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}, \quad J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Untuk P_1 , $\det(J(P_1)) = -1$, sehingga P_1 merupakan titik pelana. Titik asal mempunyai nilai eigen λ_1 dan λ_2 dengan $\lambda_1 \lambda_2 = 1 > 0$ dan $\lambda_1 + \lambda_2 = -c$. Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat mengasumsikan bahwa c tidak negatif, sebab mengganti c dengan $-c$ sama artinya dengan mengganti ξ dengan $-\xi$ dalam Persamaan (9.9). Jika $c = 0$, titik asal merupakan pusat. Jika $c > 0$, titik asal merupakan simpul stabil atau spiral stabil. Namun, fakta bahwa P_1 merupakan pelana dan titik asal merupakan penarik lokal tidak membuktikan klaim bahwa, untuk setiap $c > 0$, terdapat lintasan yang menghubungkan P_1 dengan P_0 . Jika lintasan global semacam itu ada dan layak secara fisik, lintasan tersebut bersesuaian dengan sebuah muka yang bergerak dengan laju c dan menggambarkan pertumbuhan keadaan $n = 1$ menuju wilayah dengan $n = 0$.

Diskriminan polinom karakteristik $J(P_0)$, yaitu $c^2 - 4$, bernilai positif untuk $c > 2$, nol pada nilai kritis $c = 2$, dan negatif di bawah nilai itu. Jadi, titik asal merupakan simpul stabil untuk $c > 2$, simpul stabil degenerat dengan nilai eigen ganda -1 pada nilai kritis, dan spiral stabil untuk $0 < c < 2$. Analisis global menunjukkan bahwa cabang manifold tak stabil yang relevan menghasilkan muka monoton tak negatif ketika $c \geq 2$, sedangkan di bawah ambang itu lintasan

kandidat berosilasi di sekitar titik asal dan melintasi $v = 0$. Gambar 9.2 dan 9.3 memperlihatkan potret fase (9.10) masing-masing untuk $c = 1$ dan $c = 3$. Pada kedua gambar, garis penuh tebal menunjukkan lintasan kandidat yang menghubungkan P_1 dan P_0 ; lintasan pertama berubah tanda dan tidak layak sebagai kepadatan, sedangkan lintasan kedua memberikan muka monoton yang dapat diterima. Dengan demikian, jika n mendeskripsikan kepadatan populasi, ambang laju yang tertulis sebagai 2 harus mencakup kesamaan: laju yang diperbolehkan ialah $c \geq 2$. Meskipun terdapat seluruh keluarga muka semacam itu, laju yang dipilih oleh persamaan diferensial parsial (9.8) bergantung pada data awal. Data awal dengan ekor yang cukup curam—misalnya data yang memiliki dukungan kompak—menyeleksi laju asimtotik minimum, sedangkan ekor eksponensial yang lebih landai dapat menyeleksi laju yang lebih besar.

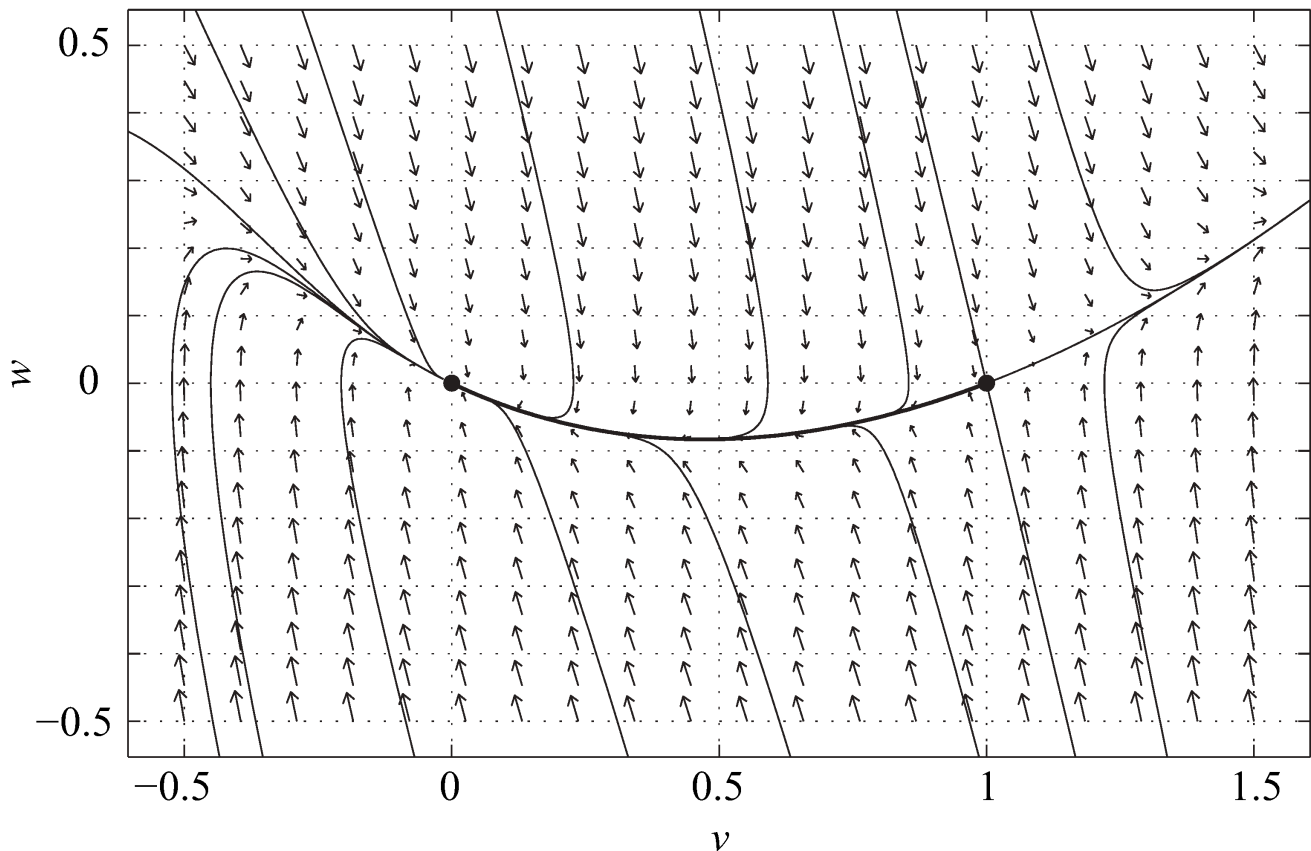


Gambar 9.2. Bidang fase sistem (9.10), dengan $c = 1$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

$$v' = w$$

$$w' = -c w - v(1-v)$$

$$c = 3$$



Gambar 9.3. Bidang fase sistem (9.10), dengan $c = 3$, yang diplot menggunakan perangkat lunak PPLANE. [Deskripsi Gambar](#)

Gelombang kimia

Ketika reaksi kimia berlangsung dalam sistem yang membentang secara spasial, difusi perlu diperhitungkan. Akibatnya, persamaan laju yang dibahas dalam Bab 8 berubah menjadi persamaan diferensial parsial. Suku-suku reaksi tetap sama, tetapi konsentrasi setiap zat kimia kini berdifusi dengan koefisien difusi yang bergantung pada ukuran dan berat molekul yang bersangkutan. Jika reaksinya bersifat osilatori, muka gelombang, yang misalnya bersesuaian dengan konsentrasi tinggi suatu zat kimia, merambat di dalam sistem. Selain itu, jika reaksi dibatasi pada permukaan dua dimensi dan gelombang dipicu di suatu titik dalam ruang, muka gelombangnya berbentuk lingkaran. Sebuah artikel tahun 2001 karya C. Sachs *et al.* **Catatan:** C. Sachs, M. Hildebrand, S. Völkening, J. Wintterlin, G. Ertl, *Spatiotemporal self-organization in a surface reaction: from the atomic to the mesoscopic scale*, *Science* **293**, 1635-1638 (2001). menjelaskan bagaimana muka gelombang semacam itu diamati dalam eksperimen dan mengusulkan model reaksi-difusi yang mereproduksi perilaku ini. Para penulis juga membahas keterbatasan model reaksi-difusi ketika parameter makroskopis dipengaruhi oleh rincian interaksi mikroskopis.

Apa yang akan terjadi jika muka gelombang terputus, misalnya jika gelombang melewati wilayah tempat reaksi tidak dapat berlangsung? Jika muka gelombang tertambat pada satu titik, muka tersebut akan melengkung dan akhirnya membentuk gelombang spiral. Gelombang semacam itu sering diamati dalam eksperimen ketika reaksi Belousov-Zhabotinsky dibatasi pada permukaan dua dimensi, seperti film tipis, cakram kaca berpori, atau bahkan selembar kertas saring. Untuk informasi lebih lanjut, pembaca dapat merujuk pada artikel asli karya S.C. Müller *et al.* **Catatan:**

S.C. Müller, T. Plesser and B. Hess, [*The structure of the core of the spiral wave in the Belousov-Zhabotinskii reaction*](#), Science **230**, 661-663 (1985)., yang membahas eksperimen yang mengungkap struktur inti gelombang spiral semacam itu.

Ringkasan

Persamaan reaksi-difusi memperluas model persamaan diferensial biasa ke seluruh ranah spasial dalam satu, dua, atau tiga dimensi. Pada tingkat makroskopis, difusi mendeskripsikan kecenderungan suatu besaran untuk menyebar dengan bergerak ke arah yang berlawanan dengan gradien lokalnya. Pada tingkat mikroskopis, difusi berkaitan dengan gerak acak isotropik. Beberapa persamaan reaksi-difusi memiliki solusi gelombang berjalan yang dapat ditemukan dengan menggunakan metode sistem dinamik.

Deskripsi Gambar

Gambar 9.1: Tangkapan layar Antarmuka Pengguna Grafis MATLAB untuk GUI difusi, yang berjudul "Difusi pada tingkat mikroskopis". Gambar ini memuat dua plot. Di sebelah kiri terdapat plot sebar dua dimensi berjudul "Partikel yang menjalani gerak acak", yang memperlihatkan 1.000 titik partikel merah bergerombol di sekitar (0, 0). Di sebelah kanan terdapat grafik linear yang seharusnya dibaca sebagai "Rata-rata kuadrat jarak sebagai fungsi jumlah langkah", yang memperlihatkan garis biru naik hingga nilai sekitar 210 selama 200 langkah. Kontrol penggeser untuk "Jumlah partikel" (1.000) dan "Jumlah langkah" (200) terletak di bawah grafik, bersama sebuah tombol "GO". [[Kembali ke Gambar 9.1](#)]

Gambar 9.2: Potret fase untuk variabel v dan w yang memperlihatkan medan vektor dan beberapa lintasan. Sistem didefinisikan oleh persamaan $v' = w$ dan $w' = -cw - v(1 - v)$ dengan $c = 1$. Terdapat dua titik kesetimbangan: spiral stabil di titik asal (0, 0) dan titik pelana di (1, 0). Sebuah lintasan tebal, yang dikenal sebagai orbit heteroklinik, menghubungkan titik pelana dengan spiral. [[Kembali ke Gambar 9.2](#)]

Gambar 9.3: Potret fase untuk variabel v dan w dengan persamaan $v' = w$ dan $w' = -cw - v(1 - v)$, dengan $c = 3$. Potret ini memperlihatkan medan vektor dan beberapa lintasan. Terdapat dua titik kesetimbangan: simpul stabil di (0, 0) dan titik pelana di (1, 0). Sebuah orbit heteroklinik tebal menghubungkan titik pelana di (1, 0) dengan simpul stabil di (0, 0) melalui lintasan yang tidak berosilasi. [[Kembali ke Gambar 9.3](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Deskripsikan perilaku sistem ([9.10](#)) di dekat titik asal jika $c = 2$.

Soal 2

Pertimbangkan fungsi

$$f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_0 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0 t}\right] H(x_0) dx_0.$$

1. Hitung $\partial f / \partial t$.
2. Hitung $\partial^2 f / \partial x^2$.
3. Tunjukkan bahwa f merupakan solusi persamaan diferensial

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Soal 3

Pertimbangkan sekumpulan bakteri yang bersifat *kemotaktik* terhadap makanan. Artinya, pada tingkat makroskopis, fluks bakteri $\vec{j}$ diberikan oleh

$$\vec{j} = \chi b \vec{\nabla} n - D \vec{\nabla} b,$$

di mana n adalah konsentrasi nutrisi, b adalah kepadatan bakteri, D adalah koefisien difusi, dan χ adalah *koefisien kemotaksis*.

Tuliskan model reaksi-difusi sederhana untuk n dan b yang memperhitungkan pergerakan bakteri, difusi nutrisi, dan fakta bahwa bakteri berkembang biak dengan memakan nutrisi.

Soal 4

Pertimbangkan bakteri kemotaktik yang dideskripsikan dalam Soal 3. Deskripsikan bagaimana Anda akan memodifikasi gerak acak setiap bakteri pada tingkat mikroskopis agar mencakup kemotaksis.

Soal 5

Pertimbangkan sebuah partikel yang melakukan gerak acak satu dimensi dengan panjang setiap langkah satu satuan. Peluang partikel melangkah ke kanan adalah p , sedangkan peluangnya melangkah ke kiri adalah $1 - p$, dengan p tidak harus sama dengan $1/2$. Jelaskan seberapa jauh partikel diperkirakan telah berpindah setelah N langkah: nyatakan perpindahan bertanda rata-rata (posisi harapan) dari titik awal, lalu bedakan hasil tersebut dari simpangan khas terhadap nilai rata-rata.

Soal 6

Pertimbangkan lintasan heteroklinik pada Gambar 9.2. Buat sketsa grafik v sebagai fungsi ξ . Jelaskan mengapa fungsi semacam itu tidak dapat merepresentasikan kepadatan populasi.

Soal 7

Pertimbangkan lintasan heteroklinik pada Gambar 9.3. Buat sketsa grafik v sebagai fungsi ξ .

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Evaluasi matriks Jacobi di $(v, w) = (0, 0)$, lalu periksa bukan hanya akar polinom karakteristik, tetapi juga dimensi ruang eigennya ketika diskriminan nol.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $c = 2$, $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ dan polinom karakteristiknya $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Jadi $\lambda = -1$ mempunyai multiplisitas aljabar dua, tetapi $J + I$ berperingkat satu sehingga ruang eigennya hanya berdimensi satu, dengan arah $w = -v$. Titik asal adalah simpul stabil degenerat (simpul tak wajar), bukan spiral. Linearisasinya memberi $v(\xi) = (A + B\xi)e^{-\xi}$ dan $w(\xi) = [B - A - B\xi]e^{-\xi}$; lintasan mendekati titik asal tanpa berotasi dan secara generik menyinggung satu-satunya arah eigen.

Cek cepat

Jejak harus -2 , determinan harus 1 , diskriminan harus nol, dan $\dim \ker(J + I) = 1$. Dua eigenvektor bebas akan secara keliru mengklasifikasikan simpul ini sebagai simpul bintang.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Linearisasikan sistem $v' = w$, $w' = -cw - v(1 - v)$ di titik asal.

Rumus

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Substitusikan nilai kritis $c = 2$.

Rumus

$$\det(\lambda I - J_0) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

- **Penjelasan**

Periksa multiplisitas geometrik akar ganda.

Rumus

$$J_0 + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ker(J_0 + I) = \text{span}\{(1, -1)^T\}$$

- **Penjelasan**

Persamaan skalar linear di sekitar titik asal memiliki akar karakteristik ganda.

Rumus

$$v'' + 2v' + v = 0 \Rightarrow v = (A + B\xi)e^{-\xi}$$

- **Penjelasan**

Turunkan v untuk memperoleh komponen kedua dan melihat peluruhan tanpa rotasi.

Rumus

$$w = v' = [B - A - B\xi]e^{-\xi} \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

Simpulan

Nilai $c = 2$ adalah batas fokus–simpul: titik asal tetap asimtotik stabil, tetapi memiliki satu arah eigen untuk nilai eigen -1 yang berulang.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 1](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Namai integran tanpa H sebagai $K(x, x_0, t)$ dan tetapkan $a = x - x_0$. Diferensiasikan faktor $t^{-1/2}$ dan eksponensial secara terpisah; untuk turunan ruang, hitung dahulu K_x , kemudian K_{xx} .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Ambil $D_0 > 0$, $t > 0$, dan misalnya $H \in L^1(\mathbb{R})$, sehingga diferensiasi di bawah tanda integral sah pada setiap selang waktu yang dijauhkan dari nol. Dengan $K = [2\sqrt{\pi D_0 t}]^{-1} \exp[-(x - x_0)^2/(4D_0 t)]$, diperoleh $K_t = K[-1/(2t) + (x - x_0)^2/(4D_0 t^2)]$ dan $K_{xx} = K[-1/(2D_0 t) + (x - x_0)^2/(4D_0^2 t^2)]$. Karena $K_t = D_0 K_{xx}$, maka $f_t = \int K_t H dx_0 = D_0 \int K_{xx} H dx_0 = D_0 f_{xx}$.

Cek cepat

Koefisien $(x - x_0)^2$ pada f_t harus $1/(4D_0 t^2)$, sedangkan pada f_{xx} harus $1/(4D_0^2 t^2)$; mengalikan rumus kedua dengan D_0 harus menghasilkan rumus pertama tepat.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Definisikan kernel dan nyatakan syarat cukup untuk menukar turunan dengan integral.

Rumus

$$K(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_0 t}} e^{-(x - x_0)^2/(4D_0 t)}, \quad f = \int_{-\infty}^{\infty} K H dx_0$$

- **Penjelasan**

Untuk $H \in L^1(\mathbb{R})$ dan $t \in [\varepsilon, T]$ dengan $\varepsilon > 0$, turunan kernel dibatasi oleh konstanta kali fungsi yang dapat diintegrasikan terhadap $|H|$; teorema konvergensi terdominasi membenarkan diferensiasi di bawah integral.

Rumus

$$f_t = \int_{-\infty}^{\infty} K_t H dx_0, \quad f_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx} H dx_0$$

- **Penjelasan**

Diferensiasikan prefaktor dan eksponen terhadap waktu.

Rumus

$$K_t = K \left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x - x_0)^2}{4D_0 t^2} \right]$$

- **Penjelasan**

Diferensiasikan dua kali terhadap x .

Rumus

$$K_x = -\frac{x-x_0}{2D_0t}K, \quad K_{xx} = K\left[-\frac{1}{2D_0t} + \frac{(x-x_0)^2}{4D_0^2t^2}\right]$$

- **Penjelasan**

Bandungkan kedua turunan kernel secara langsung.

Rumus

$$D_0K_{xx} = K\left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x-x_0)^2}{4D_0t^2}\right] = K_t$$

- **Penjelasan**

Integrasikan identitas tersebut terhadap x_0 .

Rumus

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int K_t H dx_0 = D_0 \int K_{xx} H dx_0 = D_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Simpulan

Kernel Gauss yang diberikan adalah solusi fundamental persamaan panas satu dimensi; konvolusinya dengan data H memenuhi persamaan panas untuk setiap $t > 0$ di bawah asumsi regularitas yang dinyatakan.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 2](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Gunakan fluks bakteri yang terkoreksi secara fisik, $\vec{j}_b = \chi b \nabla n - D \nabla b$, agar fluks kemotaktik lenyap ketika tidak ada bakteri. Deklarasikan satu laju konsumsi, satu faktor hasil pertumbuhan, fluks nutrisi, serta syarat awal dan batas.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Satu penutupan sederhana adalah $\partial_t n = D_n \Delta n - \kappa b n$ dan $\partial_t b = D \Delta b - \chi \nabla \cdot (b \nabla n) + Y \kappa b n$, dengan $D_n, D, \chi, \kappa, Y > 0$. Model ini memakai fluks nutrisi $\vec{j}_n = -D_n \nabla n$, fluks bakteri terkoreksi $\vec{j}_b = \chi b \nabla n - D \nabla b$, konsumsi $R_n = -\kappa b n$, dan pertumbuhan $R_b = Y \kappa b n$. Lengkapi dengan data awal nonnegatif serta, misalnya, syarat tanpa fluks $\vec{j}_n \cdot \vec{\nu} = \vec{j}_b \cdot \vec{\nu} = 0$ pada batas domain. Ini adalah satu pilihan model yang dinyatakan, bukan penutupan unik.

Cek cepat

Tanda kemotaksis dalam persamaan b harus $-\chi \nabla \cdot (b \nabla n)$, karena hukum neraca memakai $-\nabla \cdot \vec{j}_b$. Dengan batas tanpa fluks, reaksi harus saling hapus dalam $d \int (n + b/Y)/dt$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Bedakan koefisien difusi nutrien dari koefisien difusi bakteri dan tetapkan fluks masing-masing.

Rumus

$$\vec{J}_n = -D_n \nabla n, \quad \vec{J}_b = \chi b \nabla n - D \nabla b$$

- **Penjelasan**

Faktor b pada fluks kemotaktik diperlukan agar tidak ada arus bakteri ketika $b = 0$; bentuk tercetak pada sumber tanpa faktor ini dikoreksi dalam edisi terjemahan.

Rumus

$$b = 0 \Rightarrow \vec{J}_b = 0$$

- **Penjelasan**

Pilih hukum aksi massa sederhana untuk konsumsi nutrien dan hubungkan pertumbuhan bakteri melalui faktor hasil γ .

Rumus

$$R_n = -\kappa b n, \quad R_b = Y \kappa b n$$

- **Penjelasan**

Masukkan fluks dan reaksi ke hukum neraca $u_t = R_u - \nabla \cdot \vec{J}_u$.

Rumus

$$\begin{aligned} \partial_t n &= D_n \Delta n - \kappa b n, \\ \partial_t b &= D \Delta b - \chi \nabla \cdot (b \nabla n) + Y \kappa b n. \end{aligned}$$

- **Penjelasan**

Tutup masalah nilai awal-batas pada domain Ω dengan salah satu pilihan yang konsisten.

Rumus

$$n(\vec{x}, 0) = n_0 \geq 0, \quad b(\vec{x}, 0) = b_0 \geq 0, \quad \vec{J}_n \cdot \vec{\nu} = \vec{J}_b \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ pada } \partial\Omega$$

- **Penjelasan**

Periksa neraca total nutrien ekuivalen ketika tidak ada fluks melalui batas.

Rumus

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(n + \frac{b}{Y} \right) dV = 0$$

Simpulan

Model ini menggabungkan difusi nutrien, difusi acak bakteri, drift menuju gradien nutrien, konsumsi, dan pertumbuhan dalam satu penutupan minimal yang tanda serta neracanya dapat diperiksa.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Pertahankan komponen acaknya, tetapi beri bobot lebih besar kepada arah yang berakhir pada nilai nutrisi lebih tinggi. Gunakan normalisasi yang menjamin semua peluang positif dan berjumlah satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada kisi d -dimensi dengan panjang langkah ℓ , salah satu aturan yang sah adalah memilih arah $\vec{e} \in \{\pm \vec{e}_1, \dots, \pm \vec{e}_d\}$ dengan peluang $P(\vec{e} | \vec{x}) = \exp\{\beta[n(\vec{x} + \ell\vec{e}) - n(\vec{x})]\} / \sum_{\vec{e}'} \exp\{\beta[n(\vec{x} + \ell\vec{e}') - n(\vec{x})]\}$, dengan $\beta > 0$. Aturan ini tetap acak, tetapi memilih langkah menaiki gradien nutrisi. Untuk gradien lemah, $P(\vec{e} | \vec{x}) = 1/(2d) + (\beta\ell/(2d))\vec{e} \cdot \nabla n + O(\ell^2)$, sehingga $E[\Delta \vec{X} | \vec{x}] = (\beta\ell^2/d)\nabla n + O(\ell^3)$. Dalam limit banyak partikel, drift ini menyumbang fluks sebanding dengan $b\nabla n$, sedangkan bagian acak menyumbang $-D\nabla b$.

Cek cepat

Pada nutrisi seragam, semua $2d$ arah harus berpeluang $1/(2d)$. Membalik gradien harus membalik arah drift, semua peluang harus tetap nonnegatif, dan jumlah peluang harus tepat satu.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan himpunan arah kisi yang simetris agar aturan kembali menjadi gerak acak isotropik saat tidak ada sinyal nutrisi.

Rumus

$$\mathcal{E} = \{\pm \vec{e}_1, \dots, \pm \vec{e}_d\}$$

- **Penjelasan**

Ukur perubahan nutrisi yang akan dialami oleh satu langkah kandidat.

Rumus

$$\Delta_{\vec{e}} n = n(\vec{x} + \ell\vec{e}) - n(\vec{x})$$

- **Penjelasan**

Ubah perubahan itu menjadi bobot positif dan normalkan.

Rumus

$$P(\vec{e} | \vec{x}) = \frac{e^{\beta \Delta_{\vec{e}} n}}{\sum_{\vec{e}' \in \mathcal{E}} e^{\beta \Delta_{\vec{e}'} n}}$$

- **Penjelasan**

Ekspansi gradien lemah memperlihatkan bias arah secara eksplisit.

Rumus

$$P(\vec{e} \mid \vec{x}) = \frac{1}{2d} + \frac{\beta \ell}{2d} \vec{e} \cdot \nabla n + O(\ell^2)$$

• Penjelasan

Jumlahkan perpindahan berbobot untuk memperoleh drift rata-rata satu langkah.

Rumus

$$\mathbb{E}[\Delta \vec{X} \mid \vec{x}] = \ell \sum_{\vec{e} \in \mathcal{E}} \vec{e} P(\vec{e} \mid \vec{x}) = \frac{\beta \ell^2}{d} \nabla n + O(\ell^3)$$

Simpulan

Kemotaksis mikroskopis dapat dimodelkan sebagai gerak acak berbias, bukan gerak deterministik: bakteri masih dapat bergerak ke segala arah, tetapi rata-rata drift-nya menuju nutrisi yang lebih tinggi.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 4](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Nyatakan langkah ke- i sebagai $X_i \in \{-1, +1\}$ dan posisi sebagai $S_N = \sum_i X_i$. Hitung $E[X_i]$ dan $E[X_i^2]$ sebelum memakai aditivitas nilai harapan dan varians.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan langkah independen $X_i = +1$ berpeluang p dan $X_i = -1$ berpeluang $1 - p$, diperoleh $E[X_i] = 2p - 1$ dan $\text{Var}(X_i) = 4p(1 - p)$. Maka untuk $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, $E[S_N] = N(2p - 1)$, $\text{Var}(S_N) = 4Np(1 - p)$, dan simpangan bakunya $\sigma_N = 2\sqrt{Np(1 - p)}$. Jadi posisi tipikal adalah $N(2p - 1) + O(\sqrt{N})$. Jika $p \neq 1/2$, drift berorde N akhirnya mendominasi sebaran berorde $\sqrt{N}$; jika $p = 1/2$, rata-ratanya nol tetapi jarak tipikal dari titik awal berorde $\sqrt{N}$, dengan $\sigma_N = \sqrt{N}$.

Cek cepat

Untuk $p = 1$ hasilnya harus $S_N = N$ tanpa varians; untuk $p = 0$, $S_N = -N$; dan untuk $p = 1/2$, nilai harapan nol serta varians N .

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Modelkan setiap langkah sebagai variabel acak bertanda satu satuan.

Rumus

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = 1 - p$$

• Penjelasan

Hitung dua momen pertama satu langkah.

Rumus

$$\mathbb{E}[X_i] = p - (1 - p) = 2p - 1, \quad \mathbb{E}[X_i^2] = 1$$

- **Penjelasan**

Kurangi kuadrat rata-rata untuk memperoleh varians satu langkah.

Rumus

$$\text{Var}(X_i) = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$$

- **Penjelasan**

Gunakan independensi untuk menjumlahkan nilai harapan dan varians.

Rumus

$$\mathbb{E}[S_N] = N(2p - 1), \quad \text{Var}(S_N) = 4Np(1 - p)$$

- **Penjelasan**

Bedakan lokasi pusat distribusi dari lebar tipikalnya.

Rumus

$$\sigma_N = 2\sqrt{Np(1 - p)}, \quad S_N = N(2p - 1) + O(\sigma_N)$$

- **Penjelasan**

Jika yang diminta adalah jarak kuadrat rata-rata dari titik awal, gabungkan drift dan varians.

Rumus

$$\mathbb{E}[S_N^2] = N^2(2p - 1)^2 + 4Np(1 - p)$$

Simpulan

Bias menghasilkan perpindahan terarah linear dalam N , sementara ketidakpastian difusif di sekitar perpindahan rata-rata hanya tumbuh seperti $\sqrt{N}$.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 5](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Ingat bahwa $w = dv/d\xi$. Hitung nilai eigen di $(0, 0)$ untuk $c = 1$, lalu terjemahkan putaran lintasan pada bidang (v, w) menjadi perubahan tanda dan ekstrem berulang pada grafik $v(\xi)$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $c = 1$, nilai eigen titik asal adalah $\lambda = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$, sehingga titik asal merupakan spiral stabil. Sepanjang orbit heteroklinik, $v(-\infty) = 1$ dan $v(\infty) = 0$, tetapi ketika mendekati nol profil berosilasi dengan amplitudo yang meluruh: $v(\xi) \sim e^{-\xi/2} [A \cos(\sqrt{3}\xi/2) + B \sin(\sqrt{3}\xi/2)]$. Karena profil nontrivial ini berulang kali

melintasi $v = 0$, ia mengambil nilai negatif. Kepadatan populasi harus nonnegatif, sehingga profil gelombang berjalan untuk $c = 1$ tidak dapat diterima sebagai profil kepadatan.

Cek cepat

Diskriminan harus $1 - 4 = -3 < 0$. Sketsa harus berawal mendekati 1, menuju nol dengan osilasi teredam, dan memperlihatkan paling sedikit satu lintasan ke wilayah $v < 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gunakan titik ujung orbit heteroklinik untuk menetapkan batas profil.

Rumus

$$(v, w): (1, 0) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow v(-\infty) = 1, v(+\infty) = 0$$

- **Penjelasan**

Linearisasi di titik asal untuk $c = 1$.

Rumus

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

- **Penjelasan**

Akar kompleks dengan bagian real negatif menghasilkan spiral stabil.

Rumus

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

- **Penjelasan**

Komponen v karena itu memiliki ekor osilatori teredam.

Rumus

$$v(\xi) \sim e^{-\xi/2} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) \right]$$

- **Penjelasan**

Osilasi nontrivial di sekitar nol memaksa perubahan tanda.

Rumus

$$\exists \xi: v(\xi) < 0$$

Simpulan

Orbit bidang fase memang merupakan koneksi heteroklinik matematis, tetapi ekornya yang negatif melanggar syarat dasar $v \geq 0$ bagi kepadatan populasi.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Gunakan $w = dv/d\xi$, nilai eigen real di titik asal, dan posisi orbit heteroklinik pada setengah bidang $w < 0$. Periksa juga apa yang terjadi pada w' jika lintasan menyentuh $w = 0$ dengan $0 < v < 1$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $c = 3$, nilai eigen titik asal adalah $\lambda_{\pm} = (-3 \pm \sqrt{5})/2 < 0$, sehingga titik asal merupakan simpul stabil. Orbit heteroklinik yang relevan memenuhi $v(-\infty) = 1$, $v(+\infty) = 0$, $0 < v < 1$, dan $w = v' < 0$; jadi sketsanya berupa muka gelombang halus yang menurun monoton dari 1 ke 0 tanpa osilasi atau nilai negatif. Di ekor muka gelombang, peluruhan generiknya mengikuti arah lambat $v(\xi) \sim C \exp[(-3 + \sqrt{5})\xi/2]$ dengan $C > 0$.

Cek cepat

Diskriminan harus $9 - 4 = 5 > 0$, kedua nilai eigen harus negatif, dan sketsa tidak boleh melampaui $v = 0$ atau berosilasi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Baca kondisi ujung dari orientasi orbit heteroklinik.

Rumus

$$(v, w): (1, 0) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow v(-\infty) = 1, v(+\infty) = 0$$

- **Penjelasan**

Linearisasi di titik asal untuk $c = 3$.

Rumus

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

- **Penjelasan**

Dua akar real negatif mengklasifikasikan titik asal sebagai simpul stabil.

Rumus

$$\lambda_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} < 0$$

- **Penjelasan**

Cabang heteroklinik yang relevan meninggalkan $(1, 0)$ dengan $w < 0$. Jika menyentuh $w = 0$ ketika $0 < v < 1$, medan vektor menunjuk kembali ke $w < 0$, sehingga cabang tidak dapat menyeberang dari $w < 0$ ke $w > 0$.

Rumus

$$w = 0, 0 < v < 1 \Rightarrow w' = -v(1 - v) < 0$$

• Penjelasan

Karena $v' = w < 0$, profil menurun tanpa pembalikan dan tetap berada pada rentang fisik.

Rumus

$$1 > v(\xi) > 0, \quad v'(\xi) < 0$$

Simpulan

Untuk $c = 3 > 2$, koneksi heteroklinik menghasilkan muka gelombang populasi yang monoton dan nonnegatif, berbeda dari ekor osilatori tak fisik pada $c = 1$.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Pembentukan Pola

0005-LEGA-V101-CH10

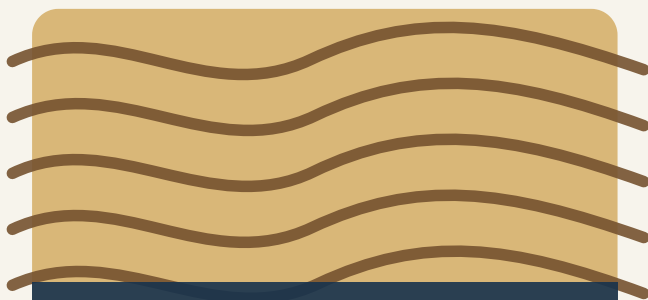
Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bab ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

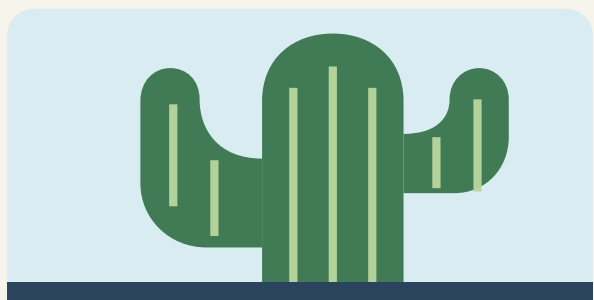
- Menjelaskan mengapa himpunan parameter yang berbeda dalam satu model generik dapat menghasilkan jenis pola yang berbeda.
- Menganalisis kestabilan linear solusi homogen pada sistem pembentuk pola.
- Memprediksi panjang gelombang pola yang muncul di atas ambang.
- Mengenali bahwa suku nonlinear yang berbeda menghasilkan jenis pola yang berbeda.
- Menyusun kembali model sederhana untuk pembentukan pola vegetasi.

Pembentukan Pola

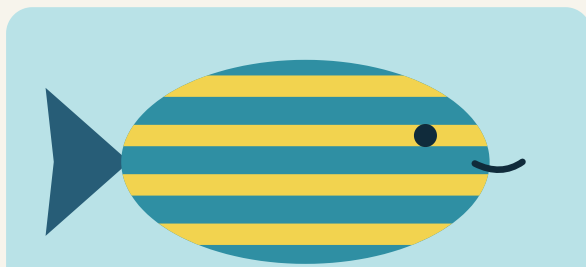
Pola garis di alam



Riak pasir



Rusuk kaktus



Pita ikan



Deret awan

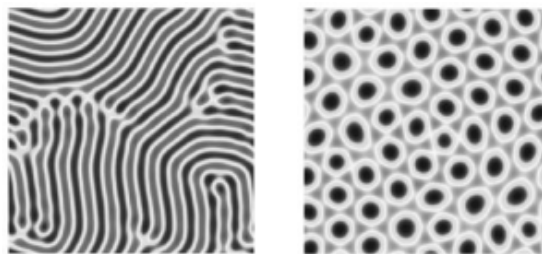
Gambar 10.1. Pola garis di alam: riak pasir, rusuk kaktus saguaro, pita warna pada tubuh ikan, dan struktur gulungan pada awan. [Deskripsi Gambar](#)

Pola (lihat Gambar 10.1), seperti garis dan bintik pada kulit hewan atau riak pasir di pantai, sangat umum dijumpai di alam dan dalam eksperimen laboratorium yang dikendalikan dengan cermat. Pola biasanya muncul dalam sistem yang *didorong jauh dari kesetimbangan* oleh gaya luar atau sumber energi. Ketika gaya penggerak lebih besar daripada yang diperlukan untuk mengimbangi gaya inersia, sistem menanggapi dengan menata ulang dirinya menjadi struktur periodik yang disebut pola. Ada banyak jenis pola, seperti gulungan, persegi, atau heksagon, dan pola tersebut dapat bersifat stasioner atau dinamis. Kajian tentang sistem pembentuk pola telah menjadi bidang penelitian aktif dalam fisika, kimia, optika nonlinear, dan matematika terapan selama lebih dari setengah abad. **Catatan:** Lihat, misalnya, buku karya P. Ball yang berjudul *The Self-made Tapestry: Pattern formation in nature* (Oxford, New York, 1999).. Selanjutnya, kita akan membahas secara singkat pola Turing, mengkaji sebuah model kanonik pembentuk pola yang dikenal sebagai persamaan Swift-Hohenberg kompleks, dan membahas model reaksi-difusi untuk pola vegetasi.

Pola Turing

Pada tahun 1952, A.M. Turing **Catatan:** A.M. Turing, [*The chemical basis of morphogenesis*](#), Phil. Trans. R. Soc. London B **237**, 37-72 (1952). mengajukan gagasan bahwa pola diferensiasi, seperti pola yang menentukan daerah tempat hidra menumbuhkan tentakelnya, sebenarnya merupakan pola kimia, khususnya pola yang berupa struktur periodik stasioner. **Catatan:** Turing juga menyebutkan kemungkinan adanya pola gelombang, tetapi pola tersebut bukan fokus utama makalahnya.. Turing menjelaskan bagaimana pola semacam itu dapat muncul akibat ketidakstabilan solusi homogen pada suatu sistem persamaan reaksi-difusi terkopel. Ketakstabilan ini disebut *ketakstabilan yang memecahkan simetri* karena struktur periodik yang tumbuh akibat ketidakstabilan tersebut memecahkan invariansi translasi solusi homogen awal. Baru pada dasawarsa 1990-an pola Turing diamati dalam eksperimen kimia. **Catatan:** V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, dan P. De Kepper, [*Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern*](#), Phys. Rev. Lett. **64**, 2953-2956 (1990). **Catatan:** Q. Ouyang dan H.L. Swinney, [*Transition from a uniform state to hexagonal and striped Turing patterns*](#), Nature **352**, 610-612 (1991)., berupa heksagon dan garis, tetapi juga sebagai struktur tak beraturan yang berkaitan dengan keadaan turbulensi kimia. **Catatan:** Q. Ouyang dan H.L. Swinney, [*Transition to chemical turbulence*](#), Chaos **1**, 411-420 (1991)..

Persamaan Swift-Hohenberg kompleks



Gambar 10.2. Simulasi numerik persamaan Swift-Hohenberg kompleks dengan syarat batas periodik yang memperlihatkan pola garis dan heksagon. [Deskripsi Gambar](#)

Kita akan mengkaji pembentukan pola melalui satu model yang disebut persamaan Swift-Hohenberg kompleks. Bergantung pada apakah koefisien model ini real atau kompleks, pola stasioner atau pola yang merambat akan teramati. Gambar 10.2 memperlihatkan pola garis dan heksagon yang dihasilkan model ini. Teori umum pembentukan pola. **Catatan:** Untuk tinjauan, lihat misalnya M.C. Cross dan P.C. Hohenberg, [*Pattern formation outside of equilibrium*](#), Rev. Mod. Phys. **65**, 851-1112 (1993), serta A. C. Newell, T. Passot, dan J. Lega, [*Order parameter equations for patterns*](#), Ann. Rev. Fluid Mech. **25**, 399-453 (1993). menjelaskan mengapa model yang berbeda dapat menghasilkan pola serupa dan, sebagai akibatnya, mengapa sistem kimia, fisika, atau biologi yang berbeda dapat memperlihatkan pola yang tampak serupa. Teori ini juga membenarkan penggunaan model generik pembentuk pola untuk memahami mekanisme yang terlibat dalam pembentukan pola, seperti yang kita lakukan pada bagian berikutnya.

Perhatikan persamaan diferensial parsial berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} = & (\mu + i\nu)\psi - (\alpha + i\beta)\left(\Omega + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \psi \\ & + i\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi - (\gamma + i\delta)|\psi|^2\psi - \zeta|\psi|^2, \quad (10.1)\end{aligned}$$

dengan semua parameter bernilai real, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, dan $\psi(x, y, t)$ secara *a priori* bernilai kompleks. Persamaan ini merupakan suatu versi persamaan Swift-Hohenberg **Catatan:** J. Swift dan P.C. Hohenberg, [Hydrodynamic fluctuations at the convective instability](#), Phys. Rev. **A 15**, 319-328 (1977). dengan koefisien kompleks **Catatan:** J. Lega, J.V. Moloney, dan A.C. Newell, [Swift-Hohenberg equation for lasers](#), Phys. Rev. Lett. **73**, 2978-2981 (1994). dan suku kuadratik. Mudah dilihat bahwa $\psi = 0$ merupakan suatu solusi, dan wajar untuk menanyakan dalam kondisi apa solusi itu juga stabil. Kita melanjutkan dengan cara yang sama seperti pada sistem persamaan diferensial biasa, yaitu melinearkan Persamaan (10.1) di sekitar solusi $\psi = 0$. Persamaan hasil linearisasinya adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} = & (\mu + i\nu)\psi - (\alpha + i\beta)\left(\Omega + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \psi \\ & + i\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi. \quad (10.2)\end{aligned}$$

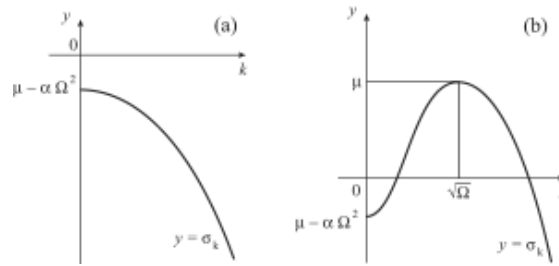
Pada umumnya, kita tertarik pada sistem yang membentang dalam ruang dan cukup besar untuk memungkinkan pola berkembang (makna "cukup besar" akan diperjelas sebentar lagi). Karena itu, kita hanya meninjau ketakstabilan yang berkembang di bagian dalam sistem, dan menganggap bahwa ψ dapat diuraikan menjadi mode-mode Fourier. Mode Fourier $u_{\vec{k}} \equiv a_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ dengan vektor gelombang $\vec{k} = (k_x, k_y)$ merupakan fungsi eigen operator linear, dengan nilai eigen $\lambda_{\vec{k}}$ yang diberikan oleh

$$\lambda_{\vec{k}} = \mu + i\nu - (\alpha + i\beta)(\Omega - k_x^2 - k_y^2)^2 - i\eta(k_x^2 + k_y^2).$$

Dengan demikian, laju pertumbuhan mode ini adalah

$$\sigma_k = \text{Re}(\lambda_{\vec{k}}) = \mu - \alpha(\Omega - k^2)^2,$$

dengan $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = ||\vec{k}||$. Jadi, setiap mode Fourier tumbuh (atau meluruh) dengan laju yang hanya bergantung pada magnitudo k dari vektor gelombang $\vec{k}$ yang bersangkutan, bukan pada arahnya. Jika $\mu < 0$, semua mode Fourier meluruh dan solusi $\psi = 0$ stabil secara linear. Ketika μ meningkat, beberapa mode Fourier akan menjadi tak stabil.



Gambar 10.3. Sketsa grafik laju pertumbuhan σ_k sebagai fungsi $k \geq 0$, untuk $0 < \mu < \alpha \Omega^2$. (a) $\Omega < 0$; (b) $\Omega > 0$. [Deskripsi Gambar](#)

Jika $\Omega < 0$, grafik σ_k sebagai fungsi $k \geq 0$ bersifat monoton (lihat Gambar 10.3.a), dan mode Fourier pertama yang menjadi tak stabil adalah mode $k = 0$. Ketakstabilan ini terjadi pada $\mu = \alpha \Omega^2$. Sebaliknya, jika $\Omega > 0$, maka σ_k mencapai maksimum pada $k = \sqrt{\Omega} \equiv k_c$ (lihat Gambar 10.3.b), dan mode-mode dengan $k = k_c$ menjadi tak stabil ketika μ meningkat melewati nol. Dalam kasus ini, kita memperkirakan terbentuknya suatu pola di atas ambang dengan panjang karakteristik $l_c = 2\pi/k_c$. Karena itu, ukuran sistem tempat pola tersebut hendak diamati harus jauh lebih besar daripada l_c .

Di atas ambang, suku-suku nonlinearlah yang menentukan pola mana yang terpilih. Biasanya, jika terdapat suku kuadratik (yaitu jika $\zeta \neq 0$ dalam Persamaan (10.1)), maka pola heksagonal diamati di dekat ambang. Sebaliknya, jika suku kubik dominan, gulungan (atau garis-garis) lebih banyak muncul. Jika bagian imajiner koefisien-koefisien dalam (10.1) dibuat nol, pola yang berkembang di atas ambang bersifat stasioner. Jika tidak, pola tersebut bergantung pada waktu. Aspek-aspek ini dan aspek lain dari dinamika Persamaan (10.1), termasuk ketakstabilan sekunder dan

ketakteraturan ruang-waktu, dapat dieksplorasi dengan antarmuka GUI MATLAB bernama *Patterns*. Antarmuka ini memungkinkan pengguna memilih parameter dan memulai simulasi dari kondisi awal acak yang kecil. Cuplikan berkode warna dari bagian real solusi ψ ditampilkan pada waktu-waktu berturut-turut selama simulasi berlangsung. Setelah simulasi selesai, parameter baru dapat dimasukkan dan simulasi baru kemudian dapat dimulai kembali dari solusi terakhir.

Teori pembentukan pola **Catatan:** Lihat dua artikel tinjauan yang disebutkan di atas. menyediakan cara untuk mendeskripsikan dinamika nonlinear suatu sistem pembentuk pola di dekat dan di atas ambang. Namun, pembahasan lengkap mengenai topik ini berada di luar cakupan catatan ini. Pada bagian berikutnya, kita akan menyinggung secara singkat model reaksi-difusi untuk mendeskripsikan pola vegetasi di wilayah semiarid.

Pola vegetasi

Di kawasan semiarid, tumbuhan (semak, rumput, dan sebagainya) cenderung tersusun menjadi pita-pita yang sejajar dengan garis kontur ketinggian di medan berbukit, dan menjadi petak-petak di tanah datar. Model reaksi-difusi telah diajukan untuk menjelaskan pengamatan ini **Catatan:** C.A. Klausmeier, [Regular and irregular patterns in semiarid vegetation](#), *Science* **284**, 1826-1828 (1999). **Catatan:** R. Lefever, O. Lejeune dan P. Couteron, *Generic modelling of vegetation patterns. A case study of Tiger bush in sub-saharian Sahel*, dalam [Mathematical Models for Biological Pattern Formation](#), disunting oleh P.K. Maini dan H.G. Othmer, hlm. 83-112, Springer, New York, 2001. **Catatan:** J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak dan Y. Zarmi, [Diversity of vegetation patterns and desertification](#), *Phys. Rev. Lett.* **87**, 198101 (2001).. Dalam salah satu artikel tersebut, C.A. Klausmeier memperkenalkan sebuah model sederhana dengan dua variabel terikat, yaitu biomassa tumbuhan n dan jumlah air w . Dalam bentuk tak berdimensi, model tersebut ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= a - w - wn^2 + v \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= wn^2 - mn + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) n,\end{aligned}$$

di mana a menyatakan masukan air melalui hujan, v adalah laju pengangkutan air menuruni lereng (ke arah $-x$), $w n^2$ menyatakan pertambahan biomassa akibat konsumsi air, dan m adalah laju kematian tumbuhan. Selain itu, air menguap dengan laju w , dan difusi n merepresentasikan penyebaran petak-petak vegetasi.

Setelah menentukan titik-titik kesetimbangan (solusi stasioner dan seragam) model ini, penulis menelaah kestabilan linearnya. Gambar 2 dalam artikel Klausmeier tahun 1999 menampilkan himpunan aras panjang gelombang pola yang diperkirakan tumbuh di atas ambang pada bidang parameter (a, m) , untuk suatu nilai tetap v . Lebih tepatnya, bidang (a, m) dapat dibagi menjadi tiga daerah: satu daerah tempat titik tetap yang bersesuaian dengan ketiadaan vegetasi bersifat stabil, satu daerah tempat titik tetap yang bersesuaian dengan vegetasi homogen bersifat stabil, dan daerah di antaranya tempat analisis kestabilan linear memprediksi keberadaan pola vegetasi. Simulasi numerik model dalam rezim terakhir ini mengonfirmasi adanya pita-pita vegetasi yang merambat di medan berbukit dan petak-petak vegetasi di tanah datar. Laju v aliran air menuruni lereng menjadi ukuran kemiringan lereng.

Ringkasan

Berbagai jenis pola dapat diperoleh dari model generik yang sama dengan memilih kumpulan parameter yang berbeda. Kita telah melihat cara menggunakan analisis kestabilan linear untuk memprediksi apakah suatu pola dapat berkembang dari solusi homogen ketika sebuah *parameter kendali* (μ dalam pembahasan persamaan Swift-Hohenberg) diubah dan, jika dapat, cara menentukan skala panjang khas struktur yang akan muncul. Walaupun analisis tersebut bersifat linear, hasilnya tetap memberi petunjuk tentang jenis pola yang dapat diharapkan. Metodologi yang sama, yaitu menentukan solusi homogen dan mempelajari kestabilan linearnya, dapat diterapkan pada setiap sistem pembentuk pola, sebagaimana diilustrasikan secara singkat pada model Klausmeier.

Deskripsi Gambar

Gambar 10.1: Ilustrasi vektor independen dengan empat panel yang menunjukkan struktur berkala serupa pada objek yang berbeda. Panel kiri atas menampilkan lima riak pasir bergelombang; panel kanan atas menampilkan rusuk vertikal pada kaktus saguaro; panel kiri bawah menampilkan pita-pita horizontal pada tubuh ikan; dan panel kanan bawah menampilkan tiga deret awan putih dengan latar langit biru. Ilustrasi ini tidak memakai piksel dari kolase foto sumber. [[Kembali ke Gambar 10.1](#)]

Gambar 10.2: Simulasi numerik (dengan syarat batas periodik) persamaan Swift-Hohenberg kompleks yang memperlihatkan pola garis dua dimensi (panel kiri) dan pola heksagonal (panel kanan). Orientasi garis-garis bervariasi di seluruh gambar sebelah kiri. Cacat (ketakteraturan pada pola) tampak pada kedua gambar. Cacat pada pola garis mencakup sebuah disklinasi (yang tampak seperti lengkungan), batas-batas butir pendek (garis tempat pola-pola garis dengan orientasi berbeda bertemu), dan dislokasi (titik tempat satu garis bercabang menjadi dua). Cacat pada pola heksagonal berbentuk pasangan penta-hepta (bercak-bercak bertetangga yang memiliki 5 dan 7 tetangga). [[Kembali ke Gambar 10.2](#)]

Gambar 10.3: Dua grafik, (a) dan (b), yang menampilkan laju pertumbuhan $y = \sigma_k$ terhadap bilangan gelombang k . Grafik (a) memperlihatkan kurva yang menurun secara ketat dari suatu nilai negatif, yang menunjukkan sistem stabil tempat semua gangguan meluruh. Grafik (b) memperlihatkan kurva yang naik melewati sumbu x dan mencapai laju pertumbuhan maksimum μ pada $k = \sqrt{\Omega}$, yang menunjukkan bahwa frekuensi spasial tertentu akan tumbuh dan membentuk pola. [[Kembali ke Gambar 10.3](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Perhatikan Persamaan (10.2) dengan $\mu = 0$. Carilah solusi persamaan ini dalam bentuk

$$\psi(x, y, t) = \exp[i(\omega t + qx + py)], \quad \omega, q, p \in \mathbb{R}.$$

Cobalah menyatakan syarat keberadaan serta ω , q , dan p dalam parameter-parameter persamaan tersebut. Apakah solusinya tunggal?

Soal 2

Carilah solusi dalam bentuk

$$\psi(x, y, t) = \exp[i(\omega t + qx + py)], \quad \omega, q, p \in \mathbb{R}.$$

untuk Persamaan (10.2) dengan $\mu \neq 0$. Cobalah menyatakan syarat keberadaan serta ω , q , dan p dalam parameter-parameter persamaan tersebut. Apakah solusinya tunggal?

Soal 3

Carilah solusi dalam bentuk

$$\psi(x, y, t) = \exp[\lambda t + i(\omega t + qx + py)], \quad \lambda, \omega, q, p \in \mathbb{R}$$

untuk Persamaan (10.2) dengan $\mu \neq 0$. Cobalah menyatakan λ , ω , q , dan p dalam parameter-parameter persamaan tersebut. Apakah solusinya tunggal?

Soal 4

Bacalah artikel C.A. Klausmeier tahun 1999. Jelaskan cara memperoleh bentuk tak berdimensi (2) dari sistem persamaan (1) dalam artikel tersebut.

Soal 5

Bacalah artikel C.A. Klausmeier tahun 1999. Tentukan dimensi parameter A , L , R , V , J , M , dan D , serta variabel W dan N dalam sistem persamaan (1) pada artikel tersebut.

Soal 6

Bacalah artikel C.A. Klausmeier tahun 1999.

- Jelaskan cara menemukan titik-titik tetap sistem persamaan (2) dalam artikel tersebut.
- Tentukan matriks Jacobi sistem (2).

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Tetapkan $Q = q^2 + p^2$. Operator Laplace mengalikan gelombang bidang dengan $-Q$, sedangkan turunan waktunya adalah $i\omega\psi$. Samakan bagian real dan imajiner dari faktor pengalinya; modulus tetap menuntut bagian real sama dengan nol.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan $Q = q^2 + p^2$, substitusi memberi $i\omega = \mu + i\nu - (\alpha + i\beta)(\Omega - Q)^2 - i\eta Q$. Untuk $\mu = 0$ dan $\alpha > 0$, bagian real lenyap tepat ketika $Q = \Omega$. Karena itu harus berlaku $\Omega \geq 0$, dan frekuensinya adalah $\omega = \nu - \eta\Omega$. Jika $\Omega > 0$, pasangan (q, p) dapat berupa titik mana pun pada lingkaran $q^2 + p^2 = \Omega$, sehingga solusi tidak unik terhadap arah. Jika $\Omega = 0$, hanya $q = p = 0$. Jika $\Omega < 0$, tidak ada pasangan real q, p dan tidak ada mode bermodulus satu dalam bentuk yang diminta.

Cek cepat

Periksa bahwa $q^2 + p^2$ tidak pernah negatif. Pada $Q = \Omega$, seluruh suku yang mengandung α dan β harus lenyap, sehingga hasil akhir tidak bergantung pada keduanya.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Definisikan kuadrat magnitudo vektor gelombang sebagai satu besaran tak negatif.

Rumus

$$Q = q^2 + p^2 \geq 0$$

- **Penjelasan**

Gunakan aksi operator diferensial pada gelombang bidang.

Rumus

$$\partial_t \psi = i\omega \psi, \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2) \psi = -Q \psi$$

- **Penjelasan**

Substitusikan ke persamaan linear dan bagi dengan $\psi \neq 0$.

Rumus

$$i\omega = \mu + iv - (\alpha + i\beta)(\Omega - Q)^2 - i\eta Q$$

- **Penjelasan**

Untuk $\mu = 0$, bagian real hanya dapat nol jika kuadratnya nol.

Rumus

$$0 = -\alpha(\Omega - Q)^2 \Rightarrow Q = \Omega$$

- **Penjelasan**

Ambil bagian imajiner setelah syarat netral dipenuhi.

Rumus

$$\omega = v - \beta(\Omega - Q)^2 - \eta Q = v - \eta \Omega$$

Simpulan

Mode dengan $q, p \in \mathbb{R}$ ada hanya untuk $\Omega \geq 0$; lingkaran arah membuatnya tidak unik ketika $\Omega > 0$, sedangkan $\Omega = 0$ hanya memberi mode spasial seragam.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 1](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Gunakan kembali $Q = q^2 + p^2 \geq 0$. Karena ansatz tidak memiliki faktor pertumbuhan $e^{\lambda t}$, bagian real nilai eigen harus nol. Selesaikan kuadrat $(\Omega - Q)^2 = \mu/\alpha$, lalu saring setiap cabang dengan syarat $Q \geq 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Mode bermodulus satu menuntut $0 = \mu - \alpha(\Omega - Q)^2$. Karena $\alpha > 0$ dan $\mu \neq 0$, solusi dengan $q, p \in \mathbb{R}$ hanya mungkin untuk $\mu > 0$. Tuliskan $s = \sqrt{\mu/\alpha}$; cabang radialnya $Q = \Omega \pm s$, dengan hanya $Q \geq 0$ yang diperbolehkan. Jika $\Omega < -s$, tidak ada solusi. Jika $\Omega = -s$, satu-satunya cabang ialah $Q = 0$, sehingga

$(q, p) = (0, 0)$ dan solusinya unik. Untuk setiap $Q > 0$, pasangan (q, p) mengisi lingkaran $q^2 + p^2 = Q$, sehingga solusi tidak unik; hal ini mencakup $\Omega = s$, yang juga memiliki cabang $Q = 0$ selain lingkaran positif. Pada setiap cabang sah, $\omega = v - \beta\mu/\alpha - \eta Q$. Untuk $\mu < 0$, tidak ada gelombang bidang bermodulus satu dengan $q, p \in \mathbb{R}$ dalam bentuk ini.

Cek cepat

Masukkan setiap kandidat Q ke $(\Omega - Q)^2$: hasilnya harus μ/α . Buang cabang dengan $Q < 0$, dan jangan menyatakan adanya solusi untuk $\mu < 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Pisahkan faktor pengali menjadi bagian real dan imajiner.

Rumus

$$i\omega = \underbrace{\mu - \alpha(\Omega - Q)^2}_{\text{real}} + i\underbrace{[v - \beta(\Omega - Q)^2 - \eta Q]}_{\text{imajiner}}$$

- **Penjelasan**

Modulus satu mengharuskan laju pertumbuhan real nol.

Rumus

$$(\Omega - Q)^2 = \frac{\mu}{\alpha}$$

- **Penjelasan**

Akar real memerlukan $\mu > 0$, lalu menghasilkan dua cabang aljabar yang harus diuji terhadap $Q \geq 0$.

Rumus

$$Q_{\pm} = \Omega \pm \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}, \quad Q_{\pm} \geq 0$$

- **Penjelasan**

Gunakan syarat real tadi untuk menyederhanakan bagian imajiner.

Rumus

$$\omega_{\pm} = v - \frac{\beta\mu}{\alpha} - \eta Q_{\pm}$$

- **Penjelasan**

Untuk radius positif, parameter sudut memperlihatkan keluarga arah yang kontinu.

Rumus

$$q = \sqrt{Q} \cos \theta, \quad p = \sqrt{Q} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Simpulan

Keberadaan ditentukan oleh tanda μ dan ketaknegatifan setiap cabang Q . Solusi unik hanya terjadi pada batas $\mu > 0$, $\Omega = -\sqrt{\mu/\alpha}$, ketika $Q = 0$; setiap cabang positif menghasilkan ketidakunikan arah, dan dua cabang sah dapat menambah ketidakunikan radial.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 2](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Sekarang turunan waktu menghasilkan $(\lambda + i\omega)\psi$, sehingga bagian real tidak perlu dibuat nol. Tetapkan $Q = q^2 + p^2$ dan cocokkan langsung bagian real serta imajiner dari nilai eigen Fourier.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $Q = q^2 + p^2 \geq 0$, substitusi memberi $\lambda + i\omega = \mu + iv - (\alpha + i\beta)(\Omega - Q)^2 - i\eta Q$. Jadi $\lambda = \mu - \alpha(\Omega - Q)^2$ dan $\omega = v - \beta(\Omega - Q)^2 - \eta Q$. Setiap $q, p \in \mathbb{R}$ mendefinisikan satu mode; untuk $Q > 0$, semua arah dengan radius $\sqrt{Q}$ memiliki λ dan ω yang sama. Mode tumbuh jika $\lambda > 0$, netral jika $\lambda = 0$, dan meluruh jika $\lambda < 0$.

Cek cepat

Bagian real harus persis sama dengan kurva pertumbuhan bab, $\sigma_Q = \mu - \alpha(\Omega - Q)^2$. Menetapkan $\lambda = 0$ harus mengembalikan syarat Soal 1 dan 2.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Definisikan kuadrat magnitudo vektor gelombang.

Rumus

$$Q = q^2 + p^2$$

- **Penjelasan**

Hitung turunan waktu dan aksi Laplasian.

Rumus

$$\partial_t \psi = (\lambda + i\omega)\psi, \quad \Delta \psi = -Q\psi$$

- **Penjelasan**

Operator Swift-Hohenberg kuadrat menjadi pengali skalar.

Rumus

$$(\Omega + \Delta)^2 \psi = (\Omega - Q)^2 \psi$$

- **Penjelasan**

Samakan faktor kompleks pada kedua ruas.

Rumus

$$\lambda + i\omega = \mu + i\nu - (\alpha + i\beta)(\Omega - Q)^2 - i\eta Q$$

• Penjelasan

Pisahkan bagian real dan imajiner.

Rumus

$$\lambda = \mu - \alpha(\Omega - Q)^2, \quad \omega = \nu - \beta(\Omega - Q)^2 - \eta Q$$

Simpulan

Relasi dispersi bergantung hanya pada besar vektor gelombang, bukan arahnya; λ menentukan pertumbuhan amplitudo dan ω menentukan perubahan fase.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 3](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Kartu persamaan dan penskalaan—dukungan baru, dengan fakta model dirujuk ke Klausmeier, DOI 10.1126/science.284.5421.1826: $W_T = A - LW - RWN^2 + VW_X$, $N_T = JRWN^2 - MN + D\Delta N$. Gunakan $t = LT$, $(x, y) = \sqrt{L/D}(X, Y)$, $n = N\sqrt{R/L}$, $w = JW\sqrt{R/L}$, serta $a = AJ\sqrt{R}/L^{3/2}$, $m = M/L$, dan $v = V/\sqrt{LD}$. Tuliskan aturan rantai sebelum menyederhanakan setiap suku.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Kartu mandiri yang dirujuk ke Klausmeier (DOI 10.1126/science.284.5421.1826) menggunakan $W_T = A - LW - RWN^2 + VW_X$ dan $N_T = JRWN^2 - MN + D\Delta_{X,Y}N$. Tetapkan $s = \sqrt{R/L}$, lalu $t = LT$, $x = \sqrt{L/D}X$, $y = \sqrt{L/D}Y$, $n = sN$, dan $w = JsW$. Dengan $a = AJs/L = AJ\sqrt{R}/L^{3/2}$, $m = M/L$, dan $v = V/\sqrt{LD}$, aturan rantai menghasilkan tepat $w_t = a - w - wn^2 + vw_x$ dan $n_t = wn^2 - mn + \Delta_{x,y}n$. Variabel t, x, y, n, w dan parameter a, m, v yang baru semuanya tak berdimensi.

Cek cepat

Koefisien w , wn^2 , dan Δn harus menjadi satu. Koefisien adveksi harus menyederhana menjadi $v/\sqrt{LD}$, bukan $v\sqrt{L/D}$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Kartu sumber-fakta untuk perhitungan ini adalah sistem dimensional Klausmeier; uraian dan penurunan berikut merupakan dukungan baru.

Rumus

$$W_T = A - LW - RWN^2 + VW_X, \quad N_T = JRW N^2 - MN + D\Delta_{X,Y}N$$

• Penjelasan

Perkenalkan singkatan skala amplitudo dan balikkan definisi variabel terikat.

Rumus

$$s = \sqrt{R/L}, \quad W = \frac{w}{Js}, \quad N = \frac{n}{s}$$

• Penjelasan

Transformasi koordinat memberi faktor turunan yang diperlukan.

Rumus

$$\partial_T = L\partial_t, \quad \partial_X = \sqrt{L/D}\partial_x, \quad \Delta_{X,Y} = \frac{L}{D}\Delta_{x,y}$$

• Penjelasan

Substitusi ke persamaan air dan perkalian dengan Js/L menormalkan peluruhan serta konsumsi.

Rumus

$$w_t = \frac{AJs}{L} - w - wn^2 + \frac{V}{\sqrt{LD}}w_x$$

• Penjelasan

Substitusi ke persamaan biomassa dan perkalian dengan s/L menormalkan pertumbuhan serta difusi.

Rumus

$$n_t = wn^2 - \frac{M}{L}n + \Delta_{x,y}n$$

• Penjelasan

Namai tiga kombinasi parameter yang tersisa.

Rumus

$$a = \frac{AJ\sqrt{R}}{L^{3/2}}, \quad m = \frac{M}{L}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{LD}}$$

Simpulan

Penskalaan mengubah sistem dimensional menjadi $w_t = a - w - wn^2 + vw_x$, $n_t = wn^2 - mn + \Delta n$, dengan hanya tiga parameter tak berdimensi a, m, v .

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 4](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Kartu persamaan—dukungan baru, dengan fakta model dirujuk ke Klausmeier, DOI 10.1126/science.284.5421.1826: $W_T = A - LW - RWN^2 + VW_X$ dan $N_T = JRW N^2 - MN + D\Delta N$. Secara fisik, W adalah massa air per satuan luas dan N adalah massa kering biomassa tumbuhan per satuan luas. Misalkan

$[X] = \text{L}$ dan $[T] = \text{T}$, lalu samakan dimensi setiap suku dengan dimensi ruas kirinya.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Dengan L sebagai dimensi panjang dan T sebagai dimensi waktu, W berdimensi massa air per satuan luas (misalnya $\text{kg H}_2\text{O m}^{-2}$) dan N berdimensi massa kering biomassa tumbuhan per satuan luas (misalnya $\text{kg massa kering m}^{-2}$). Hasil parameter ialah $[A] = [W]\text{T}^{-1}$, $[L] = [M] = \text{T}^{-1}$, $[R] = [N]^{-2}\text{T}^{-1}$, $[V] = \text{LT}^{-1}$, $[J] = [N][W]^{-1}$, dan $[D] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$.

Cek cepat

Setiap suku pada persamaan W harus berdimensi $[W]/\text{T}$, dan setiap suku pada persamaan N harus berdimensi $[N]/\text{T}$. Kombinasi a, m, v, n, w pada penskalaan Soal 4 semuanya harus tak berdimensi.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Suku sumber pada persamaan air harus mempunyai dimensi yang sama dengan W_T .

Rumus

$$[A] = [W]\text{T}^{-1}$$

- **Penjelasan**

Peluruhan linear pada kedua persamaan menetapkan dimensi L dan M .

Rumus

$$[LW] = [W]\text{T}^{-1}, [MN] = [N]\text{T}^{-1} \Rightarrow [L] = [M] = \text{T}^{-1}$$

- **Penjelasan**

Samakan suku konsumsi air dengan W_T .

Rumus

$$[R][W][N]^2 = [W]\text{T}^{-1} \Rightarrow [R] = [N]^{-2}\text{T}^{-1}$$

- **Penjelasan**

Turunan ruang pertama dan kedua menetapkan dimensi adveksi dan difusi.

Rumus

$$[V]\frac{[W]}{\text{L}} = \frac{[W]}{\text{T}}, \quad [D]\frac{[N]}{\text{L}^2} = \frac{[N]}{\text{T}}$$

- **Penjelasan**

Gunakan suku produksi biomassa untuk menentukan faktor hasil J .

Rumus

$$[J][R][W][N]^2 = [N]\text{T}^{-1} \Rightarrow [J] = [N][W]^{-1}$$

- **Penjelasan**

Kumpulkan hasil adveksi dan difusi.

Rumus

$$[V] = \text{LT}^{-1}, \quad [D] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$$

Simpulan

Dengan W sebagai massa air per luas dan N sebagai massa kering biomassa per luas, dimensi tersebut membuat kedua persamaan homogen dan membuktikan bahwa semua kelompok pada penskalaan Soal 4 benar-benar tanpa satuan.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 5](#) [paket sumber]

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Untuk keadaan spasial homogen, turunan ruang lenyap. Tetapkan $f(w, n) = a - w - wn^2$ dan $g(w, n) = wn^2 - mn = n(wn - m)$. Pisahkan cabang $n = 0$ dari cabang $wn = m$, kemudian hitung Jacobi dalam urutan variabel (w, n) .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titik tetap tanpa vegetasi adalah $(w, n) = (a, 0)$. Untuk vegetasi positif, $wn = m$ dan $mn^2 - an + m = 0$, sehingga—untuk $a, m > 0$ —titik vegetasi ada tepat ketika $a \geq 2m$: $n_{\pm} = [a \pm \sqrt{a^2 - 4m^2}]/(2m)$ dan $w_{\pm} = m/n_{\pm}$.

Matriks Jacobi bagian reaksi dalam urutan (w, n) adalah $J(w, n) = \begin{pmatrix} -(1 + n^2) & -2wn \\ n^2 & 2wn - m \end{pmatrix}$. Pada titik

vegetasi, $wn = m$, jadi $J_{\pm} = \begin{pmatrix} -(1 + n_{\pm}^2) & -2m \\ n_{\pm}^2 & m \end{pmatrix}$.

Cek cepat

Substitusi $(a, 0)$ harus menolak kedua reaksi. Untuk setiap akar vegetasi, hasil kali $n_+n_- = 1$ dan $w_+n_+ = m$; diskriminannya harus $a^2 - 4m^2$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Hilangkan turunan spasial dan definisikan medan reaksi.

Rumus

$$f(w, n) = a - w - wn^2, \quad g(w, n) = wn^2 - mn = n(wn - m)$$

- **Penjelasan**

Cabang tanpa vegetasi berasal dari $n = 0$.

Rumus

$$n = 0, \quad f = 0 \Rightarrow w = a$$

- **Penjelasan**

Pada cabang vegetasi, gunakan $wn = m$ dalam persamaan air.

Rumus

$$w = \frac{m}{n}, \quad 0 = a - \frac{m}{n} - mn \Rightarrow mn^2 - an + m = 0$$

- **Penjelasan**

Selesaikan persamaan kuadrat dan nyatakan syarat keberadaan real positif.

Rumus

$$n_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m^2}}{2m}, \quad w_{\pm} = \frac{m}{n_{\pm}}, \quad a \geq 2m$$

- **Penjelasan**

Diferensiasikan kedua fungsi reaksi dalam urutan (w, n) .

Rumus

$$J(w, n) = \begin{pmatrix} f_w & f_n \\ g_w & g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1 + n^2) & -2wn \\ n^2 & 2wn - m \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Pada titik vegetasi, sederhanakan dengan hubungan $wn = m$.

Rumus

$$J_{\pm} = \begin{pmatrix} -(1 + n_{\pm}^2) & -2m \\ n_{\pm}^2 & m \end{pmatrix}$$

Simpulan

Sistem mempunyai satu keadaan tanpa vegetasi untuk semua $a > 0$. Cabang vegetasi ada ketika $a \geq 2m$: terdapat dua keadaan berbeda untuk $a > 2m$, sedangkan pada $a = 2m$ kedua akar vegetasi berimpit.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 6](#) [paket sumber]

BAGIAN 5

Lampiran

0005-LEGA-V101-PT05

Sisa catatan ini dikhususkan untuk meninjau konsep dan metode yang lazim disajikan dalam mata kuliah pengantar aljabar linear (Bab 11), kalkulus vektor (Bab 12), dan persamaan diferensial biasa (Bab 13). Setiap bagian dimaksudkan sebagai rujukan cepat untuk mendukung berbagai analisis yang dilakukan dalam bab-bab utama buku ini. Hasil-hasilnya dinyatakan tanpa bukti.

Bab 14 memberikan contoh proyek pemodelan yang dapat dikerjakan sambil mempelajari materi yang disajikan dalam buku ini.

Penyegaran: Aljabar Linear

0005-LEGA-V101-CH11

Dalam lampiran ini, kita menyajikan fakta-fakta dasar aljabar linear mengenai matriks, nilai eigen, dan vektor eigen. Bukti tidak disertakan, dan pembaca sebaiknya merujuk pada buku-buku aljabar linear untuk memperoleh rincian lebih lanjut. Walaupun jauh dari lengkap, tinjauan singkat berikut diharapkan memberikan informasi yang cukup agar pembaca dapat mengikuti sebagian besar argumen kestabilan linear yang dikemukakan dalam bab-bab sebelumnya.

Ruang vektor

Definisi

- Himpunan bagian tak kosong $\mathcal{S}$ dari suatu ruang vektor real (atau kompleks) merupakan *ruang vektor* jika dan hanya jika tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dengan kata lain,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathcal{S}, x + y &\in \mathcal{S} \\ \forall x \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ (atau } \mathbb{C}), \alpha x &\in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

- Vektor-vektor dalam $\{u_i \in \mathcal{S} \mid i = 1, \dots, n\}$ disebut *bebas linear* jika dan hanya jika setiap kombinasi linear yang sama dengan nol memiliki semua koefisien sama dengan nol. Dengan kata lain,

$$\begin{aligned}\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (atau } \mathbb{C}), \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

- $\mathcal{S}$ disebut *berdimensi hingga* jika terdapat suatu himpunan berhingga yang terdiri atas vektor-vektor bebas linear dan *merentang* $\mathcal{S}$.
- Himpunan seperti itu disebut *basis* bagi $\mathcal{S}$. Selanjutnya, kita hanya membahas ruang vektor berdimensi hingga.
- Nilai *dimensi* ruang vektor berdimensi hingga $\mathcal{S}$ adalah banyaknya vektor dalam sebarang basis bagi $\mathcal{S}$.

Pemetaan linear

Pemetaan $\mathcal{T}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U}$ dari ruang vektor $\mathcal{S}$ ke ruang vektor $\mathcal{U}$ disebut *linear* jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x + y) &= \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) \\ \mathcal{T}(\alpha x) &= \alpha \mathcal{T}(x),\end{aligned}$$

di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ (atau $\alpha \in \mathbb{C}$) apabila $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{U}$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$).

Sifat-sifat pemetaan linear

- Adapun *ruang hasil* $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ dari $\mathcal{T}$, yaitu citra $\mathcal{S}$ di bawah $\mathcal{T}$, merupakan subruang linear dari $\mathcal{U}$.
- Adapun *ruang nol* atau *kernel* dari $\mathcal{T}$ merupakan subruang linear dari $\mathcal{S}$. Ruang ini didefinisikan sebagai himpunan $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ yang terdiri atas vektor-vektor dalam $\mathcal{S}$ yang dipetakan oleh $\mathcal{T}$ ke nol,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \{x \in \mathcal{S} \mid \mathcal{T}(x) = 0\}.$$

- Dimensi $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ dan $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ memenuhi

$$\dim(\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) + \dim(\mathcal{N}_{\mathcal{T}}) = \dim(\mathcal{S}).$$

Matriks

Setiap pemetaan linear

$$\mathcal{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto u$$

dapat ditulis sebagai

$$u_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \quad i = 1, \dots, m; \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

di mana $A \equiv (A_{ij})$ adalah matriks $m \times n$ (m baris, n kolom) dengan entri-entri real. Menurut konvensi, A_{ij} adalah entri pada perpotongan baris ke- i dan kolom ke- j dari A .

Perhatikan bahwa setelah suatu basis dipilih, setiap ruang vektor real berdimensi n isomorfik dengan $\mathbb{R}^n$. Dengan demikian, kita dapat merepresentasikan setiap pemetaan linear antara dua ruang vektor berdimensi hingga dengan sebuah matriks. Selanjutnya, kita hanya akan mempertimbangkan matriks dengan koefisien real.

Definisi

- Matriks *transpos* dari A adalah A^T sedemikian sehingga $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Besaran *rank* matriks A yang terkait dengan transformasi linear $\mathcal{T}$ adalah dimensi $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$. Rank tersebut juga sama dengan rank A^T .
- Nilai *determinan* matriks 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- Nilai *determinan* matriks $n \times n$, $A = (A_{ij})$, dapat dihitung dengan rumus di bawah ini, di mana i adalah indeks baris tetap pada A dan M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dari A dengan menghapus baris i dan kolom j :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det M_{ij}.$$

- Terdapat rumus serupa untuk mengembangkan $\det A$ terhadap salah satu kolom A .
- Nilai *jejak* $\text{Tr}(A)$ dari matriks persegi A adalah jumlah entri diagonal A .

Sifat-sifat

- Jika A adalah matriks $m \times n$, sistem $Ax = b$ memiliki setidaknya satu solusi untuk setiap b jika dan hanya jika kolom-kolom A merentang $\mathbb{R}^m$. Dalam hal ini rank A , yaitu r , memenuhi $r = m$, yang mengakibatkan $m \leq n$.
- Sistem $Ax = b$ memiliki paling banyak satu solusi untuk setiap b jika dan hanya jika kolom-kolom A bebas linear, yaitu jika dan hanya jika ruang nol A trivial. Dalam hal ini, $r = n$, yang mengakibatkan $n \leq m$.
- Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Maka, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.
 - Persamaan $Ax = b$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap ruas kanan.
 - Ruang hasil A adalah $\mathbb{R}^n$.
 - Ruang nol A trivial.
 - Matriks A invertibel.
 - Determinan A , yaitu $\det A$, tak nol.

Nilai eigen dan vektor eigen

Definisi

Misalkan A adalah matriks real berukuran $n \times n$. Untuk nilai eigen tak real, pembahasan dilakukan dalam ruang vektor kompleks yang diperoleh dengan memperluas skalar.

- Vektor $h \in \mathcal{S}$ merupakan *vektor eigen* dari A dengan *nilai eigen* $a \in \mathbb{C}$ jika

$$Ah = ah, \quad h \neq 0.$$

- Vektor $f \in \mathcal{S}$ merupakan *vektor eigen tergeneralisasi* dari A dengan *nilai eigen* a jika, untuk suatu bilangan bulat positif $m \geq 1$, vektor tersebut berperingkat tepat m dalam arti bahwa

$$(A - aI_n)^{m-1}f \neq 0, \quad (A - aI_n)^mf = 0, \quad f \neq 0.$$

Pada persamaan di atas, I_n adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks, pertama-tama perhatikan bahwa jika u adalah vektor eigen dari matriks A dengan nilai eigen a , maka persamaan

$$(A - aI_n)u = 0, \quad (A1.1)$$

memiliki solusi taktrivial. Hal ini menyiratkan bahwa

$$\det(A - aI_n) = 0, \quad (A1.2)$$

sehingga nilai-nilai eigen A dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan ini.

Sifat-sifat

- Ruas kiri (A1.2) adalah polinom berderajat n dalam a , yang disebut *polinom karakteristik* dari A .
- Polinom karakteristik A memiliki n akar kompleks jika dihitung dengan multiplisitas aljabarnya; akar-akar tersebut merupakan nilai-nilai eigen A .
- Karena A memiliki entri-entri real, jika a merupakan nilai eigen dari A , konjugat kompleksnya a^* juga merupakan nilai eigen. Akibatnya, nilai-nilai eigen A adalah real atau muncul dalam pasangan konjugat kompleks.
- Jejak A adalah jumlah nilai-nilai eigen A , dengan memperhitungkan multiplisitas aljabar.
- Determinan A adalah hasil kali nilai-nilai eigen A , dengan memperhitungkan multiplisitas aljabar.

Setelah suatu nilai eigen ditemukan, persamaan (A1.1) perlu diselesaikan untuk memperoleh vektor eigen yang bersesuaian. Himpunan semua solusinya, termasuk vektor nol, membentuk ruang eigen; anggota tak nol ruang ini adalah vektor-vektor eigen. Setiap ruang eigen merupakan subruang invarian dari transformasi linear $\mathcal{T}$ yang berkaitan dengan matriks A . Jika matriks tersebut dapat didiagonalkan atas medan skalar yang digunakan, ruang vektor $\mathcal{S}$, atau $\mathbb{R}^n$ dalam kasus real, merupakan jumlah langsung ruang-ruang eigen A . Secara umum, dekomposisi memerlukan ruang eigen tergeneralisasi pada kompleksifikasi atau blok invarian real; keduanya memberikan gambaran geometris tentang cara $\mathcal{T}$ bekerja pada $\mathcal{S}$.

Bahan Renungan

Soal 1

Tunjukkan bahwa vektor-vektor eigen u dan v dari suatu matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen berbeda bersifat bebas linear.

Soal 2

Hitung determinan matriks berikut.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 12 \\ 6 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Soal 3

Tentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen matriks berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soal 4

Perhatikan transformasi dari $\mathbb{R}^5$ ke $\mathbb{R}^3$ yang didefinisikan oleh

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_5 \\ x_2 + x_3 + x_5 \end{bmatrix}, \quad \text{dengan} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

1. Apakah $\mathcal{T}$ merupakan transformasi linear? Mengapa atau mengapa tidak?
 2. Tentukan matriks $\mathcal{T}$ relatif terhadap basis standar $\mathbb{R}^5$ dan $\mathbb{R}^3$.
-

Soal 5

Perhatikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Tentukan basis ruang kolom (atau ruang hasil) A . Berikan alasan atas jawaban Anda.
 2. Tentukan basis ruang nol A . Berikan alasan atas jawaban Anda.
 3. Berapakah rank A ?
-

Soal 6

Perhatikan ruang $\mathbb{P}_2$ yang terdiri atas polinom berderajat paling tinggi 2, dan misalkan $\mathcal{S} = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ adalah himpunan polinom dalam $\mathbb{P}_2$, dengan

$$\begin{aligned} q_0(t) &= 6t - t^2, & q_1(t) &= 1 - t, & q_2(t) &= t + 1 \\ q_3(t) &= 4, & q_4(t) &= 2 - 2t + t^2. \end{aligned}$$

1. Tentukan koordinat polinom Q relatif terhadap basis standar $\mathbb{P}_2$, dengan $Q(t) = 4t^2 - 2t + 10$.
 2. Berikan sebuah basis $\mathbb{P}_2$ yang terdiri atas vektor-vektor dalam $\mathcal{S}$. Jelaskan cara Anda memilih vektor-vektor tersebut.
 3. Tentukan koordinat polinom Q yang didefinisikan pada butir 1 relatif terhadap basis yang Anda peroleh pada butir 2.
-

Soal 7

Perhatikan vektor-vektor berikut dalam $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, & \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, & \vec{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{v}_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, & \vec{v}_5 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ merupakan himpunan yang bergantung linear.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Namai nilai eigen yang bersesuaian dengan u dan v sebagai λ dan μ , dengan $\lambda \neq \mu$. Mulailah dari relasi $cu + dv = 0$, terapkan A , lalu eliminasi salah satu vektor.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Misalkan $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$, $u, v \neq 0$, dan $\lambda \neq \mu$. Jika $cu + dv = 0$, maka penerapan A memberi $c\lambda u + d\mu v = 0$. Kurangi persamaan kedua dengan $\mu(cu + dv) = 0$; diperoleh $c(\lambda - \mu)u = 0$, sehingga $c = 0$. Relasi awal lalu memberi $d = 0$. Jadi, satu-satunya kombinasi linear yang menghasilkan nol adalah kombinasi trivial, sehingga u dan v bebas linear.

Cek cepat

Argumen harus menggunakan tiga fakta: vektor eigen tidak nol, $\lambda - \mu \neq 0$, dan kedua koefisien akhirnya nol. Menunjukkan bahwa u dan v sekadar berbeda belum membuktikan kebebasan linear.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Tuliskan persamaan nilai eigen dengan nilai eigen yang berbeda.

Rumus

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v, \quad \lambda \neq \mu$$

- **Penjelasan**

Andaikan terdapat kombinasi linear yang sama dengan nol.

Rumus

$$cu + dv = 0$$

- **Penjelasan**

Terapkan A dan gunakan kedua persamaan nilai eigen.

Rumus

$$cAu + dAv = 0 \Rightarrow c\lambda u + d\mu v = 0$$

- **Penjelasan**

Eliminasi suku yang mengandung v .

Rumus

$$(c\lambda u + d\mu v) - \mu(cu + dv) = c(\lambda - \mu)u = 0$$

- **Penjelasan**

Karena $u \neq 0$ dan $\lambda \neq \mu$, maka $c = 0$; relasi semula dan $v \neq 0$ kemudian memberi $d = 0$.

Rumus

$$c = 0, \quad dv = 0 \Rightarrow d = 0$$

Simpulan

Setiap relasi linear antara u dan v bersifat trivial; oleh karena itu keduanya bebas linear.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Gunakan operasi penggantian baris yang tidak mengubah determinan: kurangi baris kedua dengan dua kali baris pertama dan baris ketiga dengan tiga kali baris pertama. Matriks yang tersisa hampir berbentuk segitiga.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Operasi $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ dan $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$ tidak mengubah determinan dan menghasilkan $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Eksansi terhadap kolom pertama memberi $2\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 2(-1)(-2) = 4$. Jadi, $\det C = 4$.

Cek cepat

Eksansi kofaktor baris pertama memberi $2(48 - 48) - 2(64 - 72) + 6(16 - 18) = 0 + 16 - 12 = 4$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Mulailah dari matriks yang diberikan.

Rumus

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 12 \\ 6 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Hilangkan entri pertama pada baris kedua tanpa mengubah determinan.

Rumus

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow R_2 = (0, -1, 0)$$

- **Penjelasan**

Hilangkan entri pertama pada baris ketiga dengan jenis operasi yang sama.

Rumus

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \Rightarrow R_3 = (0, -2, -2)$$

- **Penjelasan**

Ekspansikan terhadap kolom pertama; minor 2×2 yang tersisa berbentuk segitiga.

Rumus

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2(-1)(-2) = 4$$

Simpulan

Determinan matriks tersebut adalah 4, sehingga C invertibel.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Faktorkan $\det(\lambda I - B)$, lalu cari ruang nol $B - 3I$ dan $B - 4I$. Ingat bahwa jawaban untuk vektor eigen adalah semua vektor tak nol dalam setiap ruang eigen, bukan hanya satu vektor contoh.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Polinom karakteristik dengan konvensi $\det(\lambda I - B)$ adalah $(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2$. Jadi nilai eigennya ialah 3 dengan multiplisitas aljabar dua dan 4 dengan multiplisitas aljabar satu. Ruang eigennya adalah

$E_3 = \ker(B - 3I) = \text{span}\{(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T\}$ dan $E_4 = \ker(B - 4I) = \text{span}\{(-1, 1, 1)^T\}$. Semua vektor eigen adalah vektor tak nol dalam kedua ruang tersebut.

Cek cepat

Jumlah nilai eigen dengan multiplisitas adalah $3 + 3 + 4 = 10 = \text{tr}B$, dan hasil kalinya $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36 = \det B$. Substitusi setiap vektor basis harus menghasilkan $Bv = 3v$ atau $Bv = 4v$ sesuai ruangnya.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Hitung dan faktorkan polinom karakteristik. Dengan konvensi sumber, $\det(B - \lambda I)$ berbeda tanda karena ukurannya ganjil, tetapi mempunyai akar yang sama.

Rumus

$$\det(\lambda I - B) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2$$

- **Penjelasan**

Untuk $\lambda = 3$, reduksi sistem $(B - 3I)x = 0$ menyisakan satu persamaan.

Rumus

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

- **Penjelasan**

Gunakan x_2 dan x_3 sebagai variabel bebas untuk membentuk basis ruang eigen berdimensi dua.

Rumus

$$E_3 = \{(s - t, s, t)^T : s, t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T\}$$

- **Penjelasan**

Untuk $\lambda = 4$, persamaan memberi $x_2 = x_3$ dan $x_1 = -x_3$.

Rumus

$$B - 4I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \text{span}\{(-1, 1, 1)^T\}$$

Simpulan

Matriks B mempunyai ruang eigen berdimensi dua untuk $\lambda = 3$ dan ruang eigen berdimensi satu untuk $\lambda = 4$; ketiga vektor basis itu juga menunjukkan bahwa B dapat didiagonalkan.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Hitung $\mathcal{T}(e_j)$ untuk kelima vektor basis standar e_j di $\mathbb{R}^5$. Susun kelima hasil tersebut sebagai kolom sebuah matriks 3×5 , lalu periksa bahwa perkaliannya dengan x mengembalikan rumus sumber.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pemetaan tersebut linear karena setiap komponennya merupakan kombinasi linear homogen dari $x_1, \dots, x_5$.

Matriks relatif terhadap basis standar adalah $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan

$$Mx = (0, 2x_1 - 4x_2 + x_5, x_2 + x_3 + x_5)^T = \mathcal{T}(x).$$

Cek cepat

Matriks harus berukuran 3×5 . Kolom keempat harus nol karena x_4 tidak muncul, sedangkan kolom kelima harus $(0, 1, 1)^T$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Evaluasi pemetaan pada basis standar domain.

Rumus

$$\mathcal{T}(e_1) = (0, 2, 0)^T, \quad \mathcal{T}(e_2) = (0, -4, 1)^T, \quad \mathcal{T}(e_3) = (0, 0, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Dua kolom terakhir berasal dari koefisien x_4 dan x_5 .

Rumus

$$\mathcal{T}(e_4) = (0, 0, 0)^T, \quad \mathcal{T}(e_5) = (0, 1, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Susun citra vektor basis sebagai kolom matriks standar.

Rumus

$$M = [\mathcal{T}(e_1) \mathcal{T}(e_2) \mathcal{T}(e_3) \mathcal{T}(e_4) \mathcal{T}(e_5)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Representasi matriks langsung membuktikan sifat linear.

Rumus

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = M(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$

Simpulan

Jadi $\mathcal{T}$ merupakan transformasi linear dan matriks standarnya adalah matriks 3×5 di atas.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Reduksi A ke bentuk eselon baris tereduksi. Gunakan indeks kolom pivot untuk memilih kolom dari matriks asli sebagai basis ruang kolom; jangan mengambil kolom dari hasil reduksi. Untuk ruang nol, jadikan x_4 dan x_5 variabel bebas.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Bentuk eselon baris tereduksi adalah $\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -16 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, sehingga kolom pivotnya adalah

kolom 1, 2, 3. Basis ruang kolom harus diambil dari A asli: $\{(1, 2, 1)^T, (2, 4, 1)^T, (2, 3, 3)^T\}$. Basis ruang nol adalah $\{(16, -6, -4, 1, 0)^T, (22, -7, -6, 0, 1)^T\}$. Terdapat tiga pivot, jadi $\text{rank} A = 3$.

Cek cepat

Determinan tiga kolom pivot asli adalah -1 , kedua vektor basis ruang nol harus dipetakan ke nol oleh A , dan teorema rank–nullitas memberi $3 + 2 = 5$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Lakukan eliminasi Gauss–Jordan pada matriks.

Rumus

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -16 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Kolom pivot bernomor 1, 2, 3; pilih kolom-kolom dengan nomor tersebut dari matriks asli.

Rumus

$$\mathcal{B}_{\text{Col}A} = \{(1, 2, 1)^T, (2, 4, 1)^T, (2, 3, 3)^T\}$$

- **Penjelasan**

Persamaan homogen dari bentuk tereduksi menyatakan variabel pivot melalui dua variabel bebas.

Rumus

$$x_1 = 16x_4 + 22x_5, \quad x_2 = -6x_4 - 7x_5, \quad x_3 = -4x_4 - 6x_5$$

- **Penjelasan**

Tetapkan $x_4 = s$ dan $x_5 = t$, lalu pisahkan kedua parameter.

Rumus

$$x = s(16, -6, -4, 1, 0)^T + t(22, -7, -6, 0, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Jumlah pivot menentukan rank, sedangkan dua parameter bebas menentukan dimensi ruang nol.

Rumus

$$\text{rank}A = 3, \quad \dim \ker A = 2$$

Simpulan

Ruang kolom berdimensi tiga dan sama dengan $\mathbb{R}^3$; ruang nol berdimensi dua dengan basis yang diberikan, sesuai teorema rank–nullitas.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Gunakan basis standar terurut $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$. Tulis setiap q_j sebagai kolom koefisien, pilih tiga kolom dengan determinan tak nol, lalu selesaikan sistem koordinat untuk Q .

Periksa jawaban**Pemeriksaan akhir**

Dalam basis standar terurut $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$, $[Q]_{\mathcal{E}} = (10, -2, 4)^T$. Salah satu basis yang seluruh anggotanya berasal dari $\mathcal{S}$ adalah basis terurut $\mathcal{B} = (q_0, q_1, q_2)$, karena matriks kolom koordinatnya $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mempunyai determinan $-2 \neq 0$. Penyelesaian $M[Q]_{\mathcal{B}} = [Q]_{\mathcal{E}}$ memberi $[Q]_{\mathcal{B}} = (-4, -6, 16)^T$.

Cek cepat

Verifikasi langsung harus memberi $-4q_0 - 6q_1 + 16q_2 = 4t^2 - 2t + 10$. Urutan komponen koordinat harus mengikuti urutan basis yang dinyatakan.

Pembahasan atau rubrik**Langkah penyelesaian**

- **Penjelasan**

Baca koefisien konstanta, t , dan t^2 dari Q .

Rumus

$$[Q]_{\mathcal{E}} = (10, -2, 4)^T, \quad \mathcal{E} = (1, t, t^2)$$

- **Penjelasan**

Tuliskan koordinat tiga kandidat basis sebagai kolom.

Rumus

$$[q_0]_{\mathcal{E}} = (0, 6, -1)^T, \quad [q_1]_{\mathcal{E}} = (1, -1, 0)^T, \quad [q_2]_{\mathcal{E}} = (1, 1, 0)^T$$

- **Penjelasan**

Determinan tak nol membuktikan bahwa ketiganya bebas linear; karena $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, ketiganya membentuk basis.

Rumus

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

• Penjelasan

Selesaikan sistem yang menyatakan Q sebagai kombinasi ketiga polinom.

Rumus

$$M \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (c_0, c_1, c_2) = (-4, -6, 16)$$

• Penjelasan

Periksa kombinasi tersebut langsung sebagai polinom.

Rumus

$$-4(6t - t^2) - 6(1 - t) + 16(t + 1) = 4t^2 - 2t + 10$$

Simpulan

Dengan urutan basis (q_0, q_1, q_2) , koordinat polinom Q adalah $(-4, -6, 16)^T$.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Lima vektor di ruang berdimensi empat pasti bergantung linear. Untuk bukti yang dapat diperiksa langsung, cari koefisien tak semuanya nol dalam $c_1v_1 + \dots + c_5v_5 = 0$; ada relasi sederhana dengan $c_1 = 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Relasi nontrivial $0v_1 - 3v_2 - 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 0$ berlaku. Vektor koefisiennya $(0, -3, -3, 2, 1)$ tidak nol, sehingga definisi kebergantungan linear langsung terpenuhi. Secara dimensi, hasil ini juga pasti karena terdapat lima vektor di $\mathbb{R}^4$.

Cek cepat

Jumlah per komponen adalah $(0 - 3 + 2 + 1, -3 + 0 + 2 + 1, 0 - 3 + 2 + 1, 3 + 0 - 4 + 1) = (0, 0, 0, 0)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Bentuk matriks yang kolom-kolomnya adalah kelima vektor. Karena matriks berukuran 4×5 , ruang nolnya tidak trivial.

Rumus

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5], \quad \text{nullity}(V) \geq 5 - 4 = 1$$

- **Penjelasan**

Salah satu vektor koefisien tak nol di ruang nol matriks tersebut adalah

Rumus

$$c = (0, -3, -3, 2, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Terjemahkan persamaan $Vc = 0$ menjadi relasi antarvektor.

Rumus

$$-3v_2 - 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 0$$

- **Penjelasan**

Periksa relasi tersebut langsung per komponen.

Rumus

$$-3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simpulan

Karena terdapat kombinasi linear nol dengan koefisien yang tidak semuanya nol, kelima vektor tersebut bergantung linear.

Penyegaran: Kalkulus Vektor

0005-LEGA-V101-CH12

Informasi di bawah ini merupakan ikhtisar elementer mengenai sifat-sifat dasar gradien suatu fungsi, serta divergensi dan rotasi (curl) suatu medan vektor. Topik-topik ini biasanya dibahas dalam mata kuliah kalkulus semester ketiga.

Gradien

Gradien suatu fungsi tiga variabel yang dapat didiferensialkan $f(x, y, z)$ didefinisikan oleh

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

dan memiliki sifat-sifat berikut.

- Pada titik tempat $\vec{\nabla} f$ tak nol, arahnya merupakan arah pertambahan f yang paling cepat.
- Laju perubahan maksimum f di antara semua arah yang direpresentasikan oleh vektor satuan sama dengan $\|\vec{\nabla} f\|$.
- Pada titik tempat $\vec{\nabla} f$ tak nol, gradien tersebut tegak lurus terhadap permukaan aras reguler fungsi f (yaitu, terhadap permukaan dengan persamaan $f = c = \text{konstanta}$).
- Turunan berarah f dalam arah vektor satuan $\vec{u}$ sama dengan $\vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$.
- Pada titik-titik kritis f , berlaku $\vec{\nabla} f = \vec{0}$. Titik kritis generik berupa titik minimum, maksimum, dan pelana dari fungsi f .
- Ekstremum lokal f dengan kendala $g(x, y, z) = c$ pada titik reguler permukaan $g(x, y, z) = c$ harus memenuhi bahwa gradien f sejajar dengan gradien g . Di sini, titik reguler berarti gradien kendala tidak nol; konstanta kesebandingannya disebut *pengali Lagrange*.

Integral garis dan medan gradien

Integral garis

Integral garis suatu medan vektor kontinu $\vec{F}$ di sepanjang lintasan berorientasi C dituliskan sebagai

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

dengan $\vec{r}$ sebagai vektor posisi dan $d\vec{r}$ merupakan vektor tangen terhadap lintasan C . Jika kita mengetahui suatu parametrisasi C , yaitu jika C ditelusuri oleh $\vec{r}(t)$ saat t bervariasi antara t_0 dan t_1 , integral garis di atas menjadi

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt,$$

sehingga dapat dihitung.

Contoh 1

Perhatikan medan vektor $\vec{F}(x, y) = e^x \vec{i} + e^y \vec{j}$. Misalkan C merupakan bagian elips $x^2 + 4y^2 = 4$ yang menghubungkan $(0, 1)$ ke $(2, 0)$ searah jarum jam. Suatu parametrisasi C adalah $x = 2\sin(t)$, $y = \cos(t)$, dengan t bervariasi antara 0 dan $\pi/2$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \left[e^{2\sin(t)} \vec{i} + e^{\cos(t)} \vec{j} \right] \cdot \left[2\cos(t) \vec{i} - \sin(t) \vec{j} \right] dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[2\cos(t) e^{2\sin(t)} - \sin(t) e^{\cos(t)} \right] dt \\
&= \left[e^{2\sin(t)} + e^{\cos(t)} \right]_0^{\pi/2} = e(e-1).
\end{aligned}$$

Contoh 2

Usaha yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ di sepanjang lintasan C diberikan oleh $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Jika $\vec{r}$ bergerak menurut hukum Newton, $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, maka

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \left[\frac{1}{2} m \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2 \right]_{t_0}^{t_1} = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{t_0}^{t_1},$$

di mana v menyatakan kelajuan; dengan demikian, usaha yang dilakukan oleh $\vec{F}$ ketika suatu massa titik bergerak di sepanjang lintasan C sama dengan selisih energi kinetik massa titik tersebut di antara kedua titik ujung C .

Medan gradien

Suatu medan vektor $\vec{F}$ disebut *medan gradien* jika terdapat fungsi $f(x, y, z)$ sedemikian sehingga $\vec{F} = \vec{\nabla}f$. Medan vektor $\vec{F}$ tersebut bersifat *konservatif*, *tidak bergantung pada lintasan*, dan *bebas sirkulasi*.

- Suatu medan vektor $\vec{F}$ yang *tidak bergantung pada lintasan* memiliki sifat bahwa integral garis $\vec{F}$ di sepanjang sebarang lintasan dalam domain $\vec{F}$ hanya bergantung pada titik-titik ujung lintasan tersebut.
- Suatu medan vektor yang *bebas sirkulasi* memiliki sirkulasi (yaitu, integral garisnya di sepanjang sebarang kurva tertutup) yang bernilai nol di seluruh domain $\vec{F}$.

Menurut teorema dasar kalkulus untuk integral garis, suatu medan gradien tidak bergantung pada lintasan, yaitu

$$\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P),$$

dengan C sebagai lintasan yang mulus sepotong demi sepotong dan menghubungkan P ke Q , serta $\vec{\nabla}f$ kontinu pada C . Sebaliknya, setiap medan vektor yang tidak bergantung pada lintasan merupakan medan gradien.

Contoh

Perhatikan gaya $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ yang dibahas di atas. Jika $\vec{F}$ memiliki fungsi potensial, yaitu jika terdapat fungsi $V(\vec{r})$ sedemikian sehingga $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, maka

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}(t_0)) - V(\vec{r}(t_1)) \\
&= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{t_0}^{t_1}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\frac{1}{2} m v^2(t_0) + V(\vec{r}(t_0)) = \frac{1}{2} m v^2(t_1) + V(\vec{r}(t_1))$, yaitu, energi total, yang merupakan jumlah energi kinetik dan energi potensial, bersifat kekal.

- Jika $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$ adalah medan gradien dengan turunan parsial kontinu, maka

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

yaitu, $\text{curl} \vec{F} = \vec{0}$.

Rotasi (curl)

Rotasi suatu medan vektor $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$ yang memiliki turunan parsial kontinu adalah vektor yang diberikan oleh

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

Rotasi memiliki sifat-sifat berikut.

- Jika $\operatorname{curl} \vec{F}$ tak nol di titik P , arahnya adalah arah sumbu dengan rapat sirkulasi $\vec{F}$ terbesar di sekeliling sumbu tersebut.
- Nilai maksimum rapat sirkulasi di antara semua arah yang direpresentasikan oleh vektor satuan sama dengan magnitudo $\operatorname{curl} \vec{F}$.
- Rapat sirkulasi $\vec{F}$ di sekitar sebarang vektor satuan $\vec{n}$ sama dengan $\operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n}$.
- Untuk sebarang fungsi f yang memiliki turunan parsial kedua kontinu,

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}.$$

- Sebaliknya, setiap medan vektor mulus yang didefinisikan pada domain terbuka terhubung sederhana dan memiliki rotasi nol di setiap titik merupakan medan gradien (inilah *uji rotasi*).

Teorema Stokes dan Teorema Green

Fluks medan vektor $\vec{F}$ melalui permukaan berorientasi S adalah $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

- Jika permukaan S adalah grafik suatu fungsi $f(x, y)$ dan diorientasikan ke atas, maka, jika R adalah domain $f(x, y)$, kita dapat menuliskan

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_R \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left[-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right] dx dy.$$

- Jika S adalah permukaan parametrik yang diparameterkan oleh $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, dengan s dan t bervariasi dalam suatu daerah R , dan jika kita mengasumsikan bahwa $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ searah dengan vektor normal $\vec{n}$ terhadap permukaan S di setiap titik, maka kita dapat menuliskan

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_R \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt.$$

Teorema Stokes

Teorema Stokes menghubungkan sirkulasi suatu medan vektor mulus di sepanjang kurva tertutup C yang mulus sepotong demi sepotong dengan fluks $\operatorname{curl} \vec{F}$ melalui sebarang permukaan mulus S yang batasnya sama dengan C . Teorema ini berbunyi:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

di mana orientasi C ditentukan dari orientasi S (atau sebaliknya) dengan *kaidah tangan kanan*. Perhatikan bahwa Teorema Stokes hanya berlaku jika $\vec{F}$ didefinisikan di setiap titik pada S dan C .

Teorema Green

Teorema Green adalah versi planar dari Teorema Stokes dan berbunyi

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

di mana $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ adalah medan vektor mulus yang didefinisikan di setiap titik C serta di bagian dalam C , dan C adalah kurva tertutup sederhana yang mulus sepotong demi sepotong serta diorientasikan sedemikian rupa sehingga bagian dalamnya, R , berada di sebelah kiri ketika kita bergerak di sepanjang C .

Teorema divergensi

Divergensi suatu medan vektor $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ yang memiliki turunan parsial kontinu diberikan oleh

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Perhatikan bahwa besaran ini adalah besaran skalar. Divergensi memiliki sifat-sifat berikut.

- $\operatorname{div}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$
- $\operatorname{div}(f\vec{\nabla} g) = f\vec{\nabla}^2 g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g.$
- $\operatorname{div}(f\vec{g}) = f\operatorname{div}(\vec{g}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{g}.$
- Divergensi $\vec{F}$ di titik P sama dengan limit fluks per volume ketika permukaan S yang mengelilingi P menyusut ke titik tersebut: fluks $\vec{F}$ melalui S yang berorientasi ke luar dibagi dengan volume daerah W yang dibatasi oleh S . Dalam rumus berikut, $B_\varepsilon(P)$ adalah bola berpusat di titik itu dengan jari-jari epsilon; $\partial B_\varepsilon(P)$ adalah permukaannya; dan $\vec{n}$ adalah vektor normal satuan ke luar. Dengan kata lain,

$$\operatorname{div}\vec{F}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial B_\varepsilon(P)} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon(P))}.$$

- Untuk sebarang medan vektor $\vec{F}$ yang memiliki turunan parsial kedua kontinu,

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0.$$

- Sebaliknya, pada setiap domain terbuka berbentuk bintang, setiap medan vektor mulus $\vec{F}$ yang divergensinya nol di setiap titik merupakan *medan rotasi*; yaitu, terdapat suatu medan vektor $\vec{G}$ sedemikian sehingga $\vec{F} = \operatorname{curl} \vec{G}$ (inilah *uji divergensi*).

Menurut teorema divergensi, fluks suatu medan vektor mulus melalui permukaan tertutup S yang mulus sepotong demi sepotong dan diorientasikan ke luar sama dengan integral volume divergensinya di seluruh daerah W yang dibatasi oleh S ; yaitu,

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV,$$

dengan asumsi bahwa $\vec{F}$ didefinisikan di setiap titik di dalam W dan pada S .

Contoh: persamaan kontinuitas

Perhatikan aliran $\vec{v}(\vec{r})$ suatu fluida dengan kerapatan $\rho(\vec{r}, t)$. Misalkan V adalah suatu daerah tetap dalam domain fluida. Massa fluida di dalam V diberikan oleh $m = \int_V \rho \, dV$, dan laju perubahannya adalah

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV,$$

jika kita mengasumsikan bahwa ρ mulus. Di sisi lain, laju perubahan ini sama dengan lawan dari fluks massa $\rho\vec{v}$ melalui batas S dari V , dan berdasarkan teorema divergensi,

$$\frac{dm}{dt} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dV.$$

Dengan membandingkan kedua ungkapan dm/dt , yang sama untuk setiap daerah V , kita memperoleh persamaan kontinuitas, yang berbunyi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Penyegaran: Persamaan Diferensial Biasa

0005-LEGA-V101-CH13

Lampiran ini mengulas secara singkat metode-metode yang paling umum untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB). Banyak PDB atau sistem PDB yang diperkenalkan dalam catatan ini bersifat nonlinear sehingga tidak dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan metode-metode tersebut. Namun, analisis kestabilan linear titik tetap bertumpu pada penyelesaian sistem linear berkoefisien konstan, yang dibahas di sini. Selain itu, seorang pemodel harus mampu mengenali PDB yang dapat diselesaikan secara eksak dan menyelesaikannya jika diperlukan. Informasi di bawah ini dimaksudkan sebagai rujukan cepat; teorema-teorema diberikan tanpa bukti dan pembaca sebaiknya merujuk pada buku-buku klasik tentang persamaan diferensial untuk memperoleh perinciannya.

Definisi dan teorema dasar tentang eksistensi

Definisi

- Sebuah *persamaan diferensial biasa* berorde n adalah persamaan berbentuk

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \quad (13.1)$$

- Sebuah *solusi* persamaan diferensial ini adalah fungsi yang dapat didiferensialkan sebanyak n kali, yaitu $y(x)$ dari peubah real x , yang memenuhi Persamaan (13.1).
- Sebuah *syarat awal* adalah penetapan nilai y beserta turunan-turunannya hingga orde $(n-1)$ pada suatu titik x_0 . Syarat ini berbentuk sebagai berikut, dengan $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ merupakan bilangan-bilangan yang diberikan:

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}, \quad (13.2)$$

- Syarat batas* menetapkan nilai kombinasi linear dari y dan turunan-turunannya pada dua nilai x yang berbeda.

Teorema eksistensi dan ketunggalan

Di bawah ini kami mencantumkan teorema-teorema utama tentang eksistensi dan ketunggalan solusi sistem persamaan diferensial biasa orde pertama. Perhatikan bahwa Persamaan (13.1) dapat ditulis sebagai sistem orde pertama

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) \quad (13.3)$$

dengan menetapkan $Y = \left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Teorema Cauchy–Peano

Jika f kontinu pada persegi panjang $\mathcal{R} = \{|x - x_0| \leq a, \|Y - Y_0\| \leq b\}$ dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka terdapat solusi Y dari (13.3) yang terdiferensialkan secara kontinu pada $|x - x_0| \leq \alpha$ dan memenuhi $Y(x_0) = Y_0$, dengan

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x,Y) \in \mathcal{R}} \|f(x, Y)\|.$$

Teorema Picard–Lindelöf

Jika f bersifat Lipschitz pada $\mathcal{R}$, yakni jika terdapat konstanta $k > 0$ sedemikian sehingga

$$\forall (x, Y_1) \in \mathcal{R}, \forall (x, Y_2) \in \mathcal{R}, \|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| < k \|Y_1 - Y_2\|,$$

dan jika f kontinu pada $\mathcal{R}$, maka terdapat solusi tunggal Y dari (13.3) pada $|x - x_0| \leq \alpha$ yang memenuhi $Y(x_0) = Y_0$.

Secara bersama-sama, teorema-teorema ini menyiratkan bahwa untuk sistem dinamik yang terdiferensialkan secara kontinu dan berbentuk (13.3), setiap masalah nilai awal memiliki solusi tunggal. Karena f dalam (13.3) dapat bergantung secara eksplisit pada variabel bebas, kesimpulan tanpa-perpotongan berlaku dalam ruang keadaan diperluas (x, Y) ; untuk sistem otonom berbentuk (13.3), kesimpulan itu berlaku langsung bagi lintasan dalam ruang fase Y .

Berikut ini kami mencantumkan berbagai teknik umum yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Syarat awal atau syarat batas sebaiknya diterapkan setelah solusi umum diperoleh.

Persamaan diferensial orde pertama

Kita mulai dengan persamaan diferensial orde pertama, yang kita tulis sebagai

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Persamaan terpisahkan

Jika $\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -f(x)g(y)$, maka persamaan tersebut dapat dipisahkan dan berbentuk

$$f(x)dx = \frac{1}{g(y)}dy,$$

yang dapat diintegrasikan dengan mudah.

Contoh

Solusi masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$ adalah $y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$.

Persamaan dengan M dan N yang keduanya homogen berderajat n

Jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ keduanya homogen berderajat n , maka perubahan peubah $v = y/x$ (atau $u = x/y$) akan menjadikan PDB tersebut dapat dipisahkan.

Contoh

Keluarga solusi persamaan $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ adalah $y = \frac{Cx^2}{1 - Cx}$, dengan C konstanta sembarang. Selain keluarga ini, $y = -x$ juga merupakan solusi dan tidak diperoleh untuk nilai parameter C yang berhingga.

Persamaan eksak

Jika $\partial M/\partial y$ dan $\partial N/\partial x$ kontinu dan jika $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, maka PDB tersebut *eksak*, yaitu terdapat $u(x, y)$ sedemikian sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Dengan demikian, PDB dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

yang menghasilkan $d(u(x, y)) = 0$, yaitu $u(x, y) = C$. Fungsi u dapat diperoleh dengan mengintegrasikan kedua persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Contoh

Solusi umum persamaan $(y\cos(x) + 2xe^y) + (\sin(x) + x^2e^y - 1)y' = 0$ diberikan secara implisit oleh $y\sin(x) + x^2e^y - y = C$, dengan C konstanta sembarang.

Faktor integrasi

Faktor integrasi adalah fungsi $\rho(x, y)$ sedemikian sehingga persamaan diferensial

$$\rho(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy]$$

bersifat eksak. Jika $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, tetapi

- $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -n\frac{M}{y} + m\frac{N}{x}$, gunakan faktor integrasi $\rho(x, y) = x^m y^n$.
- Jika $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$ hanya bergantung pada x dan hasilnya dinamai $f(x)$, faktor integrasinya adalah $\rho(x) = \exp\left(\int f(x) dx\right)$.
- Jika $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$ hanya bergantung pada y dan hasilnya dinamai $f(y)$, faktor integrasinya adalah $\rho(y) = \exp\left(-\int f(y) dy\right)$.

Contoh

Solusi umum persamaan $3xy + y^2 + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$ diberikan secara implisit oleh $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$.

Persamaan linear

Jika persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk $y' + p(x)y = q(x)$, yaitu jika

$$-\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -p(x)y + q(x),$$

maka PDB tersebut *linear*. Misalkan $\rho(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$. Kita peroleh

$$\rho'(x) = p(x)\exp\left[\int p(x)dx\right] = p(x)\rho(x),$$

dan dengan mengalikan PDB dengan $\rho(x)$, kita memperoleh

$$\begin{aligned}y'\rho(x) + p(x)\rho(x)y &= q(x)\rho(x) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}[\rho(x)y] &= q(x)\rho(x), \\ \Leftrightarrow y\rho(x) &= \int q(x)\rho(x)dx + C, \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{\rho(x)} \int q(x)\rho(x)dx + \frac{C}{\rho(x)}, \\ \Leftrightarrow y &= \left[\int q(x)\rho(x)dx + C\right]\exp\left[-\int p(x)dx\right].\end{aligned}$$

$dx \text{ \right].}\end{align*}$

Contoh 1

Solusi umum persamaan $y' + 2y = e^{-x}$ adalah $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$.

Contoh 2

Solusi persamaan $y' - 2xy = x$ dengan syarat $y(0) = 0$ adalah $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Persamaan Bernoulli

Jika $-\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -p(x)y + q(x)y^n$, dengan $n \neq 0, 1$, kita memperoleh persamaan Bernoulli berikut

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Persamaan nonlinear ini dapat diubah menjadi bentuk persamaan linear melalui perubahan peubah $u = y^{1-n}$.

Contoh

Keluarga solusi tak nol persamaan $x^2y' + 2xy - y^3 = 0, x > 0$ adalah $y = \pm \sqrt{\frac{5x}{2 + Cx^5}}$. Solusi nol $y = 0$ juga memenuhi persamaan.

Persamaan Riccati

Jika $-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$, kita memperoleh persamaan Riccati berikut

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2.$$

Untuk menyelesaikannya, lakukan langkah-langkah berikut.

1. Carilah solusi khusus $y = y_1(x)$ dengan mencoba fungsi-fungsi sederhana seperti ax^b atau $a\exp(bx)$.
2. Perhatikan bahwa $u = y - y_1$ memenuhi persamaan Bernoulli berikut (dengan $n = 2$):
$$u' = a_1(x)u + a_2(x)u(2y_1(x) + u)$$
$$= [a_1(x) + 2a_2(x)y_1(x)]u + a_2(x)u^2,$$
3. Ubahlah persamaan di atas menjadi persamaan linear dengan menerapkan perubahan peubah $w = u^{1-2} = 1/u$, lalu selesaikan untuk w . Dalam peubah semula, solusi y diberikan oleh $y = y_1 + 1/w$.

Contoh

Keluarga solusi persamaan $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ adalah $y = x + 1/(C - x)$. Solusi khusus $y = x$ juga memenuhi persamaan dan tidak termasuk dalam keluarga untuk nilai parameter C yang berhingga.

Persamaan Clairaut

Persamaan diferensial $y = xy' + f(y')$ memiliki keluarga garis lurus berikut sebagai solusi

$$y = cx + f(c), \quad c = \text{konstan}$$

dan juga dapat memiliki solusi singular dalam bentuk parametrik

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = px + f(p) \end{cases}.$$

Contoh

Solusi umum persamaan $y = y'x + \frac{1}{y}$ adalah $y = Cx + 1/C$ dan salah satu solusi singularnya adalah $y^2 = 4x$.

Persamaan diferensial orde kedua

Persamaan tanpa y

Persamaan diferensial orde kedua yang tidak memuat y berbentuk $F(y'', y', x) = 0$. Dengan $w = y'$, persamaan ini menjadi $F(w', w, x) = 0$, yang merupakan persamaan orde pertama. Persamaan tersebut mula-mula dapat diselesaikan untuk w , kemudian untuk y , dengan menggunakan $w = dy/dx$.

Contoh

Solusi umum persamaan $x^2y'' + y'^2 - 2xy' = 0$ adalah

$$y = \frac{1}{2}x^2 - C_1x + C_1^2\ln(|x + C_1|) + C_2,$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sembarang. Selain keluarga tersebut, setiap fungsi konstan $y = C$ juga merupakan solusi.

Persamaan tanpa x

PDB jenis ini berbentuk $F(y'', y', y) = 0$. Misalkan $w = dy/dx$ merupakan fungsi y . Maka,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dy} w,$$

dan PDB tersebut menjadi $F(w \frac{dw}{dy}, w, y) = 0$, yang merupakan persamaan diferensial orde pertama dengan y sebagai peubah bebas. Persamaan ini dapat diselesaikan untuk w sebagai fungsi y , kemudian persamaan terpisahkan orde pertama $\frac{dy}{dx} = w(y)$ dapat diselesaikan.

Contoh

Solusi umum persamaan $yy'' + (y')^2 + 4 = 0$ diberikan secara implisit oleh

$$x^2 = \left(C_2 + \frac{1}{4C_1} \sqrt{1 - 4C_1^2 y^2} \right)^2.$$

Persamaan linear

Solusi umum persamaan $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$ berbentuk

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

dengan

- $y_p(x)$ merupakan solusi khusus dari persamaan $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$,
- y_1 dan y_2 merupakan dua solusi bebas linear satu sama lain dari persamaan homogen terkait $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$,
- C_1 dan C_2 merupakan dua konstanta sembarang.

Dengan demikian, persamaan linear di atas diselesaikan dalam dua langkah:

1. Selesaikan persamaan homogen (yaitu, carilah dua solusi bebas linear y_1 dan y_2),
2. Carilah solusi khusus persamaan lengkap.

Cara menyelesaikan persamaan homogen

Solusi umum y dari persamaan homogen

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

merupakan kombinasi linear dari dua solusi bebas linearnya y_1 dan y_2 , yaitu $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ dengan C_1 dan C_2 konstanta.

Persamaan dengan koefisien konstan

Misalkan persamaan diferensial homogen tersebut berbentuk

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

dengan a_2 , a_1 , dan a_0 konstanta. Persamaan karakteristik yang terkait adalah $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$.

- Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar real berbeda r_1 dan r_2 , maka dua solusi bebas linear persamaan homogen tersebut adalah

$$y_1(x) = \exp(r_1 x) \quad \text{dan} \quad y_2(x) = \exp(r_2 x).$$

- Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks $\alpha \pm i\beta$, dua solusi bebas linearnya adalah

$$y_1(x) = \exp(\alpha x) \cos(\beta x) \quad y_2(x) = \exp(\alpha x) \sin(\beta x).$$

- Jika persamaan karakteristik mempunyai satu akar real berulang r , dua solusi bebas linearnya adalah

$$y_1(x) = \exp(rx) \quad y_2(x) = x \exp(rx).$$

Contoh 1

Solusi masalah nilai awal $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, dan $y'(0) = 3$ adalah $y = e^x - e^{-2x}$.

Contoh 2

Solusi umum persamaan $y'' - 4y' + 4y = 0$ adalah $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Persamaan Cauchy–Euler

Jika PDB tersebut berbentuk

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad a_2, a_1, \text{ dan } a_0 \text{ konstan,}$$

kita mencari solusi berbentuk $y = x^r = \exp(r \ln(x))$ (yang didefinisikan untuk $x > 0$). Kemudian, r harus memenuhi

$$a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0.$$

- Jika persamaan ini mempunyai dua akar real berbeda r_1 dan r_2 , maka dua solusi bebas linearnya adalah

$$y_1 = x^{r_1} \quad y_2 = x^{r_2},$$

- Jika persamaan ini mempunyai dua akar kompleks $\alpha \pm i\beta$, dua solusi bebas linearnya adalah

$$y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) \quad y_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln(x)),$$

- Jika persamaan ini mempunyai satu akar real berulang r , dua solusi bebas linearnya adalah

$$y_1(x) = x^r \quad y_2(x) = x^r \ln(x).$$

Catatan: Jika Anda harus menyelesaikan persamaan untuk $x < 0$, terlebih dahulu lakukan perubahan peubah $t = -x$.

Contoh

$y = C_1 x^2$ memenuhi $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Persamaan lain

Jika Anda mengetahui suatu solusi khusus y_{ph} (misalnya ditemukan melalui inspeksi) dari persamaan homogen, Anda dapat menerapkan metode *variasi konstanta*: carilah solusi lain berbentuk $y = v(x)y_{ph}(x)$, substitusikan ke dalam persamaan homogen, lalu selesaikan persamaan orde pertama untuk v . Prosedur ini disebut *reduksi orde*.

Cara mencari solusi khusus persamaan lengkap

Sekarang kita meninjau $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$ dan mencari solusi khusus y_p untuk persamaan ini. Seperti sebelumnya, terdapat beberapa kasus khusus yang memiliki metode penyelesaian sistematis.

Persamaan dengan koefisien konstan: Metode koefisien tak tentu

Jika PDB tersebut memiliki koefisien konstan dan jika

$$h(x) = P_m(x) \exp(\alpha x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \exp(\alpha x) \sin(\beta x),$$

dengan P_m dan Q_m polinom berderajat m , gunakan bentuk solusi khusus di bawah ini, dengan K_m dan L_m merupakan polinom berderajat m dalam setiap kasus.

- $y_p = K_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x) + L_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)$ jika $\alpha \pm i\beta$ bukan akar persamaan karakteristik yang terkait,
- $y_p = x^h[K_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x) + L_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)]$ jika $\alpha \pm i\beta$ merupakan akar dengan multiplisitas h dari persamaan karakteristik yang terkait (h dapat bernilai 1 atau 2).

Catatan: Karena persamaan tersebut linear, prinsip superposisi dapat digunakan: jika $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, dan jika y_{p_1} serta y_{p_2} masing-masing merupakan solusi khusus dari $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h_1(x)$ dan $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h_2(x)$, maka $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ merupakan solusi khusus dari $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$.

Contoh 1

Salah satu solusi khusus persamaan $y'' + y' - 2y = 4\sin(2x)$ adalah $y_p = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{3}{5}\sin(2x)$.

Contoh 2

Salah satu solusi khusus persamaan $y'' - 4y' + 4y = 12xe^{2x}$ adalah $y_p = 2x^3e^{2x}$.

Persamaan Cauchy–Euler

Perubahan peubah $x = e^t$ akan mengubah persamaan Cauchy–Euler menjadi persamaan berkoefisien konstan, yang kemudian dapat diselesaikan seperti dijelaskan di atas.

Persamaan lain

Jika PDB tersebut tidak memiliki koefisien konstan, atau jika $h(x)$ tidak berbentuk seperti yang dibahas di atas, Anda dapat mencoba menggunakan metode variasi konstanta: carilah solusi khusus $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$, dengan y_1 dan y_2 dua solusi bebas linear dari persamaan homogen terkait, lalu selesaikan untuk v_1 dan v_2 setelah menetapkan

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Contoh

Solusi umum persamaan $y'' + 2y' + y = 2x^{-2}e^{-x}$, $x > 0$ adalah

$$C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2(1 + \ln(x))e^{-x}.$$

Catatan: Terdapat cara mudah untuk memeriksa bahwa dua fungsi y_1 dan y_2 bebas linear: Wronskian keduanya

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

harus tak nol.

Persamaan diferensial linear berorde lebih tinggi dari dua

Solusi umum untuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x), \\ a_n(x) \neq 0$$

adalah

$$y(x) = C_n y_n(x) + C_{n-1} y_{n-1}(x) + \dots + C_1 y_1(x) + y_p(x),$$

dengan

- $y_p(x)$ merupakan solusi partikular dari persamaan lengkap

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x),$$

- $y_i, i = 1, \dots, n$, adalah n solusi bebas linear dari persamaan homogen terkait

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

- $C_i, i = 1, \dots, n$, adalah n konstanta sembarang.

Dengan demikian, metode untuk menyelesaikan persamaan linear tersebut adalah sebagai berikut.

1. Selesaikan persamaan homogen (yaitu, cari n solusi bebas linear $y_1, \dots, y_n$),
2. Cari solusi partikular dari persamaan lengkap.

Cara menyelesaikan persamaan homogen

Solusi umum y dari persamaan homogen

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

merupakan kombinasi linear dari n solusi bebas linearnya $y_1, \dots, y_n$, yaitu $y = C_n y_n + \dots + C_1 y_1$ dengan C_i merupakan konstanta.

Persamaan dengan koefisien konstan

Misalkan persamaan homogen tersebut berbentuk

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

dengan a_i merupakan konstanta real. Persamaan karakteristik terkait adalah

$$a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

- Jika persamaan karakteristik hanya memiliki akar sederhana r_i , kita dapat memperoleh n solusi bebas linear dengan menggunakan $y_j(x) = \exp(r_j x)$ untuk akar real, dan solusi berikut untuk setiap pasangan akar kompleks konjugat $r_i = \alpha_i + i\beta_i$ dan $r_{i+1} = \alpha_i - i\beta_i$:

$$\begin{cases} y_i(x) &= \exp(\alpha_i x) \cos(\beta_i x) \\ y_{i+1}(x) &= \exp(\alpha_i x) \sin(\beta_i x) \end{cases}$$

- Jika persamaan karakteristik memiliki satu atau lebih akar dengan multiplisitas lebih besar dari satu, gunakan rumus di atas untuk akar bermultiplisitas satu, dan untuk setiap akar r_i bermultiplisitas h , gunakan

$$\begin{aligned} y_i &= \exp(r_i x), \\ y_{i+1} &= x \exp(r_i x), \\ y_{i+2} &= x^2 \exp(r_i x), \\ &\vdots \\ y_{i+h-1} &= x^{h-1} \exp(r_i x), \end{aligned}$$

& \vdots \\ y_{i+h-1} &= x^{h-1} \exp(r_i x), \end{aligned}

Sekali lagi, jika $r_i = \alpha_i \pm i\beta_i$, lazim digunakan $x^k \exp(\alpha_i x) \cos(\beta_i x)$

$\cos(\beta_i x)$ dan $x^k \exp(\alpha_i x) \sin(\beta_i x)$ sebagai ganti $x^k \exp(r_i x)$ (karena persamaan diferensial biasa tersebut memiliki koefisien real).

Contoh 1

Solusi umum untuk $y^{(4)} - 8y'' - 9y = 6x + 12\sin(x)$ adalah

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x} - \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x \cos(x).$$

Contoh 2

Solusi untuk $y^{(4)} - 2y^{(3)} = 0$ dengan $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, dan $y^{(3)}(0) = 4$ adalah

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} - x^2 - x - \frac{1}{2}.$$

Persamaan Cauchy–Euler

Untuk menyelesaikan

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad x > 0$$

dengan a_i merupakan konstanta real, lakukan perubahan variabel $x = \exp(t) = e^t$. Perubahan ini menghasilkan persamaan dengan koefisien konstan untuk y (sebagai fungsi t), yang dapat diselesaikan seperti diuraikan di atas. Selanjutnya, perubahan variabel $t = \ln(x)$ menghasilkan y sebagai fungsi x .

Catatan: Jika harus menyelesaikan untuk $x < 0$, lakukan perubahan variabel $x = -\exp(t)$, lalu lanjutkan seperti sebelumnya (namun sekarang $t = \ln(-x)$).

Contoh

Solusi umum untuk $x^3 y^{(3)} - 2x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0$, $x > 0$ adalah

$$C_1 x + C_2 x^2 \cos(2\ln(x)) + C_3 x^2 \sin(2\ln(x)).$$

Cara mencari solusi partikular dari persamaan lengkap

Sekarang kita mencari solusi partikular untuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Jika persamaan di atas memiliki koefisien konstan dan jika

$$h(x) = P_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x),$$

dengan P_m dan Q_m merupakan polinom berderajat m , maka coba solusi partikular berikut, dengan K_m dan L_m merupakan polinom berderajat m pada setiap kasus.

- $y_p = K_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x) + L_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)$ jika $\alpha \pm i\beta$ bukan akar dari persamaan karakteristik terkait.
- $y_p = x^h [K_m(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x) + L_m(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x)]$ jika $\alpha \pm i\beta$ merupakan akar bermultiplisitas h dari persamaan karakteristik terkait.

Jika persamaan diferensial ini tidak memiliki koefisien konstan, atau jika $h(x)$ tidak berbentuk seperti yang dibahas di atas, gunakan metode variasi konstanta: carilah solusi partikular $y_p = v_n(x)y_n(x) + \dots + v_1(x)y_1(x)$ dengan y_i merupakan n solusi bebas linear dari persamaan homogen terkait, lalu tentukan v_i setelah memberlakukan $n - 1$ syarat berikut:

$$\begin{cases} v'_n(x)y_n(x) + \dots + v'_1(x)y_1(x) = 0 \\ v'_n(x)y'_n(x) + \dots + v'_1(x)y'_1(x) = 0 \\ \vdots \\ v'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) + \dots + v'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) = 0. \end{cases}$$

$v_n(x)y_n'(x) + \dots + v_1(x)y_1'(x) = 0$ \\ $v_n(x)y_n^{(n-2)}(x) + \dots + v_1(x)y_1^{(n-2)}(x) = 0.$ \end{array} \right.

Catatan: Jika Wronskian

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

dari $y_1, \dots, y_n$ tidak nol, maka fungsi-fungsi tersebut bebas linear.

Sistem persamaan diferensial linear orde pertama

Kita meninjau sistem berbentuk

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases},$$

yang juga dapat ditulis sebagai $DX = \frac{d}{dt}X = \dot{X} = AX + B$,

dengan

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

dan

$$A = A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Jika B dan a_{ij} kontinu pada interval $a < t < b$, dan jika $t_0 \in (a, b)$, maka terdapat solusi tunggal untuk $\dot{X} = AX + B$ yang memenuhi $x_1(t_0) = \alpha_1, x_2(t_0) = \alpha_2, \dots, x_n(t_0) = \alpha_n$, dan berlaku pada interval (a, b) .

Solusi umum untuk $\dot{X} = AX + B$ adalah

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t)C + X_p(t), \\ &= C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \dots + C_nX_n(t) + X_p(t), \end{aligned}$$

dengan

- $X_p(t)$ merupakan solusi partikular untuk $\dot{X} = AX + B$,
- $X_i, i = 1, \dots, n$, merupakan n solusi bebas linear dari sistem homogen terkait $\dot{X} = AX$,
- $C_i, i = 1, \dots, n$, merupakan n konstanta.

Matriks $U(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]$ disebut matriks fundamental dari sistem homogen $\dot{X} = AX$. Dengan demikian, untuk menyelesaikan sistem diferensial tersebut, ikuti langkah berikut.

1. Selesaikan sistem homogen (yaitu, cari n solusi bebas linear $X_1, \dots, X_n$),
2. Cari solusi partikular dari sistem lengkap.

Cara menyelesaikan sistem homogen

Solusi umum $X(t)$ untuk sistem homogen $\dot{X} = AX$ merupakan kombinasi linear dari n solusi bebas linear $X_1, \dots, X_n$, yaitu $X(t) = C_1X_1(t) + \dots + C_nX_n(t)$ dengan C_i merupakan konstanta. Dengan kata lain, solusi tersebut berbentuk

$$X(t) = U(t)C$$

dengan $U(t)$ merupakan matriks fundamental dan C merupakan vektor konstan.

Dalam pembahasan berikut, kita hanya meninjau sistem dengan koefisien konstan; dengan kata lain, kita mengasumsikan matriks A tidak bergantung pada waktu. Prosedurnya adalah sebagai berikut.

1. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A .
2. Untuk setiap vektor eigen ξ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ , diketahui bahwa $X(t) = \exp(\lambda t)\xi$ merupakan solusi untuk $\dot{X} = AX$. Oleh karena itu,
 - Jika A memiliki n nilai eigen berbeda, kita telah memperoleh n solusi bebas linear untuk sistem homogen, yakni $X_i(t) = \exp(\lambda_i t)\xi_i$, $i = 1, \dots, n$.
 - Jika suatu nilai eigen λ memiliki multiplisitas h yang lebih besar dari satu, carilah sebanyak mungkin vektor eigen bebas linear, lalu tuliskan solusi yang bersesuaian $X_j(t) = \exp(\lambda t)\xi_j$. Selanjutnya, cari solusi yang belum diperoleh dalam bentuk $X_i = (t^{h-1}Y_{h-1} + t^{h-2}Y_{h-2} + \dots + tY_1 + Y_0)\exp(\lambda t)$, dengan Y_i merupakan vektor konstan. Substitusikan solusi ini ke dalam sistem homogen dan tentukan Y_i . Selalu pastikan bahwa Anda telah memperoleh n solusi bebas linear untuk sistem homogen, lalu tuliskan matriks fundamental yang bersesuaian.

Catatan: Jika salah satu nilai eigen bersifat kompleks, maka, karena (secara umum) A memiliki koefisien real, konjugat kompleks nilai eigen tersebut juga merupakan nilai eigen. Demikian pula, jika ξ merupakan vektor eigen (kompleks) yang bersesuaian dengan nilai eigen kompleks λ , maka konjugat kompleksnya ξ^* bersesuaian dengan nilai eigen λ^* . Dengan demikian, jika nilai eigen $\lambda = \alpha + i\beta$ bersifat kompleks, Anda dapat menggunakan fungsi real $X_i(t) = \text{Re}[\exp((\alpha + i\beta)t)\xi]$

$X_{i+1}(t) = \text{Im}[\exp((\alpha + i\beta)t)\xi]$ sebagai ganti solusi kompleks $X_i(t) = \exp(\lambda t)\xi$ dan $X_{i+1}(t) = X_i^*(t) = \exp(\lambda^* t)\xi^*$.

Contoh 1

Suatu matriks fundamental untuk $\dot{X} = AX$ dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ adalah $\begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{4t} \\ -2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}$.

Contoh 2

Suatu matriks fundamental untuk $\dot{X} = AX$ dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah $\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

Cara mencari solusi partikular dari sistem lengkap

Jika $B(t) = b\exp(\omega t)$, dengan b merupakan vektor konstan, dan jika ω bukan nilai eigen dari A , maka coba solusi partikular $X_p(t) = k\exp(\omega t)$, dengan k merupakan vektor konstan. Substitusikan bentuk X_p kembali ke dalam sistem diferensial $\dot{X} = AX + B$, lalu tentukan k .

Catatan: Prinsip superposisi mungkin berguna. Memang, karena A memiliki koefisien real, jika X_p merupakan solusi untuk $\dot{X} = AX + b\exp(\alpha t + i\beta t)$, (dengan b merupakan vektor konstan dan real), maka $\text{Re}(X_p)$ dan $\text{Im}(X_p)$ berturut-turut merupakan solusi untuk $\dot{X} = AX + b\exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ dan untuk $\dot{X} = AX + b\exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Dengan demikian, jika $B(t)$ berbentuk $b\exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ atau $b\exp(\alpha t)\sin(\beta t)$, dan jika $\alpha + i\beta$ bukan nilai eigen dari A , metode di atas dapat digunakan untuk mencari solusi partikular bagi $\dot{X} = AX + b\exp(\alpha t + i\beta t)$. Bagian real atau imajiner solusi tersebut (bergantung pada bentuk $B(t)$) kemudian merupakan solusi partikular bagi sistem diferensial semula.

Jika metode di atas tidak dapat diterapkan, gunakan metode variasi konstanta: carilah solusi berbentuk $X_p = U(t)V(t)$, dengan $U(t)$ merupakan matriks fundamental yang terkait dengan sistem homogen, dan $V(t)$ merupakan vektor yang harus ditentukan. Kemudian $V(t)$

memenuhi $\dot{V} = U^{-1}(t)B(t)$, yaitu $V(t) = \int U^{-1}(t)B(t)dt$.

Contoh 1

Solusi partikular untuk $\dot{X} = AX + H$ dengan $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $H = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^t$

2×2 adalah $X_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} e^t$.

Contoh 2

Solusi partikular untuk $\dot{X} = AX + H$ dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dan $H = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^t$ adalah $X_p = \begin{pmatrix} 5t - \frac{3}{2} \\ -5t + \frac{9}{2} \end{pmatrix} e^t$.

Catatan umum: Terkadang metode eliminasi (yang terdiri atas serangkaian operasi pada baris-baris sistem linear) lebih mudah diterapkan, atau sekadar lebih cepat. Metode ini juga dapat berguna jika matriks A bergantung pada waktu.

Analisis bidang fase

Sekarang kita menerapkan informasi yang disajikan di atas pada analisis kestabilan linear titik-titik tetap dalam sistem dinamik dua dimensi. Misalkan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\frac{dY}{dt} = F(Y), \quad (13.4)$$

dengan $Y \in \mathbb{R}^2$ memiliki titik tetap di $Y = Y_0$. Linearisasi sistem di atas di sekitar $Y = Y_0$ diperoleh dengan menetapkan $Y = Y_0 + X$, dengan $\|X\|$ bernilai kecil, menyubstitusikan ungkapan ini ke dalam Persamaan (13.4), dan hanya mempertahankan suku-suku yang linear terhadap X . Dengan demikian, kita menuliskan

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} = F(Y_0 + X) = F(Y_0) + DF(Y_0)X + O(X^2) \approx DF(Y_0)X,$$

dengan $DF(Y_0)$ adalah matriks Jacobi dari F di $Y = Y_0$, $O(X^2)$ menyatakan suku-suku nonlinear, dan kita menggunakan fakta bahwa $F(Y_0) = 0$ karena Y_0 adalah titik tetap dari (13.4). Matriks Jacobi dari F di $Y = Y_0$ didefinisikan sebagai

$$DF(Y_0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix},$$

dengan notasi berikut

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(Y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Dinamika sistem linear

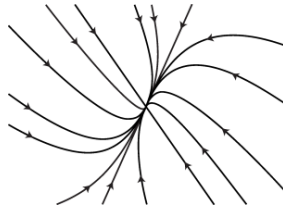
$$\frac{dX}{dt} = DF(Y_0)X \quad (13.5)$$

bergantung pada nilai eigen dan vektor eigen matriks $A \equiv DF(Y_0)$. Kita mengetahui bahwa jika A memiliki nilai-nilai eigen yang berbeda, solusi umum sistem linear tersebut berbentuk

$$X = C_1 \exp(\lambda_1 t) \xi_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) \xi_2, \quad (13.6)$$

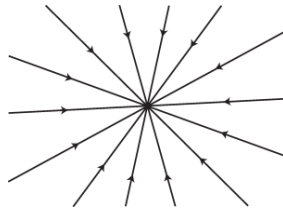
dengan ξ_1 dan ξ_2 adalah vektor eigen dari A yang masing-masing bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 , sedangkan C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarang.

Titik tetap $Y = Y_0$ dari (13.4) *stabil secara linear* jika semua solusi sistem terlinearisasi (13.5) berkonvergensi menuju titik asal ketika $t \rightarrow +\infty$. Hal ini hanya terjadi jika bagian real dari λ_1 dan λ_2 keduanya negatif, yang menyiratkan bahwa jejak A juga negatif. Jika kita mengasumsikan bahwa F bernilai real, seperti yang kita lakukan mulai sekarang, maka A memiliki koefisien real dan nilai-nilai eigennya keduanya real atau merupakan pasangan konjugat kompleks. Dalam hal ini, suatu titik tetap yang stabil linear memenuhi $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ dan $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.



Gambar 13.1 [Deskripsi Gambar](#)

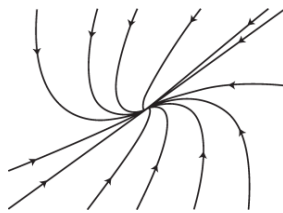
Jika kedua nilai eigen dari A negatif, real, dan berbeda, maka titik tetap tersebut merupakan *simpul stabil*. Potret fase sistem linear (13.5) menyerupai sketsa pada Gambar 13.1. Perhatikan bahwa di titik asal, lintasan-lintasan menyinggung arah eigen yang berkaitan dengan nilai eigen paling lambat.



Gambar 13.2 [Deskripsi Gambar](#)

Jika A sebanding dengan matriks identitas (yaitu, jika nilai-nilai eigen dari A sama tetapi ruang eigen yang bersesuaian berdimensi dua), maka titik tetap $\gamma = \gamma_0$ disebut *bintang*.

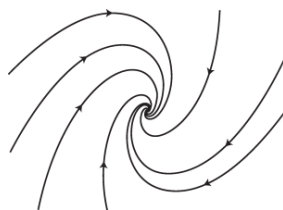
Jika nilai-nilai eigen dari A sama tetapi ruang eigen yang bersesuaian berdimensi satu, maka $\gamma = \gamma_0$ disebut *simpul degenerat*.



Gambar 13.3 [Deskripsi Gambar](#)

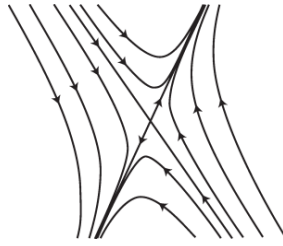
Gambar 13.2 dan 13.3 masing-masing menunjukkan potret fase khas sistem linear (13.5) ketika titik tetapnya berupa bintang stabil dan simpul stabil degenerat.

Jika nilai-nilai eigen dari A merupakan pasangan kompleks konjugat dengan bagian imajiner tak nol dan bagian real negatif, maka $\gamma = \gamma_0$ merupakan spiral stabil. Jika bagian realnya positif, spiral tersebut tak stabil. Potret fase stabil (13.5) ditunjukkan pada Gambar 13.4.



Gambar 13.4 [Deskripsi Gambar](#)

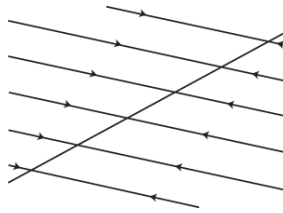
Jika salah satu nilai eigen dari A memiliki bagian real positif, maka titik tetap $\gamma = \gamma_0$ tak stabil secara linear. Hal ini terjadi jika $\det(A) < 0$, yang berarti titik tetap tersebut merupakan *titik pelana*, atau jika $\det(A) \geq 0$ dan $\text{Tr}(A) > 0$.



Gambar 13.5 [Deskripsi Gambar](#)

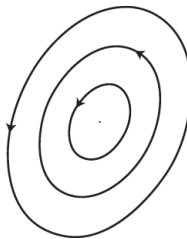
Potret fase dari (13.5) ketika titik asal merupakan titik pelana ditunjukkan pada Gambar 13.5. Potret fase dari (13.5) ketika titik asal merupakan simpul tak stabil, bintang tak stabil, simpul degenerat tak stabil, atau spiral tak stabil serupa dengan potret pada Gambar 13.1, 13.2, 13.3, dan 13.4, tetapi dengan arah panah yang dibalik.

Jika $\det(A) = 0$ dan $\text{Tr}(A) \neq 0$, maka salah satu nilai eigen dari A adalah nol, dan sistem (13.5) memiliki satu garis titik tetap.



Gambar 13.6 [Deskripsi Gambar](#)

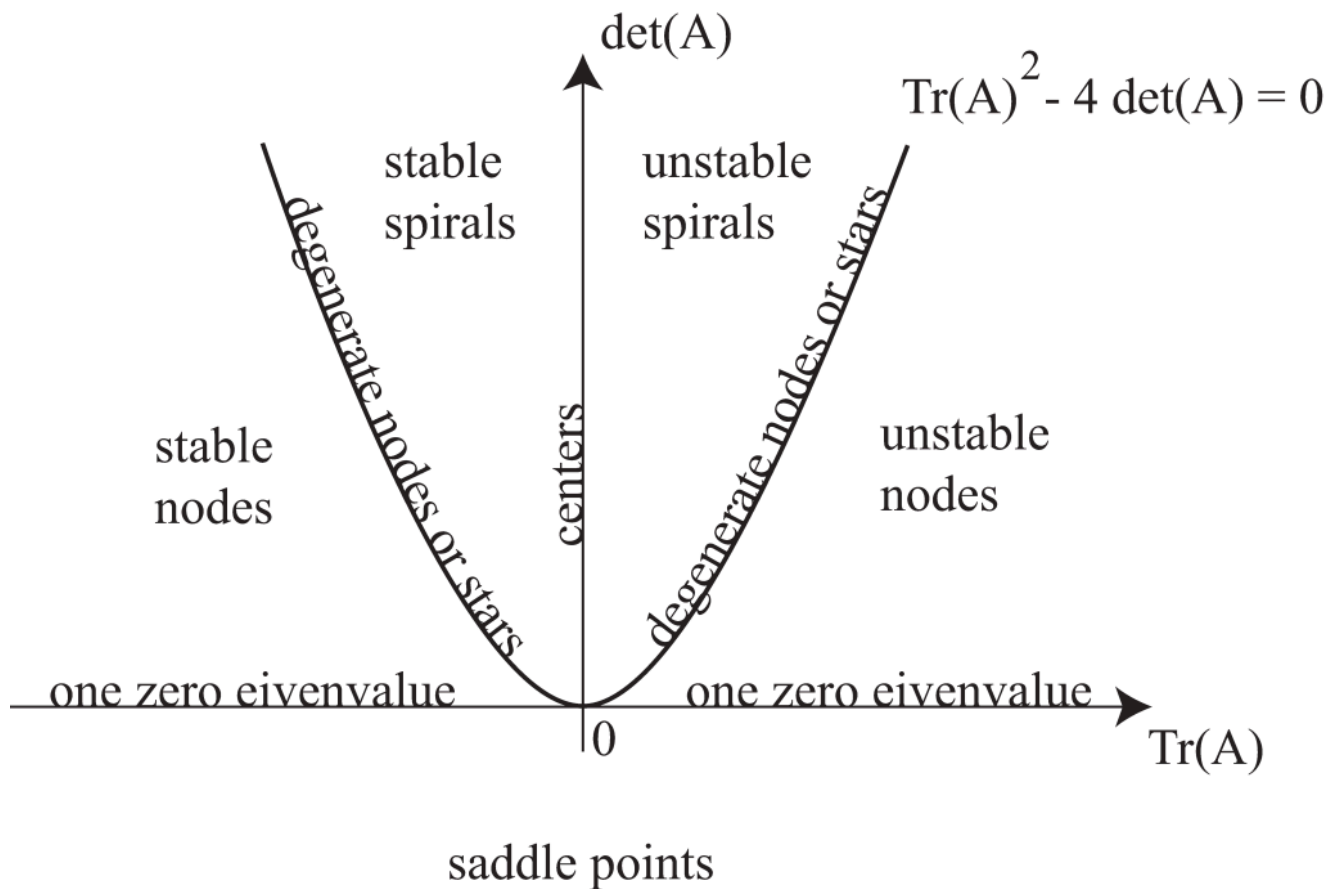
Ini merupakan situasi degenerat dan dalam kebanyakan kasus, sistem dinamik (13.4) memiliki satu titik tetap, meskipun linearisasinya memiliki keluarga kontinu titik tetap. Potret fase dari (13.5) untuk kasus ketika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 13.6.



Gambar 13.7 [Deskripsi Gambar](#)

Terakhir, jika nilai-nilai eigen A membentuk pasangan konjugat imajiner murni tak nol, maka $Y = Y_0$ stabil marginal. Sekadar mensyaratkan semua bagian real nol tidaklah cukup: sekalipun kasus $A = 0$ diabaikan, matriks A dapat nilpoten tak nol, dengan nilai-nilai eigen nol dan solusi linear yang tumbuh tak terbatas. Untuk pasangan imajiner murni tak nol, titik tetap $Y = Y_0$ disebut *pusat linear*. Dalam hal ini, $\det(A) > 0$ tetapi $\text{Tr}(A) = 0$. Gambar 13.7 menunjukkan potret fase sistem linear (13.5) ketika titik asal merupakan pusat (linear). Menentukan apakah titik tetap $Y = Y_0$ merupakan pusat nonlinear bagi sistem dinamik (13.4) memerlukan analisis lebih lanjut.

Hasil-hasil di atas dapat dirangkum dalam diagram pada Gambar 13.8, yang menunjukkan klasifikasi titik tetap $X = 0$ dari sistem linear (13.5) sebagai fungsi jejak dan determinan A .



Gambar 13.8. Klasifikasi titik tetap $X = 0$ dari sistem linear (13.5) sebagai fungsi jejak dan determinan matriks Jacobi yang bersesuaian, A .
[Deskripsi Gambar](#)

Teorema Hartman–Grobman menyatakan bahwa untuk sistem dinamik yang mulus, sifat suatu titik tetap tidak diubah oleh suku-suku nonlinear asalkan titik tetap tersebut hiperbolik, yaitu asalkan semua nilai eigen matriks Jacobi dari linearisasinya memiliki bagian real tak nol. Oleh karena itu, analisis kestabilan linear dapat digunakan untuk mengklasifikasikan titik-titik tetap hiperbolik dari sistem dinamik nonlinear. Analisis lebih lanjut diperlukan untuk menentukan kestabilan nonlinear titik-titik tetap nonhiperbolik. Secara khusus, pusat dapat tetap menjadi pusat atau berubah menjadi spiral stabil maupun tak stabil. Metode untuk menyelidiki pengaruh nonlinearitas pada titik tetap hiperbolik dan nonhiperbolik biasanya dibahas dalam buku pengantar sistem dinamik.

Deskripsi Gambar

Gambar 13.1: Potret fase sebuah simpul stabil. Sejumlah lintasan melengkung dan lurus mengalir dari daerah luar bidang dan berkonvergensi menuju titik tetap di pusat, yaitu titik asal. Kepala panah pada setiap lintasan mengarah ke dalam dan sebagian besar lintasan berbentuk lengkung. Hal ini terjadi karena sistem meluruh lebih cepat dalam satu arah daripada arah lainnya. Lintasan-lintasan dengan cepat "mendatar" lalu mendekati titik asal sepanjang arah "lambat", sehingga menghasilkan tampilan khas yang melengkung ke belakang. [\[Kembali ke Gambar 13.1\]](#)

Gambar 13.2: Potret fase sebuah bintang stabil. Semua lintasan berupa garis lurus yang memancar dari batas luar dan berkonvergensi langsung menuju satu titik tetap di pusat, yaitu titik asal. Semua kepala panah mengarah ke dalam menuju pusat, yang menunjukkan titik tetap stabil. Alirannya sepenuhnya simetris, yang menunjukkan bahwa nilai-nilai eigennya identik, sehingga sistem kembali ke kesetimbangan dengan laju yang sama dari segala arah. [[Kembali ke Gambar 13.2](#)]

Gambar 13.3: Potret fase sebuah simpul stabil degenerat. Banyak lintasan berkonvergensi menuju titik tetap di pusat, yaitu titik asal. Dalam kasus degenerat ini, semua lintasan menyinggung satu garis lurus (arah eigen tunggal) ketika mendekati pusat. Semua kepala panah mengarah ke dalam, yang menunjukkan bahwa titik asal merupakan penarik stabil. [[Kembali ke Gambar 13.3](#)]

Gambar 13.4: Potret fase yang menampilkan satu spiral stabil. Tujuh lintasan melengkung berasal dari tepi luar bingkai dan berpilin ke dalam searah jarum jam, lalu berkonvergensi menuju titik tetap di pusat, yaitu titik asal. Setiap lintasan memiliki kepala panah yang menunjukkan arah aliran menuju pusat. [[Kembali ke Gambar 13.4](#)]

Gambar 13.5: Potret fase yang menunjukkan sebuah titik pelana. Aliran terdiri atas lintasan-lintasan yang mendekati pusat sepanjang satu diagonal (manifold stabil) dan terdorong menjauh sepanjang diagonal lainnya (manifold tak stabil). Pola yang dihasilkan menyerupai serangkaian kurva berbentuk seperti hiperbola yang membelok mengitari kesetimbangan pusat. Panah menunjukkan arah gerak sepanjang setiap lintasan. [[Kembali ke Gambar 13.5](#)]

Gambar 13.6: Potret fase sederhana yang terdiri atas beberapa lintasan garis lurus sejajar. Satu garis diagonal titik-titik tetap stabil memotong garis-garis aliran sejajar tersebut. Kepala panah pada setiap garis sejajar mengarah menuju titik-titik tetap. Ini bersesuaian dengan sistem (13.5) ketika salah satu nilai eigen dari A bernilai nol dan nilai eigen lainnya negatif. [[Kembali ke Gambar 13.6](#)]

Gambar 13.7: Potret fase yang menunjukkan sebuah titik kesetimbangan pusat yang dikelilingi tiga orbit elips tertutup dan saling bersarang. Panah pada orbit menunjukkan arah aliran berlawanan dengan arah jarum jam, yang merepresentasikan sistem yang terus berosilasi tanpa bertumbuh ataupun meluruh. [[Kembali ke Gambar 13.7](#)]

Gambar 13.8: Diagram klasifikasi titik tetap dalam sistem linear dua dimensi. Sumbu vertikal merepresentasikan determinan, $\det(A)$, dan sumbu horizontal merepresentasikan jejak, $\text{Tr}(A)$. Parabola yang didefinisikan oleh $\text{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$ membagi setengah bidang atas menjadi daerah untuk simpul dan spiral. Di bawah sumbu horizontal (ketika $\det(A) < 0$), semua titik diklasifikasikan sebagai titik pelana. [[Kembali ke Gambar 13.8](#)]

Bahan Renungan

Soal 1

Termasuk jenis apakah (linear, dapat dipisahkan, eksak, dapat diselesaikan setelah perubahan variabel, Riccati, Bernoulli, Clairaut) persamaan orde pertama berikut? (Jangan mencoba menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut).

1. $(1 - y^3)\sinh(3x)y' + 7\cosh(y)\exp(x) = 0$.

$\exp(x)=0$.

2. $(4y + 2x + 4xy + x^2 + 3y^2)dx + (4x + 6y)dy = 0$.

3. $\left(x^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)dx + \frac{1}{x}\left(x^3 + 3yx^2 + \frac{y^4}{x}\right)dy = 0$.

4. $x^3 \sinh(x)y' + 5x^2y - \frac{3}{x}\cos(2x) = \sin(x)$.

5. $(2x^2y - 2y + 1)dx - xdy = 0$.

6. $(\cos(x)\sin(y) - x\sin(x)\sin(y) + y^2)dx + (x\cos(x)\cos(y) + 2xy)dy = 0$.

7. $yy' + \cosh(x)y^2 = \exp(x)$.

Soal 2

Selesaikan persamaan (5) dan (6) di atas.

Soal 3

1. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{3}\ln[(y-1)^2|y+2|] = \exp(-x) - x + C$ merupakan solusi implisit dari $\exp(x)(1+y)\frac{dy}{dx} + (1+\exp(x))(y^2+y-2) = 0$.
 2. Tentukan solusi persamaan diferensial di atas yang memenuhi $y(0) = 3$. Apakah masalah nilai awal yang bersesuaian memiliki solusi tunggal? Jelaskan.
-

Soal 4

1. Tentukan solusi umum dari $y'' - 3y' + 2y = 0$.
 2. Selesaikan masalah nilai awal yang terdiri atas persamaan diferensial biasa di atas dan kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 1$.
 3. Adakah solusi untuk masalah nilai batas $y(0) = 0$ dan $y(1) = 0$? Jika ada, apa solusinya?
-

Soal 5

Selesaikan persamaan diferensial

$$x^3y^{(3)} - 2x^2y'' + 8xy' - 8y = 7x + x^2\cos(2\ln(x)) \quad x > 0.$$

Soal 6

Selesaikan $xy'' + y' = 0$ pada suatu interval yang tidak melintasi $x=0$.

Soal 7

Selesaikan persamaan diferensial

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{x}\exp(-3x) \quad x \neq 0.$$

Soal 8

Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 3e^t \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - e^t \end{cases} \quad x(0) = 0; y(0) = 1.$$

Soal 9

Selesaikan sistem $\dot{X} = AX + B$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} -70 \\ 35 \end{pmatrix} \exp(3t).$$

Soal 10

Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 5\frac{d^2 y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} - 8y = \exp(3t)\cos(2t) + 7t\exp(t).$$

Soal 11

Selesaikan $[5x^4y^3 + 3y\sin(x) + 3xy\cos(x)]dx + [3x^5y^2 + 3x\sin(x)]dy = 0$, dengan kondisi awal $y(\pi) = 5$.

Jawaban

Soal 1

1. Dapat dipisahkan.
2. e^x merupakan faktor integrasi.
3. Homogen berderajat 2.
4. Linear.
5. Linear.
6. Eksak.
7. Bernoulli dengan $n = -1$.

Soal 2

- (5): $y = -\frac{1}{2x^2} + \frac{C}{x^2}e^{x^2}$.
- (6): $K = x\cos(x)\sin(y) + xy^2$.

Soal 3

$\frac{1}{3}\ln[(y-1)^2|y+2|] = e^{-x} - x + \frac{1}{3}\ln(20) - 1$. Karena ruas kanan bentuk eksplisit persamaan diferensial kontinu dan Lipschitz lokal terhadap y di sekitar $(0,3)$, dengan penyebut $1+y$ tidak nol, masalah nilai awal tersebut memiliki solusi lokal tunggal.

Soal 4

1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$.
2. $y = e^{2x} - e^x$.
3. Ya, $y = 0$.

Soal 5

$$y = C_1x + C_2x^2\cos(2\ln(x)) + C_3x^2\sin(2\ln(x)) + \frac{7x}{5}\ln(x) - \frac{x^2}{10}\ln(x)\cos(2\ln(x)) + \frac{x^2}{20}\ln(x)\sin(2\ln(x)).$$

Soal 6

$y = K_1 \ln(|x|) + K_2$. Keluarga ini berlaku secara terpisah pada interval dengan x positif atau x negatif.

Soal 7

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + x \ln(|x|) e^{-3x}.$$

Soal 8

$$\begin{cases} x = 2\cos(t)e^{2t} + 2\sin(t)e^{2t} - 2e^t \\ y = -2\sin(t)e^{2t} + 2\cos(t)e^{2t} - e^t \end{cases}. \text{ Kondisi awal memberikan } C_1 = C_2 = 2.$$

Soal 9

$$X = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 2e^{10t} \\ -2e^{3t} & e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -60t + \frac{10}{7} \\ 40t + \frac{5}{7} \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Soal 10

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \cos(2t) + C_3 e^{2t} \sin(2t) - \frac{3}{68} e^{3t} \cos(2t) + \frac{5}{68} e^{3t} \sin(2t) + \left(\frac{7}{10} t^2 + \frac{14}{25} t \right) e^t.$$

Soal 11

$$x^5 y^3 + 3xy \sin(x) = 125\pi^5.$$

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Uji tiap persamaan dengan kriteria yang paling langsung: pisahkan faktor yang hanya bergantung pada x dan y ; untuk bentuk $M dx + N dy = 0$, bandingkan M_y dan N_x ; untuk linearitas, susun sebagai $y' + p(x)y = q(x)$; dan untuk Bernoulli cari bentuk $y' + p(x)y = q(x)y^n$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Klasifikasinya adalah: (1) dapat dipisahkan pada setiap interval yang tidak memuat $x = 0$; (2) menjadi eksak setelah dikalikan faktor integrasi e^x ; (3) homogen berderajat dua sehingga dapat memakai $y = vx$; (4) linear pada setiap interval yang tidak memuat $x = 0$; (5) linear pada setiap interval yang tidak memuat $x = 0$; (6) eksak; dan (7) Bernoulli dengan pangkat $n = -1$.

Cek cepat

Untuk (2), $(M_y - N_x)/N = 1$, sehingga $\mu'/\mu = 1$ dan $\mu = e^x$. Untuk (6), kedua turunan silang sama dengan $\cos x \cos y - x \sin x \cos y + 2y$. Untuk (7), pembagian dengan y memberi $y' + \cosh(x)y = e^x y^{-1}$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Pisahkan persamaan pertama dengan mengumpulkan semua faktor y bersama dy dan semua faktor x bersama dx .

Rumus

$$\frac{1-y^3}{\cosh y} dy = -\frac{7e^x}{\sinh(3x)} dx, \quad x \neq 0$$

- **Penjelasan**

Untuk persamaan kedua, selisih turunan silang berbanding tepat dengan N , sehingga faktor integrasinya hanya bergantung pada x .

Rumus

$$M_y - N_x = 4x + 6y = N, \quad \frac{\mu'}{\mu} = 1 \Rightarrow \mu = e^x$$

- **Penjelasan**

Pada persamaan ketiga, kedua koefisien bentuk diferensial berskala dengan pangkat dua ketika (x, y) diganti oleh (tx, ty) .

Rumus

$$M(tx, ty) = t^2 M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^2 N(x, y)$$

- **Penjelasan**

Persamaan keempat dan kelima dapat disusun secara linear terhadap y .

Rumus

$$y' + \frac{5}{x \sinh x} y = \frac{\sin x + 3 \cos(2x)/x}{x^3 \sinh x}, \quad y' - \left(2x - \frac{2}{x}\right) y = \frac{1}{x}$$

- **Penjelasan**

Turunan silang persamaan keenam sama, sehingga bentuk diferensialnya eksak.

Rumus

$$M_y = N_x = \cos x \cos y - x \sin x \cos y + 2y$$

- **Penjelasan**

Persamaan ketujuh adalah Bernoulli; substitusi $u = y^2$ juga langsung mengubahnya menjadi persamaan linear.

Rumus

$$y' + \cosh(x)y = e^x y^{-1}, \quad u = y^2 \Rightarrow \frac{1}{2}u' + \cosh(x)u = e^x$$

Simpulan

Ketujuh klasifikasi jawaban tercetak benar. Persamaan (1) tidak memiliki solusi real melalui $x = 0$, sebab persamaan asal di titik itu menjadi $7\cosh y = 0$. Pembatasan interval pada (4) dan (5) diperlukan karena koefisien bentuk normal singular di $x = 0$; persamaan (3) juga mensyaratkan $x/y > 0$ agar logaritma real terdefinisi.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Untuk (5), gunakan bentuk linear yang diperoleh pada Soal 1 dan faktor integrasi $x^2 e^{-x^2}$; setelah memperoleh keluarga pada $x \neq 0$, periksa khusus nilai parameter yang mungkin meniadakan singularitas di nol. Untuk (6), integralkan koefisien dx terhadap x , lalu cocokkan turunannya terhadap y dengan koefisien dy .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada setiap interval $x > 0$ atau $x < 0$, solusi umum (5) adalah $y(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{C}{x^2} e^{x^2}$. Untuk $C = \frac{1}{2}$, singularitasnya dapat dihilangkan: tetapkan $y(0) = \frac{1}{2}$ sehingga diperoleh solusi analitik yang melintasi nol. Solusi implisit (6) adalah $x \cos x \sin y + xy^2 = C$.

Cek cepat

Substitusi solusi (5) ke $(2x^2y - 2y + 1) - xy' = 0$ memberi nol identik untuk $x \neq 0$. Jika $C = \frac{1}{2}$, deretnya adalah $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \dots$, yang memenuhi persamaan juga di nol. Untuk (6), potensial $F = x \cos x \sin y + xy^2$ memenuhi $F_x = M$ dan $F_y = N$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Susun persamaan (5) dalam bentuk linear.

Rumus

$$y' + \left(\frac{2}{x} - 2x\right)y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

- **Penjelasan**

Hitung faktor integrasi pada satu interval yang tidak melintasi nol.

Rumus

$$\mu(x) = \exp \int \left(\frac{2}{x} - 2x\right) dx = x^2 e^{-x^2}$$

- **Penjelasan**

Integralkan persamaan yang telah menjadi turunan hasil kali.

Rumus

$$(x^2 e^{-x^2} y)' = x e^{-x^2} \Rightarrow x^2 e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

- **Penjelasan**

Kasus $C = 1/2$ meniadakan suku singular dan mempunyai perluasan analitik melalui nol.

Rumus

$$y = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{12} + \dots, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

- **Penjelasan**

Untuk (6), integrasikan M terhadap x .

Rumus

$$F(x, y) = \int M dx = x \cos x \sin y + xy^2 + g(y)$$

- **Penjelasan**

Pencocokan $F_y = N$ memberi $g'(y) = 0$, sehingga kurva aras $F = C$ adalah solusi.

Rumus

$$F_y = x \cos x \cos y + 2xy = N \Rightarrow x \cos x \sin y + xy^2 = C$$

Simpulan

Kedua jawaban tercetak benar sebagai keluarga pada $x \neq 0$. Solusi (5) umumnya berlaku pada interval yang tidak memuat nol, tetapi pilihan $C = 1/2$ memiliki singularitas yang dapat dihilangkan dan meluas analitik melalui $x = 0$ dengan $y(0) = 1/2$. Solusi (6) bersifat implisit dan cabang eksplisitnya harus dipilih di daerah tempat teorema fungsi implisit berlaku.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Turunkan kedua ruas secara implisit dan gunakan $y^2 + y - 2 = (y - 1)(y + 2)$. Untuk konstanta, substitusikan $(x, y) = (0, 3)$. Keunikan dapat diperiksa setelah menulis $y' = f(x, y)$ di sekitar $(0, 3)$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi yang memenuhi data awal adalah $\frac{1}{3} \ln[(y - 1)^2 |y + 2|] = e^{-x} - x + \frac{1}{3} \ln 20 - 1$, dengan cabang $y(x) > 1$. Solusi ini unik: $f(x, y) = -(1 + e^{-x})(y^2 + y - 2)/(1 + y)$ mulus terhadap (x, y) di sekitar $(0, 3)$, sehingga teorema eksistensi-keunikan berlaku. Pada cabang $y > 1$, ruas kiri naik dari $-\infty$ ke $+\infty$, sehingga relasi implisit menentukan tepat satu y untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Cek cepat

Turunan ruas kiri terhadap y adalah $(1 + y)/(y^2 + y - 2)$, sedangkan turunan $e^{-x} - x + C$ adalah $-(1 + e^{-x})$. Pada $x = 0, y = 3$, kedua ruas bernilai $\frac{1}{3} \ln 20$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Turunkan fungsi logaritmik terhadap y .

Rumus

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{1}{3} \ln((y-1)^2 |y+2|) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{y-1} + \frac{1}{y+2} \right) = \frac{1+y}{y^2+y-2}$$

- **Penjelasan**

Diferensiasi implisit menghasilkan kembali persamaan sumber.

Rumus

$$\frac{1+y}{y^2+y-2} y' = -(1+e^{-x}) \Leftrightarrow e^x(1+y)y' + (1+e^x)(y^2+y-2) = 0$$

- **Penjelasan**

Gunakan data awal untuk menentukan konstanta.

Rumus

$$\frac{1}{3} \ln(2^2 \cdot 5) = 1 + C \Rightarrow C = \frac{1}{3} \ln 20 - 1$$

- **Penjelasan**

Fungsi ruas kanan bentuk eksplisit tidak singular di sekitar data awal karena $1+y = 4 \neq 0$.

Rumus

$$y' = f(x, y) = -(1+e^{-x}) \frac{(y-1)(y+2)}{1+y}$$

- **Penjelasan**

Cabang data awal berada pada $y > 1$; monotonisitas fungsi logaritmik di cabang ini memberi keunikan global relasi implisit.

Rumus

$$g'(y) = \frac{1+y}{(y-1)(y+2)} > 0 \quad (y > 1)$$

Simpulan

Rumus tercetak untuk kurva solusi benar, tetapi kelompok jawaban sumber tidak menjawab bagian penjelasan keunikan. Solusi kesetimbangan $y = 1$ dan $y = -2$ juga memenuhi ODE, namun tidak termasuk dalam keluarga logaritmik dan tidak memenuhi data awal ini.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Faktorkan persamaan karakteristik. Untuk setiap pasangan syarat, substitusikan langsung ke solusi umum dan selesaikan sistem linear bagi kedua konstanta.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi umum pada $\mathbb{R}$ adalah $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$. Masalah nilai awal mempunyai solusi unik $y = e^{2x} - e^x$. Masalah nilai batas mempunyai satu-satunya solusi $y \equiv 0$.

Cek cepat

Untuk IVP, $y(0) = 0$ memberi $C_2 = -C_1$ dan $y'(0) = 1$ memberi $C_1 = 1$. Untuk BVP, syarat kedua memberi $C_1(e^2 - e) = 0$, sehingga kedua konstanta nol.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Faktorkan polinom karakteristik.

Rumus

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$$

- **Penjelasan**

Dua akar berbeda menghasilkan dua solusi eksponensial bebas linear.

Rumus

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

- **Penjelasan**

Terapkan syarat awal.

Rumus

$$C_1 + C_2 = 0, \quad 2C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow (C_1, C_2) = (1, -1)$$

- **Penjelasan**

Untuk syarat batas, gunakan kembali $C_2 = -C_1$.

Rumus

$$0 = y(1) = C_1(e^2 - e) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Simpulan

Ketiga bagian jawaban tercetak benar; koefisien ODE kontinu di seluruh garis real, sehingga tidak ada pembatasan domain tambahan.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Gunakan $t = \ln x$ dan $Y(t) = y(e^t)$. Operator Euler berubah menjadi polinom koefisien konstan $P(D) = D^3 - 5D^2 + 12D - 8$; kedua suku pemaksa beresonansi dengan akar 1 dan $2 + 2i$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $x > 0$, solusi umum adalah $y = C_1x + C_2x^2\cos(2\ln x) + C_3x^2\sin(2\ln x) + \frac{7}{5}x\ln x - \frac{1}{10}x^2\ln x\cos(2\ln x) + \frac{1}{20}x^2\ln x\sin(2\ln x)$.

Cek cepat

Penerapan operator $L[y] = x^3y''' - 2x^2y'' + 8xy' - 8y$ pada tiga suku homogen memberi nol, sedangkan pada tiga suku partikular memberi tepat $7x + x^2\cos(2\ln x)$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Lakukan perubahan variabel Euler.

Rumus

$$t = \ln x, \quad Y(t) = y(e^t), \quad L = P(D) = D^3 - 5D^2 + 12D - 8$$

- **Penjelasan**

Faktorkan polinom karakteristik.

Rumus

$$P(r) = r^3 - 5r^2 + 12r - 8 = (r - 1)((r - 2)^2 + 4)$$

- **Penjelasan**

Kembalikan solusi homogen dari variabel t ke x .

Rumus

$$y_h = C_1x + C_2x^2\cos(2\ln x) + C_3x^2\sin(2\ln x)$$

- **Penjelasan**

Pemaksa $7e^t$ beresonansi dengan akar sederhana $r = 1$, sehingga koefisiennya ditentukan oleh $P'(1) = 5$.

Rumus

$$Y_{p,1} = \frac{7}{P'(1)}te^t = \frac{7}{5}te^t$$

- **Penjelasan**

Untuk pemaksa kompleks $e^{(2+2i)t}$, gunakan $1/P'(2+2i) = -1/10 - i/20$, lalu ambil bagian real.

Rumus

$$Y_{p,2} = te^{2t} \left[-\frac{1}{10}\cos(2t) + \frac{1}{20}\sin(2t) \right]$$

- **Penjelasan**

Substitusi $t = \ln x$ dan $e^t = x$ memberi solusi tercetak.

Rumus

$$y = y_h + \frac{7}{5}x \ln x - \frac{1}{10}x^2 \ln x \cos(2 \ln x) + \frac{1}{20}x^2 \ln x \sin(2 \ln x)$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar dan terverifikasi secara simbolik. Domain $x > 0$ merupakan bagian dari soal dan diperlukan oleh perubahan variabel $t = \ln x$.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Kenali ruas kiri sebagai turunan hasil kali $(xy)'$, lalu integralkan dua kali. Perhatikan titik singular $x = 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada setiap interval $(0, \infty)$ atau $(-\infty, 0)$, solusi umum adalah $y = K_1 \ln|x| + K_2$. Solusi konstan, yaitu kasus $K_1 = 0$, dapat diperluas melintasi $x = 0$, tetapi keluarga umum logaritmik tidak.

Cek cepat

Dari $y' = K_1/x$ dan $y'' = -K_1/x^2$, diperoleh $xy'' + y' = -K_1/x + K_1/x = 0$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Gabungkan kedua suku sebagai satu turunan.

Rumus

$$xy'' + y' = (xy')' = 0$$

- **Penjelasan**

Integrasi pertama memberi konstanta pada setiap komponen domain.

Rumus

$$xy' = K_1 \Rightarrow y' = \frac{K_1}{x}, \quad x \neq 0$$

- **Penjelasan**

Integrasi kedua menghasilkan logaritma nilai mutlak.

Rumus

$$y = K_1 \ln|x| + K_2$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar. Solusi umum harus dinyatakan pada interval yang tidak melintasi titik singular $x = 0$.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Operator ruas kiri adalah $(D + 3)^2$. Substitusi $y = e^{-3x}v(x)$ menghilangkan bagian homogen dan menyisakan persamaan sederhana bagi v'' .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada setiap interval $x > 0$ atau $x < 0$, solusi umum adalah $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x + x\ln|x|)$.

Cek cepat

Identitas $(D + 3)^2(e^{-3x}v) = e^{-3x}v''$ mengubah ODE menjadi $v'' = 1/x$. Substitusi kembali memberi residual nol.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Faktorkan operator homogen dan lakukan substitusi.

Rumus

$$D^2 + 6D + 9 = (D + 3)^2, \quad y = e^{-3x}v$$

- **Penjelasan**

Sederhanakan persamaan setelah faktor eksponensial dicoret.

Rumus

$$e^{-3x}v'' = \frac{e^{-3x}}{x} \Rightarrow v'' = \frac{1}{x}$$

- **Penjelasan**

Integrasikan dua kali pada satu interval yang tidak memuat nol.

Rumus

$$v' = \ln|x| + A, \quad v = x\ln|x| - x + Ax + B$$

- **Penjelasan**

Serap suku $-x$ ke konstanta koefisien x .

Rumus

$$v = C_1 + C_2x + x\ln|x|$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar; $x = 0$ memisahkan dua komponen domain dan tidak boleh dilintasi oleh solusi umum.

Dukungan untuk Soal 8

Petunjuk

Gunakan keluarga umum tercetak atau diagonal kompleks matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Setelah mendapatkan solusi umum, terapkan kedua syarat awal; keduanya harus menentukan dua konstanta.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Syarat awal memberi $C_1 = 2$ dan $C_2 = 2$. Jadi solusi unik pada seluruh $\mathbb{R}$ adalah $x(t) = 2e^{2t}(\cos t + \sin t) - 2e^t$ dan $y(t) = 2e^{2t}(\cos t - \sin t) - e^t$.

Cek cepat

Pada $t = 0$, diperoleh $x(0) = 2 - 2 = 0$ dan $y(0) = 2 - 1 = 1$. Diferensiasi langsung memberi residual nol pada kedua persamaan sistem.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Matriks homogen mempunyai nilai eigen $2 \pm i$, sehingga basis real solusi homogen berbentuk sinus–kosinus dengan faktor e^{2t} .

Rumus

$$x_h = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y_h = e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

- **Penjelasan**

Coba solusi partikular berbentuk vektor konstan kali e^t .

Rumus

$$X_p = ke^t, \quad (I - A)k = (3, -1)^T \Rightarrow k = (-2, -1)^T$$

- **Penjelasan**

Gabungkan bagian homogen dan partikular.

Rumus

$$x = x_h - 2e^t, \quad y = y_h - e^t$$

- **Penjelasan**

Gunakan data awal untuk menentukan kedua konstanta yang tidak ditentukan dalam jawaban sumber.

Rumus

$$x(0) = C_1 - 2 = 0, \quad y(0) = C_2 - 1 = 1 \Rightarrow C_1 = C_2 = 2$$

Simpulan

Keluarga umum yang dicetak sumber benar, tetapi jawaban sumber tidak menyelesaikan IVP karena membiarkan kedua konstanta bebas. Penerapan syarat awal menghasilkan solusi unik di atas.

Dukungan untuk Soal 9

Petunjuk

Cari nilai eigen 3 dan 10. Karena pemaksa mengandung e^{3t} , terjadi resonansi dengan mode pertama; gunakan ansatz $X_p = e^{3t}(tv + w)$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi umum pada $\mathbb{R}$ adalah $X(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 2e^{10t} \\ -2e^{3t} & e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} -60t + 10/7 \\ 40t + 5/7 \end{pmatrix}$.

Cek cepat

Kolom fundamental memenuhi $AX_i = X_i'$ dan determinannya $7e^{13t} \neq 0$. Untuk bagian partikular, substitusi menghasilkan $X_p' - AX_p = (-70, 35)^T e^{3t}$ tepat.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Hitung nilai eigen dan pilih vektor eigen.

Rumus

$$\lambda_1 = 3, \xi_1 = (3, -2)^T; \quad \lambda_2 = 10, \xi_2 = (2, 1)^T$$

- **Penjelasan**

Susun matriks fundamental.

Rumus

$$U(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 2e^{10t} \\ -2e^{3t} & e^{10t} \end{pmatrix}$$

- **Penjelasan**

Gunakan ansatz resonan dan samakan koefisien t serta konstanta.

Rumus

$$X_p = e^{3t}(tv + w), \quad Av = 3v, \quad (A - 3I)w = v - b$$

- **Penjelasan**

Salah satu pilihan yang memenuhi sistem tersebut adalah

Rumus

$$v = (-60, 40)^T, \quad w = (10/7, 5/7)^T$$

• Penjelasan

Gabungkan solusi homogen dan partikular.

Rumus

$$X = U(t)C + e^{3t} \begin{pmatrix} -60t + 10/7 \\ 40t + 5/7 \end{pmatrix}$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar dan terverifikasi dengan substitusi simbolik; semua koefisien kontinu, sehingga domain solusi adalah seluruh garis real.

Dukungan untuk Soal 10

Petunjuk

Faktorkan polinom karakteristik menjadi $(r - 1)((r - 2)^2 + 4)$. Pemaksa sinusoidal tidak beresonansi, sedangkan $7te^t$ beresonansi dengan akar $r = 1$, sehingga ansatz polinomialnya harus dikalikan satu faktor t .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi umum pada $\mathbb{R}$ adalah $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \cos(2t) + C_3 e^{2t} \sin(2t) - \frac{3}{68} e^{3t} \cos(2t) + \frac{5}{68} e^{3t} \sin(2t) + (\frac{7}{10} t^2 + \frac{14}{25} t) e^t$.

Cek cepat

Untuk $P(r) = r^3 - 5r^2 + 12r - 8$, $1/P(3 + 2i) = (-3 - 5i)/68$, yang memberi koefisien $-3/68$ dan $5/68$. Substitusi seluruh solusi ke ODE menghasilkan residual nol.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

• Penjelasan

Faktorkan polinom karakteristik dan tuliskan solusi homogen.

Rumus

$$P(r) = (r - 1)((r - 2)^2 + 4), \quad y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \cos 2t + C_3 e^{2t} \sin 2t$$

• Penjelasan

Gunakan eksponensial kompleks untuk pemaksa $e^{3t} \cos 2t$.

Rumus

$$\frac{1}{P(3 + 2i)} = \frac{-3 - 5i}{68}$$

- **Penjelasan**

Ambil bagian real untuk memperoleh solusi partikular sinusoidal.

Rumus

$$y_{p,1} = -\frac{3}{68}e^{3t}\cos 2t + \frac{5}{68}e^{3t}\sin 2t$$

- **Penjelasan**

Untuk pemaksa resonan $7te^t$, tulis $y = e^tv$; operator pada v menjadi $D^3 - 2D^2 + 5D$.

Rumus

$$(D^3 - 2D^2 + 5D)v = 7t$$

- **Penjelasan**

Ansatz $v = at^2 + bt$ memberi kedua koefisien.

Rumus

$$10at + (5b - 4a) = 7t \Rightarrow a = \frac{7}{10}, \quad b = \frac{14}{25}$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar dan terverifikasi secara simbolik; koefisien serta pemaksa terdefinisi untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Dukungan untuk Soal 11

Petunjuk

Periksa keeksakan dengan membandingkan M_y dan N_x . Integrasikan M terhadap x , lalu gunakan syarat awal untuk menentukan konstanta kurva aras.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Solusi implisit yang melalui $(\pi, 5)$ adalah $x^5y^3 + 3xysinx = 125\pi^5$. Relasi ini menentukan cabang solusi lokal yang unik di sekitar $x = \pi$, karena $F_y(\pi, 5) = 75\pi^5 \neq 0$. Cabang maksimal harus tetap berada di daerah tempat $F_y = 3x(x^4y^2 + sinx) \neq 0$; kurva tidak dapat memuat $x = 0$ karena konstanta arasnya positif.

Cek cepat

Dengan $F = x^5y^3 + 3xysinx$, diperoleh $F_x = 5x^4y^3 + 3ysinx + 3xycosx = M$ dan $F_y = 3x^5y^2 + 3xsinx = N$. Selain itu, $F(\pi, 5) = 125\pi^5$.

Pembahasan atau rubrik

Langkah penyelesaian

- **Penjelasan**

Hitung kedua turunan silang.

Rumus

$$M_y = 15x^4y^2 + 3\sin x + 3x\cos x = N_x$$

- **Penjelasan**

Integrasikan M terhadap x .

Rumus

$$F(x, y) = \int M dx = x^5y^3 + 3xysinx + g(y)$$

- **Penjelasan**

Bandingkan dengan N untuk menentukan fungsi tambahan.

Rumus

$$F_y = 3x^5y^2 + 3x\sin x + g'(y) = N \Rightarrow g'(y) = 0$$

- **Penjelasan**

Gunakan syarat awal untuk menentukan konstanta.

Rumus

$$C = F(\pi, 5) = \pi^5(5^3) + 15\pi\sin\pi = 125\pi^5$$

- **Penjelasan**

Periksa keberadaan cabang eksplisit lokal melalui teorema fungsi implisit.

Rumus

$$F_y(\pi, 5) = 3\pi^5 \cdot 25 + 3\pi\sin\pi = 75\pi^5 \neq 0$$

Simpulan

Jawaban tercetak benar. Bentuk implisit adalah bentuk alami solusi; domain cabang eksplisit dibatasi oleh titik tempat koefisien dy , yaitu F_y , menjadi nol.

Proyek Pemodelan

0005-LEGA-V101-CH14

Bagian ini mencantumkan proyek-proyek pemodelan yang masing-masing didasarkan pada artikel penelitian yang baru-baru ini diterbitkan dan dapat dieksplorasi bersama materi yang disajikan dalam buku ini. Di University of Arizona, mahasiswa yang terdaftar dalam mata kuliah Pemodelan Matematika membentuk tim beranggotakan 4 atau 5 orang dan bekerja bersama-sama mengerjakan salah satu proyek tersebut sepanjang semester. Setiap kelompok memiliki proyeknya sendiri. Mereka berupaya memahami pendekatan pemodelan yang dijelaskan dalam artikel, mereproduksi hasilnya, serta mempresentasikan gagasan dan kesimpulan utama kepada seluruh kelas. Mahasiswa dianjurkan merumuskan pertanyaan pemodelan yang memperluas pekerjaan yang dibahas dalam setiap artikel dan, jika waktu memungkinkan, menjawab beberapa di antaranya.

1. Kecerdasan Kolektif

Pahami dan ukur secara kuantitatif apakah berbagai strategi kerja sama antaranggota kelompok meningkatkan kinerja pemecahan masalah.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Agent-based models of collective intelligence](#) oleh S.M. Reia, A.C. Amado, J.F. Fontanari, *Physics of Life Reviews* **31**, 320–331 (2019).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Model berbasis agen (Bab 2).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Penalaran logis dan berpikir kritis. Pemrograman.

Capaian Proyek

- Susun sintesis atas berbagai model yang diperkenalkan dalam artikel dan bandingkan pendekatan pemecahan masalah yang direpresentasikan oleh masing-masing model.
- Tulis kode untuk mereproduksi hasil para penulis mengenai kinerja setiap pendekatan sebagai fungsi ukuran kelompok.
- Tafsirkan hasil eksplorasi Anda terhadap setiap model, termasuk peran parameter-parameter yang relevan.
- Evaluasi hipotesis yang diajukan untuk mendukung strategi pemodelan secara keseluruhan dan nilai keabsahan kesimpulan yang dicapai para penulis.
- Tafsirkan setiap eksplorasi tambahan atas model dan pertahankan kesimpulan Anda.

2. Model Penyebaran Awal COVID-19

Selidiki uraian mekanistik sederhana tentang penularan zoonotik SARS-CoV-2 di pasar Wuhan, penyebaran selanjutnya kepada manusia, dan langkah-langkah mitigasi terkait.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [A conceptual model for the coronavirus disease 2019 \(COVID-19\) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action](#) oleh Q. Lin *et al.*, *Int. J. Infectious Diseases* **93**, 211–216 (2020).

- **Topik Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Model kompartemen dan epidemiologi (Bab 7).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem persamaan diferensial biasa (PDB).

Capaian Proyek

- Ringkas hipotesis model.
- Bangun model kompartemen dan analisis perilakunya.
- Susun sintesis atas pendekatan pemodelan dan telusuri berbagai skenario.
- Evaluasi kontribusi model berdasarkan pengetahuan mengenai penyakit tersebut pada awal 2020.
- Nilai cara merevisi hipotesis model berdasarkan pengetahuan terkini mengenai SARS-CoV-2 dan varian-varianannya.

3. Intervensi Nonfarmasi untuk Mitigasi Penyebaran Penyakit

Kembangkan model kompartemen untuk menilai potensi intervensi nonfarmasi dalam memitigasi penyebaran COVID-19 di Italia sebelum vaksin tersedia.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy](#) oleh G. Giordano, F. Blanchini, R. Bruno, P. Colaneri, A. Di Filippo, A. Di Matteo, dan M. Colaneri, *Nature Medicine* **26**, 855–860 (2020).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Titik tetap dan kestabilannya (Bab 3). Epidemi (Bab 7).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem PDB (memerlukan pengalaman pemrograman). Pembuktian.

Capaian Proyek

- Ringkas hipotesis model, bangun model kompartemen, dan analisis perilakunya.
- Tulis kode untuk menyimulasikan PDB yang saling terkopel, mengeksplorasi berbagai skenario mitigasi, dan mereproduksi hasil artikel.
- Susun sintesis atas pendekatan pemodelan dan evaluasi kontribusi model berdasarkan pengetahuan mengenai COVID-19 pada awal 2020.

4. Kampanye Vaksinasi, Intervensi Nonfarmasi, dan Beban COVID-19

Kembangkan model kompartemen untuk menilai dampak intervensi nonfarmasi dan kampanye vaksinasi COVID-19 terhadap sistem layanan kesehatan di Italia.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Modeling vaccination rollouts, SARS-CoV-2 variants and the requirement for non-pharmaceutical interventions in Italy](#) oleh G. Giordano, M. Colaneri, A. Di Filippo, F. Blanchini, P. Bolzern, G. De Nicolao, P. Sacchi, P. Colaneri, dan R. Bruno, *Nature Medicine* **27**, 993–998 (2021).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Epidemi (Bab 7).

- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem PDB (memerlukan pengalaman pemrograman).

Capaian Proyek

- Ringkas hipotesis model, bangun model kompartemen, lalu bahas makna dan pentingnya setiap suku, khususnya suku-suku yang berkaitan dengan vaksinasi.
- Tulis kode untuk menyimulasikan PDB yang saling terkopel, mengeksplorasi berbagai skenario pelaksanaan vaksinasi, dan mereproduksi hasil artikel.
- Ukur secara kuantitatif pengaruh kampanye vaksinasi dan strategi nonfarmasi terhadap sistem layanan kesehatan serta jumlah kematian akibat penyakit.
- Susun sintesis atas pendekatan pemodelan dan evaluasi kontribusi model tersebut.

5. Dinamika Glukosa–Insulin

Kembangkan model PDB untuk diabetes dan kaji dinamikanya, termasuk analisis strategi pengelolaan penyakit.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [*Dynamics of a Glucose–Insulin Model*](#) oleh M. Ma & J. Li, *Journal of Biological Dynamics* **16**, 733-745 (2022).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Analisis bidang fase (Bab 3). Reaksi kimia (Bab 8).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem PDB. Pembuktian. Kinetika Michaelis–Menten.

Capaian Proyek

- Ringkas hipotesis model, bandingkan pendekatan saat ini dengan pendekatan terdahulu untuk memodelkan dinamika glukosa–insulin yang dibahas dalam artikel, dan jelaskan bagaimana model saat ini dibangun.
- Lakukan analisis bidang fase yang lengkap terhadap model dengan mencari semua titik tetapnya dan menganalisis kestabilannya, serta dengan melakukan simulasi numerik (tidak perlu menulis kode jika Anda menggunakan aplikasi Phase Plane).
- Nilai berbagai strategi pengendalian penyakit berdasarkan tafsiran Anda tentang pengaruh parameter terhadap dinamika sistem.
- Evaluasi kontribusi model dan tafsirkan setiap keterbatasannya.

6. Perilaku Kolektif dalam Kerumunan

Kembangkan model berbasis agen untuk menjelaskan bagaimana petunjuk visual dapat memunculkan perilaku kolektif dalam kerumunan.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [*The visual coupling between neighbours explains local interactions underlying human ‘flocking’*](#) oleh G.C. Dachner, T.D. Wirth, E. Richmond, dan W.H. Warren, *Proc. R. Soc. B* **289**, 20212089 (2022).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Model berbasis agen (Bab 2).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Pemrograman. Analisis terapan tingkat lanjut.

Capaian Proyek

- Uraikan secara terpadu motivasi para penulis dan nilai pilihan pemodelan mereka (kritiklah atau kemukakan argumen yang menentang maupun mendukungnya), berdasarkan pemahaman Anda tentang masalah dan data yang dibahas dalam artikel.
- Tulis kode untuk menyimulasikan dinamika antaragen dan mereproduksi "eksperimen simulasi" yang dijelaskan dalam artikel.
- Telusuri pengaruh berbagai pilihan parameter dan rangkum hasil Anda, termasuk setiap keterbatasan model.
- Tentukan bagaimana Anda dapat memperbaiki model, lalu telusuri beberapa perbaikan tersebut.
- Nilai pendekatan pemodelan beserta kontribusinya.

7. Kompromi antara Kompleksitas Model dan Identifikasi Parameter

Kembangkan dan bandingkan dua model kompartemen yang berbeda untuk penularan dengue, suatu penyakit yang ditularkan melalui vektor.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Comparing vector-host and SIR models for dengue transmission](#) oleh A. Pandey, A. Mubayi, J. Medlock, *Mathematical Biosciences* **246**, 252–259 (2013).
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Epidemi (Bab 7).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem persamaan diferensial biasa (memerlukan sedikit pengalaman pemrograman). Teori peluang. Metode Monte Carlo rantai Markov (MCMC).

Capaian Proyek

- Jelaskan cara penularan penyakit yang ditularkan melalui vektor, rangkum hipotesis pemodelannya, dan bangun model-model kompartemen yang diperkenalkan dalam artikel.
- Bahas makna berbagai suku dalam setiap model dan jelaskan alasan bentuknya berdasarkan hipotesis yang dibuat.
- Kembangkan simulasi numerik untuk setiap model dan simulasikan lintasan bagi berbagai kondisi awal dan pilihan parameter, termasuk nilai-nilai yang diidentifikasi dalam artikel.
- Jelaskan metode MCMC untuk estimasi parameter dan renungkan kompromi antara kompleksitas model dan kesulitan yang berkaitan dengan identifikasi parameter.
- Akhiri dengan refleksi Anda sendiri mengenai hal-hal yang perlu diperhitungkan para pemodel pada tahap pemilihan model dalam proses pemodelan.

8. Model Pemangsa–Mangsa

Kembangkan model-model pemangsa–mangsa, analisis perilakunya, dan pertimbangkan relevansinya dalam ekologi.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Asymptotic stability of a modified Lotka-Volterra model with small immigrations](#) oleh T. Tahara, M.K. Areja Gavina, T. Kawano, J.M. Tubay, J.F. Rabajante, H. Ito, S. Morita, G. Ichinose, T. Okabe, T. Togashi, K. Tainaka, A. Shimizu, T. Nagatani & J. Yoshimura, *Scientific Reports* **8**, 7029 (2018).

- **Artikel Konteks:** [*Long-term cyclic persistence in an experimental predator–prey system*](#) oleh B. Blasius, L. Rudolf, G. Weithoff, U. Gaedke & G.F. Fussmann, *Nature* **577**, 226–230 (2020). Artikel konteks tersebut memaparkan hasil eksperimen terbaru mengenai keberlangsungan dinamika siklik dalam suatu sistem pemangsa–mangsa.
- **Bagian Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Titik tetap dan kestabilannya (Bab 3). Model Populasi Dua Spesies (Bab 6).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Analisis terapan tingkat lanjut. Pembuktian.

Capaian Proyek

- Jelaskan pendekatan pemodelan dan tujuan kajian tersebut.
- Analisis model linear dan jelaskan dinamika model Lotka–Volterra klasik (pemrograman tidak diperlukan jika Anda menggunakan aplikasi Phase Plane).
- Telaah dan berikan alasan bagi berbagai modifikasi yang diusulkan dalam artikel.
- Implementasikan model-model yang bersesuaian dan analisis dinamika yang dihasilkan: gunakan teknik analisis bidang fase (tentukan titik-titik tetap dan kaji kestabilannya) serta simulasi numerik (misalnya dengan aplikasi Phase Plane).
- Bandingkan hasilnya dengan pembahasan dalam Bab 6 buku ini.
- Tentukan apakah eksplorasi variasi tambahan atas model tersebut memang beralasan.
- Susun sintesis hasilnya dan nilai secara kritis kontribusi karya tersebut, terutama dengan mempertimbangkan temuan terbaru yang disajikan dalam artikel konteks.

9. Interaksi Pemangsa–Mangsa ketika Mangsa Takut kepada Pemangsa

Suatu sistem pemangsa–mangsa yang memperhitungkan rasa takut.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [*Fear factor in a prey–predator system in deterministic and stochastic environment*](#) oleh J. Roy & S. Alam, *Physica A* **541**, 123359 (2020).
- **Topik Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Analisis kestabilan (Bab 3). Spesies yang bersaing (Bab 6).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Sistem dinamik. Simulasi numerik sistem persamaan diferensial biasa. Pembuktian. Analisis real.

Capaian Proyek

- Susun sintesis atas pendekatan pemodelannya.
- Bangun model otonom deterministiknya.
- Tentukan titik-titik tetap dan analisis kestabilannya.
- Jelajahi dinamika model deterministik tersebut, baik dengan maupun tanpa pemaksaan musiman.
- Nilai kontribusi model tersebut.

10. Komunikasi dalam Kawanan Lebah Madu

Pahami cara lebah madu menciptakan jaringan aroma dinamis yang memungkinkan mereka menemukan ratunya dari kejauhan.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Flow-mediated olfactory communication in honeybee swarms](#) oleh D.M.T. Nguyen *et al.*, PNAS **118**, e2011916118 (2021).
- **Topik Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Model berbasis agen (Bab 2). Difusi (Bab 9).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Analisis Matematika Terapan. Persamaan Diferensial Parsial. Pemrograman. Proses stokastik.
- **Informasi Tambahan:** Video dan uraian terperinci mengenai model tersebut tersedia dalam [materi tambahan daring](#).

Capaian Proyek

- Rangkum proses pengumpulan data beserta analisis selanjutnya.
- Jelaskan cara kerja model berbasis agen tersebut.
- Reproduksi sebagian hasilnya.
- Susun sintesis atas pendekatan pemodelannya.
- Nilai kontribusi model tersebut.

11. Migrasi Paus

Pengaruh suhu air laut dan kerapatan kril terhadap migrasi paus di sepanjang pesisir California.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Disentangling the biotic and abiotic drivers of emergent migratory behavior using individual-based models](#) oleh S. Dodson *et al.*, Ecological Modelling **432**, 109225 (2020).
- **Topik Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Model berbasis agen (Bab 2). Difusi (Bab 9).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Analisis Matematika Terapan. Teori peluang. Pemrograman. Proses stokastik.

Capaian Proyek

- Susun sintesis atas pendekatan pemodelannya.
- Susun peta musiman hampiran bagi suhu air laut dan kerapatan kril.
- Bangun dan jalankan model berbasis individu tersebut.
- Nilai kontribusi model dengan mempertimbangkan pengetahuan kita saat ini mengenai perubahan iklim.

12. Kolam Lelehan di Arktik

Model sederhana yang mereproduksi sifat geometris dan penskalaan kolam lelehan di Arktik.

Informasi Proyek

- **Artikel:** [Ising model for melt ponds on Arctic sea ice](#) oleh Y-P. Ma *et al.*, New J. Phys. **21**, 063029 (2019).
- **Topik Mata Kuliah yang Relevan:** Proses pemodelan (Bab 1). Penskalaan dan Metode Minimisasi Energi (Bab 3). Model berbasis agen (Bab 2).
- **Pengetahuan Lanjutan yang Berguna:** Fisika (transisi fase, model Ising). Analisis Matematika Terapan. Pemrograman.

- **Informasi Tambahan:** Untuk melihat citra es laut dari helikopter, baca [*Aerial observations of the evolution of ice surface conditions during summer*](#) oleh D.K. Perovich, W.B. Tucker III, K.A. Ligett, serta lihat pangkalan data [*SHEBA Reconnaissance Imagery, Version 1*](#).

Capaian Proyek

- Susun sintesis atas pendekatan pemodelannya.
- Bangun model tersebut dan jelajahi perilakunya.
- Reproduksi hasil-hasil artikel tersebut.
- Nilai kontribusi model tersebut.

Paket proyek Python terbuka

Kedua belas paket berikut adalah pendamping pedagogis yang ditulis secara independen untuk edisi ini. Setiap ZIP memuat notebook tanpa keluaran tersimpan, pemeriksaan deterministik, rubrik, proveniens, lingkungan terpaku, dan data sintetis atau terbuka. Paket-paket ini bukan salinan kode atau data artikel yang dirujuk dan tidak mengklaim mereproduksi hasil artikel.

1. [0005-LEGA-V101-PRJ01 — Kecerdasan Kolektif](#) [paket sumber]
2. [0005-LEGA-V101-PRJ02 — Model Penyebaran Awal COVID-19](#) [paket sumber]
3. [0005-LEGA-V101-PRJ03 — Intervensi Nonfarmasi untuk Mitigasi Penyebaran Penyakit](#) [paket sumber]
4. [0005-LEGA-V101-PRJ04 — Kampanye Vaksinasi, Intervensi Nonfarmasi, dan Beban COVID-19](#) [paket sumber]
5. [0005-LEGA-V101-PRJ05 — Dinamika Glukosa–Insulin](#) [paket sumber]
6. [0005-LEGA-V101-PRJ06 — Perilaku Kolektif dalam Kerumunan](#) [paket sumber]
7. [0005-LEGA-V101-PRJ07 — Kompromi antara Kompleksitas Model dan Identifikasi Parameter](#) [paket sumber]
8. [0005-LEGA-V101-PRJ08 — Model Pemangsa–Mangsa](#) [paket sumber]
9. [0005-LEGA-V101-PRJ09 — Interaksi Pemangsa–Mangsa ketika Mangsa Takut kepada Pemangsa](#) [paket sumber]
10. [0005-LEGA-V101-PRJ10 — Komunikasi dalam Kawan Lebah Madu](#) [paket sumber]
11. [0005-LEGA-V101-PRJ11 — Migrasi Paus](#) [paket sumber]
12. [0005-LEGA-V101-PRJ12 — Kolam Lelehan di Arktik](#) [paket sumber]

Pernyataan Aksesibilitas

0005-LEGA-V101-BM01

“University of Arizona Libraries berkomitmen pada nilai keterbukaan. Kami mendukung [praktik dan inisiatif terbuka](#) – termasuk akses terbuka, data terbuka, sumber daya pendidikan terbuka, dan perangkat lunak sumber terbuka. Hal ini memungkinkan sistem pertukaran pengetahuan global yang lebih adil, kolaboratif, dan berkelanjutan. Keterbukaan mengurangi hambatan terhadap akses, inovasi, dan berbagi.”^[1]

Tim Sumber Daya Pendidikan Terbuka (OER) dan para penulis di University of Arizona berkomitmen menyediakan bahan buku ajar OER yang aksesibel dan dapat digunakan oleh khalayak seluas mungkin, tanpa memandang teknologi atau kemampuan.

Versi buku web dari sumber daya ini dirancang dan diformat dengan mengacu pada [Pedoman Aksesibilitas Konten Web 2.1](#) (tingkat AA).

Fitur-fitur aksesibilitas khusus buku ini:

- Konten ditata menggunakan tajuk dan subjudul yang berurutan
- Semua gambar memiliki teks alternatif atau ditandai sebagai dekoratif
- Tautan terbuka di jendela yang sama.
- Teks tautan bersifat deskriptif dan dapat dipahami tanpa konteks di sekitarnya.
- Teks tautan menjelaskan tujuan dan perilaku tautan yang diharapkan.
- Dokumen telah dinilai aksesibilitasnya dalam batas kemampuan penulis dan akses yang diizinkan.
- Tabel memuat baris tajuk dan menata data.
- Fon mudah dibaca, dengan jenis huruf, ukuran, dan kontras warna yang sesuai.
- Konten buku web telah ditinjau aksesibilitasnya dengan plugin Editor11y

Untuk mengetahui lebih lanjut tentang aksesibilitas platform ini, kunjungi [halaman aksesibilitas Pressbooks](#).

Walaupun kami berupaya memenuhi semua pedoman dan standar aksesibilitas yang ditetapkan, kami menyadari bahwa hal itu mungkin tidak dapat dicapai pada setiap aspek buku ajar ini. Kami juga mengakui bahwa pengalaman setiap orang dalam mengakses materi daring bersifat unik. Jika Anda mengalami kesulitan ketika mengakses konten atau menggunakan buku ajar beserta materi tambahannya, jangan ragu menghubungi kami.

Saat menghubungi kami, sertakan informasi berikut:

- Nama sumber daya
- Lokasi masalah, berupa alamat web atau deskripsi halaman.
- Deskripsi masalah
- Komputer, perangkat lunak, peramban, serta teknologi bantu yang Anda gunakan; informasi ini dapat membantu kami mendiagnosis dan mengatasi masalah (misalnya Windows 11, Google Chrome versi 65.0.3325.181, dan pembaca layar NVDA)

Silakan kirim surel kepada tim Pressbooks U of A (LBRY-PRBKMgmt@arizona.edu) jika Anda memiliki persoalan aksesibilitas.

Pernyataan di atas direproduksi dari [Panduan Aksesibilitas University of Arizona untuk Penulis Pressbooks](#).

Deskripsi panjang gambar dalam buku elektronik ini dibuat dengan bantuan Gemini dan disunting oleh penulis untuk memastikan keakuratannya.

Pernyataan ini terakhir diperbarui pada 14 April 2026.

1. University of Arizona Libraries. (2019). Our commitment to open. About Us. <https://lib.arizona.edu/about/oa-statement> [↗](#)

Riwayat Versi

0005-LEGA-V101-BM02

Halaman ini memuat catatan mengenai suntingan dan perubahan pada buku ini sejak penerbitan pertamanya. Perubahan kecil menaikkan nomor versi sebesar 0,01. Suntingan penting pada isi ilmiah menaikkan nomor versi sebesar 1.

Berkas yang disediakan bersama buku ini selalu mencerminkan versi terbaru.

Nomor Versi	Deskripsi	Tanggal
1.00	Penerbitan awal	Juli 2024
1.01	Beberapa persamaan diformat ulang dan teks disunting untuk meningkatkan aksesibilitas	Maret 2026

Alur Kerja Python/Jupyter yang Reprodusibel

0005-BRIDGE-C1

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda akan mampu:

- menjelaskan perbedaan antara hasil yang dapat diulang, hasil yang dapat ditelusuri, dan kesimpulan yang benar;
- menata proyek pemodelan sehingga data, asumsi, kode, lingkungan komputasi, dan keluaran dapat diperiksa secara terpisah;
- menyatakan kontrak model yang memuat variabel, satuan, parameter, domain, asumsi, serta kriteria kegagalan;
- menggunakan bilangan acak, pembagian data, dan catatan asal-usul data secara deterministik; dan
- menjalankan ulang notebook dari keadaan bersih serta memverifikasi hasilnya dengan pemeriksaan numerik dan hash.

Reprodusibilitas adalah rantai bukti

Dalam pemodelan matematika, sebuah angka akhir bukanlah hasil yang berdiri sendiri. Angka itu bergantung pada pertanyaan yang diajukan, data yang digunakan, asumsi yang dibuat, persamaan yang dipilih, nilai parameter, algoritma, versi perangkat lunak, dan urutan eksekusi. Proyek disebut *reprodusibel secara komputasional* apabila orang lain dapat mengambil bahan yang sama, menjalankan prosedur yang dinyatakan, dan memperoleh keluaran yang sama dalam toleransi yang telah ditetapkan.

Reprodusibilitas tidak membuktikan bahwa model benar. Kesalahan yang ditulis dengan rapi tetap merupakan kesalahan. Namun, tanpa rantai bukti yang dapat diperiksa, pembaca tidak dapat membedakan perbedaan ilmiah dari kesalahan salin, keadaan tersembunyi dalam notebook, perubahan data, atau perbedaan lingkungan komputasi. Karena itu, reprodusibilitas merupakan syarat pemeriksaan, bukan pengganti kritik model.

Prinsip inti

Setiap klaim kuantitatif harus dapat ditelusuri mundur ke data, model, parameter, kode, dan lingkungan yang menghasilkannya. Setiap perubahan pada salah satu unsur tersebut harus terlihat sebagai perubahan yang disengaja, bukan sebagai keadaan tersembunyi.

Satu pertanyaan, satu proyek yang dapat diperiksa

Mulailah dengan satu pertanyaan operasional. Contohnya: “Dengan menganggap suhu ruangan tetap, seberapa cepat seangkup cairan panas mendekati suhu ruangan?” Pertanyaan ini lebih berguna daripada judul umum seperti “model pendinginan” karena menyebutkan sistem, besaran yang diamati, dan asumsi yang paling menentukan.

Struktur direktori berikut memisahkan bahan yang memiliki fungsi berbeda. Nama direktori bukan hukum universal; pemisahan tanggung jawabnya yang penting.

```

proyek-pendinginan/
├── README.md
├── requirements.lock
├── data/
│   ├── raw/
│   └── derived/
├── src/
│   └── model.py
├── notebooks/
│   └── analisis.ipynb
├── outputs/
└── manifest.tsv

```

Peran setiap unsur dalam proyek pemodelan yang dapat diperiksa

Unsur	Isi	Aturan minimum
README.md	Pertanyaan, cara menjalankan, dan batas klaim	Pembaca baru dapat memulai tanpa menebak urutan langkah.
requirements.lock	Versi tepat perangkat lunak	Jangan hanya menulis “gunakan Python terbaru”.
data/raw	Data sebagaimana diperoleh	Jangan diedit secara manual; simpan identitas dan sumbernya.
data/derived	Data hasil pembersihan atau transformasi	Harus dapat dibuat ulang dari data mentah dengan kode.
src	Fungsi model dan prosedur analisis	Hindari logika penting yang hanya hidup di keadaan notebook.
notebooks	Narasi eksekutabel	Harus lulus “mulai ulang lalu jalankan semua”.
outputs	Gambar dan tabel turunan	Boleh dihapus dan dibuat ulang tanpa kehilangan informasi asli.
manifest.tsv	Daftar berkas, ukuran, dan hash	Mengikat klaim pada byte yang tepat.

Bekukan konteks sebelum menghitung

Catat versi Python dan setiap pustaka yang memengaruhi hasil. Versi yang dipatok membuat lingkungan dapat dibangun ulang; ia tidak menjamin bahwa pustaka bebas cacat. Catat pula sistem operasi atau arsitektur apabila perhitungan sangat peka terhadap implementasi numerik.

Jika simulasi memakai bilangan acak, gunakan pembangkit yang dibuat dari benih eksplisit. Dalam NumPy, bentuk seperti `rng = np.random.default_rng(20260822)` lebih mudah diaudit daripada keadaan acak global. Benih menjadikan satu realisasi dapat diulang, tetapi tidak menjadikan satu realisasi representatif. Analisis yang bergantung pada keacakan tetap perlu diperiksa dengan beberapa benih yang dinyatakan.

Gunakan satuan eksplisit. Nama t dan k tidak cukup apabila pembaca tidak tahu apakah waktu diukur dalam detik, menit, atau hari. Konversi satuan harus terjadi di satu tempat yang terlihat. Tanggal, zona waktu, pemisah desimal, pengodean teks, dan aturan penanganan data hilang juga termasuk konteks ketika dapat mengubah interpretasi.

Tulis kontrak model

Sebelum melakukan estimasi parameter, tuliskan apa yang masuk ke model, apa yang keluar, dan kapan model tidak layak digunakan. Untuk contoh pendinginan, misalkan $T(t)$ adalah suhu cairan dalam derajat Celsius pada waktu t menit, T_∞ suhu lingkungan tetap, dan $k > 0$ tetapan laju dengan satuan menit^{-1} . Hukum pendinginan Newton dinyatakan oleh

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty), \quad T(0) = T_0,$$

dengan solusi

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-kt}.$$

Kontrak contoh ini memuat asumsi bahwa suhu cairan seragam, suhu lingkungan tetap, laju pertukaran panas sebanding dengan selisih suhu, dan alat ukur tidak mengubah sistem secara berarti. Domain parameternya mencakup $k > 0$ dan nilai T_∞ yang masuk akal secara fisik. Model gagal sebagai deskripsi apabila, misalnya, suhu lingkungan berubah tajam, cairan mengalami perubahan fase, atau residu menunjukkan pola sistematis yang besar.

Kontrak juga harus menyebutkan konvensi perangkat lunak. Notebook pendamping menggunakan argumen fungsi dalam urutan (`waktu_per_minut`, `laju_per_minut`, `suhu_lingkungan_c`), menetapkan $T_0 = 92^\circ\text{C}$, dan membatasi pencarian parameter agar $0.001 \leq k \leq 0.5$ serta $0 \leq T_\infty \leq 50$.

Contoh kerja: dari data sintetis ke pemeriksaan

Notebook pendamping membuat sebelas pengamatan sintetis pada $t = 0, 5, \dots, 50$ menit. Nilai parameter pembangkit data adalah $k = 0.073 \text{ menit}^{-1}$, $T_\infty = 22.4^\circ\text{C}$, dan simpangan baku galat pengukuran 0.35°C . Benih tetap digunakan agar byte data dapat dihitung ulang. Data sintetis dipakai untuk menguji alur kerja; data tersebut bukan bukti empiris tentang proses pendinginan nyata.

Delapan pengamatan pertama digunakan untuk mengestimasi k dan T_∞ , sedangkan tiga pengamatan terakhir menjadi data uji dan tidak digunakan dalam proses estimasi. Pemisahan ini sengaja sederhana. Tujuannya ialah memperlihatkan bahwa prosedur estimasi dan pemeriksaan harus dibedakan. Modul C4 membahas validasi, identifiabilitas, perbandingan model, dan ketidakpastian secara lebih mendalam.

Untuk data latih (t_i, y_i) , parameter dipilih dengan meminimalkan jumlah kuadrat residu

$$\text{SSE}(k, T_\infty) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{latih}}} [y_i - T(t_i; k, T_\infty)]^2.$$

Setelah parameter diestimasi, notebook menghitung residu $r_i = y_i - \widehat{T}(t_i)$, akar rerata kuadrat galat pada data latih (RMSE), korelasi residu dengan waktu, dan galat absolut rerata pada data uji yang disisihkan (*holdout*). Besaran-besaran ini merupakan pemeriksaan alur kerja, bukan sertifikat bahwa model memadai untuk semua tujuan.

Notebook tanpa keadaan tersembunyi

Notebook mudah menyesatkan ketika sel dijalankan tidak berurutan. Variabel dapat tetap hidup dari percobaan lama, gambar dapat berasal dari parameter yang sudah berubah, dan keluaran tersimpan dapat tampak sah walaupun kode saat ini gagal. Karena itu, pemeriksaan minimum ialah: mulai ulang kernel, hapus keluaran, jalankan semua sel dari atas ke bawah, lalu pastikan semua pemeriksaan lulus.

1. Sel impor tidak mengunduh data dan tidak mengubah lingkungan.
2. Konstanta, benih, satuan, serta batas parameter dinyatakan sebelum digunakan.
3. Fungsi model tidak bergantung pada variabel global yang tersembunyi.
4. Data turunan dibuat oleh kode, bukan disunting dengan tangan.
5. Pemisahan data dilakukan sebelum estimasi parameter.
6. Gambar dibuat dari objek data dan parameter yang sama dengan ringkasan numerik.
7. Pemeriksaan menggunakan toleransi bermakna, bukan kesamaan pecahan mengambang secara membuta.

Notebook kanonik disimpan tanpa keluaran eksekusi. Pilihan ini memudahkan pemeriksaan perubahan byte dan memaksa keluaran dibuat ulang. Pembaca tetap dapat menjalankannya secara lokal dengan perangkat lunak terbuka yang dipatok dalam `requirements.lock`.

Manifest, hash, dan batas yang tepat

Hash SHA-256 memadatkan byte sebuah berkas menjadi pengenalan yang peka terhadap perubahan. Hash menjawab pertanyaan “apakah byte ini sama?”, bukan “apakah isi ini benar?” atau “apakah dua tabel yang diformat berbeda memiliki makna yang sama?”. Catat sekurang-kurangnya jalur relatif, jumlah byte, dan hash untuk setiap artefak yang

perlu dipertahankan.

Manifest harus dibuat dengan urutan jalur yang tetap, pengodean UTF-8 yang dinyatakan, dan aturan akhir baris yang konsisten. Jangan masukkan token, kata sandi, jalur profil pribadi, cache, atau data rahasia. Untuk data yang tidak boleh didistribusikan, catat identitas, prosedur perolehan, dan batas akses tanpa menyisipkan byte terlarang.

Dalam notebook contoh, tabel sintetis diserialisasi dengan enam angka di belakang koma sebelum hash dihitung. Aturan serialisasi itu merupakan bagian dari kontrak. Mengubah jumlah angka, nama kolom, atau aturan akhir baris akan mengubah hash walaupun nilai matematis dasarnya hampir sama.

Daftar periksa sebelum menyatakan hasil dapat direproduksi

- Pertanyaan, tujuan penggunaan, dan batas klaim tertulis jelas.
- Data mentah tidak ditimpa; sumber, lisensi, tanggal, dan identitasnya tercatat.
- Semua transformasi data dapat dijalankan ulang dari input yang dinyatakan.
- Variabel, parameter, satuan, domain, dan asumsi model memiliki definisi tunggal.
- Versi Python dan pustaka dipatok.
- Benih acak dan algoritma pembangkit dinyatakan jika keacakan digunakan.
- Pemisahan data latih dan data uji terjadi sebelum estimasi.
- Notebook lulus mulai ulang dan jalankan semua dari keadaan bersih.
- Pemeriksaan numerik memiliki toleransi dan alasan.
- Gambar serta tabel berasal dari alur yang sama dengan angka yang dilaporkan.
- Manifest tidak memuat kredensial atau data yang tidak boleh disebar.
- Perubahan terhadap sumber atau versi sebelumnya dijelaskan.

Kegagalan yang sering terjadi

Gejala kegagalan, penyebab yang mungkin, dan tindakan perbaikan

Gejala	Penyebab yang mungkin	Perbaikan
Notebook hanya bekerja setelah beberapa sel dijalankan manual.	Keadaan tersembunyi atau urutan sel salah.	Mulai ulang, jalankan semua, dan pindahkan definisi sebelum pemakaian.
Hasil berubah pada setiap eksekusi.	Benih atau sumber keacakan tidak dikendalikan.	Buat pembangkit lokal dengan benih eksplisit dan uji beberapa benih secara terpisah.
Hasil sama, tetapi tidak diketahui data mana yang dipakai.	Asal-usul dan identitas data hilang.	Simpan sumber, waktu perolehan, aturan transformasi, jumlah byte, dan hash.
Galat pada data latih sangat kecil, tetapi prediksi buruk.	Pencocokan berlebih, kebocoran data, atau model di luar domain.	Pisahkan data lebih awal dan periksa residu serta data uji.
Dua komputer memberi digit terakhir yang berbeda.	Perbedaan pustaka atau aritmetika pecahan mengambang.	Patok lingkungan dan gunakan toleransi yang sesuai dengan skala masalah.
Manifest berubah setiap kali dibuat.	Urutan jalur, waktu, atau format serialisasi tidak tetap.	Urutkan jalur dan keluarkan metadata yang tidak deterministik.

Ringkasan

Alur kerja reproduibel mengubah perhitungan menjadi argumen yang dapat diaudit. Ia mengikat pertanyaan, data, asumsi, model, kode, lingkungan, pemeriksaan, dan artefak akhir dalam satu rantai yang terlihat. Notebook pendamping memperagakan rantai tersebut dengan model pendinginan sederhana: data sintetis dibuat dari benih tetap, parameter diestimasi hanya dari data latih, residu dan data uji diperiksa, serta identitas byte data dihitung. Reprodusibilitas komputasional ini belum menjawab apakah model paling tepat; ia memastikan bahwa pertanyaan itu dapat diajukan terhadap bukti yang sama.

Latihan Penguasaan

Soal 1

Sebuah laporan hanya menyertakan gambar hasil simulasi dan kalimat “dibuat dengan Python”. Susun daftar lima informasi paling penting yang masih diperlukan agar klaim numeriknya dapat diperiksa dan diulang.

Soal 2

Rancang struktur proyek untuk data pengamatan populasi mingguan. Jelaskan berkas mana yang tidak boleh disunting, berkas mana yang boleh dibuat ulang, dan tiga kolom minimum dalam manifest.

Soal 3

Untuk model pendinginan di atas, tentukan satuan k , periksa bahwa eksponen kt tak berdimensi, dan jelaskan mengapa batas $k > 0$ sesuai dengan proses pendinginan menuju suhu lingkungan.

Soal 4

Bandingkan `np.random.seed(17)` yang mengubah keadaan global dengan `rng = np.random.default_rng(17)` yang membuat pembangkit lokal. Jelaskan mengapa pembangkit lokal biasanya lebih mudah diaudit dalam proyek besar.

Soal 5

Hitung suhu yang diprediksi pada $t = 10$ menit jika $T_0 = 92^\circ\text{C}$, $T_\infty = 22^\circ\text{C}$, dan $k = 0.07 \text{ menit}^{-1}$. Berikan jawaban hingga dua angka di belakang koma.

Soal 6

Jelaskan mengapa memilih data uji setelah melihat seluruh hasil dapat menghasilkan penilaian yang terlalu optimistis. Usulkan urutan kerja yang mencegah kebocoran informasi.

Soal 7

Jalankan notebook pendamping dari keadaan bersih. Catat hash tabel sintetis, estimasi kedua parameter, RMSE data latih, dan MAE data uji. Kemudian ubah hanya SEED dari 20260822 menjadi 20260823, jalankan ulang, dan jelaskan mana yang berubah, mana yang tetap, serta mengapa perubahan itu tidak boleh disembunyikan. Notebook menandai benih nonkanonik secara terlihat dan melewati hanya pemeriksaan angka kanonik; pemeriksaan struktur dan keterhinggaan tetap berjalan.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Telusuri rantai dari pertanyaan dan data hingga kode, lingkungan, parameter, serta keluaran.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jawaban lengkap menyebut sedikitnya lima unsur yang membuat klaim dapat ditelusuri dan dijalankan ulang.

Bukti yang diperlukan

1. Identitas dan asal-usul data.
2. Persamaan, asumsi, parameter, serta satuan model.
3. Kode dan urutan eksekusi.
4. Versi Python/pustaka dan benih acak bila ada.
5. Nilai numerik atau manifest yang mengikat gambar pada keluaran tepat.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Kalimat “dibuat dengan Python” hanya menyebut alat; ia tidak mengidentifikasi perhitungan yang dilakukan.

Langkah penyelesaian

1. Nyatakan pertanyaan dan tujuan penggunaan simulasi.
2. Berikan data atau cara deterministik untuk memperolehnya beserta hash dan lisensi.
3. Tuliskan model, asumsi, satuan, parameter, kondisi awal, dan domain.
4. Sertakan kode lengkap serta urutan menjalankan dari keadaan bersih.
5. Patok lingkungan dan sumber keacakan, lalu catat keluaran numerik yang mendasari gambar.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Pisahkan data mentah, data turunan, kode transformasi, notebook, keluaran, dan dokumentasi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Data mentah dipertahankan byte demi byte; data turunan, gambar, dan tabel harus dapat dibuat ulang.

Bukti yang diperlukan

1. Direktori raw dan derived dipisahkan.
2. Transformasi disimpan sebagai kode.
3. Manifest sekurang-kurangnya memuat jalur relatif, jumlah byte, dan SHA-256.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Pemisahan ini memungkinkan keluaran dihapus dan dibangun ulang tanpa kehilangan saksi sumber.

Langkah penyelesaian

1. Simpan unduhan asli di data/raw tanpa penyuntingan manual.
2. Tulis skrip yang membaca raw dan menghasilkan data/derived.
3. Tempatkan fungsi model di src, narasi di notebooks, dan artefak yang dapat dibuat ulang di outputs.
4. Buat README, requirements.lock, dan manifest.tsv yang diurutkan secara deterministik.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Eksponen harus tak berdimensi dan kedua ruas persamaan diferensial harus memiliki satuan suhu per waktu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Jika waktu dalam menit, maka $[k] = \text{menit}^{-1}$; kt tak berdimensi; $k > 0$ membuat selisih suhu menyusut menuju nol.

Bukti yang diperlukan

1. $\left[\frac{dT}{dt}\right] = \frac{\text{suhu}}{\text{waktu}}.$
2. $[k(T - T_\infty)] = \text{waktu}^{-1} \times \text{suhu}.$
3. Untuk $T > T_\infty$ dan $k > 0$, turunan suhu negatif.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Solusi mendekati T_∞ ketika t bertambah.

Langkah penyelesaian

1. Karena T dan T_∞ bersatuan $^\circ\text{C}$, selisihnya juga bersatuan $^\circ\text{C}$.
2. Agar ruas kanan bersatuan $^\circ\text{C}/\text{menit}$, k harus bersatuan menit^{-1} .
3. Maka kt tidak memiliki satuan dan sah berada di dalam fungsi eksponensial.
4. Untuk $T > T_\infty$, $k > 0$ memberi $\frac{dT}{dt} < 0$; untuk $T < T_\infty$, $\frac{dT}{dt} > 0$.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Tanyakan kode mana saja yang dapat mengonsumsi urutan acak yang sama tanpa terlihat.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pembangkit lokal membatasi keadaan dan dependensi ke objek yang diteruskan secara eksplisit, sehingga urutan konsumsi lebih mudah dilacak.

Bukti yang diperlukan

1. Keadaan global dapat diubah oleh fungsi atau pustaka lain.
2. Objek Generator dapat diberi nama, diteruskan, dan diuji secara lokal.
3. Benih tetap mengulang satu realisasi, bukan membuktikan keterwakilan statistik.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Pembangkit lokal biasanya memberi batas dependensi yang lebih jelas.

Langkah penyelesaian

1. `np.random.seed` mengubah keadaan bersama dalam modul lama.
2. `default_rng` membuat objek Generator yang memiliki keadaan sendiri.
3. Perubahan konsumsi acak di komponen lain tidak menggeser urutan objek lokal jika objek tidak dibagikan.
4. Untuk menilai kestabilan terhadap keacakan, jalankan beberapa benih dan laporkan semuanya secara terpisah.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Substitusikan selisih awal $92 - 22 = 70$ dan hitung $e^{-0.7}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

56.76 °C

Rumus

$$T(10) = 22 + 70e^{-0.7}$$

Toleransi

Absolute c

0.01

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

$$T(10) \approx 56.76 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Langkah penyelesaian

1. Hitung $kt = 0.07(10) = 0.7$.
2. Hitung $e^{-0.7} \approx 0.496585$.
3. Kalikan dengan 70 untuk memperoleh sekitar 34.7610.
4. Tambahkan suhu lingkungan 22 °C.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Jika pilihan data uji dipengaruhi oleh hasil, data itu telah memengaruhi keputusan pemodelan walaupun tidak masuk ke fungsi objektif.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pemisahan harus ditetapkan sebelum estimasi dan sebelum melihat metrik kandidat; data uji baru dibuka setelah alur analisis dibekukan.

Bukti yang diperlukan

1. Pilihan pascahasil menyesuaikan evaluasi terhadap data yang sudah diketahui.
2. Urutan aman: tetapkan tujuan, bagi data, kembangkan prosedur dengan data latih, bekukan prosedur, lalu evaluasi data uji.
3. Setelah data uji dipakai untuk revisi, ia bukan lagi evaluasi akhir yang independen.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Kebocoran adalah pengaruh informasi yang tidak tercatat, bukan hanya baris data yang dimasukkan langsung ke estimator.

Langkah penyelesaian

1. Tentukan unit pembagian dan aturan pemisahan data sebelum pencocokan.
2. Simpan indeks data latih dan data uji sebagai bagian dari konfigurasi.
3. Gunakan data latih untuk estimasi serta pengembangan prosedur.

4. Bekukan kode dan ambang pemeriksaan sebelum membuka metrik data uji.
5. Jika hasil evaluasi pada data uji memicu revisi, nyatakan hal itu dan buat evaluasi baru dengan data lain bila tersedia.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Bedakan kontrak yang tetap—model, waktu, parameter simulasi, dan aturan serialisasi—from realisasi galat acak yang berubah.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Benih 20260822 menghasilkan hash
1000bc1092f173258d2be37e4f8906ea0933708582d09768ce96eed739be337e, $\hat{k} = 0.07287235$,
 $\hat{T}_{\infty} = 22.63964536$ °C, RMSE = 0.31976406 °C, dan MAE_{data uji} = 0.17952331 °C.

Pemeriksaan notebook

Semua sel kode berjalan dari keadaan bersih dan semua pemeriksaan eksplisit lulus.

Bukti yang diperlukan

1. Benih baru mengubah realisasi galat, hash data, estimasi, dan metrik numerik.
2. Model, waktu pengamatan, parameter pembangkit data, serta aturan serialisasi tetap sama.
3. Perubahan benih harus diungkapkan karena mengubah identitas data dan hasil yang dilaporkan.

Toleransi

K absolute

1e-08

Metric absolute c

1e-08

Temperature absolute c

1e-08

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Perubahan yang disengaja sah apabila identitas konfigurasi dan artefaknya ikut berubah secara terlihat.

Langkah penyelesaian

1. Mulai ulang kernel, hapus keluaran, dan jalankan semua sel berurutan.
2. Cocokkan hash, parameter, RMSE, dan MAE dengan pemeriksaan notebook.

3. Ubah hanya benih, lalu jalankan ulang seluruh notebook.
4. Hash data, realisasi suhu, estimasi, dan metrik berubah; fungsi model, satuan, waktu pengamatan, serta aturan serialisasi tetap.
5. Catat benih baru dan jangan menyajikan keluaran baru sebagai byte yang sama dengan keluaran lama.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Bifurkasi Lokal: Perubahan Kestabilan dan Munculnya Osilasi

0005-BRIDGE-C2

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda akan mampu:

- menentukan cabang kesetimbangan dan kestabilan lokal dalam keluarga sistem yang bergantung pada parameter;
- menjelaskan mengapa nonhiperbolisitas diperlukan, tetapi tidak cukup, untuk menyimpulkan terjadinya bifurkasi;
- mengenali bentuk normal bifurkasi saddle-node, transkritik, dan pitchfork beserta batas penafsirannya;
- menurunkan jari-jari, periode, dan kestabilan siklus limit pada bentuk normal Hopf superkritik; dan
- membaca diagram bifurkasi serta membedakannya dari deret waktu dan potret fase.

Parameter dapat mengubah jenis perilaku

Pertimbangkan keluarga persamaan diferensial otonom satu dimensi

$$\frac{dx}{dt} = f(x; \mu),$$

dengan x sebagai variabel keadaan dan μ sebagai parameter kendali. Untuk setiap nilai μ , persamaan tersebut mendefinisikan sebuah sistem yang berbeda. Nilai $x_*(\mu)$ merupakan kesetimbangan apabila $f(x_*; \mu) = 0$. Diagram bifurkasi menempatkan μ pada sumbu mendatar dan nilai kesetimbangan atau ukuran atraktor pada sumbu tegak, sehingga perubahan perilaku dapat diikuti dari satu sistem ke sistem berikutnya.

Bifurkasi lokal terjadi ketika perubahan kecil pada parameter di sekitar nilai kritis mengubah susunan lokal objek invarian atau kestabilannya. Cabang kesetimbangan dapat muncul, lenyap, berpotongan, atau kehilangan kestabilan; pada sistem berdimensi dua atau lebih, osilasi kecil dapat muncul sebagai siklus limit. Istilah *lokal* penting: bentuk normal menjelaskan dinamika di dekat keadaan dan parameter kritis, bukan seluruh ruang fase untuk semua nilai parameter.

Prinsip inti

Jangan mencari bifurkasi hanya dengan melihat bahwa suatu kurva tampak berbelok. Tentukan kesetimbangan, hitung linearisasi, periksa syarat degenerasi dan transversalitas, lalu hubungkan kesimpulan lokal dengan domain fisik model.

Kestabilan linear dan titik nonhiperbolik

Di sekitar kesetimbangan x_* , tulis $x = x_* + \xi$. Suku linear memenuhi

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi + \text{suku berorde lebih tinggi}, \quad \lambda = f_x(x_*; \mu).$$

Jika $\lambda < 0$, gangguan kecil menyusut dan kesetimbangan stabil asimtotik secara lokal. Jika $\lambda > 0$, gangguan membesar dan kesetimbangan tidak stabil. Uji tanda ini tidak memberi keputusan ketika $\lambda = 0$. Kesetimbangan dengan linearisasi bernilai nol disebut nonhiperbolik; pada titik itulah suku nonlinear harus diperiksa.

Nonhiperbolisitas membuka kemungkinan bifurkasi, tetapi tidak membuktikannya. Sebagai contoh, keluarga

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - \mu^2 x$$

memiliki kesetimbangan $x_* = 0$ untuk setiap μ . Nilai eigennya $\lambda = -\mu^2$, sehingga $\lambda = 0$ pada $\mu = 0$. Meskipun demikian, $x = 0$ tetap stabil asimtotik: untuk $x > 0$ medan vektor mengarah ke kiri, sedangkan untuk $x < 0$ medan vektor mengarah ke kanan. Tidak ada cabang baru dan tidak terjadi pertukaran kestabilan. Contoh ini menunjukkan mengapa pemeriksaan $\lambda = 0$ harus diikuti analisis suku nonlinear dan ketergantungan parameter.

Bentuk normal di bawah ini mewakili kasus generik setelah translasi dan penskalaan lokal. Model nyata dapat memiliki simetri, hukum kekekalan, batas domain, atau parameter yang saling bergantung. Struktur tambahan tersebut dapat memaksa bifurkasi tertentu atau justru menghilangkannya.

Bifurkasi saddle-node: dua kesetimbangan lahir bersama

Bentuk normal bifurkasi saddle-node adalah

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2.$$

Persamaan kesetimbangannya $\mu - x^2 = 0$. Untuk $\mu < 0$ tidak ada kesetimbangan riil di lingkungan bentuk normal. Pada $\mu = 0$ terdapat kesetimbangan ganda $x = 0$. Untuk $\mu > 0$ terdapat dua cabang, $x_- = -\sqrt{\mu}$ dan $x_+ = \sqrt{\mu}$.

Karena $\lambda = f_x = -2x_*$, cabang negatif mempunyai $\lambda = 2\sqrt{\mu} > 0$ dan tidak stabil, sedangkan cabang positif mempunyai $\lambda = -2\sqrt{\mu} < 0$ dan stabil. Pada titik kritis, $dx/dt = -x^2$: keadaan dari sisi kanan bergerak menuju nol, tetapi keadaan dari sisi kiri bergerak menjauhinya. Karena itu, kesetimbangan ganda tersebut semistabil, bukan stabil dua sisi.

Pada kasus kanonik $\mu = -0.25$, tidak ada kesetimbangan. Pada $\mu = 0.25$, kesetimbangannya $x = -0.5$ dengan $\lambda = 1$ dan $x = 0.5$ dengan $\lambda = -1$. Akar kuadrat menyebabkan cabang memiliki garis singgung vertikal ketika dilihat sebagai $x_*(\mu)$ pada titik kelahirannya.

Bifurkasi transkritis: dua cabang bertukar kestabilan

Bentuk normal transkritis adalah

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 = x(\mu - x).$$

Dua kesetimbangan $x_0 = 0$ dan $x_1 = \mu$ ada untuk semua nilai parameter dan berpotongan pada $(\mu, x) = (0, 0)$. Pada cabang x_0 , nilai eigennya $\lambda_0 = \mu$. Pada cabang x_1 , nilainya $\lambda_1 = -\mu$. Jadi, untuk $\mu < 0$, x_0 stabil dan x_1 tidak stabil; untuk $\mu > 0$, label kestabilan itu bertukar.

Untuk $\mu = -0.5$, cabang nol mempunyai $\lambda = -0.5$, sedangkan cabang $x = \mu = -0.5$ mempunyai $\lambda = 0.5$. Untuk $\mu = 0.5$, tanda keduanya terbalik. Persilangan gambar semata belum cukup: pertukaran tanda pada linearisasi yang menyatakan pertukaran kestabilan.

Dalam model populasi, sering kali hanya $x \geq 0$ yang bermakna. Cabang $x = \mu$ berada di luar domain fisik ketika $\mu < 0$. Diagram pada seluruh garis riil tetap berguna sebagai analisis bentuk normal, tetapi laporan model harus membedakan cabang matematis dari keadaan yang dapat diwujudkan. Batas domain juga membuat gagasan kestabilan satu sisi relevan pada $x = 0$.

Bifurkasi pitchfork: simetri dan pemecahan simetri

Bentuk normal bifurkasi pitchfork superkritis adalah

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2).$$

Cabang $x = 0$ ada untuk semua μ . Dua cabang simetris $x = \pm\sqrt{\mu}$ muncul ketika $\mu \geq 0$. Pada cabang nol, $\lambda = \mu$, sehingga cabang itu stabil untuk $\mu < 0$ dan tidak stabil untuk $\mu > 0$. Pada kedua cabang luar, $\lambda = \mu - 3x_*^2 = -2\mu < 0$, sehingga keduanya stabil untuk $\mu > 0$.

Persamaan tetap sama jika x diganti dengan $-x$; simetri inilah yang menghasilkan dua cabang luar yang berpasangan. Dalam aplikasi, x dapat menyatakan selisih antara dua keadaan yang setara. Di bawah nilai kritis, keadaan simetris stabil. Di atasnya, keadaan simetris kehilangan kestabilan dan sistem memilih salah satu dari dua keadaan yang memecahkan simetri.

Bentuk subkritis lokal $dx/dt = \mu x + x^3$ mempunyai cabang luar $x = \pm\sqrt{-\mu}$ untuk $\mu < 0$, dan cabang tersebut tidak stabil. Suku kubik positif juga membuat solusi besar meninggalkan lingkungan lokal; bentuk normal ini tidak boleh dipakai untuk menyimpulkan perilaku global. Suku orde lebih tinggi dapat membatasi amplitudo dan menghasilkan histeresis.

Gangguan kecil yang merusak simetri, misalnya penambahan konstanta $\varepsilon \neq 0$, biasanya memecah diagram pitchfork sempurna menjadi cabang yang tidak simetris. Karena itu, sebelum menamai pola sebagai bifurkasi pitchfork, cari alasan mekanistik atau struktural bagi simetri tersebut.

Bifurkasi Hopf: osilasi lahir dari kesetimbangan

Bifurkasi Hopf memerlukan sedikitnya dua dimensi. Bentuk normal superkritis berikut menggunakan $r^2 = x^2 + y^2$, dengan $\beta > 0$ dan $\omega > 0$:

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - \beta r^2 x, \quad \dot{y} = \omega x + \mu y - \beta r^2 y.$$

Dalam koordinat polar, persamaan tersebut menjadi

$$\dot{r} = \mu r - \beta r^3, \quad \dot{\theta} = \omega.$$

Linearisasi pada titik asal mempunyai nilai eigen $\mu \pm i\omega$. Untuk $\mu < 0$, bagian riilnya negatif dan lintasan berpilin menuju asal. Untuk $\mu > 0$, asal tidak stabil. Nilai eigen melintasi sumbu imajiner dengan laju tak nol karena $d\text{Re}\lambda/d\mu = 1$.

Jika $\mu > 0$, persamaan radial mempunyai kesetimbangan nonnol

$$r_* = \sqrt{\frac{\mu}{\beta}}, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Turunan medan radial pada r_* adalah $\mu - 3\beta r_*^2 = -2\mu < 0$, sehingga siklus limit stabil. Untuk $\omega = 2$, $\beta = 1$, dan $\mu = 0.25$, jari-jarinya 0.5, periodenya π , dan turunan radialnya -0.5 . Jika hanya β diubah menjadi 2, jari-jari menjadi 0.3535533905932738, sedangkan periode dan turunan radial tetap π dan -0.5 .

Pasangan nilai eigen imajiner murni pada titik kritis saja belum menjamin Hopf. Diperlukan syarat transversalitas dan koefisien nonlinear pertama yang tidak nol. Tanda koefisien itu membedakan kasus superkritis, yang melahirkan siklus kecil stabil, dari kasus subkritis, yang secara lokal melibatkan siklus tidak stabil.

Membaca tiga jenis gambar tanpa mencampurkannya

Satu model dapat menghasilkan diagram bifurkasi, potret fase, dan deret waktu. Ketiganya menjawab pertanyaan yang berbeda.

Gambar	Sumbu	Pertanyaan yang dijawab
Diagram bifurkasi	parameter dan keadaan/amplitudo asimtotik	Objek invarian apa yang ada dan bagaimana kestabilannya berubah?
Potret fase	dua variabel keadaan	Ke mana lintasan bergerak untuk satu nilai parameter?
Deret waktu	waktu dan satu variabel keadaan	Bagaimana satu komponen berubah sepanjang suatu lintasan?

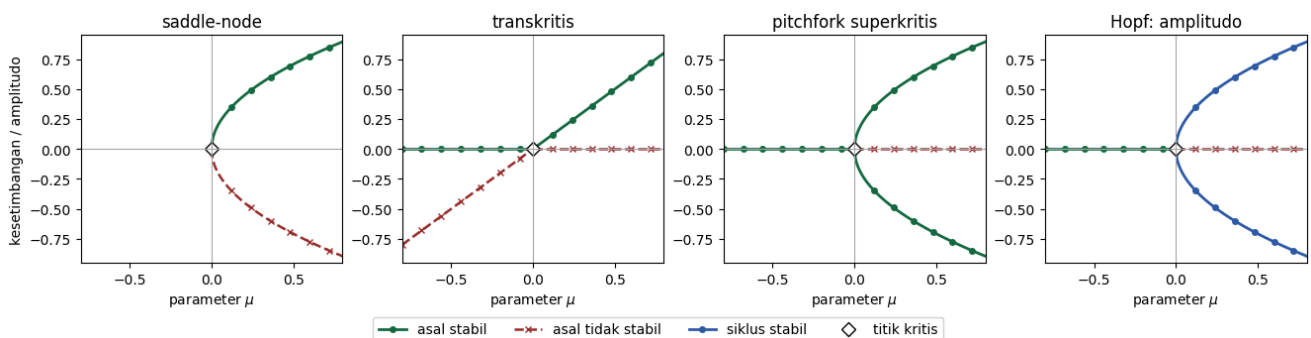
Dalam notebook pendamping, garis utuh dengan penanda lingkaran menyatakan cabang stabil, sedangkan garis putus-putus dengan penanda silang menyatakan cabang tidak stabil. Titik kritis diberi penanda wajik. Warna hanya membantu pengelompokan; jenis garis dan bentuk penanda tetap membawa informasi ketika warna tidak dapat dibedakan.

Cabang pada diagram bifurkasi bukan lintasan waktu. Mengikuti kurva dari kiri ke kanan berarti membandingkan sistem pada parameter berbeda, bukan menyimulasikan satu keadaan yang bergerak karena waktu. Jika parameter benar-benar berubah terhadap waktu, muncul persoalan dinamis tambahan seperti keterlambatan bifurkasi yang tidak dicakup oleh diagram statis ini.

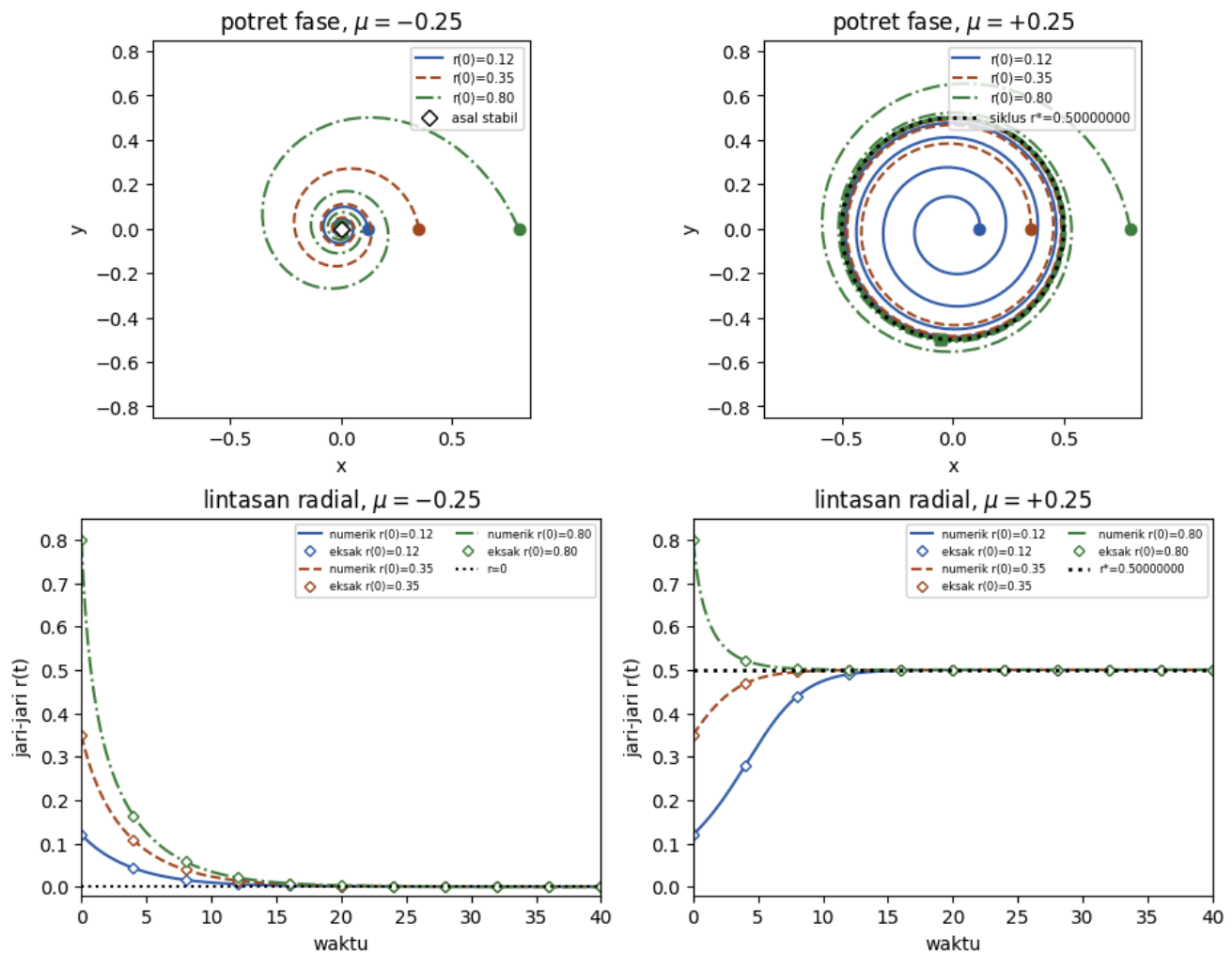
Eksperimen komputasional yang dapat diperiksa

Notebook pendamping menyensus kesetimbangan dan nilai eigen untuk kasus kanonik, menggambar empat diagram bentuk normal, lalu mengintegrasikan bentuk normal Hopf dengan DOP853 pada $0 \leq t \leq 40$ menggunakan 801 titik keluaran, $rtol=1e-11$, dan $atol=1e-13$. Jari-jari numerik dibandingkan dengan solusi eksak persamaan radial; galat maksimum wajib kurang dari 10^{-9} .

Empat diagram bentuk normal bifurkasi lokal.



Deskripsi panjang gambar pertama: empat panel menyajikan bentuk normal saddle-node, transkritik, pitchfork superkritik, dan amplitudo Hopf. Panel saddle-node kosong untuk parameter negatif lalu bercabang menjadi satu cabang tidak stabil di bawah dan satu cabang stabil di atas. Panel transkritik memperlihatkan dua garis yang berpotongan dan bertukar jenis garis pada nol. Panel pitchfork memperlihatkan cabang nol stabil untuk parameter negatif, lalu menjadi tidak stabil ketika dua cabang stabil simetris muncul. Panel Hopf memperlihatkan keadaan asal yang kehilangan kestabilan pada nol dan selubung amplitudo atas–bawah $\pm r_*$ yang tumbuh seperti akar kuadrat untuk parameter positif; kedua selubung itu menggambarkan satu siklus, bukan dua jari-jari yang berbeda.



Deskripsi panjang gambar kedua: empat panel membandingkan dinamika Hopf pada $\mu = -0.25$ dan $\mu = 0.25$. Dua panel potret fase memperlihatkan beberapa lintasan berputar berlawanan arah jarum jam. Untuk parameter negatif, semua lintasan menyusut menuju asal; grafik jari-jari di sampingnya turun menuju nol. Untuk parameter positif, lintasan dari dalam dan luar mendekati lingkaran berjari-jari 0.5; grafik jari-jari di sampingnya mendekati garis horizontal $r = 0.5$. Garis numerik dan penanda solusi eksak bertumpuk dalam ketelitian gambar.

Sumber notebook disimpan tanpa keluaran. Lingkungannya dipatok dalam `requirements.lock`, tidak memakai jaringan setelah lingkungan terpasang, dan menggunakan pemeriksaan `require()` yang tetap aktif ketika Python dijalankan dengan optimisasi. Dua eksekusi dalam kernel yang sama harus menghasilkan ringkasan numerik identik; gerbang QA eksternal tetap perlu memulai kernel baru.

Alur analisis dan perangkat penafsiran

1. Nyatakan variabel, parameter, satuan, dan domain keadaan yang bermakna.
2. Selesaikan persamaan kesetimbangan untuk seluruh cabang yang relevan, termasuk akar ganda.
3. Hitung nilai eigen linearisasi sepanjang setiap cabang dan tandai titik nonhiperbolik.
4. Periksa suku nonlinear, simetri, transversalitas, dan syarat nondegenerasi yang sesuai.

5. Gabungkan aljabar, diagram, dan simulasi; jangan menjadikan salah satunya pengganti dua lainnya.
6. Batasi klaim pada lingkungan parameter dan keadaan tempat pendekatan lokal berlaku.

Kesalahan umum dan koreksinya

Klaim keliru	Koreksi
“Nilai eigen nol berarti pasti terjadi bifurkasi.”	Nilai nol hanya membuat uji linear tidak konklusif; keluarga $-x^3 - \mu^2 x$ memberi contoh tandingan.
“Dua cabang berpotongan, jadi keduanya bertukar kestabilan.”	Hitung tanda nilai eigen pada masing-masing sisi titik kritis.
“Semua cabang pada gambar merupakan keadaan fisik.”	Terapkan batas seperti populasi tak negatif setelah menyelesaikan cabang matematis.
“Bentuk normal berlaku untuk amplitudo dan parameter berapa pun.”	Bentuk normal merupakan uraian lokal; perilaku jauh dari titik kritis memerlukan model lengkap.
“Gambar numerik membuktikan jenis bifurkasi.”	Gambar adalah bukti pendukung; cabang, linearisasi, dan syarat nondegenerasi tetap harus diperiksa.

Ringkasan

Bifurkasi menghubungkan perubahan parameter dengan perubahan kualitatif dinamika. Saddle-node menciptakan pasangan kesetimbangan stabil dan tidak stabil; transkritik menukar kestabilan dua cabang; pitchfork superkritik memecah keadaan simetris menjadi dua keadaan stabil; dan Hopf superkritik melahirkan osilasi stabil dari kesetimbangan. Dalam setiap kasus, diagram baru bermakna setelah cabang, nilai eigen, syarat nonlinear, domain fisik, dan batas lokalnya dinyatakan.

Modul ini merupakan tambahan independen berbahasa Indonesia dan bukan bagian dari buku sumber. Produksi dan QA: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra. Kredit Joceline Lega dan University of Arizona untuk *Introduction to Mathematical Modeling* tetap terpisah; tidak ada dukungan mereka terhadap tambahan ini yang dinyatakan atau disiratkan. Distribusi mengikuti CC BY-NC-SA 4.0.

Latihan Penguasaan

Soal 1

Untuk $dx/dt = -x^3 - \mu^2 x$, tunjukkan bahwa $x = 0$ nonhiperbolik pada $\mu = 0$, tetapi tidak terjadi bifurkasi ketika μ melewati nol. Gunakan persamaan kesetimbangan, nilai eigen, dan arah medan vektor.

Soal 2

Buat sensus lengkap kesetimbangan dan kestabilan $dx/dt = \mu - x^2$ untuk $\mu < 0$, $\mu = 0$, dan $\mu > 0$. Jelaskan secara satu sisi mengapa kesetimbangan pada $\mu = 0$ semistabil.

Soal 3

Untuk $dx/dt = x(\mu - x)$, tentukan kestabilan kedua cabang pada $\mu = -0.5$ dan $\mu = 0.5$. Kemudian jelaskan bagian diagram mana yang dikeluarkan apabila x menyatakan populasi dan harus memenuhi $x \geq 0$.

Soal 4

Untuk $dx/dt = \mu x - x^3$, hitung semua kesetimbangan dan nilai eigennya pada $\mu = -0.36$ dan $\mu = 0.36$. Tunjukkan bahwa cabang luar pada parameter positif adalah $x = \pm 0.6$ dengan $\lambda = -0.72$, lalu jelaskan peran simetri $x \mapsto -x$.

Soal 5

Turunkan persamaan radial dan sudut dari bentuk normal Hopf. Untuk $\mu = 0.25$, $\beta = 1$, dan $\omega = 2$, hitung jari-jari siklus, periode, dan turunan medan radial pada siklus; gunakan hasil terakhir untuk menentukan kestabilannya.

Soal 6

Seorang pembaca menyatakan bahwa bergerak sepanjang cabang pada diagram bifurkasi sama dengan mengikuti lintasan waktu. Koreksi pernyataan itu dan jelaskan informasi tambahan yang diperlukan untuk mengetahui gerak sebuah keadaan pada satu nilai parameter.

Soal 7

Jalankan notebook pendamping dari kernel bersih dan verifikasi seluruh kasus kanonik serta batas galat solusi radial. Kemudian ubah hanya β dari 1 menjadi 2 pada kasus $\mu = 0.25$, jalankan ulang, dan jelaskan mengapa jari-jari berubah menjadi 0.3535533905932738, sedangkan periode π dan turunan radial -0.5 tidak berubah.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Faktorkan persamaan kesetimbangan dan periksa tanda medan di kedua sisi nol, terutama ketika $\mu = 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$x = 0$ adalah satu-satunya cabang untuk semua μ ; $\lambda = -\mu^2$ dan menjadi nol hanya pada $\mu = 0$; arah medan tetap menuju nol, sehingga tidak ada perubahan cabang atau kestabilan.

Bukti yang diperlukan

1. Persamaan $x(-x^2 - \mu^2) = 0$ tidak mempunyai akar riil nonnol.
2. Untuk $\mu \neq 0$, $\lambda = -\mu^2 < 0$.
3. Pada $\mu = 0$, $-x^3$ mengarah ke nol dari kedua sisi.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Linearisasi nol memerlukan analisis nonlinear; ia bukan sertifikat bifurkasi.

Langkah penyelesaian

1. Selesaikan $-x^3 - \mu^2 x = -x(x^2 + \mu^2) = 0$.
2. Karena $x^2 + \mu^2 \geq 0$, satu-satunya cabang riil adalah $x = 0$; pada $\mu = 0$ faktor itu hanya menambah kemultiplikasian akar.

3. Hitung $f_x = -3x^2 - \mu^2$, sehingga $\lambda = -\mu^2$ pada cabang nol.

4. Pada titik kritis, $x > 0$ memberi $\dot{x} < 0$ dan $x < 0$ memberi $\dot{x} > 0$.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Pisahkan tiga rezim tanda μ ; ketika $\mu = 0$, uji arah $-x^2$ dari kiri dan kanan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Tidak ada kesetimbangan untuk $\mu < 0$; $x = 0$ semistabil untuk $\mu = 0$; untuk $\mu > 0$, $-\sqrt{\mu}$ tidak stabil dan $+\sqrt{\mu}$ stabil.

Bukti yang diperlukan

1. Akar diperoleh dari $x^2 = \mu$.
2. $\lambda = -2x$ memberi tanda berlawanan pada dua cabang.
3. Pada $\mu = 0$, aliran dari kanan menuju nol tetapi dari kiri menjauh.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Pada nilai kritis, pasangan stabil–tidak stabil bertemu dalam kesetimbangan semistabil.

Langkah penyelesaian

1. Untuk $\mu < 0$, $x^2 = \mu$ tidak mempunyai solusi riil.
2. Untuk $\mu > 0$, substitusikan $x = -\sqrt{\mu}$ dan $x = +\sqrt{\mu}$ ke $\lambda = -2x$.
3. Untuk $\mu = 0$, gunakan $\dot{x} = -x^2$: kecepatan selalu negatif kecuali di nol.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Nilai eigen pada cabang $x = 0$ adalah μ , sedangkan pada cabang $x = \mu$ adalah $-\mu$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada $\mu = -0.5$, $x = 0$ stabil dan $x = -0.5$ tidak stabil; pada $\mu = 0.5$, $x = 0$ tidak stabil dan $x = 0.5$ stabil. Cabang $x = \mu$ untuk $\mu < 0$ dikeluarkan dari domain populasi $x \geq 0$.

Bukti yang diperlukan

1. $f_x = \mu - 2x$ dievaluasi pada kedua cabang.
2. Tanda nilai eigen bertukar ketika μ melewati nol.
3. Cabang matematis negatif dibedakan dari keadaan fisik populasi.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Diagram garis riil menunjukkan pertukaran penuh, sedangkan model populasi hanya memakai bagian yang dapat diterima secara fisik.

Langkah penyelesaian

1. Faktorkan $f = x(\mu - x)$ untuk memperoleh $x = 0$ dan $x = \mu$.
2. Pada $x = 0$, $\lambda = \mu$; pada $x = \mu$, $\lambda = -\mu$.
3. Substitusikan $\mu = -0.5$ dan $\mu = 0.5$ untuk memperoleh tanda yang diminta.
4. Terapkan $x \geq 0$ setelah cabang matematis disensus.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Faktorkan $x(\mu - x^2)$, lalu evaluasi $\mu - 3x^2$ pada setiap akar.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada $\mu = -0.36$ hanya $x = 0$ dengan $\lambda = -0.36$; pada $\mu = 0.36$ terdapat $x = -0.6$ dan $x = 0.6$ dengan $\lambda = -0.72$ serta $x = 0$ dengan $\lambda = 0.36$.

Bukti yang diperlukan

1. Kedua cabang luar stabil dan cabang nol tidak stabil untuk μ positif.
2. Invariansi terhadap $x \mapsto -x$ menjelaskan pasangan cabang luar.
3. Gangguan yang merusak simetri dapat memecah pitchfork sempurna.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Kehilangan kestabilan keadaan simetris bertepatan dengan lahirnya dua keadaan stabil yang simetris.

Langkah penyelesaian

1. Akar $x(\mu - x^2) = 0$ adalah $x = 0$ dan, jika $\mu \geq 0$, $x = \pm\sqrt{\mu}$.
2. Untuk $\mu = -0.36$, hanya $x = 0$ dan $\lambda = \mu = -0.36$.

3. Untuk $\mu = 0.36$, akar luar adalah $x = \pm 0.6$; substitusi ke $\lambda = \mu - 3x^2$ memberi $0.36 - 1.08 = -0.72$.
4. Pergantian x menjadi $-x$ tidak mengubah ruas kanan selain transformasi yang sama pada $\dot{x}$.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Gunakan $\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$ dan $\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $\mu = 0.25$, $\beta = 1$, $\omega = 2$: $r^* = 0.5$, $P = \pi$, dan turunan radial $\mu - 3\beta(r^*)^2 = -0.5$, sehingga siklus stabil.

Bukti yang diperlukan

1. Suku rotasi saling menghapus dalam $\dot{r}$.
2. $\dot{\theta} = \omega$ memberi periode $\frac{2\pi}{\omega}$.
3. Tanda negatif turunan radial menyusutkan gangguan amplitudo.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Bentuk normal melahirkan siklus limit kecil yang stabil ketika μ menjadi positif.

Langkah penyelesaian

1. Hitung r^* dari $r(\mu - \beta r^2) = 0$ dan pilih akar nonnol positif.
2. Hitung $r^* = \sqrt{\frac{0.25}{1}} = 0.5$.
3. Karena θ bertambah dengan laju 2, satu putaran memerlukan $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
4. Evaluasi $\mu - 3\beta(r^*)^2 = 0.25 - 3(0.25) = -0.5$.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Tanyakan apa arti sumbu mendatar dan apakah parameter dipertahankan tetap selama simulasi.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Cabang membandingkan objek invarian dari sistem berbeda pada nilai parameter berbeda; lintasan waktu bergerak dalam ruang keadaan dengan parameter yang biasanya tetap.

Bukti yang diperlukan

1. Diagram bifurkasi memakai parameter sebagai sumbu.
2. Potret fase atau integrasi dengan kondisi awal diperlukan untuk mengetahui gerak pada satu parameter.
3. Parameter yang berubah terhadap waktu merupakan model nonotonom tambahan.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Membaca cabang dari kiri ke kanan bukan simulasi waktu.

Langkah penyelesaian

1. Pilih satu nilai μ pada diagram; titik cabang menunjukkan kesetimbangan atau amplitudo asimtotik untuk sistem itu.
2. Tentukan kondisi awal dan integrasikan persamaan pada μ yang dipilih untuk memperoleh lintasan waktu.
3. Gunakan potret fase untuk menampilkan arah aliran dan cekungan tarikan.
4. Jika μ dibuat bergantung pada waktu, tulis fungsi $\mu(t)$ dan analisis masalah baru secara eksplisit.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Pisahkan rumus yang memuat β dari rumus yang hanya memuat ω atau μ .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Kasus kanonik memberi $r^* = 0.5$, $P = \pi$, turunan radial -0.5 , dan galat radial maksimum kurang dari 10^{-9} . Pada $\beta = 2$, $r^* = 0.3535533905932738$, sedangkan $P = \pi$ dan turunan radial -0.5 .

Pemeriksaan notebook

Semua 7 sel kode berjalan dari kernel bersih, menghasilkan tepat dua gambar PNG, dan seluruh require() lulus.

Bukti yang diperlukan

1. Integrator DOP853 memakai $t \in [0, 40]$, 801 titik, $\text{rtol} = 10^{-11}$, dan $\text{atol} = 10^{-13}$.
2. Enam lintasan radial numerik dibandingkan dengan solusi eksak dan masing-masing mempunyai galat maksimum kurang dari 10^{-9} .
3. Mengubah β memengaruhi $\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, tetapi tidak memengaruhi $\frac{2\pi}{\omega}$ atau -2μ .

Toleransi

Closed form absolute

1e-15

Radial solution max absolute

1e-09

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Variasi satu parameter harus mengubah hanya besaran yang bergantung padanya dan harus tetap terlihat dalam konfigurasi keluaran.

Langkah penyelesaian

1. Mulai ulang kernel dan jalankan semua sel secara berurutan.
2. Pastikan sensus skalar, dua gambar, ringkasan JSON, dan pengulangan dalam kernel lulus.
3. Cocokkan jari-jari numerik dengan solusi radial eksak pada keenam pasangan μ dan $r(0)$.
4. Ubah hanya β menjadi 2 pada evaluasi sifat siklus.
5. Hitung $\sqrt{\frac{0.25}{2}} = 0.3535533905932738$; ω dan μ tidak berubah sehingga periode dan turunan radial tetap.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Penggandaan Periode, Kekacauan, dan Peta Balik

0005-BRIDGE-C3

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda akan mampu:

- membedakan dinamika kacau yang deterministik dari keacakan dan dari galat numerik;
- menganalisis titik tetap, orbit periodik, dan penggandaan periode pada peta logistik;
- menghitung serta menafsirkan estimasi eksponen Lyapunov tanpa melebih-lebihkan bukti numerik;
- menggunakan sistem Lorenz untuk menyelidiki kepekaan terhadap kondisi awal dengan kendali galat numerik; dan
- membangun penampang Poincaré berarah dan membedakan peta Poincaré penuh dari proyeksi peta balik.

Asal-usul modul

Modul ini merupakan tambahan independen untuk edisi Bahasa Indonesia *Introduction to Mathematical Modeling*, v1.01, karya Joceline Lega. Modul ini bukan bagian dari buku sumber, tidak menyalin atau mengadaptasi kode sumber pihak lain, tidak memakai data atau aset eksternal, dan tidak menyatakan dukungan atau pengesahan oleh Joceline Lega maupun University of Arizona. Komputasinya memakai pustaka sumber terbuka NumPy, SciPy, dan Matplotlib yang dicatat dalam berkas pengunci lingkungan. Distribusi mengikuti CC BY-NC-SA 4.0.

Produksi dan QA tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Kacau tidak berarti acak

Sistem dinamik disebut deterministik apabila keadaan sekarang dan aturan evolusinya menentukan keadaan berikutnya. Deterministik tidak berarti sederhana, periodik, atau mudah diprediksi. Aturan tanpa bilangan acak dapat menghasilkan lintasan terbatas yang tampak tidak berulang dan sangat peka terhadap perubahan kecil pada kondisi awal.

Tidak ada satu gambar dari sampel berhingga yang sendirian membuktikan kekacauan. Diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov positif, struktur peta balik, dan pemisahan lintasan berdekatan merupakan bukti yang saling melengkapi. Bukti itu tetap harus dibaca bersama pemeriksaan konvergensi numerik, lama transien yang dibuang, domain model, dan presisi komputasi.

Prinsip inti

Perbedaan lintasan yang membesar baru bermakna sebagai kepekaan dinamik setelah prosedur numerik menunjukkan konvergensi pada rentang waktu yang relevan. Kekacauan bukan nama lain untuk perhitungan yang tidak terkendali.

Peta logistik dan interval invarian

Peta logistik adalah sistem waktu diskret satu dimensi

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

dengan x_n keadaan pada iterasi ke- n , r parameter kendali, dan x_0 kondisi awal. Dalam penafsiran populasi yang ternormalisasi, $x_n = 0$ berarti tidak ada populasi dan $x_n = 1$ berarti skala acuan penuh; modul ini terutama memakai peta tersebut sebagai laboratorium sistem dinamik.

Untuk $x \in [0, 1]$, berlaku $0 \leq x(1 - x) \leq 1/4$. Karena itu, jika $0 \leq r \leq 4$, maka $0 \leq f_r(x) \leq r/4 \leq 1$. Jadi interval $[0, 1]$ invarian terhadap peta: orbit yang dimulai di dalamnya tidak keluar. Untuk $r > 4$, jaminan ini hilang dan beberapa keadaan dapat dipetakan ke luar interval.

Satu nilai x_n tidak menunjukkan pola jangka panjang. Kita perlu membuang bagian awal lintasan, yang disebut transien, lalu memeriksa nilai yang tersisa. Banyaknya iterasi transien merupakan bagian dari kontrak numerik dan tidak boleh dipilih diam-diam setelah melihat hasil.

Titik tetap, kestabilan, dan penggandaan periode

Titik tetap memenuhi $x^* = f_r(x^*)$. Untuk $r > 0$, pemfaktoran memberi dua kandidat

$$x_0^* = 0, \quad x_1^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Pada $r = 0$, persamaan asli hanya mempunyai titik tetap $x = 0$; rumus $1 - 1/r$ tidak terdefinisi. Untuk $0 < r < 1$, kandidat tak nol itu negatif dan berada di luar interval keadaan $[0, 1]$. Untuk peta satu dimensi, titik tetap hiperbolik menarik secara lokal jika $|f'_r(x^*)| < 1$ dan menolak jika $|f'_r(x^*)| > 1$. Karena $f'_r(x) = r(1 - 2x)$, pengali di x_0^* adalah r , sedangkan pengali di x_1^* adalah $2 - r$. Pada $r = 1$, kedua cabang berimpit di $x = 0$ dan pengalinya $+1$, sehingga titik batas itu nonhiperbolik.

Titik tetap peta logistik untuk parameter fisik $r \geq 0$

Titik	Pengali	Interval stabil
$x_0^* = 0$	r	$0 \leq r < 1$
$x_1^* = 1 - 1/r$	$2 - r$	$1 < r < 3$

Pada $r = 3$, pengali titik tetap tak nol mencapai -1 . Di titik batas itu kedua titik calon dua-siklus masih berimpit dengan titik tetap $x = 2/3$. Ketika r meningkat melewati 3, titik tetap kehilangan kestabilan dan dua titik berbeda muncul sebagai orbit berperiode dua:

$$x_{\pm} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Untuk $r > 3$, keduanya memenuhi $f_r^2(x) = x$ dan berbeda dari titik tetap; tepat pada $r = 3$, rumus itu merosot menjadi nilai tunggal $2/3$. Pembedaan ini penting karena solusi $f_r^2(x) = x$ juga mencakup titik berperiode satu. Periode prima suatu titik adalah bilangan bulat positif terkecil p yang memenuhi $f_r^p(x) = x$.

Pengali orbit dua-siklus adalah

$$\mu_2 = f'_r(x_-)f'_r(x_+) = -r^2 + 2r + 4.$$

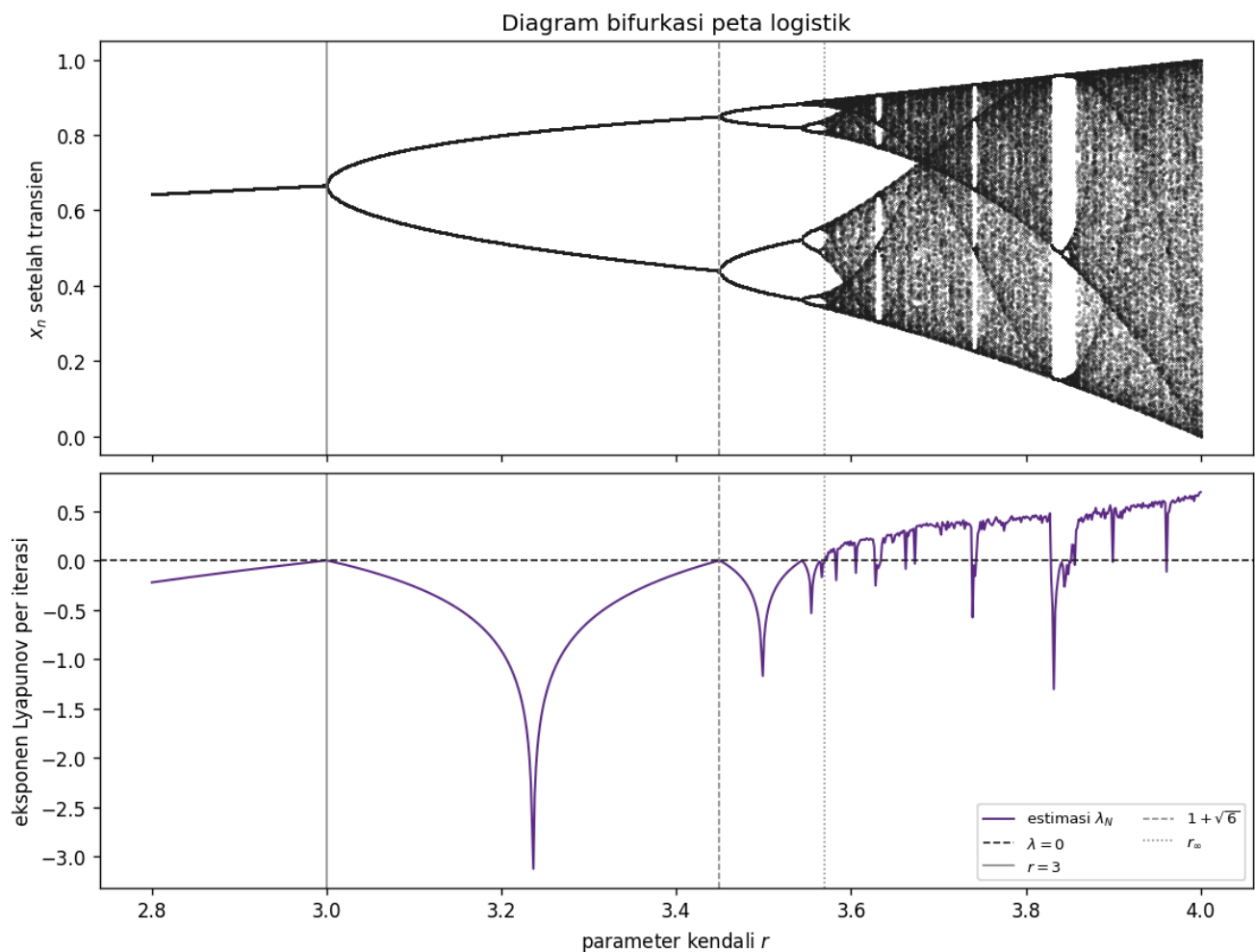
Karena itu orbit berperiode dua stabil untuk $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. Pada batas atas, pengalinya mencapai -1 dan orbit ini mengalami penggandaan periode berikutnya. Pengulangan mekanisme tersebut membentuk kaskade penggandaan periode.

Diagram bifurkasi: banyak eksperimen dalam satu bidang

Notebook memakai 801 nilai r yang berjarak sama pada $[2.8, 4]$. Untuk setiap nilai, orbit dimulai dari $x_0 = 0.123456789$, 1.500 iterasi pertama dibuang, dan 200 iterasi berikutnya digambar. Prosedur yang sama untuk setiap kolom mencegah pemilihan transien berdasarkan tampilan yang diinginkan.

Satu cabang menarik terbelah menjadi dua di sekitar $r = 3$, lalu menjadi empat dan seterusnya. Kaskade utama menumpuk di sekitar $r_\infty \approx 3.569945672$. Di atas nilai itu terdapat pita kacau sekaligus jendela periodik; pernyataan “semua $r > r_\infty$ kacau” adalah salah.

Diagram bifurkasi dan estimasi eksponen Lyapunov yang dibuat notebook pendamping.



Deskripsi panjang gambar

Panel atas memperlihatkan satu cabang untuk parameter rendah, pemisahan menjadi dua cabang di sekitar $r = 3$, pemisahan berulang, lalu pita titik yang rapat dan diselingi jendela periodik. Panel bawah memperlihatkan estimasi eksponen Lyapunov: nilainya negatif pada banyak daerah periodik, melintasi nol di dekat perubahan kestabilan, dan positif pada banyak pita kacau. Garis vertikal dengan pola berbeda menandai $r = 3$, $1 + \sqrt{6}$, dan r_∞ ; pembacaan tidak bergantung pada warna saja.

Eksponen Lyapunov mengukur pertumbuhan gangguan kecil

Untuk orbit peta satu dimensi, estimasi sepanjang N iterasi setelah transien adalah

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log |f'_r(x_n)|.$$

Nilai negatif berarti gangguan kecil menyusut secara rata-rata sepanjang orbit yang dihitung. Nilai positif berarti gangguan kecil bertumbuh secara eksponensial secara lokal dan merupakan bukti kuat kepekaan terhadap kondisi awal. Nilai dekat nol memerlukan rentang iterasi yang lebih panjang dan pemeriksaan khusus terhadap bifurkasi atau perilaku netral.

Untuk orbit stabil berperiode p , eksponen asimtotiknya dapat dihitung dari pengali satu putaran:

$$\lambda = \frac{1}{p} \log \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'_r(x_j) \right|.$$

Pada $r = 3.2$, titik dua-siklusnya sekitar 0.51304451 dan 0.79945549, pengali satu putarannya 0.16, dan $\lambda = \frac{1}{2} \log(0.16) \approx -0.91629073$. Orbit berganti nilai pada setiap iterasi, tetapi gangguan terhadap dua-siklus tetap menyusut.

Pada $r = 4$, untuk hampir semua kondisi awal di $(0, 1)$, eksponen Lyapunov asimtotiknya adalah $\log 2 \approx 0.69314718$. Notebook memperoleh estimasi berhingga sekitar 0.69318. Kondisi awal khusus dan aritmetika presisi terbatas dapat menghasilkan orbit pengecualian, sehingga kode tidak menyamakan satu hasil berhingga dengan teorema universal.

Jika tepat terjadi $f'_r(x_n) = 0$, suku logaritmanya adalah $-\infty$. Menggantinya diam-diam dengan bilangan kecil hanya agar grafik terlihat rapi akan mengubah definisi. Notebook mempertahankan nilai tersebut dan memisahkan aturan tampilan dari perhitungan.

Sistem Lorenz: aliran kontinu dengan dua lobus

Untuk melihat gagasan yang sama pada waktu kontinu, pertimbangkan sistem Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(\rho - z) - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z.$$

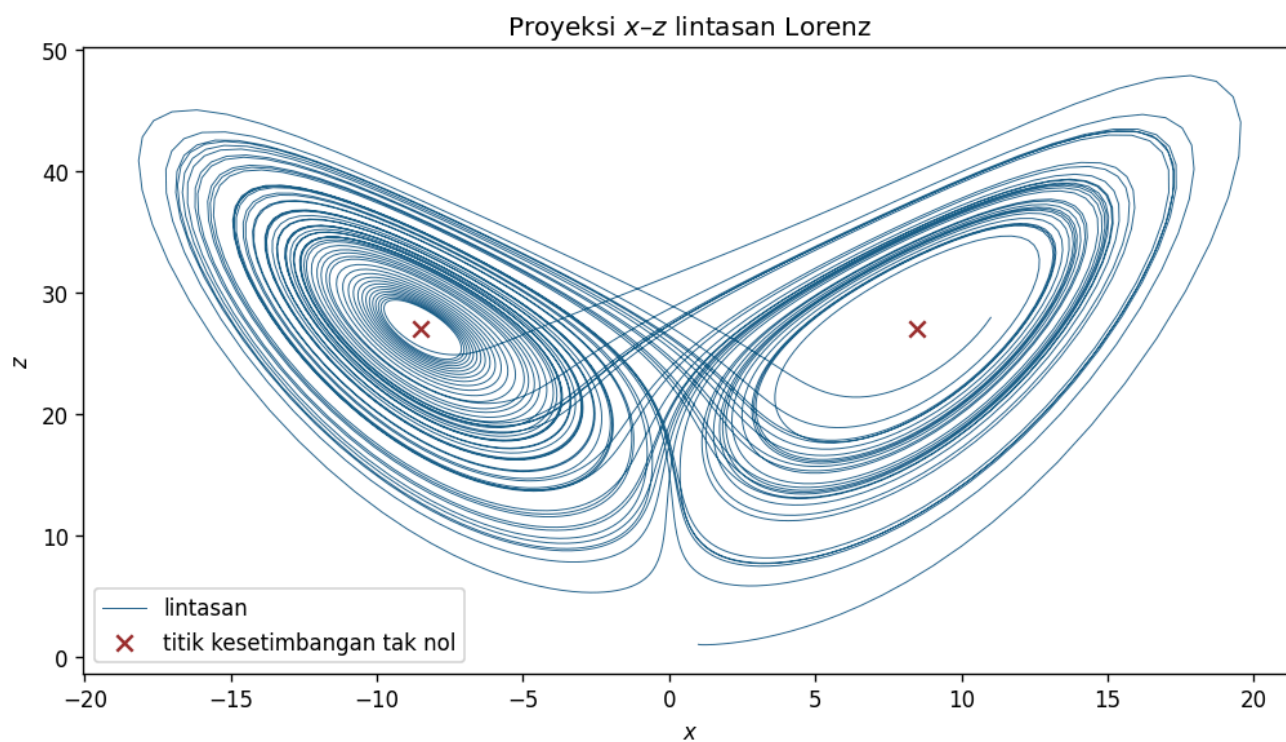
Notebook menggunakan $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, dan kondisi awal $(1, 1, 1)$. Parameter ini menghasilkan lintasan yang berputar tidak teratur di sekitar dua daerah ruang fase. Lintasan numerik tidak pernah dianggap sebagai daftar keadaan eksak untuk waktu tak terbatas.

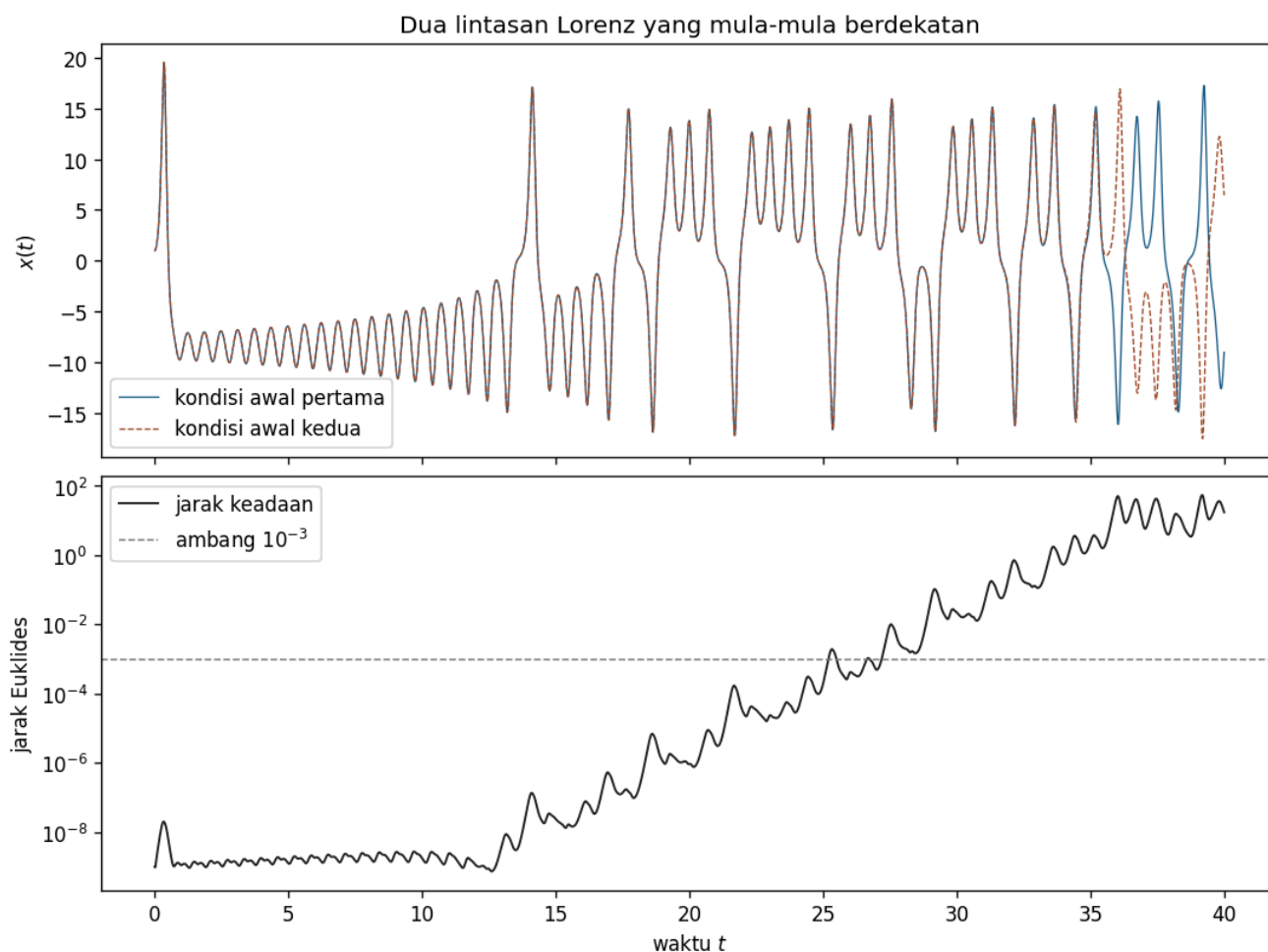
Dengan menyetel ketiga turunan sama dengan nol, diperoleh titik kesetimbangan

$$(0, 0, 0), \quad (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).$$

Untuk parameter kanonik, dua titik tak nol adalah $(\pm\sqrt{72}, \pm\sqrt{72}, 27)$, dengan $\sqrt{72} \approx 8.48528137$. Substitusi kembali ke ruas kanan memberi residu numerik di bawah 10^{-12} .

Proyeksi lintasan Lorenz dan pemisahan dua kondisi awal berdekatan.





Deskripsi panjang gambar

Proyeksi x - z membentuk dua lobus di sekitar titik kesetimbangan tak nol. Lintasan mengitari satu lobus beberapa kali lalu berpindah ke lobus lain tanpa pola periode pendek yang tetap. Panel waktu memakai garis utuh dan garis putus-putus untuk dua kondisi awal, sedangkan panel jarak memakai skala logaritmik: jarak mula-mula sangat kecil, kemudian bertumbuh beberapa orde besaran dan akhirnya tidak lagi berada dalam rezim gangguan linear.

Pisahkan kepekaan dinamik dari galat numerik

Integrasi utama memakai metode DOP853, toleransi relatif 10^{-10} , toleransi absolut 10^{-12} , dan langkah maksimum 0.02. Integrasi pembanding pada $0 \leq t \leq 10$ memperketat toleransi menjadi 10^{-12} dan 10^{-14} serta langkah maksimum menjadi 0.01. Selisih norma maksimum kedua solusi pada rentang pendek harus lebih kecil dari 10^{-6} .

Setelah pemeriksaan itu lulus, notebook mengintegrasikan $(1, 1, 1)$ dan $(1 + 10^{-9}, 1, 1)$ sebagai satu sistem enam dimensi. Cara ini memberi keduanya riwayat langkah adaptif yang sama. Jarak awal sekitar 10^{-9} , masih di bawah 10^{-4} pada $t = 20$, tetapi harus melebihi 10^{-1} pada $t = 35$.

Pertumbuhan jarak menunjukkan hilangnya kemampuan prediksi titik demi titik, bukan hilangnya determinisme. Setelah jarak menjadi sebanding dengan ukuran atraktor, kurva tidak lagi mengukur pertumbuhan gangguan linear. Karena itu, kemiringan seluruh kurva tidak boleh diperlakukan sebagai satu eksponen Lyapunov Lorenz tanpa algoritma renormalisasi yang sesuai.

Penampang Poincaré mengubah aliran menjadi urutan

Penampang Poincaré memilih perpotongan lintasan dengan suatu permukaan. Modul ini memakai

$$S = \{(x, y, z): z = 27, \dot{z} > 0\}.$$

Syarat $\dot{z} > 0$ memilih hanya perpotongan dari bawah ke atas. Tanpa arah, satu putaran dapat dihitung dua kali dan urutanbaliknya berubah. Fungsi kejadian pada pemecah ODE menginterpolasi waktu perpotongan; memilih titik sampel yang sekadar paling dekat dengan $z = 27$ akan menambahkan galat bergantung grid.

Perpotongan dengan $t < 30$ dibuang sebagai transien berdasarkan kontrak yang ditetapkan sebelum hasil diringkas. Gerbang numerik memeriksa waktu yang meningkat ketat, $|z - 27| < 10^{-8}$, $\dot{z} > 0$, dan keberadaan titik pada kedua lobus.

Peta Poincaré penuh dan proyeksi peta balik

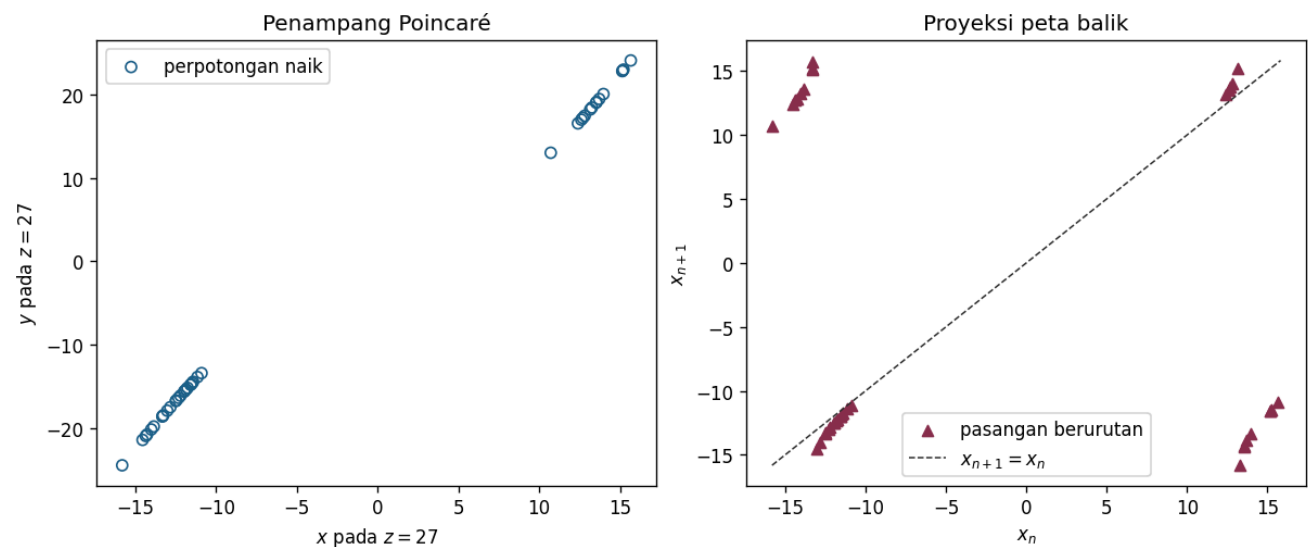
Jika perpotongan ke- n dinyatakan sebagai (x_n, y_n) pada bidang $z = 27$, peta Poincaré penuh adalah

$$P(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Notebook juga menggambar pasangan $u_n = x_n$ dan $u_{n+1} = x_{n+1}$. Gambar ini adalah proyeksi peta balik. Ia berguna untuk melihat cabang, pergantian lobus, dan struktur berulang, tetapi proyeksi dari (x, y) ke x dapat membuang informasi.

Karena kehilangan informasi itu, dua titik dengan x_n hampir sama dapat mempunyai y_n berbeda dan kembali ke x_{n+1} berbeda. Sebaran yang tampak mempunyai lebih dari satu nilai keluaran bukan kesalahan plot; ia dapat menunjukkan bahwa satu koordinat belum cukup untuk merepresentasikan peta penuh.

Penampang Poincaré berarah dan proyeksi peta balik yang dibuat notebook.



Deskripsi panjang gambar

Panel kiri menampilkan titik perpotongan pada bidang $z = 27$ dengan simbol lingkaran; terdapat gugus pada $x < 0$ dan $x > 0$, sehingga kedua lobus terwakili. Panel kanan menampilkan segitiga pada koordinat (x_n, x_{n+1}) dan garis putus-putus $x_{n+1} = x_n$. Titik di luar garis diagonal menunjukkan perubahan koordinat dari satu perpotongan ke perpotongan berikutnya; beberapa cabang mencerminkan pergantian dan pengulangan lobus.

Ringkasan dan batas klaim

Peta logistik menunjukkan bagaimana titik tetap dapat kehilangan kestabilan melalui penggandaan periode dan bagaimana eksponen Lyapunov merangkum pertumbuhan gangguan kecil. Sistem Lorenz memperluas gagasan itu ke aliran kontinu. Penampang Poincaré mengubah aliran menjadi urutan perpotongan, sedangkan peta balik mengungkap hubungan antara perpotongan berurutan.

Semua hasil komputasi bergantung pada kontrak yang dinyatakan: kondisi awal, parameter, jumlah transien, metode integrasi, toleransi, langkah maksimum, arah penampang, dan rentang waktu. Notebook memeriksa kontrak tersebut serta mengulang perhitungan dalam kernel yang sama. Gerbang QA terpisah tetap harus menjalankan notebook dari kernel baru.

Sidik numerik lingkungan kanonik dan gerbang ilmiah portabel

Besaran	Sidik kanonik	Gerbang yang ditafsirkan
$\lambda, r = 3.2$	-0.91629073	Cocok dengan rumus dua-siklus dalam 10^{-10} .
$\lambda_N, r = 4$	0.69317558	Berjarak kurang dari 5×10^{-3} dari $\log 2$.

Besaran	Sidik kanonik	Gerbang yang ditafsirkan
Selisih integrator, $t \leq 10$	1.12×10^{-8} atau lebih kecil	Kurang dari 10^{-6} .
Perpotongan setelah transien	40 pada lingkungan kanonik	Sedikitnya 30, semuanya berarah benar dan berada pada bidang dalam toleransi.

Latihan Penguasaan

Soal 1

Buktikan bahwa $[0, 1]$ merupakan interval invarian peta logistik untuk $0 \leq r \leq 4$. Jelaskan secara spesifik bagian bukti yang gagal jika $r > 4$.

Soal 2

Turunkan kedua titik tetap peta logistik dan tentukan interval kestabilan lokalnya untuk $r \geq 0$. Sebutkan apa yang khusus pada $r = 1$ dan $r = 3$.

Soal 3

Untuk $r = 3.2$, hitung kedua titik orbit berperiode dua, pengali satu putaran, dan eksponen Lyapunov per iterasi. Jelaskan mengapa orbit dapat berganti nilai tetapi tetap stabil.

Soal 4

Bandingkan estimasi eksponen Lyapunov notebook untuk $r = 3.2$ dan $r = 4$. Apa yang didukung oleh tanda masing-masing nilai, dan mengapa satu estimasi positif berhingga belum merupakan bukti universal?

Soal 5

Turunkan ketiga titik kesetimbangan sistem Lorenz. Substitusikan $\sigma = 10$, $\rho = 28$, dan $\beta = 8/3$, lalu periksa ruas kanan secara numerik.

Soal 6

Jelaskan mengapa perbandingan integrator pada rentang pendek perlu dilakukan sebelum pemisahan dua kondisi awal ditafsirkan sebagai kepekaan dinamik. Berikan dua pemeriksaan yang dipakai notebook.

Soal 7

Jalankan notebook dari kernel bersih. Catat dua eksponen Lyapunov, galat pemurnian integrator, waktu pertama jarak lintasan melebihi 10^{-3} , jumlah perpotongan Poincaré setelah transien, galat bidang maksimum, dan jumlah pasangan balik. Jelaskan mengapa diagram x_{n+1} terhadap x_n hanya proyeksi peta Poincaré penuh.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Cari nilai minimum dan maksimum $x(1-x)$ pada interval $[0, 1]$, lalu kalikan dengan r .

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $0 \leq r \leq 4$ dan $x \in [0, 1]$, berlaku $0 \leq f_r(x) \leq \frac{r}{4} \leq 1$; jika $r > 4$, batas atas $\frac{r}{4} \leq 1$ tidak lagi tersedia.

Bukti yang diperlukan

1. $x(1-x)$ tidak negatif pada $[0, 1]$.
2. Nilai maksimum $x(1-x)$ adalah $\frac{1}{4}$ pada $x = \frac{1}{2}$.
3. Kesimpulan berlaku untuk setiap iterasi melalui induksi.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

$[0, 1]$ adalah interval invarian tepat di bawah kontrak parameter yang dinyatakan.

Langkah penyelesaian

1. Faktorkan $x(1-x)$ dan gunakan $0 \leq x \leq 1$ untuk memperoleh ketaknegatifan.
2. Turunan $1-2x$ lenyap pada $x = \frac{1}{2}$, tempat maksimum bernilai $\frac{1}{4}$.
3. Maka $0 \leq rx(1-x) \leq \frac{r}{4} \leq 1$ ketika $0 \leq r \leq 4$.
4. Jika satu keadaan berada di $[0, 1]$, keadaan berikutnya juga; induksi mempertahankan seluruh orbit.
5. Untuk $r > 4$, $x = \frac{1}{2}$ dipetakan ke $\frac{r}{4} > 1$, sehingga interval tidak invarian.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Faktorkan persamaan titik tetap, lalu terapkan syarat nilai mutlak pengali kurang dari satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Untuk $r = 0$ hanya $x^* = 0$ dan rumus $1 - \frac{1}{r}$ tidak terdefinisi. Titik $x^* = 0$ stabil pada $0 \leq r < 1$. Pada $r = 1$ cabang kedua berimpit dengan $x^* = 0$ dan pengali $+1$ membuat titik itu nonhiperbolik. Untuk $r > 0$, titik $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ stabil pada $1 < r < 3$. Pada $r = 3$ pengalinya -1 , titik tetap nonhiperbolik, dan rumus calon dua-siklus berimpit di $x^* = \frac{2}{3}$; dua titik berbeda berperiode prima dua baru ada untuk $r > 3$.

Bukti yang diperlukan

1. Kasus $r = 0$ dipisahkan sebelum pembagian dengan r ; hanya $x^* = 0$ yang berlaku.
2. Untuk $r > 0$, kedua solusi persamaan $x^* = f_r(x^*)$ diperoleh.
3. Pengali masing-masing adalah r dan $2 - r$.
4. Syarat $|\mu| < 1$ diterapkan tanpa memasukkan titik batas.
5. Pada $r = 3$, akar calon dua-siklus berimpit di $\frac{2}{3}$ dan belum membentuk orbit prima dua.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Kasus $r = 0$ harus dipisahkan dari rumus yang membagi dengan r ; pada $r = 3$ cabang calon dua-siklus baru berimpit dan orbit prima dua yang berbeda muncul hanya untuk $r > 3$.

Langkah penyelesaian

1. Tulis $x^*[r(1 - x^*) - 1] = 0$; untuk $r = 0$ persamaan hanya memberi $x^* = 0$, sedangkan untuk $r > 0$ solusi kedua adalah $x^* = 1 - \frac{1}{r}$.
2. Evaluasi $f'_r(x) = r(1 - 2x)$ di kedua titik.
3. Untuk titik nol, $|r| < 1$ memberi $0 \leq r < 1$ dalam domain fisik.
4. Untuk titik tak nol, $|2 - r| < 1$ memberi $1 < r < 3$.
5. Pada $r = 1$ atau $r = 3$, pengali masing-masing $+1$ atau -1 sehingga uji hiperbolik tidak memutuskan kestabilan melalui pertidaksamaan ketat.
6. Substitusi $r = 3$ ke rumus calon dua-siklus memberi dua akar sama, $\frac{2}{3}$; dua titik berbeda berperiode prima dua memerlukan $r > 3$.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Gunakan rumus dua-siklus, lalu kalikan turunan pada kedua titik sebelum mengambil setengah logaritma.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$x_- = 0.51304451$, $x_+ = 0.79945549$, $\mu_2 = 0.16$, dan $\lambda = -0.91629073$ per iterasi.

Rumus

$$\mu_2 = f'(x_-)f'(x_+); \quad \lambda = \frac{1}{2}\log|\mu_2|$$

Toleransi

Lyapunov absolute

1e-08

Multiplier absolute

1e-12

State absolute

1e-08

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Orbit berganti titik pada setiap iterasi, tetapi $|\mu_2| < 1$ membuat gangguan menyusut setelah satu putaran dua langkah.

Langkah penyelesaian

1. Substitusikan $r = 3.2$ ke rumus $x_{\pm}$.
2. Periksa $f(x_-) = x_+$ dan $f(x_+) = x_-$.
3. Gunakan $\mu_2 = -r^2 + 2r + 4$ untuk memperoleh 0.16.
4. Hitung $\lambda = \frac{1}{2}\log(0.16) = -0.9162907319$.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Pisahkan arti tanda estimasi dari kekuatan logis bukti yang hanya memakai satu orbit dan N berhingga.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Nilai negatif pada $r = 3.2$ menunjukkan kontraksi menuju dua-siklus; nilai positif sekitar $\log 2$ pada $r = 4$ menunjukkan pemisahan lokal rata-rata, tetapi hasil berhingga tidak mencakup semua kondisi awal atau membuktikan seluruh struktur asimtotik.

Bukti yang diperlukan

1. Nilai $r = 3.2$ sekitar -0.91629073 .
2. Nilai $r = 4$ sekitar 0.69317558 dan dekat $\log 2$.
3. Transien, panjang orbit, kondisi awal khusus, dan presisi terbatas disebut sebagai batas.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Eksponen Lyapunov adalah diagnostik kuat ketika kontraknya jelas, bukan label otomatis dari satu grafik.

Langkah penyelesaian

1. Hubungkan $\lambda < 0$ dengan kontraksi rata-rata pada orbit periodik.
2. Hubungkan $\lambda > 0$ dengan pertumbuhan gangguan kecil secara lokal.

3. Bandingkan estimasi pada $r = 4$ dengan $\log 2$ menggunakan toleransi, bukan kesamaan digit mutlak.
4. Nyatakan bahwa satu orbit berhingga tidak mengecualikan kondisi awal istimewa atau jendela periodik pada parameter lain.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

Dari $\dot{x} = 0$ peroleh $y = x$; kemudian pisahkan kasus $x = 0$ dan $x \neq 0$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Titiknya $(0, 0, 0)$ dan $(\pm\sqrt{72}, \pm\sqrt{72}, 27)$, dengan $\sqrt{72} = 8.48528137$; norma residu numerik kurang dari 10^{-12} .

Rumus

$$(0, 0, 0), (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Toleransi

Residual norm max

1e-12

State absolute

1e-08

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Ketiga titik membuat ruas kanan nol dalam toleransi aritmetika pecahan mengambang.

Langkah penyelesaian

1. Dari $\sigma(y-x) = 0$ dan $\sigma \neq 0$, tetapkan $y = x$.
2. Persamaan kedua menjadi $x(\rho - z - 1) = 0$.
3. Kasus $x = 0$ memberi $y = z = 0$.
4. Kasus $x \neq 0$ memberi $z = \rho - 1$ dan $x^2 = \beta(\rho - 1)$.
5. Substitusi parameter memberi $z = 27$ dan $x = y = \pm\sqrt{72}$.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Bandungkan solusi untuk keadaan awal yang sama terlebih dahulu; baru setelah konvergensi rentang pendek

lulus, bandingkan keadaan awal yang berbeda.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Notebook menuntut selisih solusi utama dan solusi dipermurni kurang dari 10^{-6} pada $t \leq 10$, lalu menunjukkan pasangan berjarak awal 10^{-9} masih dekat pada $t = 20$ tetapi berjarak lebih dari 0.1 pada $t = 35$.

Bukti yang diperlukan

1. Metode, rtol, atol, dan max_step kedua integrasi disebutkan.
2. Dua kondisi awal diintegrasikan sebagai satu sistem enam dimensi dengan riwayat langkah bersama.
3. Pertumbuhan setelah konvergensi rentang pendek tidak disamakan dengan galat solver.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Urutan pemeriksaan memungkinkan kepekaan dinamik dibedakan dari kegagalan konvergensi numerik.

Langkah penyelesaian

1. Integrasikan kondisi awal yang sama dengan konfigurasi utama dan konfigurasi lebih ketat.
2. Periksa norma selisih maksimum pada rentang pendek terhadap ambang 10^{-6} .
3. Integrasikan dua kondisi awal yang berbeda 10^{-9} dalam satu sistem gabungan.
4. Periksa bahwa jarak pada $t = 20$ masih di bawah 10^{-4} dan jarak pada $t = 35$ di atas 10^{-1} .
5. Batasi kesimpulan setelah jarak mencapai skala atraktor karena pendekatan linear telah jenuh.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Bedakan sidik lingkungan kanonik—misalnya jumlah tepat—dari gerbang struktural seperti arah, galat bidang, dan keberadaan kedua lobus.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Lingkungan kanonik memberi $\lambda = -0.91629073$ dan $\lambda = 0.69317558$, galat pemurnian sekitar 1.11×10^{-8} , ambang jarak pada $t = 25.2$, 40 perpotongan setelah transien, galat bidang di bawah 10^{-8} , dan 39 pasangan balik.

Pemeriksaan notebook

Semua sel berjalan dari kernel baru, menghasilkan empat keluaran PNG, memenuhi gerbang portabel, dan menyelesaikan verifikasi ulang deterministik.

Bukti yang diperlukan

1. Semua perpotongan mempunyai waktu meningkat, $z \approx 27$, dan $\dot{z} > 0$.
2. Nilai x perpotongan mencakup kedua tanda dan kedua lobus.
3. Jumlah pasangan balik tepat satu kurang dari jumlah perpotongan.
4. Plot x_{n+1} terhadap x_n disebut proyeksi karena koordinat y dibuang.

Toleransi

Lyapunov absolute

1e-08

Section absolute

1e-08

Solver norm max

1e-06

Time absolute

0.1

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Alur yang lulus mengikat gambar pada persamaan, konfigurasi solver, peristiwa berarah, dan pemeriksaan numerik yang dinyatakan.

Langkah penyelesaian

1. Mulai kernel baru dan jalankan semua sel secara berurutan.
2. Cocokkan dua eksponen Lyapunov dan pastikan pemeriksaan analitik pada $r = 3.2$ lulus.
3. Catat galat pemurnian dan waktu lintas ambang pasangan.
4. Periksa orientasi, residu bidang, kedua lobus, dan sensus perpotongan.
5. Bentuk pasangan (x_n, x_{n+1}) dan bandingkan jumlahnya dengan sensus perpotongan.
6. Jelaskan bahwa peta penuh bekerja pada pasangan (x, y) , sehingga proyeksi x dapat kehilangan informasi.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Kalibrasi, Identifiabilitas, Validasi, dan Ketidakpastian Model

0005-BRIDGE-C4

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda akan mampu:

- mengkalibrasi dua model kandidat terhadap data yang telah dibagi sebelum estimasi;
- membedakan identifiabilitas struktural dari identifiabilitas praktis;
- menggunakan sensitivitas terskala dan bilangan kondisi untuk menilai rancangan pengamatan;
- membaca residu, metrik pada data uji yang disisihkan (holdout), dan AICc tanpa menganggapnya sebagai bukti mutlak;
- membedakan ketidakpastian parameter, respons laten, dan pengamatan mendatang; dan
- mengomunikasikan klaim yang didukung, batas validasi, dan tanda kegagalan model.

Asal-usul modul

Modul ini merupakan tambahan independen untuk edisi Bahasa Indonesia *Introduction to Mathematical Modeling*, v1.01, karya Joceline Lega. Modul ini bukan bagian dari buku sumber, memakai data sintesis yang dibuat di dalam notebook, tidak menyalin atau mengadaptasi kode sumber pihak lain, dan tidak menyatakan dukungan atau pengesahan oleh Joceline Lega maupun University of Arizona. Komputasinya memakai pustaka sumber terbuka NumPy, SciPy, dan Matplotlib yang dicatat dalam berkas pengunci lingkungan. Distribusi mengikuti CC BY-NC-SA 4.0.

Produksi dan QA tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.

Satu pertanyaan, satu batas klaim

Pertanyaan operasional modul ini adalah: “Dapatkah model pertumbuhan yang dikalibrasi dengan pengamatan hari ke-0 sampai hari ke-16 memprediksi populasi pada hari ke-18 sampai hari ke-24?” Pertanyaan tersebut menetapkan besaran yang diprediksi, jendela kalibrasi, dan jendela data uji sebelum hasil dilihat.

Contoh memakai populasi kultur sintetis dalam juta sel. Data dibuat oleh kode dari model logistik dan galat acak dengan benih tetap. Data itu berguna untuk memeriksa alur inferensi karena kebenaran pembangkitnya diketahui, tetapi bukan bukti biologis tentang organisme, laboratorium, atau proses nyata apa pun.

Klaim yang diuji sengaja sempit: perbandingan dua model kandidat pada satu rancangan data sintesis. Keberhasilan optimasi, AICc yang lebih kecil, atau cakupan data uji tidak menjadikan model benar secara universal dan tidak menggantikan validasi eksternal.

Kontrak model dan pengamatan

Misalkan $N(t)$ menyatakan populasi laten pada waktu t hari. Pengamatan mengikuti $y_i = N(t_i) + \varepsilon_i$, dengan ε_i saling bebas dan berdistribusi normal dengan rerata nol serta varians σ^2 . Nilai awal $N_0 = 5$ juta sel dianggap diketahui dari rancangan eksperimen; karena y_0 tetap mengandung galat ukur, pengamatan pada hari ke-0 tidak harus sama persis dengan N_0 .

Dua model kandidat memakai nilai awal yang sama. Model eksponensial memiliki satu parameter dinamik, sedangkan model logistik menambahkan daya dukung:

$$N_E(t; r) = N_0 e^{rt}, \quad N_L(t; r, K) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}.$$

Besaran, satuan, dan perannya dalam kontrak analisis

Lambang	Makna	Satuan	Status
t	waktu sejak awal pengamatan	hari	ditentukan oleh rancangan
$N(t)$	populasi laten	juta sel	diprediksi model
N_0	populasi awal	juta sel	diketahui, bernilai 5
r	laju pertumbuhan intrinsik	hari ⁻¹	diestimasi
K	daya dukung dalam model logistik	juta sel	diestimasi
σ	simpangan baku galat pengamatan	juta sel	diestimasi dari residu untuk bootstrap

Identifiabilitas diperiksa sebelum optimasi

Bayangkan mekanisme awal ditulis sebagai $dN/dt = \alpha\beta N(1 - N/K)$, dengan α frekuensi pertemuan dan β keberhasilan pertumbuhan per pertemuan. Jika hanya $N(t)$ yang diamati, data hanya melihat hasil kali $r = \alpha\beta$. Untuk setiap $c > 0$, pasangan baru $(c\alpha, \beta/c)$ menghasilkan lintasan yang sama. Karena data ideal tanpa galat pun tidak dapat memilih satu pasangan, α dan β tidak teridentifikasi secara struktural.

Setelah reparameterisasi menjadi $r = \alpha\beta$, parameter r dan K dapat teridentifikasi secara struktural pada lintasan ideal yang berubah terhadap waktu. Memang, $(1/N)dN/dt = r - (r/K)N$: intersep menentukan r , sedangkan kemiringan menentukan $-r/K$. Kesimpulan ini bergantung pada pengamatan skala populasi, variasi nilai N , dan ketepatan bentuk persamaan.

Identifiabilitas struktural tidak menjamin estimasi yang tajam dari data terbatas dan bising. Ketika $N/K \ll 1$, faktor $1 - N/K$ mendekati satu sehingga model logistik hampir tidak dapat dibedakan dari model eksponensial. Dalam keadaan itu, banyak nilai K yang besar dapat memberi lintasan awal yang hampir sama: masalahnya praktis, bukan lagi struktural.

Empat pertanyaan identifiabilitas dalam contoh kerja

Tahap	Bukti	Kesimpulan yang sah
Parameter α, β	Transformasi $(c\alpha, \beta/c)$ tidak mengubah keluaran.	Tidak teridentifikasi secara struktural dari $N(t)$ saja.
Parameter r, K	Intersep dan kemiringan laju per kapita berbeda.	Teridentifikasi secara struktural dengan lintasan ideal yang informatif.
Hari 0–10	Estimasi K menempel pada batas atas optimasi.	K lemah secara praktis; angka batas bukan estimasi ilmiah.
Hari 0–16	Sensitivitas parameter lebih terpisah dan solusi jauh dari batas.	Rancangan lebih informatif, tetapi tetap memerlukan diagnostik dan ketidakpastian.

Rancangan data dibekukan sebelum estimasi

Notebook membuat tiga belas pengamatan pada hari 0, 2, ..., 24 dengan parameter pembangkit $r = 0.28 \text{ hari}^{-1}$, $K = 180$ juta sel, dan simpangan baku galat 2.5 juta sel. Benih data adalah 20260823. Nilai dibulatkan menjadi enam angka di belakang koma sebelum diserialisasi dan sebelum dianalisis, sehingga hash mengikat byte data yang benar-benar masuk ke estimasi.

Serialisasi memakai kepala kolom `time_day`, `population_million_cells`, satu angka desimal untuk waktu, enam angka desimal untuk populasi, pengodean UTF-8, akhir baris LF, dan satu baris akhir. Panjangnya 228 byte dengan SHA-256 932d0d27c2917936b0aa51d283d7b2fe2a5eba95989a6c785fa32d3d18dd2811.

Sembilan titik hingga hari ke-16 menjadi data kalibrasi. Empat titik pada hari ke-18 sampai ke-24 disisihkan sebagai data uji temporal. Enam titik hingga hari ke-10 hanya dipakai untuk mendemonstrasikan akibat berhenti mengamati terlalu dini; subset itu tidak menggantikan pembagian utama.

Data sintetis kanonik dan pembagian yang ditetapkan sebelumnya

Hari	Populasi (juta sel)	Peran
0	3.559354	kalibrasi; juga subset awal
2	9.636269	kalibrasi; juga subset awal
4	16.481113	kalibrasi; juga subset awal
6	21.075010	kalibrasi; juga subset awal
8	34.263099	kalibrasi; juga subset awal
10	59.153537	kalibrasi; juga subset awal
12	82.629414	kalibrasi
14	108.782060	kalibrasi
16	126.347646	kalibrasi
18	146.532714	data uji
20	158.010601	data uji
22	163.840994	data uji
24	172.006445	data uji

Kalibrasi dan perbandingan dua kandidat

Untuk setiap kandidat m , parameter dipilih dengan meminimalkan jumlah kuadrat residu pada data kalibrasi saja:

$$RSS_m(\theta_m) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{kal}}} [y_i - N_m(t_i; \theta_m)]^2.$$

Pencarian dibatasi oleh $0.01 \leq r \leq 1$ hari⁻¹ dan $10 \leq K \leq 1000$ juta sel. Batas mencegah langkah numerik yang tidak bermakna, tetapi tidak boleh menciptakan kesan bahwa parameter diketahui. Solusi yang menempel pada batas harus dilaporkan sebagai tanda masalah.

Kriteria informasi Akaike terkoreksi (AICc) dihitung dengan $k = 2$ untuk model eksponensial dan $k = 3$ untuk model logistik karena varians residu yang diestimasi turut dihitung sebagai parameter. Konstanta Gaussian yang sama bagi kedua model dihilangkan. Nilai mutlak bergantung pada konvensi ini; selisih hanya membandingkan kandidat yang dihitung dengan data dan konvensi yang sama.

Akar rerata kuadrat galat (RMSE) merangkum residu kalibrasi dan memberi bobot lebih besar pada galat yang besar. Rerata galat absolut (MAE) merangkum besar galat data uji tanpa mempertahankan tandanya; bias dipakai secara terpisah untuk menunjukkan arah rata-rata.

Hasil kalibrasi, perbandingan relatif, dan kinerja data uji

Model	Estimasi	RMSE kalibrasi	AICc	MAE data uji	Bias data uji
Eksponensial	$r = 0.21040520$	12.30569406	51.18111756	302.08747307	-302.08747307

Model	Estimasi	RMSE kalibrasi	AICc	MAE data uji	Bias data uji
Logistik	$r = 0.28263149, K = 175.70606226$	2.25689728	25.45183771	1.50664197	1.17225281

Selisih AICc sebesar 25.72927985 dan galat data uji yang jauh lebih kecil mendukung model logistik di antara dua kandidat ini. Kesimpulan itu tidak menilai model yang tidak dimasukkan, mekanisme kausal, atau populasi di luar domain contoh.

Sensitivitas menunjukkan kapan data menjadi informatif

Dengan $D = 1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}$, sensitivitas analitik model logistik adalah

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{K(K/N_0 - 1)te^{-rt}}{D^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial K} = \frac{1 - e^{-rt}}{D^2}.$$

Notebook membentuk matriks sensitivitas terhadap parameter logaritmik, dengan kolom $r \partial N / \partial r$ dan $K \partial N / \partial K$.

Bilangan kondisi dua-norma $\kappa_2(S) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ membandingkan seberapa terpisah kedua arah sensitivitas. Nilai yang lebih besar menandakan arah yang lebih sulit dibedakan, tetapi tidak ada ambang universal yang sendirian membuktikan identifiabilitas.

Pada estimasi dari jendela kalibrasi penuh, jadwal hari 0–10 memberi $\kappa_2 = 32.66379816$, sedangkan jadwal hari 0–16 memberi $\kappa_2 = 6.93948506$. Pengamatan mendekati daerah perlambatan pertumbuhan meningkatkan sensitivitas terhadap K .

Eksperimen batas atas pada pencocokan subset awal

Batas atas K	Estimasi r	Estimasi K	Interpretasi
1000	0.25110007	1000	batas aktif
2000	0.24853917	2000	estimasi kembali mengikuti batas

Menggandakan batas atas tidak menambahkan informasi, tetapi menggandakan estimasi K subset awal. Sebaliknya, estimasi jendela penuh tetap sekitar 175.706. Perbedaan ini merupakan tanda praktis yang lebih bermakna daripada pesan “optimasi berhasil”.

Residu dan data uji menguji kegunaan yang berbeda

Residu didefinisikan sebagai $e_i = y_i - \hat{N}(t_i)$. Untuk model logistik, rerata residu kalibrasi adalah -0.37700728 juta sel dan kemiringan residu terhadap waktu adalah 0.04181566 juta sel per hari. Nilai kecil tersebut tidak menjamin ketiadaan pola lain, sehingga tabel harus dibaca bersama gambar residu.

Pada empat data uji, residu logistik adalah 1.41663001 , 1.09893040 , -0.66877831 , dan 2.84222916 juta sel. MAE merangkul besar galat tanpa tanda; bias mempertahankan tanda dan positif di sini berarti pengamatan rata-rata berada di atas prediksi.

Model eksponensial memperkirakan sekitar 779.90 juta sel pada hari ke-24, sementara pengamatan sintetisnya 172.006445 juta sel. Kegagalan ini bukan sekadar perbedaan digit: bentuk model tidak memiliki mekanisme perlambatan sehingga kesalahan meningkat tajam ketika diekstrapolasi.

Data uji hanya boleh disebut independen dari keputusan kalibrasi selama hasilnya belum dipakai untuk mengubah prosedur. Jika hasil hari 18–24 memicu revisi, data itu menjadi bagian dari pengembangan dan evaluasi akhir berikutnya memerlukan data baru.

Ketidakpastian bergantung pada asumsi

Dari residu model logistik, $\hat{\sigma} = 2.55908097$ juta sel. Pendekatan linear lokal memberi galat baku 0.00573816 hari⁻¹ untuk r , 9.07618829 juta sel untuk K , dan korelasi parameter -0.90997414 . Korelasi kuat mengingatkan bahwa perubahan r dan K dapat saling mengimbangi, walaupun solusi tidak lagi berada pada batas.

Bootstrap parametrik membuat 400 data kalibrasi semu dari model logistik terestimasi dengan benih 20260824, mengestimasi ulang parameter, lalu membuat pengamatan masa depan baru. Interval persentil berikut bersifat kondisional pada bentuk logistik, galat normal yang saling bebas dan bervarians konstan, serta rancangan waktu yang sama.

Interval persentil bootstrap 95% dan data uji

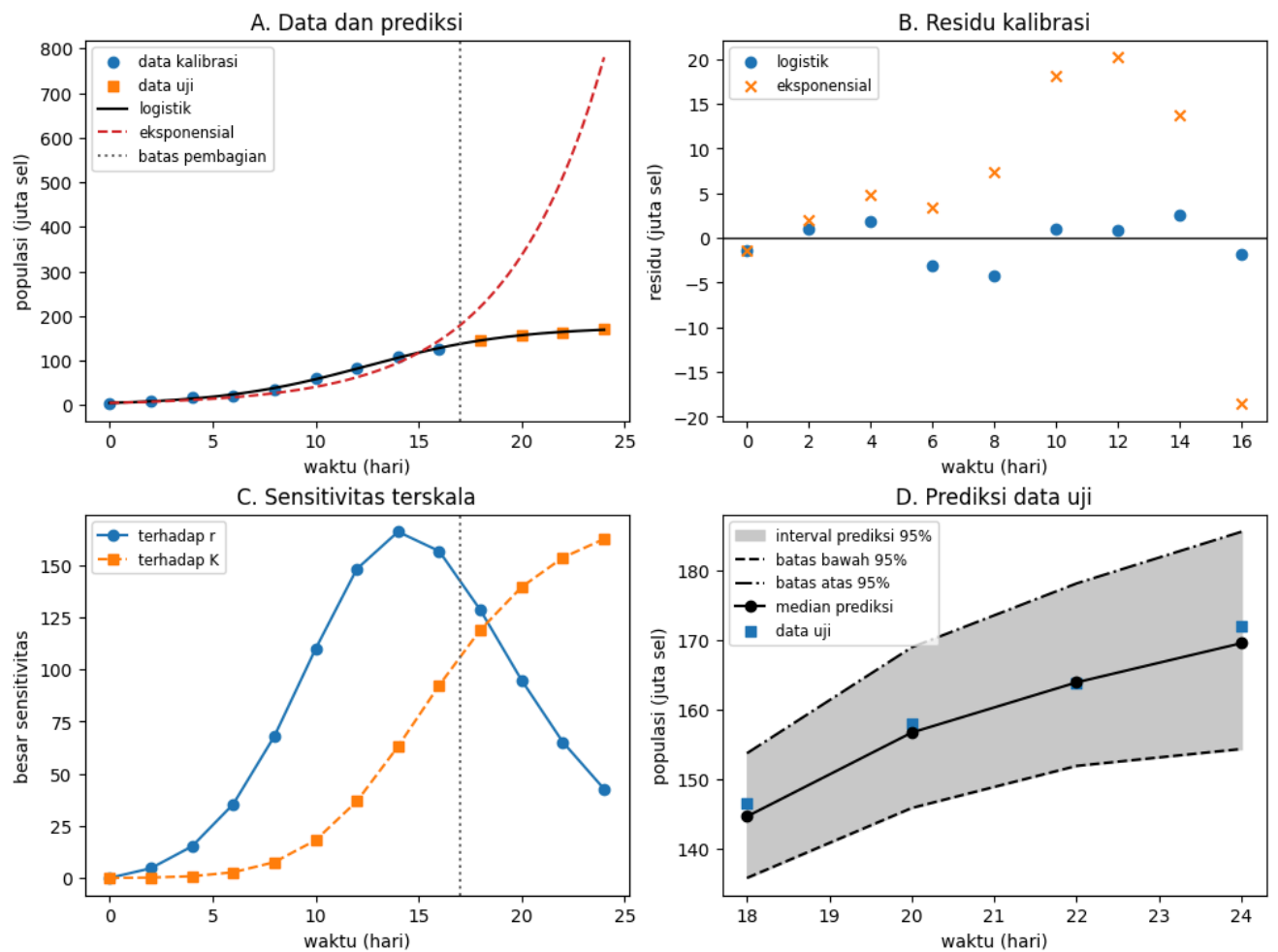
Besaran	2.5%	Median	97.5%	Pengamatan
r (hari ⁻¹)	0.27231855	0.28260638	0.29399270	—
K (juta sel)	160.82788727	175.22741952	195.85394556	—
Respons laten hari 24	156.44924030	168.76012565	185.63476304	—
Pengamatan hari 18	135.86059445	144.69607937	153.77517362	146.532714
Pengamatan hari 20	145.91930977	156.75475436	169.00751721	158.010601
Pengamatan hari 22	151.96786048	163.96764133	178.18728726	163.840994
Pengamatan hari 24	154.39781350	169.60209338	185.61306021	172.006445

Interval respons laten hari ke-24 mempropagasi ketidakpastian estimasi parameter tanpa menambahkan galat pengamatan baru. Interval pengamatan hari ke-24 juga memasukkan satu realisasi galat pengamatan baru; keduanya menjawab pertanyaan yang berbeda.

Keempat pengamatan data uji berada di dalam interval prediksi titik-demi-titik 95%. Cakupan itu konsisten dengan contoh sintetis, tetapi bukan peluang 95% bahwa seluruh kurva benar, bukan interval simultan, dan tidak memasukkan ketaksesuaian bentuk model atau perubahan proses di luar hari ke-24.

Gambar dan analisis kegagalan

Notebook menghasilkan satu gambar empat panel yang mengikat data, dua prediksi kandidat, residu, sensitivitas, dan interval prediksi pada alur komputasi yang sama.



Deskripsi panjang gambar: Panel A menampilkan sembilan lingkaran data kalibrasi hingga hari ke-16, empat persegi data uji pada hari ke-18 sampai ke-24, kurva logistik utuh yang mendarat mendekati 176 juta sel, dan kurva eksponensial putus-putus yang meningkat hingga sekitar 780 juta sel pada hari ke-24. Panel B menampilkan residu kalibrasi: residu logistik berupa lingkaran tersebar dekat garis nol, sedangkan residu eksponensial berupa tanda silang membentuk pola melengkung dan menjadi sangat negatif pada akhir jendela. Panel C menampilkan besar sensitivitas terskala terhadap r dengan lingkaran dan terhadap K dengan persegi; sensitivitas K hampir nol pada waktu awal lalu meningkat ketika pertumbuhan melambat. Panel D menampilkan pita prediksi titik-demi-titik 95% dengan batas bawah putus-putus dan batas atas titik-garis, garis median utuh dengan penanda lingkaran, dan pengamatan data uji dengan penanda persegi; semua persegi berada di dalam pita. Batas interval tetap dapat dibedakan tanpa mengandalkan arsiran atau warna.

Tanda kegagalan, maknanya, dan tindakan yang dapat dipertanggungjawabkan

Tanda	Makna yang mungkin	Tindakan
Parameter menempel pada batas.	Data tidak membatasi arah parameter atau batas terlalu sempit.	Ubah rancangan atau reparameterisasi; jangan laporkan batas sebagai estimasi.

Tanda	Makna yang mungkin	Tindakan
Bilangan kondisi besar.	Efek parameter hampir searah pada jadwal pengamatan.	Tambahkan waktu atau jenis pengukuran yang memisahkan sensitivitas.
Residu memiliki pola waktu.	Bentuk dinamika, varians, atau struktur galat mungkin salah.	Periksa asumsi dan kandidat baru; jangan hanya memperkecil toleransi optimasi.
Galat data uji jauh melebihi galat kalibrasi.	Pencocokan berlebih, pergeseran proses, atau ekstrapolasi bentuk yang salah.	Nyatakan kegagalan; setelah revisi, gunakan data evaluasi baru.
Prediksi diminta di luar domain.	Mekanisme atau distribusi galat dapat berubah.	Batasi klaim atau kumpulkan bukti pada domain baru.
Semua kandidat gagal.	Pemilihan relatif tidak menyediakan model yang memadai.	Perluas atau perbaiki himpunan model dan rancangan eksperimen.

Komunikasikan keputusan beserta batasnya

Pemisahan klaim yang didukung dan yang belum didukung

Status	Klaim	Alasan
Didukung	Model logistik lebih berguna daripada kandidat eksponensial pada contoh ini.	AICc, residu, dan galat data uji konsisten.
Didukung	Jendela hingga hari ke-16 lebih informatif tentang K daripada jendela hingga hari ke-10.	Bilangan kondisi turun dan estimasi tidak lagi mengikuti batas.
Belum didukung	Nilai α dan β dapat dipisahkan dari populasi saja.	Keduanya tidak teridentifikasi secara struktural.
Belum didukung	Hasil berlaku untuk organisme nyata atau kondisi lain.	Data sepenuhnya sintetis dan tidak ada validasi eksternal.
Belum didukung	Prediksi tetap andal jauh setelah hari ke-24.	Domain itu tidak diuji dan ketaksesuaian model dapat mendominasi.

Laporan minimum harus menyebutkan pertanyaan, satuan, model kandidat, asumsi galat, pembagian data, batas parameter, algoritma, versi perangkat lunak, estimasi, diagnostik residu, metrik data uji, interval ketidakpastian, tanda kegagalan, dan domain klaim. Angka tanpa unsur tersebut tidak cukup untuk keputusan yang dapat diaudit.

Alur lengkapnya adalah: periksa apakah parameter mungkin diidentifikasi; bekukan rancangan dan data uji; kalibrasi kandidat; periksa sensitivitas serta batas; bandingkan residu dan prediksi; kuantifikasi ketidakpastian kondisional; lalu nyatakan dengan jelas apa yang belum diketahui. Validasi bukan stempel akhir, melainkan percobaan terencana untuk menemukan cara model dapat gagal.

Latihan Penguasaan

Soal 1

Dalam model $dN/dt = \alpha\beta N(1 - N/K)$, ambil $\alpha = 0.4 \text{ hari}^{-1}$ dan $\beta = 0.7$. Berikan pasangan parameter berbeda yang menghasilkan lintasan yang sama, buktikan kesetaraannya, dan jelaskan satu cara memperoleh informasi untuk memisahkan kedua parameter.

Soal 2

Untuk $K = 180$, hitung faktor pembatas $1 - N/K$ ketika $N = 20$ dan $N = 100$. Jelaskan mengapa pengamatan yang hanya mencakup populasi kecil memberi sedikit informasi tentang K .

Soal 3

Bilangan kondisi sensitivitas adalah 32.66379816 untuk hari 0–10 dan 6.93948506 untuk hari 0–16. Tafsirkan perbandingan ini, usulkan perbaikan jadwal pengamatan, dan jelaskan mengapa angka tersebut bukan uji lulus-gagal universal.

Soal 4

Dengan $n = 9$, RSS eksponensial 1362.87095600, RSS logistik 45.84226787, dan jumlah parameter AICc masing-masing $k = 2$ dan $k = 3$, hitung AICc tanpa konstanta Gaussian serta selisihnya. Nyatakan kesimpulan yang sah dan satu kesimpulan yang tidak sah.

Soal 5

Residu data uji logistik adalah 1.41663001, 1.09893040, -0.66877831 , dan 2.84222916 juta sel, dengan definisi residu $y - \hat{y}$. Hitung MAE, bias, dan galat absolut maksimum, lalu tafsirkan tanda bias.

Soal 6

Bandingkan interval bootstrap untuk K , interval respons laten pada hari ke-24, dan interval pengamatan mendatang pada hari ke-24. Jelaskan mengapa cakupan data uji tidak membuktikan model benar dan sebutkan tiga asumsi yang tidak dicakup oleh interval.

Soal 7

Jalankan notebook pendamping dari kernel bersih dan cocokkan hash data, estimasi, diagnostik, serta interval kanonik. Kemudian ubah hanya BATAS_K_ATAS dari 1000 menjadi 2000 dan jalankan ulang. Jelaskan mengapa estimasi K subset awal berpindah ke 2000 sementara estimasi jendela utama hampir tidak berubah, dan tandai eksekusi kedua sebagai nonkanonik.

Petunjuk, pemeriksaan, dan pembahasan

Bagian tambahan ini ditulis untuk edisi Bahasa Indonesia. Bukalah seperlunya setelah Anda berusaha menyelesaikan soal secara mandiri.

Dukungan untuk Soal 1

Petunjuk

Pilih $c = 2$ dan pertahankan hasil kali $\alpha\beta$.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pasangan $(0.8, 0.35)$ memberi hasil kali 0.28 yang sama dengan $(0.4, 0.7)$, sehingga lintasan identik.

Bukti yang diperlukan

1. $0.4(0.7) = 0.8(0.35) = 0.28 \text{ hari}^{-1}$.
2. Persamaan hanya bergantung pada hasil kali, bukan kedua faktor secara terpisah.

3. Pemisahan memerlukan pengukuran salah satu faktor atau keluaran tambahan yang bergantung berbeda pada keduanya.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Lebih banyak pengamatan $N(t)$ dengan jenis yang sama tidak memecahkan ketakidentifikasi struktural.

Langkah penyelesaian

1. Ambil $c = 2$, sehingga $\alpha' = 2(0.4) = 0.8$ dan $\beta' = 0.7/2 = 0.35$.
2. Hitung kedua hasil kali dan peroleh 0.28.
3. Karena ruas kanan persamaan identik untuk setiap N , kondisi awal yang sama menghasilkan lintasan yang sama.
4. Ukur α atau β secara independen, atau tambahkan keluaran yang merespons kedua parameter secara berbeda.

Dukungan untuk Soal 2

Petunjuk

Substitusikan N/K ke faktor $1 - N/K$ dan bandingkan jaraknya dari satu.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Pada $N = 20$ faktornya 0.8889; pada $N = 100$ faktornya 0.4444.

Rumus

$$1 - \frac{20}{180} = \frac{8}{9} \quad \text{dan} \quad 1 - \frac{100}{180} = \frac{4}{9}$$

Toleransi

Absolute

0.0001

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Memperpanjang jendela menuju daerah saturasi dapat memperbaiki identifiabilitas praktis K .

Langkah penyelesaian

1. Hitung $1 - \frac{20}{180} = \frac{160}{180} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$.
2. Hitung $1 - \frac{100}{180} = \frac{80}{180} = \frac{4}{9} \approx 0.4444$.
3. Pada populasi kecil faktor mendekati satu, sehingga perubahan K hanya sedikit mengubah laju.

4. Pengamatan mendekati perlambatan pertumbuhan memberi pengaruh K yang lebih besar.

Dukungan untuk Soal 3

Petunjuk

Bilangan kondisi membandingkan pemisahan arah sensitivitas, bukan mutu model secara keseluruhan.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Penurunan dari 32.6638 menjadi 6.93949 menunjukkan jadwal 0–16 memisahkan efek r dan K dengan lebih baik.

Bukti yang diperlukan

1. Nilai lebih kecil berarti dua arah sensitivitas kurang segaris.
2. Waktu mendekati perlambatan pertumbuhan terutama menambah informasi tentang K .
3. Tidak ada ambang universal; batas parameter, residu, dan ketidakpastian tetap perlu diperiksa.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Jadwal 0–16 lebih informatif, bukan otomatis sempurna.

Langkah penyelesaian

1. Bandingkan rasio nilai singular untuk kedua jadwal.
2. Kenali bahwa jadwal awal terutama melihat pertumbuhan yang hampir eksponensial.
3. Tambahkan pengamatan sekitar pembelokan dan pendekatan ke daya dukung.
4. Periksa kembali hasil dengan profil, batas, atau bootstrap sebelum menyatakan parameter tajam.

Dukungan untuk Soal 4

Petunjuk

Gunakan $AICc = n \log(RSS/n) + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$ untuk setiap model.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

$AICc$ eksponensial 51.18111756, $AICc$ logistik 25.45183771, dan selisih 25.72927985 mendukung logistik di antara dua kandidat.

Rumus

$$AICc = n \log(RSS/n) + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

Toleransi

Aicc absolute

1e-06

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

AICc hanya memilih di antara kandidat yang diberikan dengan data dan konvensi yang sama.

Langkah penyelesaian

1. Substitusikan $n = 9$, $RSS = 1362.87095600$, dan $k = 2$ untuk eksponensial.
2. Substitusikan $n = 9$, $RSS = 45.84226787$, dan $k = 3$ untuk logistik.
3. Kurangkan nilai logistik dari nilai eksponensial.
4. Tafsirkan hasil sebagai perbandingan relatif, bukan bukti bahwa model logistik benar.

Dukungan untuk Soal 5

Petunjuk

MAE memakai nilai absolut, bias mempertahankan tanda, dan maksimum memilih besar residu terbesar.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

MAE = 1.50664197, bias = 1.17225281, dan galat absolut maksimum = 2.84222916 juta sel.

Rumus

$$MAE = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |e_i|, \quad \text{bias} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 e_i$$

Toleransi

Metric absolute

1e-08

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Metrik besar dan arah harus dilaporkan bersama, bukan dipertukarkan.

Langkah penyelesaian

1. Jumlahkan nilai absolut empat residu lalu bagi empat.
2. Jumlahkan residu bertanda lalu bagi empat.

3. Pilih nilai absolut terbesar.

4. Karena residu didefinisikan $y - \hat{y}$, bias positif berarti pengamatan rata-rata berada di atas prediksi.

Dukungan untuk Soal 6

Petunjuk

Tanyakan apakah galat pengamatan baru ditambahkan dan apakah ketaksesuaian bentuk model diwakili.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Interval K mengukur variasi estimasi parameter; interval laten mempropagasi parameter; interval pengamatan juga menambahkan galat ukur baru.

Bukti yang diperlukan

1. Interval K adalah [160.82788727, 175.22741952, 195.85394556] juta sel pada kuantil 2.5%, 50%, dan 97.5%.
2. Interval respons laten hari 24 adalah [156.44924030, 168.76012565, 185.63476304] juta sel pada kuantil yang sama.
3. Interval pengamatan hari 24 adalah [154.39781350, 169.60209338, 185.61306021] juta sel pada kuantil yang sama.
4. Cakupan satu pengamatan tidak membuktikan bentuk model benar.
5. Asumsi bersyarat mencakup model logistik, galat normal independen bervarians konstan, dan proses yang tidak berubah.

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Interval yang lebih lebar dapat mewakili lebih banyak sumber variasi, tetapi masih dapat mengabaikan ketaksesuaian model.

Langkah penyelesaian

1. Kenali bahwa interval K , yaitu [160.82788727, 195.85394556], hidup pada ruang parameter.
2. Hitung respons laten dari setiap parameter bootstrap tanpa menambahkan galat baru; pada hari 24 intervalnya [156.44924030, 185.63476304] juta sel.
3. Tambahkan satu galat pengamatan baru untuk interval prediksi pengamatan; pada hari 24 intervalnya [154.39781350, 185.61306021] juta sel.
4. Nyatakan bahwa semuanya kondisional dan titik-demi-titik, bukan interval simultan atau validasi eksternal.

Dukungan untuk Soal 7

Petunjuk

Bandingkan estimasi subset awal dengan estimasi jendela 0–16 sebelum dan sesudah hanya batas atas diubah.

Periksa jawaban

Pemeriksaan akhir

Batas 1000 memberi $K_{\text{awal}} = 1000$ dan $r_{\text{awal}} = 0.25110007$; batas 2000 memberi $K_{\text{awal}} = 2000$ dan $r_{\text{awal}} = 0.24853917$, sedangkan estimasi utama tetap sekitar $r = 0.28263149$ dan $K = 175.70606$.

Pemeriksaan notebook

Semua sel berjalan dari kernel bersih, menghasilkan tepat satu PNG, 400/400 pencocokan bootstrap berhasil, dan pemeriksaan require lulus pada kedua batas.

Bukti yang diperlukan

1. Hash data tetap 932d0d27c2917936b0aa51d283d7b2fe2a5eba95989a6c785fa32d3d18dd2811.
2. Eksekusi batas 2000 ditandai nonkanonik dan mempunyai sidik numerik khusus untuk estimasi subset awal, estimasi utama, serta kuantil K .
3. Struktur, keterhinggaan, pembagian data, batas aktif, bootstrap, dan cakupan tetap diperiksa; batas selain 1000 atau 2000 ditolak.
4. Perpindahan estimasi mengikuti batas merupakan bukti identifiabilitas praktis yang lemah pada subset awal.

Toleransi

Bootstrap quantile k absolute

0.25

K main absolute

0.001

R absolute

1e-06

Pembahasan atau rubrik

Simpulan

Keberhasilan algoritma tidak mengubah batas arbitrer menjadi informasi dari data.

Langkah penyelesaian

1. Mulai kernel baru dan jalankan seluruh notebook dengan batas kanonik 1000.
2. Cocokkan hash, parameter utama, metrik, bilangan kondisi, 400 keberhasilan bootstrap, dan interval hari 24.
3. Ubah hanya BATAS_K_ATAS menjadi 2000 lalu mulai kernel baru dan jalankan semua sel.

4. Amati bahwa K subset awal kembali berada di batas, sedangkan parameter jendela penuh berubah kurang dari toleransi.
5. Simpan hasil kedua sebagai eksperimen nonkanonik, bukan pengganti identitas rilis.

[Unduh notebook Python terbuka untuk Soal 7](#) [paket sumber]

Catatan edisi

Edisi lengkap ini mempertahankan struktur, rumus, rujukan, soal, dan identitas seluruh unit sumber. Modul jembatan, dukungan penguasaan, serta komputasi Python ditulis secara independen dan ditandai dalam sumber pendamping. Untuk identitas kriptografis dan batas asal-usul setiap komponen, gunakan manifest serta berkas checksum yang diterbitkan bersama PDF ini. Produksi dan QA tambahan: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra.